Desvendando a Trigonometria com Números Complexos

Domine a trigonometria com a magia dos números complexos

Wallace Santo

wlsant@im.ufrj.br

25 de Abril de 2024

Olá, sou Wallace Santo, professor de matemática com experiência no ITA/IME. Para oportunidades de mentorias e aulas personalizadas, convido você a me seguir no Instagram: @prof.sant

Este ebook inovador tem como objetivo desvendar o poder dos números complexos na trigonometria. Seja você um estudante se preparando para concursos militares, alguém que busca aprimorar suas habilidades matemáticas ou um professor que deseja adicionar um toque especial às suas aulas, este ebook oferece uma jornada fascinante.

Iniciamos com uma breve revisão dos fundamentos dos números complexos, estabelecendo a base necessária para explorar as aplicações incríveis que esse campo oferece na vasta terra da trigonometria. À medida que avançamos, você descobrirá como os números complexos podem simplificar e enriquecer problemas trigonométricos de maneiras que você jamais imaginou.

Com exemplos práticos, dicas valiosas e insights matemáticos, este ebook será seu companheiro confiável na jornada para dominar a trigonometria de maneira inovadora e emocionante. Prepare-se para desvendar o potencial dos números complexos na matemática!

Sumário

1 Números complexos e sua forma algébrica

Quando trabalhamos com matemática, é importante saber definir os objetos que serão trabalhados, e com números complexos não é diferente. Um número complexo é um par $z = (a, b)$, com a e b reais, o qual podemos identificar com $a + bi$, sendo $i^2 = -1$. Dizemos que $a + bi$ é a forma algébrica do número complexo z.

Uma nomenclatura comum é dizer que $\text{Re}(z) = a$ (a parte real do complexo é a) e $\text{Im}(z) = b$ (a parte imaginária do complexo é b).

Dado dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, dizemos que

$$z = w \iff a = c \text{ e } b = d$$

Ou seja, as partes reais devem ser iguais e as partes imaginárias também.

Dito isso, podemos mostrar as operações de adição e multiplicação de números complexos.

Sejam $z_1 = a + b \cdot i$ e $z_2 = c + d \cdot i$. Para a operação de adição, temos

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

Para a operação de multiplicação, temos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

1.1 Propriedades da adição

São propriedades básicas e já esperadas, mas é importante serem mencionadas. Sejam z, z_1, z_2 e z_3 complexos quaisquer então eles satisfazem:

- **Comutatividade**.
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
- **Associatividade**.
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$
- **Identidade aditiva**. Existe um único $0 = 0 + 0i$, tal que:
$$z + 0 = z$$
- **Inverso aditivo**. Existe um único $(-z)$, tal que:
$$z + (-z) = 0 + 0 \cdot i = 0$$

1.2 Propriedades da multiplicação

Assim como visto nas propriedades pra adição, é natural que as propriedades pra multiplicação serão como as do conjunto dos números reais(isso é óbvio quando se sabe que $\mathbb{C}$ é um corpo). Sejam z, z_1, z_2 e z_3 complexos quaisquer então eles satisfazem:

- **Comutatividade**
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- **Associatividade**
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

- **Identidade multiplicativa**. O número complexo $1 = 1 + 0 \cdot i$ é único, tal que:
$$z \cdot 1 = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

- **Inverso multiplicativo**. Para todo número complexo $z \in \mathbb{C}^*$, existe um único número complexo $\frac{1}{z}$, tal que:
$$z \cdot \frac{1}{z} = 1$$

- **Distributividade**.
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Além dessas propriedades básicas de multiplicação, de modo análogo, temos as propriedades pras potências inteiras de um número complexo. Para inteiros positivos, temos

$$\begin{aligned}
z^0 &= 1 \\
z^1 &= z \\
z^2 &= z \cdot z \\
z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot \ \ldots \ \cdot z}_{\text{n vezes}}
\end{aligned}$$

Para inteiros negativos, de modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned}
z^0 &= 1 \\
z^{-1} &= \frac{1}{z} \\
z^{-2} &= \frac{1}{z^2} \\
z^{-n} &= \frac{1}{z^n}, \quad n > 0
\end{aligned}$$

Os números complexos também satisfazem as propriedades de potência de modo análogo aos números reais. Sejam z e w complexos, então

1. $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$
2. $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$
3. $(z^m)^n = z^{mn}$
4. $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n$
5. $\left(\dfrac{z}{w}\right)^n = \dfrac{z^n}{w^n}$

1.3 Potências de i

Sabemos que

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1, \\ i^3 &= -i \end{aligned}$$

Para achar quanto vale i^n, com n sendo um inteiro positivo, basta achar o resto da divisão de n por 4

$$n = 4q + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant 3$$

Com isso, vem que

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4q+r} \\ &= (i^4)^q \cdot i^r \\ &= 1^q \cdot i^r \\ &= i^r \end{aligned}$$

Quando temos expoentes negativos, o argumento é análogo

$$\begin{aligned} i^{-1} &= \frac{1}{i^1} = \frac{i}{i^2} = -i \\ i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = -1 \\ i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = i \\ i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = 1 \\ i^{-n} &= \frac{1}{i^n} \end{aligned}$$

1.4 Conjugado do número complexo

Sabemos que um número complexos tem forma $z = a + bi$. Definimos o conjugado por

$$\overline{z} = a - bi$$

A ideia do conjugado é simplesmente trocar o sinal da parte imaginária.

1.5 Propriedades do conjugado do número complexo

Sejam z, z_1 e z_2 números complexos quaisquer, temos

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
3. $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$
4. $z = -\overline{z} \iff z$ é imaginário puro$(\mathrm{Re}(z) = 0)$
5. $z = \overline{z} \iff z$ é real$(\mathrm{Im}(z) = 0)$

6. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, de modo geral, $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots \overline{z_n}$
7. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, de modo geral, $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \ldots \overline{z_n}$
8. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, para $z_2 \neq 0$
9. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Todas essas propriedades são importantes de ter em mente, mas friso que a (2.) é uma que resolve várias questões de vestibulares e concursos de forma prática. As demonstrações são fáceis e fica a cargo do leitor

1.6 Módulo do número complexo

Seja um número complexo $z = a + bi$, definimos o módulo do número complexo por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

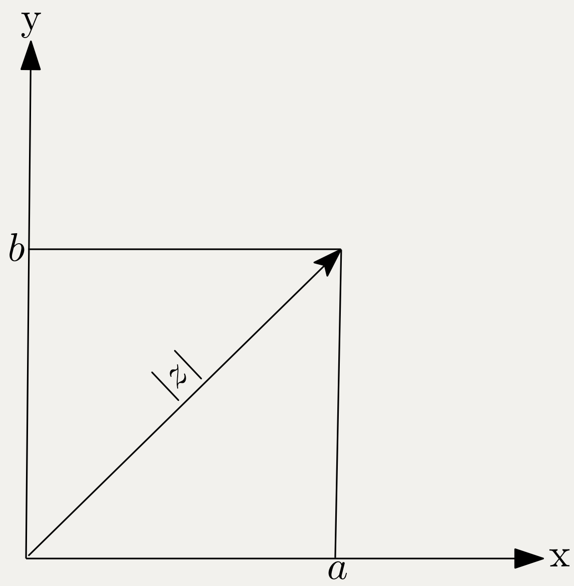

Figura 1

que é justamente o módulo do vetor (a, b). Ou seja, o módulo de um complexo é a distância da origem até seu afixo(ponto) no plano. Um seria

$$z = 1 + i \implies |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

1.7 Propriedades do módulo do número complexo

Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos algumas propriedades envolvendo o módulo

1. $|z| \geqslant 0$
2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. $|z| > 0 \iff z \neq 0$
4. $-|z| \leqslant \text{Re}(z) \leqslant |z|$ e $-|z| \leqslant \text{Im}(z) \leqslant |z|$
5. $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}$
6. $z\overline{z} = |z|^2$
7. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, de modo geral, $|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|$
8. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$
9. $|z^n| = |z|^n, \forall n \in \mathbb{R}$
10. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, de modo geral,
    $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ (Desigualdade triangular)
11. $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$
12. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$

São tantas propriedades, mas é importante decorar as que são úteis para a resolução de questões. Com a experiência em resolver questões, você saberá quais deve ter no coração.

Demonstraremos algumas propriedades que julgamos interessante:

(10.)

Demonstração: Podemos observar, pela propriedade (6), que

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{z_1+z_2}\\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2\end{aligned}$$

Lema 1.1 $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

Demonstração. Fica como exercício □

Da propriedade (4), sabemos que $2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$. Então,

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\ &= (|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

Com efeito, obtemos $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$. A generalização se dá por indução.

(11.)

Demonstração: Note que $|(z_1+z_2)-z_2| \leqslant |z_1+z_2|+|z_2| \iff |z_1|-|z_2| \leqslant |z_1+z_2|$

(12.)

Demonstração: De modo análogo à demonstração anterior,

$$|(z_1-z_2)+z_2| \leqslant |z_1-z_2|+|z_2|$$

Então $|z_1-z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|$. Por outro lado,

$$|(z_2-z_1)+z_1| \leqslant |z_2-z_1|+|z_1$$

Então $|z_1-z_2| \geqslant |z_2|-|z_1| \iff |z_1|-|z_2| \geqslant -|z_1-z_2|$. É fácil perceber que obtemos a seguinte desigualdade

$$-|z_1-z_2| \leqslant |z_1|-|z_2| \leqslant |z_1-z_2|$$

Com efeito, $||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2|$

2 Números complexos e sua forma trigonométrica

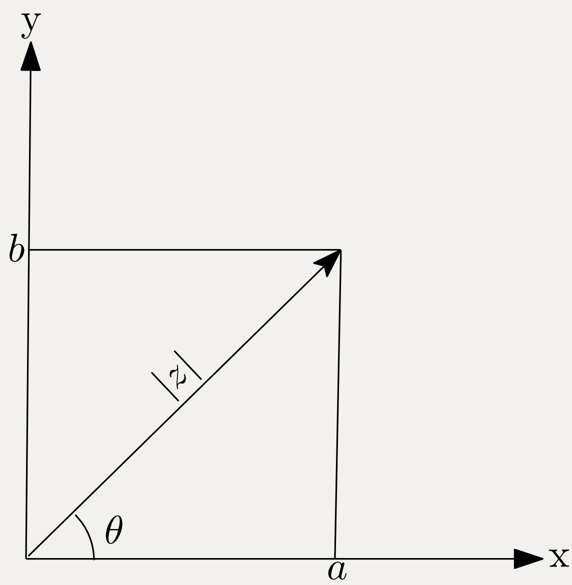

Figura 2

Pelo gráfico, observamos que $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\operatorname{sen}\theta$. Daí,

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$
$$z = r\operatorname{cis}\theta$$

Podemos fazer algumas observações inicias. Num primeiro momento, é importante notar que $\theta \in [0, 2\pi]$ e que $\theta = \arctan\frac{b}{a} + k\pi$. O ângulo θ é chamado de argumento do complexo.

$$\arg(z) = \arctan\frac{b}{a}$$

É importante lembrar do primeiro teorema de Moivre:

$$z^n = r^n \operatorname{cis}^n\theta \iff z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

Do teorema acima, obtemos também a radiciação nos complexos. Sendo $z^n = r\operatorname{cis}\theta$, então teremos que

$$z_k = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Uma forma de expressar o complexo e que também pode ser útil é usar $\exp(x) = e^x$, temos que

$$z = r\operatorname{cis}\theta \iff e^{i\theta} = r\operatorname{cis}\theta$$

Com isso, chegamos em uma etapa primordial do nosso guia, que é conseguir transformar funções trigonométricas em números complexos. Ao tomarmos $r = 1$, obtemos $z = \operatorname{cis}\theta$. Observe que;

$$z + \overline{z} = \operatorname{cis}\theta + \operatorname{cis}(-\theta) = 2\cos\theta$$
$$z - \overline{z} = \operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}(-\theta) = 2i\operatorname{sen}\theta$$

Como o módulo é 1, então $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Daí,

$$\begin{cases} z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta \\ z - \dfrac{1}{z} = 2i \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Nesse momento temos ferramentas suficientes para dar início às aplicações em trigonometria. Vamos começar do básico e ir expandindo nosso leque de aplicações

3 Questões gerais

Questão 1.

(a) Mostre que $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$ e que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Resolução: Bom, como podemos aplicar complexos nisso? Tem alguma forma de obtermos um complexo z que inicialmente tem $\arg(z) = x$ e após uma transformação, ele vira z' e passar a ter $\arg(z') = 2x$? A resposta é: temos.

Por Moivre, seja $z = \operatorname{cis} x$ sabemos que

$$z^2 = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{cis} 2x$$

Podemos realizar a expansão do quadrado

$$\operatorname{cis} 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2i \cos x \operatorname{sen} x$$

Então,

$$\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2i \operatorname{sen} x \cos x$$

Como os complexos são iguais, as partes reais devem ser iguais, assim como as partes imaginárias.

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x \end{cases}$$

Exatamente o que queríamos mostrar. ∎

(b) Mostre que $\cos 3x = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ e $\operatorname{sen} 3x = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

Resolução: De modo análogo, sendo $z = \operatorname{cis} x$, então

$$\operatorname{cis} 3x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3$$

Como

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\operatorname{cis} 3x = (\cos^3 x + 3\cos^2 x \cdot i \operatorname{sen} x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x)$$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\end{aligned}$$

Para a parte imaginária

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3x &= 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x \\ &= 3(1 - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x \\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\end{aligned}$$

Como queríamos, mais uma vez. ■

É natural pensarmos que se funciona para $n = 2$ e $n = 3$, também vai funcionar para valores maiores que esses. De fato,

$$\operatorname{cis} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$$

sendo uma das formas de obter a expansão de arcos em trigonometria.

Questão 2. Mostre que

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a\end{aligned}$$

Resolução: Nessa questão, será útil utilizar a forma exponencial dos complexos. Tomando $e^{ia} = \operatorname{cis} a$ e $e^{ib} = \operatorname{cis} b$, podemos fazer

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = e^{i(a+b)} = \operatorname{cis}(a+b)$$

Então temos

$$\begin{aligned}e^{i(a+b)} &= (\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) \\ &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + (\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a)i \\ &= \operatorname{cis}(a+b)\end{aligned}$$

Com isso, mostramos o esperado. ■

Questão 3. Mostre que

(a) $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Resolução: Definindo $z \coloneqq \operatorname{cis} a$ e $w \coloneqq \operatorname{cis} b$, temos

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos a$$

$$w + \frac{1}{w} = 2\cos b$$

Daí,

$$2\cos a + 2\cos b = z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w} &= z + w + \frac{z+w}{zw} \\ &= (z+w)\left(1 + \frac{1}{zw}\right) \end{aligned}$$

Mas, $\frac{1}{zw} = \frac{1}{\operatorname{cis}(a+b)} = \operatorname{cis}(-a-b)$

$$= (z+w)[1 + \operatorname{cis}(-a-b)]$$

Lema 3.1 $1 + \operatorname{cis} x = 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{cis}\frac{x}{2}$

Demonstração. Fica como exercício □

$$\begin{aligned} &= (\operatorname{cis} a + \operatorname{cis} b)\left[2\cos\frac{a+b}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{-a-b}{2}\right)\right] \\ &= 2\cos\frac{a+b}{2}\left[\operatorname{cis} a \operatorname{cis}\left(\frac{-a-b}{2}\right) + \operatorname{cis} b \operatorname{cis}\left(\frac{-a-b}{2}\right)\right] \\ &= 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

Como temos, inicialmente, $2(\cos a + \cos b)$, segue o resultado. ■

(b) $\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

(c) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Dica: lembre que $z = \operatorname{cis} x \implies z + \overline{z} = 2i\operatorname{sen} x$

(d) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Questão 4. Mostre que

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$

Resolução: Lembrando que

$$\begin{aligned} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ e^{ix} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{aligned}$$

É fácil ver que $e^{ix} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = (\cos x + i\operatorname{sen} x)\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) = i(\cos x + i\operatorname{sen} x)$

$$\begin{aligned} i(\cos x + i\operatorname{sen} x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ -\operatorname{sen} x + i\cos x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{aligned}$$

Como as partes reais e imaginárias devem ser iguais, obtemos

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

■

(b) $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$

Questão 5. Calcule $\cos 15°$

Resolução: Se temos um complexo $z = a + bi = \operatorname{cis} 15°$, então $(a + bi)^2 = \operatorname{cis} 30°$.

$$a^2 - b^2 + 2abi = \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$$

Com isso, vem um sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \cos 30° \\ 2ab = \operatorname{sen} 30° \end{cases}$$

Então $b = \dfrac{1}{4a} \implies a^2 - \left(\dfrac{1}{4a}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Fazendo uma substituição de variável $a^2 = t$, chegamos na equação

$$16t^2 - 8\sqrt{3}t - 1 = 0 \iff t_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Como $t_1 < 0$, descartamos. Logo,

$$a^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \implies a = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Como $a = \cos 15°$, temos $a > 0$. A única solução que satisfaz é

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

Finalmente, chegamos que

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

Questão 6. Calcule $\operatorname{sen} 18^\circ$

Resolução: Essa questão é mais interessante. Primeiramente precisamos pensar em como levar 18° à um arco que conhecemos. Bem, fazendo uma tabuada básica, nota-se que $18 \cdot 5 = 90$. Então se tomarmos um complexo da forma

$$z = \operatorname{cis} 18^\circ \implies z^5 = \operatorname{cis} 90^\circ$$

Mas, pra onde isso nos leva? Sabendo que $z^5 = i$, o que podemos fazer para obter o que queremos?

$$\begin{aligned} z^5 - i &= z^5 - i^5 \\ &= (z - i)(z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1) \end{aligned}$$

Como $z \neq i$, temos

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0$$

Dividindo por z^2, temos

$$z^2 + iz - 1 - \frac{i}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + i\left(z - \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

Fazendo $z - \dfrac{1}{z} = y = 2i \operatorname{sen} 18^\circ$,

$$y^2 + iy + 1 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2°, vem que $y_1 = i\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $y_2 = -i\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Logo, temos duas opções

$$2i \operatorname{sen} 18^\circ = y_1 \text{ ou } 2i \operatorname{sen} 18^\circ = y_2$$

Como $\operatorname{sen} 18^\circ > 0$, só pode ser y_1, então

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$