1. Considere a equação $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^2 e^x (x-4)$.
(a) Trace a linha de fase da equação.
(b) Faça um esboço das soluções no plano tx, indicando se as soluções ilimitadas explodem em tempo finito ou não e indicando as concavidades e as possíveis inflexões das soluções.

Solução.

(a) Para achar a linha de fase, precisamos achar os pontos fixos. Ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

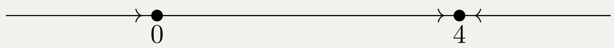
Com isso, temos

$$-x^2 \cdot e^x (x-4) = 0$$

Daí, $x = 0$ e $x = 4$ são pontos fixos.

Intervalo	$-x^2$	e^x	$x-4$	$-x^2 e^x (x-4)$	f
$x < 0$	$-$	$+$	$-$	$+$	crescente em $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	$-$	$+$	$-$	$+$	crescente em $(0, 4)$
$x > 4$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente em $(4, +\infty)$

Então a linha de fase é dada por



(b) Para achar os possíveis pontos de inflexão e concavidades, precisamos achar a segunda derivada. Ou seja, como temos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^2 e^x (x-4)$$

Queremos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-x^2 e^x (x-4)\right]$$

Temos que

$$-x^2 e^x (x-4) = (-x^3 + 4x^2) e^x$$

Pela regra do produto, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= (-x^3 + 4x^2)' \cdot e^x + (-x^3 + 4x^2) \cdot e^x \cdot x' \\
&= (-3x^2 \cdot x' + 8x \cdot x') \cdot e^x + (-x^3 + 4x^2) \cdot e^x \cdot x' \\
&= e^x \cdot x' \cdot (-x^3 + x^2 + 8x) \\
&= e^x \cdot x' \cdot x \cdot (-x^2 + x + 8)
\end{aligned}$$

Para acharmos os candidatos à ponto de inflexão, basta igualar a segunda derivada à 0. Logo, temos

$$e^x \cdot x' \cdot x \cdot (-x^2 + x + 8) = 0$$

Sabemos que $e^x > 0$ e que $x' = 0$ são nossos pontos fixos. Também percebe-se que $x = 0$ não pode ser ponto de inflexão, pois $x = 0$ é ponto fixo. Nos resta analisar as soluções de

$$-x^2 + x + 8 = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, teremos que $x = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{33}}{2}$, nossos possíveis candidatos à ponto de inflexão. Em relação à concavidade, precisamos analisar onde teremos $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} > 0$ e $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} < 0$

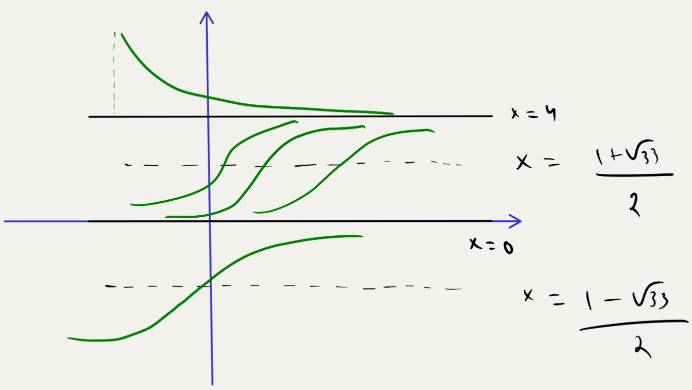
Note que

$$f(x) = e^x \cdot x' \cdot x \cdot (-x^2 + x + 8) = e^{2x} \cdot (-x^3) \cdot (x - 4) \cdot (-x^2 + x + 8)$$

Pelo quadro de sinais, teremos

Intervalo	$-x^3$	e^{2x}	$x-4$	$(-x^2+x+8)$	$f(x)$
$x < \frac{1-\sqrt{33}}{2}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{1-\sqrt{33}}{2} < x < 0$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$0 < x < \frac{1+\sqrt{33}}{2}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\frac{1+\sqrt{33}}{2} < x < 4$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$x > 4$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

Então a concavidade é pra cima, onde a f é positiva e pra baixo onde a f é negativa, de acordo com a tabela. Juntando as informações dos pontos de inflexão, concavidade e sobre ser crescente ou decrescente, temos um possível esboço do gráfico



2. Considere a seguinte equação diferencial com parâmetro real λ :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\lambda + 4x - x^2\right) x$$

(a) Faça um esboço do diagrama de bifurcações da equação em relação a $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Indique os pontos de bifurcação da equação.
(c) Determine para quais valores de λ a solução $x(t)$ com condição inicial $x(0) = 1$ converge, quando $t \to \infty$, para um valor limite positivo, i.e.

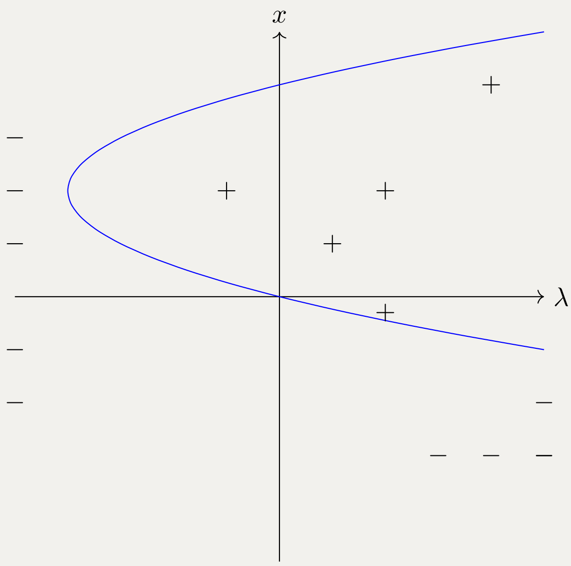
$$\lim_{t\to\infty} x(t) > 0.$$

Solução.

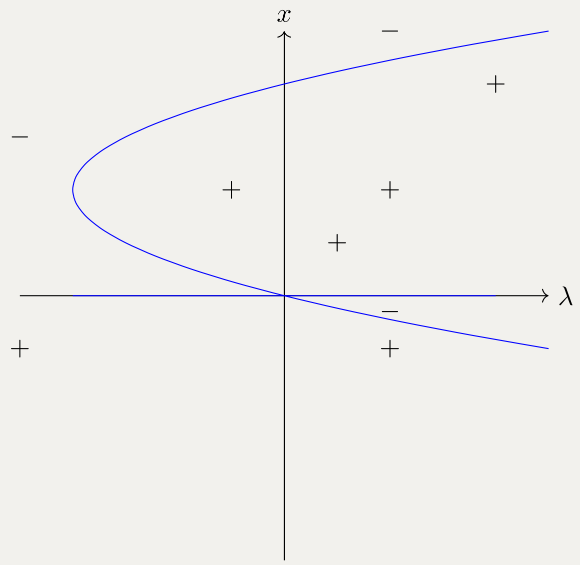
(a) Num primeiro momento, precisamos achar os pontos fixos. Seja

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x(\lambda + 4x - x^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

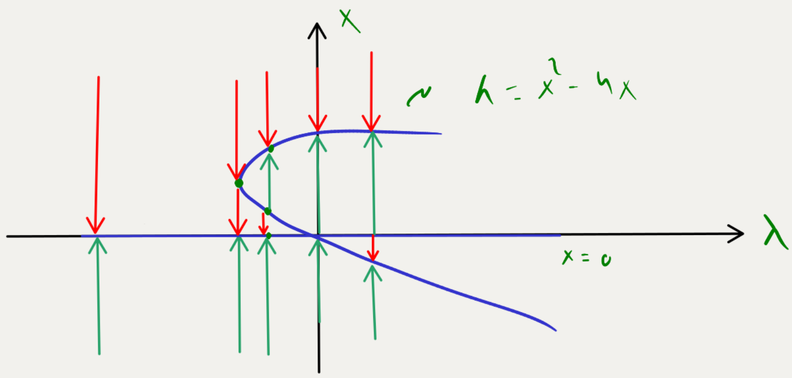
Obtemos que os pontos fixos são $x = 0$ e as soluções de $\lambda = x^2 - 4x$. Analisando os sinais para a função quadrática, teremos



Em resumo: dentro da parábola é positivo e fora da parábola é negativo. Agora precisamos analisar para $x = 0$, que é trivial. $x > 0$ tem uma nuvem positiva e $x < 0$ tem uma nuvem negativa. Fazendo a interseção e união dos pontos fixos, teremos:



Então o diagrama segue dessa forma:



(b) Do diagrama, nota-se que $\lambda_1^* = 0$ é um ponto de bifurcação. Para achar o outro ponto de bifurcação, podemos avaliar o Δ de $\lambda + 4x - x^2$. Temos

$$\Delta = 16 + 4\lambda$$

Irá haver uma mudança qualitativa no λ_2^* que torna $\Delta = 0$. Com isso, teremos $\lambda_2^* = -4$ sendo o outro ponto de bifurcação

(c) Notemos que para

$$-x^2 + 4x + \lambda = 0$$

teremos

$$x = 2 \pm \sqrt{\lambda + 4}$$

Como $x(0) = 1$ e para $0 < x < 4$, essa função é crescente, teremos que ela irá chegar na solução estacionária superior, que é $x = 2 + \sqrt{\lambda + 4}$. Ou seja, precisamos que

$$2 + \sqrt{\lambda + 4} \geqslant 0 \iff \lambda + 4 \geqslant 0 \iff \lambda \geqslant -4$$

3. Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3 + 3y^3}{3xy^2}$$

(a) Ache a solução geral da equação.
(b) Encontre a solução particular satisfazendo $y(1) = 8$, indicando o maior intervalo possível de definição dessa solução.

Solução.

(a) Num primeiro momento, notemos que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3 + 3y^3}{3xy^2}$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x^3 + 3y^3}{3xy^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}\end{aligned}$$

Com isso, tomemos $z = \frac{y}{x}$ tal que $y = zx$. Derivando ambos os lados em relação a x, teremos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x + z$$

Então,

$$\frac{1 + 3z^3}{3z^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x + z$$

Equivalente à

$$\frac{1}{3z^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x \implies \frac{\mathrm{d}x}{x} = 3z^2\mathrm{d}z$$

Integrando em ambos os lados, teremos

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int 3z^2\mathrm{d}z$$

Daí,

$$\ln|x| + c_1 = z^3 + c_2 \iff z^3 = \ln|x| + C$$

Como $z = \frac{y}{x}$, segue que

$$y^3 = x^3 \ln|x| + C \iff y = x\sqrt[3]{\ln|x| + C}$$

(b) Como $y(1) = 8$, teremos

$$8^3 = 1^3 \ln|1| + C \iff C = 8^3 = 512$$

Daí,

$$y = x\sqrt[3]{\ln|x| + 512}$$

O maior intervalo possível é pra quando a função $\ln|x|$ existe, nesse caso basta que $x \neq 0$.

4. Encontre a solução geral, na forma $\varphi(x,y)=c$, para alguma função $\varphi=\varphi(x,y)$, da equação diferencial

$$3x^2+2y+2(x+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

Solução.

Seja $M(x,y)=3x^2+2y$ e $N(x,y)=2(x+y)$. Verifiquemos se atende a condição de Euler. Note que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2$$

Como, as derivadas parciais são iguais, a EDO é exata. Então, podemos dizer que

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &=\int(3x^2+2y)\,\mathrm{d}x\\ &=x^3+2xy+h(y)\end{aligned}$$

Para achar $h(y)$, podemos usar o fato que

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

Sabemos que

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=2x+h'(y)$$

Portanto,

$$2x+h'(y)=2x+2y \iff h'(y)=2y$$

Resolvendo essa EDO, teremos

$$\int h'(y)\,\mathrm{d}y=\int 2y\,\mathrm{d}y$$

Seguindo que

$$h(y)+c_1=y^2+c_2 \iff h(y)=y^2+C$$

Então, a solução geral é da forma

$$\varphi(x,y)=x^3+2xy+y^2=C$$