

1 Capítulo 1

1.1. Do Cálculo, determine quais funções trigonométricas satisfazem a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y.$$

Verifique que combinações lineares dessas funções também satisfazem a equação diferencial, i.e. se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções, então $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ também é solução. Em seguida, ache a solução com as "condições iniciais" $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$. Ache, também, a solução com as "condições de contorno" $y(0) = 2$ e $y(\pi/2) = 1$.

Solução. Uma abordagem inicial é pensar nas funções trigonométricas e testar caso a caso. Note que as funções $\sin x$ e $\cos x$ satisfazem a equação diferencial. Precisamos mostrar que

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

também satisfaz. Temos alguns possíveis caminhos. Num primeiro momento, note que

$$y'(x) = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

derivando novamente, obtemos

$$y''(x) = -c_1 \sin x - c_2 \cos x = -y(x)$$

Que satisfaz a equação diferencial dada. Uma outra abordagem, seria mostrar que

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

pode ser reescrito como uma função seno ou cosseno. Tome um complexo $z = c_1 + c_2 \cdot i$, com isso, é imediato que $c_1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos \alpha$ e $c_2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin \alpha$, daí

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos \alpha \sin x + \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin \alpha \cos x \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(x + \alpha) \\ &= c_3 \sin(x + \alpha) \end{aligned}$$

que satisfaz a equação diferencial. Precisamos achar a solução com as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$. Sabendo que

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

vem que

$$\begin{aligned} y(0) &= c_2 = 0 \\ y'(0) &= c_1 = 2 \end{aligned}$$

Logo, a função que satisfaz é

$$y(x) = 2 \operatorname{sen} x$$

Procurando agora a solução com as condições de contorno, temos

$$y(0) = c_2 = 2$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 = 1$$

Logo, a função que satisfaz é

$$y(x) = \operatorname{sen} x + 2 \cos x$$