1 Capítulo 1

1.1. Do Cálculo, determine quais funções trigonométricas satisfazem a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -y.$$

Verifique que combinações lineares dessas funções também satisfazem a equação diferencial, i.e. se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções, então $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ também é solução. Em seguida, ache a solução com as "condições iniciais"$y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$. Ache, também, a solução com as "condições de contorno"$y(0) = 2$ e $y(\pi/2) = 1$.

Solução. Uma abordagem inicial é pensar nas funções trigonométricas e testar caso a caso. Note que as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ satisfazem a equação diferencial. Precisamos mostrar que

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

também satisfaz. Temos alguns possíveis caminhos. Num primeiro momento, note que

$$y'(x) = c_1 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x$$

derivando novamente, obtemos

$$y''(x) = -c_1 \operatorname{sen} x - c_2 \cos x = -y(x)$$

Que satisfaz a equação diferencial dada. Uma outra abordagem, seria mostrar que

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

pode ser reescrito como uma função seno ou cosseno. Tome um complexo $z = c_1 + c_2 \cdot i$, com isso, é imediato que $c_1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos \alpha$ e $c_2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \operatorname{sen} \alpha$, daí

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos \alpha \operatorname{sen} x + \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \operatorname{sen}(x + \alpha) \\ &= c_3 \operatorname{sen}(x + \alpha) \end{aligned}$$

que satisfaz a equação diferencial. Precisamos achar a solução com as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$. Sabendo que

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

vem que

$$\begin{aligned} y(0) &= c_2 = 0 \\ y'(0) &= c_1 = 2 \end{aligned}$$

Logo, a função que satisfaz é

$$y(x) = 2\operatorname{sen} x$$

Procurando agora a solução com as condições de contorno, temos

$$y(0) = c_2 = 2$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 = 1$$

Logo, a função que satisfaz é

$$y(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos x$$

1.2. Considere um corpo de massa m em queda livre com resistência do ar dependendo quadraticamente da velocidade. Se $h = h(t)$ denota a distância do objeto ao solo, g é a aceleração da gravidade e $\beta > 0$ é um coeficiente de resistência, determine qual dos modelos abaixo está correto, independente do objeto estar descendo ou subindo:

(a) $m\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -mg + \beta\left(\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2$

(b) $m\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \beta\left(\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2$

(c) $m\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -mg + \beta\left|\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$

(d) $m\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \beta\left|\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$

Solução. Considerando a orientação padrão, sem a resistência do ar, teríamos

$$-mg = ma = m\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}$$

Como a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade, teremos

$$r = \beta v^2 = \beta\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Quando o corpo está subindo, a resistência do ar é para baixo, indicado que é negativa. Quando o corpo está descendo, a resistência do ar é para cima, indicando que é positiva. A alternativa que satisfaz a modelagem é justamente a (d), tal que

$$m\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \beta\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$