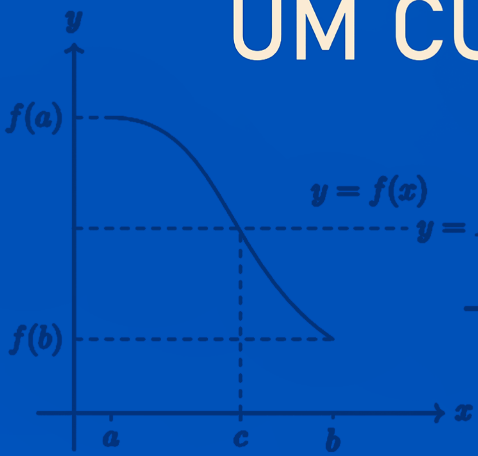
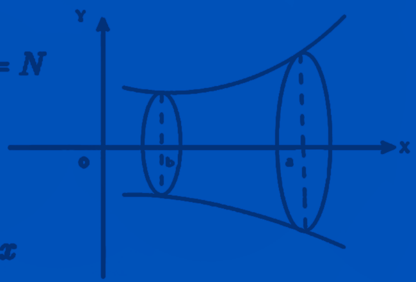
CÁLCULO

UM CURSO PRÁTICO





Volume: $\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$

Wallace Santo

400+EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

TEORIA E APLICAÇÃO

EN - EFOMM - UNIVERSITÁRIO

Página deixada intencionalmente em branco

Cálculo: um curso prático

1ª edição

Wallace Santo

wlsant@im.ufrj.br

15 de Maio de 2024

Caro leitor,

Seja você um aspirante a concurso ou um estudante universitário, este livro foi escrito pensando em você. "Cálculo 1: um curso prático"é mais do que apenas um livro; é onde busquei ensinar como desenvolver um raciocínio apurado em Cálculo.

Desde sempre, o Cálculo tem sido uma de minhas paixões, e foi o que me motivou a compartilhar este conhecimento com você. Neste livro, ofereço mais do que simples fórmulas e teoremas; apresento uma abordagem prática para entender e aplicar os conceitos de Cálculo de uma maneira que fala diretamente às suas necessidades, seja em concursos ou na vida acadêmica.

Aqui, você encontrará mais de 400 exercícios cuidadosamente selecionados e resolvidos, cada um acompanhado de insights valiosos e estratégias para abordar diferentes tipos de questões. Minha intenção é fazer com que cada problema se torne uma oportunidade de aprendizado, mostrando o caminho para que você desenvolva não só uma base sólida, mas também confiança para enfrentar os mais variados problemas de Cálculo 1.

Este livro é o resultado de anos de estudo e dedicação. Ele é um convite para que você descubra o cálculo não como um obstáculo, mas como uma ferramenta poderosa para alcançar seus objetivos. Espero que, ao final deste livro, você compartilhe do mesmo apreço que tenho por esta disciplina incrível.

Boa sorte em sua jornada de aprendizado e que este livro seja um fiel companheiro em todas as suas conquistas.

Com carinho e entusiasmo,

Sant.

Sumário

1 Limites

1.1 Noções de limite

Podemos definir limite, de uma maneira mais ”freestyle”, da seguinte maneira

Definição 1.1 *Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende à a, é igual a L” se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

De maneira simplificada, quando falamos que os valores de $f(x)$ se aproximam de L à medida que x se aproxima de a, estamos dizendo que os valores de $f(x)$ estão ficando cada vez mais próximos de L, mas x nunca é exatamente igual a a. Uma descrição mais detalhada sobre isso será apresentada na Seção 2.4.
Outra forma de representar

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a.$$

Isso pode ser interpretado como: $f(x)$ se aproxima de L à medida que x se aproxima de a.
É importante notar a condição ”mas $x \neq a$”na definição de limite. Significa que, mesmo que estejamos interessados em saber como $f(x)$ se comporta quando x se aproxima de a, nunca avaliamos $f(x)$ exatamente em $x = a$. De fato, não é necessário que $f(x)$ esteja definido exatamente em $x = a$, mas sim como $f(x)$ se comporta perto deste ponto.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

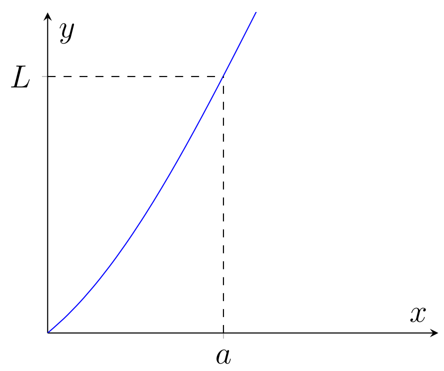


Figura 1

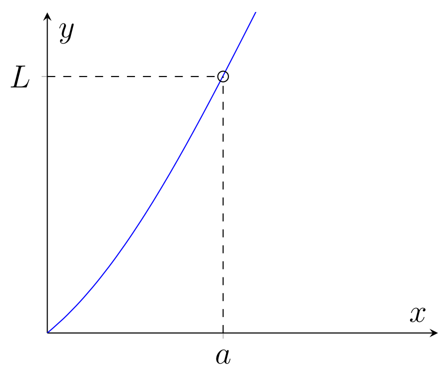


Figura 2

Tanto a figura 1 quanto a figura 2 tem seus limites em L quando x tende à a. Mas, é importante notar que na figura 2, $x = a$ não está bem definido, ainda assim, o limite se mantém.

1.2 Propriedades dos limites

A seguir introduziremos propriedades que podem ser usadas para encontrar muitos limites.

P1. Sejam a e c números reais quaisquer, então

$$\lim_{x\to a} c = c$$

isto é, o limite de uma constante é a própria constante.

P2. Se a, b, m são números reais, então

$$\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 4}(3x-5) = 3\cdot 4 - 5 = 7$$

P3. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

então:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} \quad$ desde que $M \neq 0$

Exemplo: Determine o seguinte limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2-3x+1) &\overset{\text{P3}}{=} \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 1\\ &= 2^2 - 3\cdot 2 + 1 = -1\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+1) = -1$$

Vemos neste exemplo que o valor de

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Isto na verdade ocorre para todos os polinômios. Enunciando então, formalmente, temos:

Teorema 1.1 *Se f é uma função polinomial, então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

1.3 Limites laterais

Vimos que para determinar o limite de uma função quando x tende para a, devemos verificar o comportamento da função para valores de x muito próximos de a, *maiores* ou *menores* que a.

O valor do qual f se aproxima quando o valor de x se aproxima de a por valores *menores* do que a é denominado *limite à esquerda* de f. Analogamente, o valor do qual f se aproxima quando x tende para a através de valores *maiores* que a é o *limite à direita* de f.

Estes limites são chamados *limites laterais.*

Limite à esquerda:

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \text{ termos } x < a$$

logo $x = a - h$, onde $h > 0$ é muito pequeno. Dizemos que o limite existe se os limites laterais são iguais.

Limite à direita:

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \text{ termos } x > a$$

logo $x = a + h$, onde $h > 0$ é muito pequeno.

1.4 Formas indeterminadas

Se a substituição direta de $x = a$ ao avaliar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ resulta em uma das seguintes formas

$$0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

então ela é chamada de *forma indeterminada.*
Exemplos:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{0}{0}$, forma indeterminada.

$\lim\limits_{x\to a} x^h = 0^0$, forma indeterminada, onde h, é um número real e $a = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0 \times \infty$, forma indeterminada.

1.5 Limites infinitos

Ao analisarmos $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x)$, pode ocorrer que, quando x tender à a, o valor de $f(x)$ vá para $+\infty$ ou $-\infty$. Um exemplo seria o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x \to 0$.

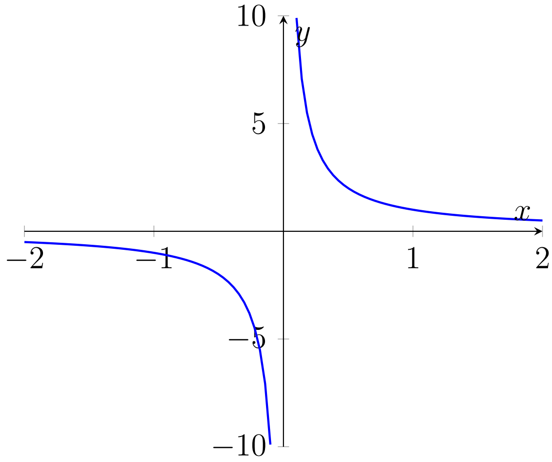


Figura 3

Podemos perceber que quando $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, essa função tende a ∞, mas quando $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, essa função tende a $-\infty$.

1.6 Limites no infinito

Dizemos que um limite está no infinito quando $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Podemos usar, novamente, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ como exemplo. Observe que, pela figura 3, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

1.7 Limites de funções algébricas

Avaliaremos o limite de funções algébricas quando uma variável tende a um valor finito ou infinito. Ao avaliar limites algébricos, as formas $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$ surgem, as quais discutiremos aqui.

1. **Caso** $\dfrac{0}{0}$

   Esse caso pode ser resolvida pelo método da fatoração, método do conjugado ou usando a fórmula(análogo à L'Hopital, que veremos mais a frente)

   $$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

   que são discutidos a seguir.

   (a) Método da fatoração:

   Neste método, numeradores e denominadores são fatorados. Os fatores comuns são cancelados e o restante é o resultado.

Exemplo 1.1 *Calcule*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}.$$

Solução. Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x-2)\\ &= 1-2=-1.\end{aligned}$$

Exemplo 1.2 *Avalie*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2\log x+\log x-1}{x^2-1}.$$

Solução. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2\log x+\log x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)-(\log x)(x^2-1)}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)-(\log x)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-(x+1)\log x}{x+1}\\ &= \frac{1^2+1+1-2\cdot\log 1}{1+1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que $\log 1 = 0$.

(b) Método do conjugado

Se temos $a+b$, chamamos de conjugado $a-b$. Isso é muito prático para sumir com indeterminações quando forçamos a fatoração de diferença de quadrados.

Exemplo 1.3 *Avalie*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{0}{0}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Observe, tínhamos 0 no numerador por conta de termos uma subtração. De certa forma, ao forçar uma fatoração de diferença de quadrado, conseguimos sumir com essa indeterminação, nos fornecendo o limite desejado.

Exemplo 1.4 *Avalie*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$$

Solução. Para resolver o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$$

multiplicamos e dividimos pelo conjugado do numerador:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t} \times \frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$$

Expandindo os numeradores, temos:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)-(1-t)}{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}$$

Simplificando, obtemos:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}$$

Ao dividirmos pelo t, temos:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$$

Substituindo $t = 0$, encontramos:

$$= \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, o valor do limite é 1.

2. Caso $\dfrac{\infty}{\infty}$

Até então, não aprendemos *L'Hopital*, então trabalharemos com casos mais simples

Exemplo 1.5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2+4x+3}.$$

Solução. Seja

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2+4x+3}.$$

Dividindo o numerador e o denominador pelo termo de maior grau, x^2, obtemos:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{1+0}{1+0+0} = 1,$$

porque

$$\frac{k}{x} \to 0, \quad \text{quando} \quad x \to \infty,$$

onde k é uma constante.

Exemplo 1.6 *Avalie*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}$$

Solução. Dada a função:

$$f(x) = \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}$$

Ao calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, vamos focar nos termos de maior grau: $3x^5$ no numerador e $-x^2$ no denominador.

Se dividirmos todos os termos no numerador e no denominador por x^5, o termo de maior grau, obtemos:

$$f(x) = \frac{3 - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^5}}{\frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^3}}$$

Quando x tende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

para qualquer $n > 0$.

Portanto, a expressão se simplifica para:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^3}}$$

O problema é que agora $\dfrac{2}{x^5} - \dfrac{1}{x^3} = 0 - 0$, mas não sabemos se isso seria pela esquerda ou pela direita, temos que avaliar qual das frações é maior. Uma forma de obter isso seria fatorar pelo termo de menor grau.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{2}{x^5} - 1\right)}$$

Mas, $\dfrac{2}{x^5} - 1 < 0$, logo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{-\frac{1}{x^3}}$$

Como o denominador $-\dfrac{1}{x^3}$ tende a 0, pela direita, e o numerador é positivo, o resultado do limite é $+\infty$.

Assim:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2} = +\infty$$

1.8 Exemplos gerais de limites algébricos

Exemplo 1.7 $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

Solução. Para calcular esse limite, podemos tentar fatorar o numerador. Ao fatorar $x^2 - 6x + 5$, obtemos $(x - 5)(x - 1)$. Usando essa fatoração, a expressão torna-se:

$$\lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x - 1)}{x - 5}$$

Cancelando os termos $(x - 5)$, obtemos:

$$\lim_{x \to 5} x - 1 = 5 - 1 = 4$$

Exemplo 1.8 $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

Solução. Para calcular esse limite, podemos tentar fatorar tanto o numerador quanto o denominador. Fatorando, obtemos:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x(x - 4)}{(x - 4)(x + 1)}$$

Cancelando os termos $(x - 4)$, obtemos:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x}{x + 1} = \frac{-4}{-4 + 1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Exemplo 1.9 $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

Solução. Observe que $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5} = \dfrac{6}{0}$, mas como $x \to 5$, ele pode tender tanto pela direita quanto pela esquerda. Então os limites laterais são diferentes, esse limite pode ir pra $+\infty$ ou $-\infty$ quando $x \to 5$, logo, não existe.

Exemplo 1.10 $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

Solução. Observe que $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4} = \dfrac{5}{0}$, mas como $x \to -1$, ele pode tender tanto pela direita quanto pela esquerda. Então os limites laterais são diferentes, esse limite pode ir pra $+\infty$ ou $-\infty$ quando $x \to -1$, logo, não existe.

Exemplo 1.11 $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

Solução. Para calcular esse limite, podemos fatorar o numerador e o denominador:

$$t^2 - 9 = (t - 3)(t + 3)$$

$$2t^2 + 7t + 3 = (2t + 1)(t + 3)$$

Assim, a expressão se torna:

$$\lim_{t \to -3} \frac{(t - 3)(t + 3)}{(2t + 1)(t + 3)}$$

Agora, podemos cancelar o fator $(t+3)$ de ambos, numerador e denominador:

$$\lim_{t\to-3}\frac{t-3}{2t+1}$$

Substituindo $t=-3$, obtemos:

$$\frac{-3-3}{2(-3)+1}=\frac{-6}{-5}=\frac{6}{5}$$

Exemplo 1.12 $\displaystyle\lim_{y\to-1}\frac{2y^2+3y+1}{y^2-2y-3}$

Solução. Para calcular esse limite, fatoramos o numerador e o denominador:

$$2y^2+3y+1=(2y+1)(y+1)$$

$$y^2-2y-3=(y+1)(y-3)$$

Substituindo $y=-1$ diretamente na expressão simplificada, obtemos:

$$\frac{(2(-1)+1)(-1+1)}{(-1+1)(-1-3)}=0$$

Exemplo 1.13 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(-5+h)^2-25}{h}$

Solução. Expandindo o quadrado, temos:

$$(-5+h)^2=25-10h+h^2$$

O limite se torna:

$$\lim_{h\to0}\frac{25-10h+h^2-25}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-10h+h^2}{h}$$

Simplificando a expressão:

$$\lim_{h\to0}(-10+h)=-10$$

Exemplo 1.14 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$

Solução. Expandindo o cubo, obtemos:

$$(2+h)^3=8+12h+6h^2+h^3$$

Assim, o limite se torna:

$$\lim_{h\to0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}=\lim_{h\to0}(12+6h+h^2)$$

Substituindo $h=0$, obtemos:

$$\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^3-8}{h}=12$$

Outra possível solução seria verificar que é possível fazer uma fatoração por diferença de cubos $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Exemplo 1.15 $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^3+8}$

Solução. Para calcular esse limite, podemos simplificar a expressão. Fatoramos o denominador, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$:

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Agora, podemos cancelar o fator $x + 2$:

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$$

Substituindo $x = -2$, obtemos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^3+8} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

Exemplo 1.16 $\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

Solução. Para calcular esse limite, fatoramos o numerador e o denominador usando diferença de quadrados e cubos:

$$t^4 - 1 = (t^2+1)(t^2-1) = (t^2+1)(t-1)(t+1)$$

$$t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$$

Substituindo $t = 1$ diretamente na expressão simplificada, obtemos:

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} = \frac{(t^2+1)(t+1)}{t^2+t+1} = \frac{4}{3}$$

Exemplo 1.17 $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h}$

Solução. Usando a técnica de racionalização, multiplicamos e dividimos por seu conjugado:

$$\frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3}$$

Isso nos dá:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{9+h}+3)}$$

Substituindo $h = 0$, obtemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{9+h}+3)} = \frac{1}{6}$$

Exemplo 1.18 $\lim_{u \to 2} \frac{\sqrt{4u+1} - 3}{u - 2}$

Solução. Usando a técnica de racionalização, multiplicamos e dividimos por seu conjugado:

$$\frac{\sqrt{4u+1}+3}{\sqrt{4u+1}+3}$$

Isso nos dá:

$$\lim_{u \to 2} \frac{4u - 8}{(u-2)(\sqrt{4u+1}+3)} = \frac{\sqrt{4u+1}+3}{\sqrt{4u+1}+3}$$

Isso nos dá:

$$\lim_{u\to 2} \frac{4(u-2)}{(u-2)(\sqrt{4u+1}+3)} = \lim_{u\to 2} \frac{4}{\sqrt{4u+1}+3}$$

Substituindo $u = 2$, obtemos:

$$\lim_{u\to 2} \frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2} = \frac{2}{3}$$

1.9 Continuidade

Definição 1.2 *Uma função f é contínua em um número a se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Observe que a Definição implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. *$f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)*
2. *$\lim_{x\to a} f(x)$ existe*
3. *$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*

Definição 1.3 *Uma função f é contínua à direita em um número a se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é contínua à esquerda em a se

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Definição 1.4 *Uma função f é contínua em um intervalo se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos continuidade na extremidade como continuidade à direita ou à esquerda.)*

Exemplo 1.19

A função $f(x) = \lceil x \rceil$ é contínua à direita, mas descontínua à esquerda, pois

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} \lceil x \rceil = n = f(n)$$

mas

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} \lceil x \rceil = n - 1 \neq f(n)$$

Definição 1.5 *Uma função f é contínua em um intervalo se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos continuidade na extremidade como continuidade à direita ou à esquerda.)*

Exemplo 1.20 *Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ é contínua no intervalo* $[-1, 1]$.

Solução. Se $-1 < a < 1$, então, usando as Propriedades dos Limites, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (1 - \sqrt{1 - x^2}) \\ &= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} \\ &= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} \\ &= 1 - \sqrt{1 - a^2} \\ &= f(a)\end{aligned}$$

Desse modo, f é contínua $-1 < a < 1$. É fácil ver que f é contínua em 1 e -1, logo, f é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

Teorema 1.2 *Se f e g forem contínuas em a e c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:*

1. $f + g$
2. $f - g$
3. cf
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$ *se* $g(a) \neq 0$

Teorema 1.3 *Para limites sobre polinômios:*

1. *Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em* $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
2. *Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.*

Teorema 1.4 *Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:*

polinômios	funções racionais
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas
funções exponenciais	funções logarítmicas

Teorema 1.5 *Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Teorema 1.6 (Teorema do Valor Intermediário) *Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.*

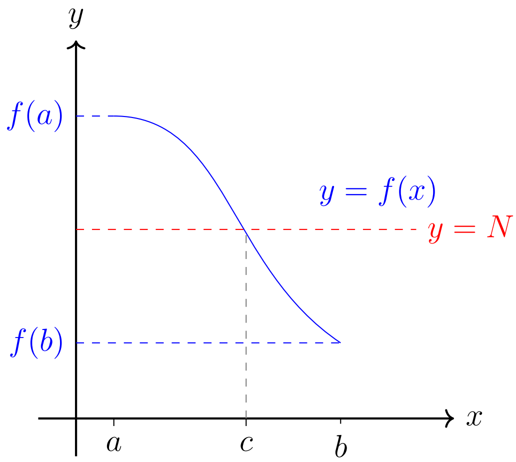


Figura 4

A figura 4 ilusta o TVI.

Exemplo 1.21 *Mostre que existe uma raiz da equação*

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.

Solução. Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Estamos procurando por uma solução da equação dada, isto é, um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Portanto, tomamos $a = 1, b = 2$ e $N = 0$. Temos:

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \\ f(2) &= 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0 \end{aligned}$$

Logo, $f(1) < 0 < f(2)$, isto é, $N = 0$ é um número entre $f(1)$ e $f(2)$. Como f é contínua, por ser um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Em outras palavras, a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo $(1, 2)$.

1.10 Exemplos gerais de continuidade

Exemplo 1.22 *Sejam f e g sejam funções contínuas tal que $g(2) = 6$ e $\lim\limits_{x \to 2}[3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.*

Solução. Como f e g são funções contínuas, o valor de um limite em um ponto é o valor da função naquele ponto. Portanto, podemos usar as propriedades dos limites para resolver o problema:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}[3f(x)+f(x)g(x)] &= \lim_{x\to 2} 3f(x) + \lim_{x\to 2} f(x)g(x)\\ &= 3f(2)+f(2)g(2)\\ &= 3f(2)+f(2)\cdot 6 \quad (\text{pois } g(2)=6)\\ &= 3f(2)+6f(2)\\ &= 9f(2)\\ &= 36.\end{aligned}$$

Dessa forma, temos:

$$9f(2)=36 \implies f(2)=4.$$

Exemplo 1.23 *Mostre que é contínua em a.*

(a) $f(x)=x^2+\sqrt{7-x}$, $a=4$

Solução. Para determinar a continuidade de f em $a=4$, vamos calcular o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 4:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} f(x) &= \lim_{x\to 4}\left(x^2+\sqrt{7-x}\right)\\ &= \lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4}\sqrt{7-x}\\ &= 4^2+\sqrt{7-4}\\ &= 16+\sqrt{3}\end{aligned}$$

Dado que $f(4)=16+\sqrt{3}$, f é contínua em $a=4$.

(b) $f(x)=(x+2x^3)^4$, $a=-1$.

Solução. Para determinar a continuidade de f em $a=-1$, calculamos o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de -1:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1}(x+2x^3)^4\\ &= (-1+2(-1)^3)^4\\ &= 3^4\\ &= 81.\end{aligned}$$

Dado que $f(-1)=81$, f é contínua em $a=-1$.

(c) $h(t)=\dfrac{2t-3t^2}{1+t^3}$, $a=1$.

Solução. Para determinar a continuidade de h em $a=1$, calculamos o limite de $h(t)$ quando t se aproxima de 1:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} h(t) &= \lim_{t\to 1} \frac{2t-3t^2}{1+t^3} \\ &= \frac{2(1)-3(1)^2}{1+1^3} \\ &= \frac{2-3}{1+1} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dado que $h(1) = -\frac{1}{2}$, h é contínua em $a = 1$.

Exemplo 1.24 *Mostre que é descontínua em a*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $a = -2$.

Solução. A função $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ é indefinida em $x = -2$ porque o denominador se torna zero, resultando em uma divisão por zero. Matematicamente, podemos afirmar que:

$$f(-2) \text{ é indefinido.}$$

Portanto, f é descontínua em $a = -2$.

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$$

.

Solução. Para $x = -2$, $f(x)$ é definido como 1. No entanto, ao nos aproximarmos de -2 pela esquerda ($x \to -2^-$), o valor de $f(x)$ tende ao infinito negativo. E ao nos aproximarmos de -2 pela direita ($x \to -2^+$), $f(x)$ tende ao infinito positivo. Portanto, o limite:

$$\lim_{x\to -2} f(x)$$

não existe. Isso significa que f é descontínua em $a = -2$.

(c)

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$$

.

Solução. Para verificar a continuidade de f em $a = 0$, precisamos verificar os limites laterais. O limite pela esquerda é:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

E o limite pela direita é:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

Dado que os limites laterais não são iguais, o limite:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

não existe. Assim, f é descontínua em $a = 0$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

Solução. Para verificar a continuidade de f em $x = 1$, calculamos o limite:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

Fatorando o numerador e o denominador, obtemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

Ao cancelar o termo $x - 1$, temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

No entanto, $f(1) = 1$, o que significa que o valor da função em $x = 1$ não coincide com o limite. Assim, f é descontínua em $x = 1$.

(e) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

Solução. Para verificar a continuidade de f em $x = 0$, vamos considerar os limites laterais.

Para $x \to 0^-$ (aproximando pela esquerda), a expressão válida é $\cos x$. Como $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1$, temos que o limite pela esquerda é 1.

Para $x \to 0^+$ (aproximando pela direita), a expressão válida é $1 - x^2$. Dado que $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - x^2) = 1$, o limite pela direita também é 1.

No entanto, $f(0) = 0$, que é diferente do limite de $f(x)$ quando x tende a 0, tanto pela direita quanto pela esquerda. Portanto, f é descontínua em $x = 0$.

Exemplo 1.25 *Encontre os pontos onde a função é descontínua*

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ (x-2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Solução. A função $f(x)$ é contínua nos intervalos $(-\infty, 0]$, $(0, 2]$, e $(2, \infty)$, pois é um polinômio em cada um desses intervalos.

Para verificar a continuidade de f em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 + x^2) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2 - x) = 2$$

Dado que os limites laterais em $x = 0$ são diferentes, f é descontínua em $x = 0$.

Para verificar a continuidade de f em $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2 - x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x - 2)^2 = 0$$

Os limites laterais em $x = 2$ são iguais, e $f(2) = 0$, então f é contínua em $x = 2$.

Assim, o único ponto de descontinuidade de f é $x = 0$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Solução. A função $f(x)$ é contínua nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1]$, e $(1, \infty)$.

Para verificar a continuidade de f em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1$$

Dado que os limites laterais em $x = 0$ são diferentes, f é descontínua em $x = 0$.

Para verificar a continuidade de f em $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x = e$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 - x) = 1$$

Dado que os limites laterais em $x = 1$ são diferentes, f é descontínua em $x = 1$.

Portanto, $f(x)$ possui pontos de descontinuidade em $x = 0$ e $x = 1$.

Exemplo 1.26 *Para quais valores de c, a função é contínua em $\mathbb{R}$?*

Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Solução. A função $f(x)$ é contínua nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $[2, \infty)$ porque ambas as partes da função são polinômios.
Para garantir a continuidade de f em $x = 2$, o valor da função de ambos os lados de $x = 2$ deve ser o mesmo.
Para $x < 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (cx^2 + 2x) = 4c + 4$$

Para $x \geqslant 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^3 - cx) = 8 - 2c$$

Para que f seja contínua em $x = 2$, as duas expressões devem ser iguais:

$$4c + 4 = 8 - 2c$$

$$\implies 6c = 4$$
$$\implies c = \frac{2}{3}$$

Portanto, para que $f(x)$ seja contínua em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$, c deve ser igual a $\frac{2}{3}$.

Exemplo 1.27 *Para quais valores de a e b, f é contínua em $\mathbb{R}$?*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Solução. Para $f(x)$ ser contínua em toda parte, devemos garantir que as funções se encontrem nos pontos $x = 2$ e $x = 3$.
Para $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (x+2) = 4$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (ax^2 - bx + 3) = 4a - 2b + 3$$

Para que f seja contínua em $x = 2$, temos:

$$4a - 2b + 3 = 4$$

$$\implies 4a - 2b = 1 \tag{1}$$

Para $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = 9a - 3b + 3$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x - a + b) = 6 - a + b$$

Para que f seja contínua em $x = 3$, temos:

$$9a - 3b + 3 = 6 - a + b$$

$$\implies 10a - 4b = 3 \tag{2}$$

Resolvendo o sistema de equações (1) e (2) obtemos:

$$a = b = \frac{1}{2}$$

Portanto, para que $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$, a e b devem ser ambos iguais a $\frac{1}{2}$.

Exemplo 1.28 *Existe um número que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo?*

Solução. Se existe tal número, ele satisfaz a equação $x^3 + 1 = x$, que pode ser reescrita como $x^3 - x + 1 = 0$. Denominemos o lado esquerdo desta equação de $f(x)$. Vamos avaliar alguns pontos dessa f.

Avaliando em $x = -2$, temos:

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -8 + 2 + 1 = -5$$

Avaliando em $x = -1$, temos:

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$$

Observe que $f(x)$ é um polinômio, e portanto contínuo. De acordo com o Teorema do Valor Intermediário, como $f(-2) < 0$ e $f(-1) > 0$, deve existir um número c entre -2 e -1 tal que $f(c) = 0$. Portanto, c é o número que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo, ou seja, $c^3 + 1 = c$.

Exemplo 1.29 *Se a e b são números positivos, prove que a equação*

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

possui no mínimo uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

Solução.
Multiplicando ambos os lados por $(x^3 + 2x^2 - 1)(x^3 + x - 2)$, obtemos:

$$a(x^3 + x - 2) + b(x^3 + 2x^2 - 1) = 0$$

Denominemos o lado esquerdo desta equação de $p(x)$.
Como $p(x)$ é um polinômio e, portanto, contínuo no intervalo $[-1, 1]$, avaliando em $x = -1$, temos:

$$p(-1) = a((-1)^3 + (-1) - 2) + b((-1)^3 + 2(-1)^2 - 1) = -4a$$

Avaliando em $x = 1$, temos:

$$p(1) = a(1^3 + 1 - 2) + b(1^3 + 2(1^2) - 1) = 2b$$

De acordo com o Teorema do Valor Intermediário, como $p(-1) < 0$ e $p(1) > 0$, deve existir um número c entre -1 e 1 tal que $p(c) = 0$.
Note que a única raiz de qualquer dos denominadores que está no intervalo $(-1, 1)$ é $r = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. No entanto, avaliando $p(r)$, temos:

$$p(r) = \frac{3\sqrt{5} - 9}{2} \neq 0$$

Portanto, c não é uma raiz de nenhum dos denominadores. Logo, $p(c) = 0$ implica que $x = c$ é uma raiz da equação dada.

1.11 Teorema do confronto

Teorema 1.7 (Teorema do Confronto) *Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo à a (exceto possivelmente em a) e*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Esse é um poderoso teorema que resolver pra resolver inúmeras questões.

1.12 Exemplos com teorema do confronto

Exemplo 1.30 *Mostre que*

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Solução. Em um primeiro momento, sabemos que devemos usar o teorema do confronto. A pergunta é: como utilizar?

Bem, quando temos uma função que claramente é limitada, isso já nos ajuda a pensar em usar o teorema do confronto. Observe que não podemos substituir x por 0 diretamente pois $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ é indeterminado(pode pensar nisso como $\operatorname{sen}(\pm\infty)$), de tal modo que você não consegue determinar o arco. Mas, é de conhecimento geral que a função seno é limitada em $[-1, 1]$. Logo,

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$$

Mas, temos $x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, é natural multiplicarmos todos os lados por x^2

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

Daí,

$$0 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 0$$

Pelo poderoso teorema do confronto

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Exemplo 1.31 *Demonstre que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(-\infty, \infty)$.

Solução. A função $f(x) = x^4 \operatorname{sen}(1/x)$ é contínua em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ pois é o produto de um polinômio e uma composição de uma função trigonométrica e uma função racional. Agora, dado que $-1 \leqslant \operatorname{sen}(1/x) \leqslant 1$, temos que

$-x^4 \leqslant x^4 \operatorname{sen}(1/x) \leqslant x^4$. Como $\lim_{x\to 0}(-x^4) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$, pelo Teorema do Confronto, temos que $\lim_{x\to 0}(x^4 \operatorname{sen}(1/x)) = 0$, que é igual a $f(0)$. Logo, f é contínua em 0 e, portanto, em $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 1.32 *Avalie*

$$\lim_{x\to 0} x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

Solução. Dado que $-1 \leqslant \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leqslant 1$, temos:

$$-x^3 \leqslant x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leqslant x^3 \quad \text{para } x > 0$$

e

$$x^3 \leqslant x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leqslant -x^3 \quad \text{para } x < 0$$

Portanto, usando o Teorema do Confronto, temos:

$$\lim_{x\to 0} x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

pois em ambos os casos o limite é zero.

Exemplo 1.33 *Avalie*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+\operatorname{sen}^2 x)}{x+100}$$

Solução. Temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2+\operatorname{sen}^2 x)}{x+100}$$

Agora, dado que $0 \leqslant \operatorname{sen}^2 x \leqslant 1$, podemos inferir:

$$\begin{aligned} 0\cdot x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}^2 x \leqslant x^2 \\ 0 + x^2 \leqslant x^2 + x^2\operatorname{sen}^2 x \leqslant 2x^2 \\ 2x^2 \leqslant 2x^2 + x^2 \operatorname{sen}^2 x \leqslant 3x^2 \\ \frac{2x^2}{x+100} \leqslant \frac{x^2(2+\operatorname{sen}^2 x)}{x+100} \leqslant \frac{3x^2}{x+100} \end{aligned}$$

Portanto, usando o Teorema do Confronto, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2+\operatorname{sen}^2 x)}{x+100} = +\infty$$

pois:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x+100} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x+100} = +\infty$$

Exemplo 1.34 *Avalie*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$$

Solução. Seja

$$f(n) = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

Note que $\dfrac{n}{n^2+2} = \dfrac{n}{n^2+1+1}$, $\dfrac{n}{n^2+3} = \dfrac{n}{n^2+1+1+1}$, deste modo, tome

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} \qquad \textit{(n vezes)} \\ &= \frac{n^2}{n^2+1} \end{aligned}$$

Assim como

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \qquad \textit{(n vezes)} \\ &= \frac{n^2}{n^2+n} \end{aligned}$$

É fácil ver que $f(n) < h(n)$ e $g(n) < f(n)$. Portanto, temos as desigualdades:

$$g(n) < f(n) < h(n)$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} g(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 \end{aligned}$$

pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1.$$

1.13 Limites fundamentais

É de suma importância ter em mente pelo menos o limite 2., pois o 1. e 4. dá pra fazer por L'Hopital na hora da prova com certa tranquilidade, e o 3. é só uma forma diferente de escrever do 2.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Não iremos demonstrar esses limites pois a ideia é ser um curso prático de cálculo para concursos. Para quem busca demonstrações sobre os limites acima e dos teoremas apresentados, recomendo o livro "Calculus"do Spivak.

1.14 Questões propostas

Como ainda não aprendemos L'Hopital, o interessante é fazer as questões sem essa abordagem. Após iniciarmos o tópico de derivadas(que será o próximo), iremos aprender esse teorema excepcional que é L'Hopital. Extremamente útil para resolver questões de limites.

Questão 1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{x^3-2x^2+4x+8}$

Questão 2. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$

Questão 3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

Questão 4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$

Questão 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4}$

Questão 6. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

Questão 7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 20x}{\operatorname{sen} 301x}$

Questão 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)}{x}$

Questão 9. $\lim\limits_{x\to 0} \tan(3x)\csc(6x)$

Questão 10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

Questão 11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

Questão 12. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

Questão 13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$

Questão 14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

Questão 15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

Questão 16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$

Questão 17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}$

Questão 18.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}}$$

Questão 19. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

Questão 20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

Questão 21. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3\sqrt{x+1}-3\sqrt{x}}{x}$

Questão 22. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{9x+1}$

Questão 23. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

Questão 24. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4-1}}{x}$

Questão 25. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$

Questão 26. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+9}+x+3$

Questão 27. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

Questão 28. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+x\cos\sqrt{x}}{x^4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+1}$

Questão 29.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x+\sqrt{x}\cos x)}{x-\sqrt{1+x^2}}$$

Questão 30. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[12]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$

Questão 31. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Questão 32. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$

Questão 33.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}$$

Questão 34. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+cx+c}{x^2-1} = L$. Determine c e L.

Questão 35. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função.

(a) Supondo que $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x}$.

(b) Supondo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Supondo que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

1.15 Soluções das questões propostas

Questão 1. 0

Solução. Dado a função:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}{x^3 - 2x^2 + 4x + 8}$$

Avaliando o numerador em $x = -2$:

$$2(-2)^3 + 9(-2)^2 + 12(-2) + 4 = 0$$

Avaliando o denominador em $x = -2$:

$$(-2)^3 - 2(-2)^2 + 4(-2) + 8 = -16$$

Já que o numerador é zero e o denominador não é zero em $x = -2$, temos:

$$f(-2) = \frac{0}{-16} = 0$$

Como polinômios são contínuos em todos os pontos, o limite da função em $x = -2$ é:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 0$$

Questão 2. $\frac{1}{5}$

Solução. Para calcular o limite

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^2 + 3x}$$

nós racionalizamos a expressão multiplicando e dividindo pelo conjugado:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^2 + 3x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 5}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 16 - 25}{(x^2 + 3x)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 3x)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{x(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Questão 3. $-\frac{1}{6}$

Solução. Para calcular o limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{2 - \sqrt{x^3 - 4}}$$

Multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador para racionalizar a expressão:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}} \cdot \frac{2+\sqrt{x^3-4}}{2+\sqrt{x^3-4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+12}+4}{\sqrt{x^2+12}+4} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{(\sqrt{x^3-4}-2)(\sqrt{x^2+12}+4)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4} \cdot \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{\sqrt{x^3+4}-4}
\end{aligned}
$$

Mas, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{\sqrt{x^3+4}-4} \cdot \dfrac{\sqrt{x^3+4}+4}{\sqrt{x^3+4}+4} = \lim\limits_{x\to 2} -\dfrac{(x+2)(\sqrt{x^3-4}+2)}{x^2+2x+4}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4} \cdot \lim_{x\to 2} -\frac{(x+2)(\sqrt{x^3-4}+2)}{x^2+2x+4} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Questão 4. 0

Solução. Temos $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$, note que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}} &= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2x}+1}{\sqrt[4]{2x}+1} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x-1}(\sqrt[4]{2x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{2x}+1} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}(\sqrt[4]{2x}+1)(\sqrt{2x}+1)} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2x-1}}{(\sqrt[4]{2x}+1)(\sqrt{2x}+1)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Questão 5. $\dfrac{1}{3}$

Solução. Para o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4}$, é interessante notar a fatoração da diferença de cubos no numerador. Se $a = \sqrt[3]{x^4+1}$ e $b = 1$, note que $a^3 - b^3 = x^4 \iff (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Logo, multiplicando e dividindo por (a^2+ab+b^2), vem

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4+1}^2+\sqrt[3]{x^4+1}+1}{\sqrt[3]{x^4+1}^2+\sqrt[3]{x^4+1}+1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4(\sqrt[3]{x^4+1}^2+\sqrt[3]{x^4+1}+1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^4+1}^2+\sqrt[3]{x^4+1}+1)}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Questão 6. $\sqrt{2}$

Solução. Temos $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$, de forma poderíamos ter duas opções para o conjugado no numerado. A primeira opção seria

$$\sqrt{x^2-1}-(\sqrt{x}-1)$$

mas continua dando 0. Logo, a segunda opção

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}+1$$

parece ser mais plausível. Então,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x^2-1)+2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}+1)}$$

Fatorando $\sqrt{x-1}$, pois $x^2-1=(x+1)(x-1)$, no numerador e cortando

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{2\left(\sqrt{x-1}(x+1)+\sqrt{x}\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}+1}\\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Questão 7. $\dfrac{20}{301}$

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 20x}{\operatorname{sen} 301x}$, note que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 20x}{\operatorname{sen} 301x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} 20x)\cdot\frac{20}{20}}{(\operatorname{sen} 301x)\cdot\frac{301}{301}}$$

Usando o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$

$$=\frac{20}{301}$$

Questão 8. 2

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)}{x}$, temos que, de alguma forma, deixar isso parecido com o limite fundamental

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$$

Bom, usando a mesma ideia da **Questão 7.**, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\cdot\frac{2}{2}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Questão 9. $\dfrac{1}{2}$

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 0}\tan(3x)\csc(6x)$, note que

$$\lim_{x\to 0}\tan(3x)\csc(6x)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x \operatorname{sen} 6x}$$

Mas, $\operatorname{sen} 6x = 2\operatorname{sen} 3x\cos 3x$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{2\cos 3x\operatorname{sen} 3x\cos 3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2 3x}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Questão 10. $\dfrac{1}{6}$

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$, forçando a aparecer a diferença de cubos, tome $a=1$ e $b=\sqrt[3]{\cos x}$, temos que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\cos x}^2+\sqrt[3]{\cos x}+1}{\sqrt[3]{\cos x}^2+\sqrt[3]{\cos x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(\sqrt[3]{\cos x}^2+\sqrt[3]{\cos x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\cos x}^2+\sqrt[3]{\cos x}+1\right)} \quad \frac{1}{3}$$

Sabendo que $1 - \cos x = 2\,\mathrm{sen}^2 \dfrac{x}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\,\mathrm{sen}\, \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} 2 \left(\frac{\mathrm{sen}\, \frac{x}{2}}{x}\right)^2
\end{aligned}$$

Lembrando que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\mathrm{sen}\, \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Questão 11.

Solução. Seja $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$, é imediato que $\cos x = \mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, portanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

Questão 12. -1

Solução. Seja $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$, note que $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, daí

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{|x - 3|}{x - 3}$$

Como x está pela esquerda $x - 3 < 0$, logo

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

Questão 13. $\dfrac{1}{3}$

Solução. Seja $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{sen}(3x^2 - 5x + 2)}{x^2 + x - 2}$, primeiro note que

$3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1)$ e $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}[(3x-2)(x-1)]}{(x-1)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}[(3x-2)(x-1)]}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{3x-2}{3x-2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(3x-2)\operatorname{sen}[(3x-2)(x-1)]}{(3x-2)(x-1)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3x-2}{x+2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Questão 14. $-\infty$

Solução. Seja $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Questão 15. 0

Solução. Seja $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$, temos $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, isso é sugestivo para usarmos teorema do confronto para facilitar as contas. Como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$$

Se $x > 0$,

$$-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2} \leqslant \frac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \leqslant \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$$

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{x \cdot x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0
\end{aligned}$$

Então para $x > 0$, obtemos que o limite pedido vale 0. De modo análogo, para $x < 0$

$$-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2} \geqslant \frac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \geqslant \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$$

E concluímos da mesma forma que vale 0.

Questão 16.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$, observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2(x^2+1)}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{(x^2+1)}}{x}\end{aligned}$$

Se $x>0$, temos 1 como resposta, mas se $x<0$, teremos -1. Logo, os limites laterais são diferentes, então o limite não existe.

Questão 17.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{1-x^3}$, observe que

$$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2) = -(x-1)(1+x+x^2)$$

Então

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{x^2+x+1}\right) \\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

Como os limites laterais divergem, esse limite não existe.

Questão 18. 0

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}}$, novamente temos uma indeterminação dentro da função trigonométrica, e isso sempre será sugestivo para usar confronto. Dessa forma, temos duas opções para usar como base: $\operatorname{sen}(x^3-1)$ ou $\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$, mas o problema não é justamente essa indeterminação que é $\cos(\infty)$?, então o ideal é usá-lo como base!
Logo,

$$-1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \leqslant 1 \iff -\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{\sqrt{x-1}} \leqslant \frac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}} \leqslant \frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{\sqrt{x-1}}$$

Dessa forma, nos resta avaliar o limite para $\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{\sqrt{x-1}}$. Note que $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Daí,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}[(x-1)(x^2+x+1)]}{\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}[(x-1)(x^2+x+1)]}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2+x+1)\sqrt{x-1}\operatorname{sen}[(x-1)(x^2+x+1)]}{|x-1|(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2+x+1)\sqrt{x-1}\operatorname{sen}[(x-1)(x^2+x+1)]}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1^+} (x^2+x+1)\sqrt{x-1} = 0\end{aligned}$$

Logo, o limite pedido vale 0.

Questão 19. $-\infty$

Solução. Seja $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$, note que $x^2-2x = x(x-2)$ e $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2}\\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty\end{aligned}$$

Questão 20. ∞

Solução. Seja $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, temos dois possíveis métodos para resolver isso. O padrão seria notar que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \infty\end{aligned}$$

O segundo método seria notar que $\sqrt{x+1} = \sqrt{x}$ quando $x\to\infty$, esse 1 se torna desprezível, logo o limite reduziria á forma $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} = \infty$

Questão 21. 0

Solução. Seja $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3\sqrt{x+1}-3\sqrt{x}}{x}$, note que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt{x+1}-3\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{x}$$

Notando a diferença de quadrados $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, vem que

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} 3\frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0\end{aligned}$$

Questão 22.

Solução. Seja $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{9x+1}$, é análogo à **Questão 20.**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{9x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(9+\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{9+\frac{1}{x}} = 0\end{aligned}$$

Questão 23. Seja $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}{\left(1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}
\end{aligned}$$

É fácil ver que $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ vai pra 0 quando $x\to\infty$. Observe que

$$-1\leqslant \operatorname{sen}x\leqslant 1 \implies \frac{-1}{x}\leqslant\frac{\operatorname{sen}x}{x}\leqslant\frac{1}{x}$$

como $\dfrac{1}{x}$ vai pra 0 quando $x\to\infty$, pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=0$
Então o limite pedido vale

$$=1$$

Solução.

Questão 24.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4-1}}{x}$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4-1}}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4-1}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-(x^4-1)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-1}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(-1+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-1}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(-1+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(-1+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^3\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}}+x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^6}}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^6}}}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Questão 25. $-\infty$

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(3x^2+\frac{2x}{x^3}-\frac{8}{x^3})\right)}{|x^3|\sqrt{1+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -\frac{3x^2+\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -3x^2 \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Questão 26.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+9}+x+3$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+9}+x+3\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+9}+x+3)(\sqrt{x^2+9}-x-3)}{\sqrt{x^2+9}-x-3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+9-(x+3)^2}{\sqrt{x^2+9}-x-3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+9-x^2-6x-9}{\sqrt{x^2+9}-x-3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x}{\sqrt{x^2+9}-x-3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x-3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x-3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1+\frac{3}{x}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Questão 27.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x}} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x})}{(x^2+4)-(4x)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)\operatorname{sen}((x-2)(x+2))(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x})}{(x-2)^2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x\operatorname{sen}((x-2)(x+2))(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x})}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x\operatorname{sen}((x-2)(x+2))(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x})}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+2} \\
&= \lim_{x\to 2} x(x+2)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x})
\end{aligned}$$

Note que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}((x-2)(x+2))}{(x-2)(x+2)} = 1$

$$= 32\sqrt{2}$$

Questão 28.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3 + x\cos\sqrt{x}}{x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + 1}$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 + x\cos\sqrt{x}}{x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + 1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(3 + \frac{\cos\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^3\left(x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}
\end{aligned}$$

$x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, então é óbvio que o limite disso é 1, logo

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1} = 3$$

Questão 29.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x + \sqrt{x}\cos x)}{x - \sqrt{1+x^2}}$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x + \sqrt{x}\cos x)}{x - \sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x + \sqrt{x}\cos x)}{x - \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x}(\operatorname{sen} x + \sqrt{x}\cos x)(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} -x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + \cos x\right)(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} -x\cos x(x + \sqrt{1+x^2})
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ não está bem definido, esse limite não existe.

Questão 30.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[12]{7x^{12} + 5x^4 + 7}}{2x^3 + 2}$, note que $\sqrt[12]{7x^{12} + 5x^4 + 7}$ cresce de maneira muito mais lenta que o polinômio $2x^3 + 2$, logo esse limite vale 0.

Questão 31.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Questão 32.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$, note que x^3+x^2-5x+3 é divisível por 1 e que a raiz é dupla, logo $x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3)$, e que $x^2-1=(x+1)(x-1)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1} &= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+3)}}{(x+1)(x-1)}\\
&= \lim_{x\to1} \frac{|x-1|\sqrt{x+3}}{(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

Note que os limites laterais são diferentes, logo o limite não existe.

Questão 33. $-\infty$

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}$, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} -\left(\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)(x+\sqrt{1+x^2})\\
&= \lim_{x\to+\infty} -x\left(\cancelto{0}{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}}+\cancelto{2}{2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)(x+\sqrt{1+x^2})\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Questão 34.

Solução. Seja $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+cx+c}{x^2-1}=L$, se c e L são reais bem definidos, então $x=1$ tem que ser raiz de $2x^3+cx+c$. Logo, $2+c+c=0 \iff c=-1$. Mas,

$2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2+2x+1)$. Então, nosso limite é

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(2x^2+2x+1)}{(x+1)} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Questão 35.

Solução.

(a) Seja $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, então $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 2} x\frac{f(x)}{x^2} = x = 2$.

(b) Seja $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{f(x)}{x} = 0$.

(c) Seja $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, então $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x)\frac{x^2+x}{x^2+x} = \infty$.