

Identificación experimental de un sistema de piñón y doble cremallera con incertidumbre para modelación dinámica

Santiago Estrada Bernal
Ingeniería Mecatrónica
Universidad EIA
santiago.estrada6@eia.edu.co
ORCID: 0009-0000-0607-6119

Maria Camila Tonuzco
Ingeniería Mecatrónica
Universidad EIA
maria.tonuzco@eia.edu.co
ORCID: 0009-0003-5578-624X

Tatiana Manrique Espíndola
Departamento de Mecatrónica y Electromecánica
Instituto Tecnológico Metropolitano ITM
dollymanrique@itm.edu.co
ORCID: 0000-0002-5346-4277

Palabras clave— Sistema dinámico, sistema piñón-doble cremallera, sistema dinámico conmutado, identificación experimental de sistemas, instrumentación electrónica.

Key words— dynamic system, double-rack and pinion system, switched systems, system identification, instrumentation

Resumen— Este estudio presenta el diseño, construcción e instrumentación electrónica de un sistema de piñón y doble cremallera para evaluar el efecto de las incertidumbres en el desempeño de los modelos dinámicos complejos. El sistema, compuesto por un motor DC, cremalleras opuestas, resortes que modelan la deformación del material, y sensores, permite obtener mediciones del desplazamiento angular, la velocidad y la corriente. Los datos obtenidos son usados para identificar

experimentalmente los parámetros inciertos del sistema, reduciendo exitosamente la desviación existente entre el modelo matemático y la dinámica experimental del sistema. La comprensión previa de la dinámica del sistema es crucial para evaluar con éxito los parámetros a identificar y la estrategia de identificación.

Abstract— This study presents the design, construction, and electronic instrumentation of a double-rack and pinion system to evaluate the effect of uncertainties on the performance of complex dynamic models. The system, composed of a DC motor, opposing racks, springs that model the material deformation, and sensors, allows measurements of angular displacement, velocity, and current. The obtained data is used to experimentally identify the uncertain parameters of the system, successfully reducing the deviation between the mathematical model and the experimental dynamics of the system. A-priori understanding of the system dynamics is crucial to evaluating the parameters and identification strategy.

1. Introducción

Los mecanismos de engranajes y cremalleras se usan en diversas aplicaciones de ingeniería, donde la robustez y precisión del movimiento son clave (Litak et al., 2004). El modelado, la simulación y las pruebas experimentales son esenciales en su desarrollo (Mottershed & Friswell, 1993).

De forma general, los sistemas de piñón y doble cremallera cuentan con dos cremalleras idénticas opuestas con un engranaje situado entre ellas. En la aplicación particular tratada en el presente trabajo, un motor eléctrico acciona el engranaje, permitiendo el movimiento vertical de cada cremallera, que está unida mecánicamente a un resorte en su base para modelar la deformación del material. Usualmente, el sistema

de piñón y doble cremallera se ve limitado por sus características fijas, haciendo necesaria la implementación de una estrategia para restringir el ángulo de rotación del motor, lo que causa dinámicas discretas relacionadas a la conmutación del sentido de desplazamiento, y dinámicas continuas asociadas al desplazamiento de cada cremallera y del piñón entre cada conmutación. En efecto, este sistema se puede modelar como un sistema dinámico híbrido (hybrid dynamical system) o por un sistema conmutado (switched system). Las variables de interés en este sistema incluyen el desplazamiento angular $\theta(t)$ [rad], velocidad angular $\omega(t)$ [rad/s] y corriente del motor $I_a(t)$ [A].

Sin embargo, para poder estudiar los fenómenos asociados a estas dinámicas complejas, las incertidumbres no despreciables del sistema deben ser apropiadamente modeladas. Este artículo presenta el diseño y prueba de un sistema de piñón y doble cremallera, y la identificación experimental de sus parámetros inciertos, para lo cual se obtienen mediciones de desplazamiento angular, velocidad y corriente. Se describe la metodología de construcción y dinámicas de movimiento del sistema. Es importante resaltar que, este trabajo se enfoca en el desarrollo del modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se identifican experimentalmente los parámetros inciertos del sistema, con énfasis en la fricción viscosa rotacional \mathbf{B} del piñón [Nms/rad] y en la resistencia de armadura R_a [Ω] y la inductancia de armadura L_a [H] del motor DC. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos a partir de simulaciones en Matlab-Simulink del modelo dinámico identificado y su comparación con mediciones experimentales, evaluando la precisión del modelo dinámico obtenido.

2. Sistema piñón y doble cremallera

2.1 Diseño y construcción

El proceso de diseño consistió en modelar todos los componentes móviles, incluidos el piñón, las cremalleras y las estructuras de soporte, en Autodesk Inventor para su impresión en 3D. La base inicial se cortó con láser en MDF. Sin embargo, este diseño tenía defectos críticos, como la ausencia de un eje adecuado, que provocaba un rápido desgaste del piñón y vibraciones excesivas. Además, el motor elegido no tenía suficiente par y la estructura carecía de una base estable.

Para solucionar estos problemas, se mecanizó un eje de acero en la Universidad EIA, con una placa metálica soldada que sujetaba el engranaje recto como muestra Figura 1(a). Se fabricó un acople de latón, inspirado en el de Mancuso y Jones (2001), para conectar el motor al eje utilizando tornillos prisioneros en lugar de engranajes Figura 1(b). Por último, Figura 1(c) exhibe la base estable para mejorar la integridad estructural construida.



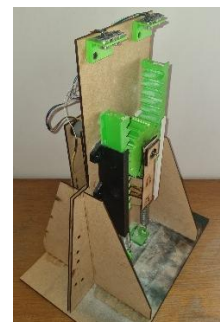
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1. Sistema Construido (a) Piñón con eje, (b) acople de motor, (c) base y (d) sistema completo. Fuente: Elaboración propia.

Para poder compararlo con exactitud con un modelo matemático, el sistema físico requería robustez para minimizar las vibraciones y soportar su uso repetido. Además, las principales variables que intervienen en el modelo dinámico debían ser sensadas. Se utilizaron sensores de ultrasonido HY-SRF05 para medir el desplazamiento de las cremalleras y un sensor ACS712 para la medición de corriente. El movimiento del sistema y el registro del desplazamiento angular del engranaje se llevaron a cabo mediante un motor Pololu 37D con una relación de transmisión de 102,08:1 y un codificador de cuadratura integrado de 64 CPR. Las señales fueron registradas y procesadas mediante un Arduino Uno. El tiempo de muestreo utilizado fue de 50ms. El sistema final está registrado en la Figura 1(d). Se puede encontrar en el siguiente link, un video del sistema piñón doble cremallera bajo estudio: <https://youtube.com/shorts/cgN-SCW-EeU>.

2.2 Descripción del sistema con ecuaciones diferenciales

El sistema puede describirse matemáticamente con las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de sus elementos. La Figura 2 plantea un circuito RL ampliamente usado para el modelado de motores de corriente directa (Ogata, 2014). Usando la ley de Kirchoff de voltajes en la malla, se obtiene $0 = V_{in}(t) - V_{Ra}(t) - V_{La}(t) - V_M(t) - V_M(t)$. Expandiendo la ecuación y despejando para la derivada de la variable de interés, se obtiene que $\dot{I}_a(t) = \frac{1}{L_a} V_{in}(t) - \frac{R_a}{L_a} I_a(t) - \frac{K_e}{L_a} \omega(t)$, donde K_e [Vs/rad] es la constante de velocidad del motor y L_a [H] y R_a [Ω] son la inductancia y resistencia de armadura, respectivamente.

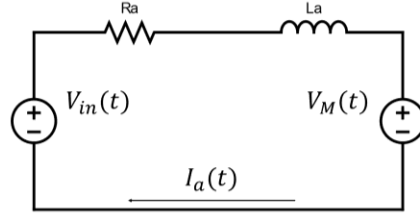


Figura 2. Sistema de armadura de un motor DC. Fuente: Elaboración propia.

El sistema físico puede simplificarse al diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 3, donde $T_1(t)$ [Nm] y $T_2(t)$ [Nm] son los torques de las cremalleras que se oponen al movimiento y $T_M(t)$ [Nm] es el torque del motor. La física newtoniana indica que $\sum \tau(t) = J\dot{\omega}(t)$, con J [Nms²] inercia rotacional (Palm, 2021). Asumiendo que la masa de las cremalleras es despreciable, los torques de oposición al movimiento serán iguales a $Rk\Delta x(t)$, donde R [m] es el radio del piñón, k [N/m] es el coeficiente de elasticidad del resorte y $\Delta x(t)$ es la deformación del resorte causada por el desplazamiento de la cremallera. Expandiendo y despejando para la aceleración angular, se obtiene $\dot{\omega}(t) = \frac{K_t}{J}I_a(t) - \Delta x(t)\left(\frac{Rk_2+Rk_1}{J}\right)$, con K_t [Nm/A] la constante del motor. Conociendo el cambio de la velocidad angular, se puede integrar dos veces para determinar el valor del desplazamiento angular $\theta(t)$.

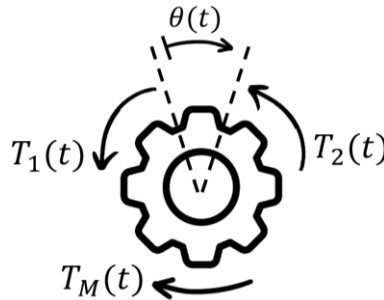
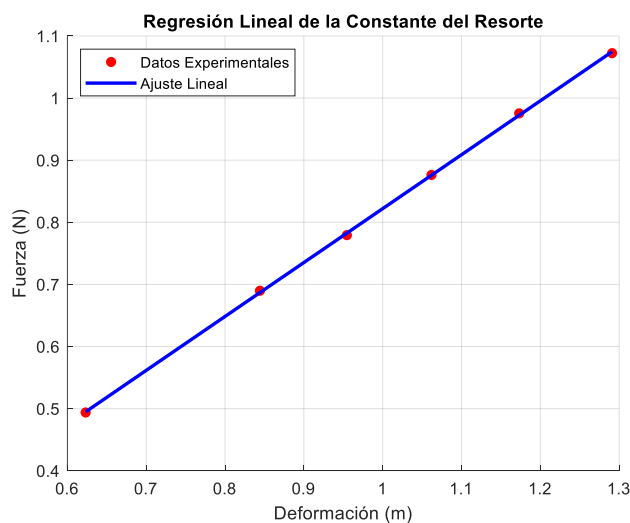


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre del piñón. Fuente: Elaboración propia.

2.3 Caracterización del resorte

El proceso de cálculo inició con la caracterización de los resortes comerciales disponibles, ya que estos eran el único componente que no podía diseñarse a medida, condicionando así todo el diseño.

La caracterización se realizó de forma experimental fijando el resorte en posición vertical y aplicando pesos para medir su deformación. La Figura 4(b) muestra el montaje experimental, mientras que la Figura 4 (a) presenta la gráfica de los datos obtenidos y la ecuación de ajuste. La pendiente de la recta es aproximadamente 0.87N/m lo que define la constante de elasticidad del resorte.



(a)



(b)

Figura 4. Caracterización de resorte. (a) Datos experimentales del resorte, (b) Montaje para la caracterización del resorte. Fuente: Elaboración propia.

Con este valor, se estimó la energía potencial elástica almacenada en el resorte utilizando la expresión $E(t) = \frac{1}{2}k(\Delta x_k(t))^2$. Para una deformación máxima de 5cm, la energía máxima almacenada es de aproximadamente 1.085mJ.

3. Identificación experimental del sistema piñón y doble cremallera

3.1 Caracterización experimental del motor

Para modelar correctamente el motor de corriente directa, es necesario conocer los valores numéricos de los parámetros que lo definen (i.e., Ra , La , K_t y K_e). Esto se puede lograr de manera experimental obteniendo una respuesta experimental a un escalón y comparándola con la respuesta al escalón analítica. En general, la función de transferencia de la velocidad angular de un motor con entrada de un voltaje y una inercia conocida J está dada por $G(s) = \frac{K_t}{JLas^2 + s(RaJ + BLa) + K_tK_e + BRa}$ (Southern Illinois University, 2015). Nótese que los parámetros de la función de transferencia son los mismos que se han mencionado en el presente artículo, exceptuando la fricción viscosa rotacional B . Dado que se está asumiendo en primera instancia una oposición al movimiento por contacto de cuerpos nula, la función de transferencia analítica se convierte en $G(s) =$

$$\frac{K_t}{JLas^2 + RaJs + K_tK_e}.$$

El motor Pololu 37D usado cuenta con una hoja de características detallada de donde se pueden extraer varios de los parámetros relevantes. Entre ellos, la constante de velocidad del motor K_e se valora en 1.1459Vs/rad y la constante del motor K_t , 0.4244 Nm/A. La inercia J utilizada corresponde al engrane mostrado en la Figura 1(a). Con un radio de 49.5mm, y una masa de 396.45g, la inercia aproximada es de 4.857e-4 Nms². La resistencia e inductancia de armadura se obtuvieron experimentalmente, sometiendo

al motor a un escalón de voltaje de 12V y registrando la velocidad angular a lo largo del tiempo. Los datos fueron transformados a radianes por segundo y normalizados al escalón unitario asumiendo homogeneidad del sistema.

Se realizó la identificación experimental del sistema mediante dos estrategias: aproximación caja gris: en la que los indicadores de desempeño del sistema (porcentaje de sobreimpulso, tiempo de establecimiento, tiempos de subida, etc.) se usaron solo para ajustar los parámetros desconocidos de una función de transferencia de un sistema de segundo orden, asumiendo J , K_t y K_e como parámetros conocidos; y una aproximación caja negra, en la que los datos experimentales son ingresados al toolbox *ident* de Matlab para su identificación experimental, asumiendo todos los parámetros como desconocidos. La Figura 5 muestra los resultados experimentales con ambos modelos entre 0 y 5 segundos. A fin de evitar apreciaciones solo cualitativas, se calculó el error cuadrático medio (ECM) entre ambas aproximaciones y el resultado experimental. La métrica de desviación arrojó un valor de 0.0089 para la función de transferencia de aproximación de caja negra y de 0.001 para la aproximación de caja gris.

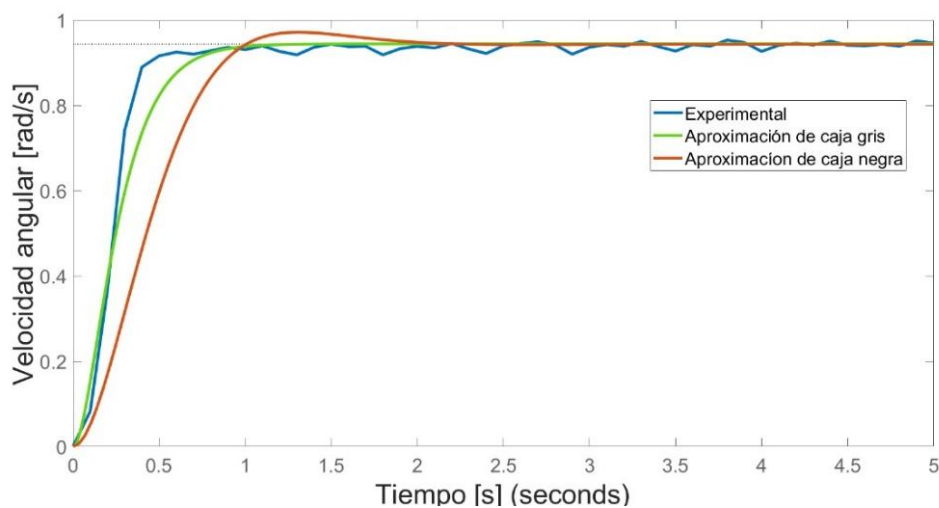


Figura 5. Respuesta al escalón unitario experimental, con aproximación de caja gris y aproximación de caja negra. Fuente: elaboración propia.

Por sus mejores resultados cualitativos (respuesta sin sobreimpulso) y cuantitativos, se eligió usar para estimar los parámetros del motor la siguiente función de transferencia numérica experimental $G(s) = \frac{48.17}{s^2 + 14.29s + 51.02}$, que corresponde a la aproximación caja gris de la dinámica del motor. Haciendo una comparación entre las funciones de transferencia analítica y numérica experimental del sistema, se identifica que la inductancia de armadura tiene un valor de $L_a = 18.14\text{H}$. De manera similar, el coeficiente de s se relaciona con la resistencia de armadura, permitiendo identificar un R_a de aproximadamente 259Ω .

Todos los parámetros esenciales del sistema, identificados experimentalmente o hallados por hoja de datos, se recopilan en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del sistema. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Valor	Unidades
R	49.5e-3	m
M	0.39645	kg
J	4.857e-4	Nms ²
K_e	1.1459	Vs/rad
K_t	0.4244	Nm/A
L_a	18.138	H

R_a	259	Ω
K_1	0.8682	N/m
K_2	0.8682	N/m

3.2 Identificación experimental de la fricción viscosa rotacional B [Nms/rad]

Utilizando los parámetros de la Tabla 1, se realizó la simulación en Matlab-Simulink de la función de transferencia anteriormente identificada, usando una señal de voltaje en forma de onda cuadrada como entrada. Los resultados obtenidos fueron comparados con los datos experimentales, evidenciándose un retraso en la respuesta de las mediciones experimentales en relación con las simuladas, así como una menor magnitud en todas las variables analizadas.

Este comportamiento se observó de manera consistente en el desplazamiento y la velocidad angular, así como en el desplazamiento y la velocidad de ambos racks. Sin embargo, la mayor discrepancia se presentó en la corriente del motor mostrada en la Figura 6, cuya respuesta experimental difirió significativamente de la simulada.

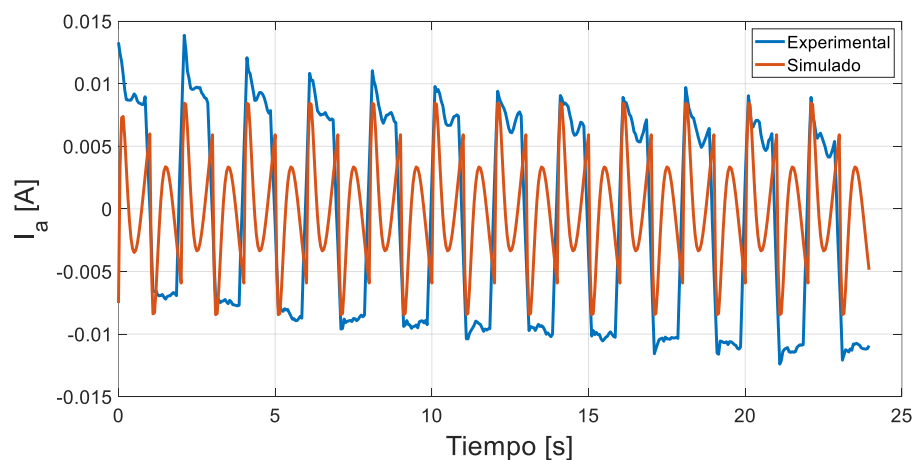


Figura 6. Corriente experimental y simulada. Fuente: Elaboración propia.

La Figura 7 presenta los resultados de la posición angular obtenidos experimentalmente y con simulación. Un leve desfase temporal y una diferencia en la magnitud se vuelven evidentes.

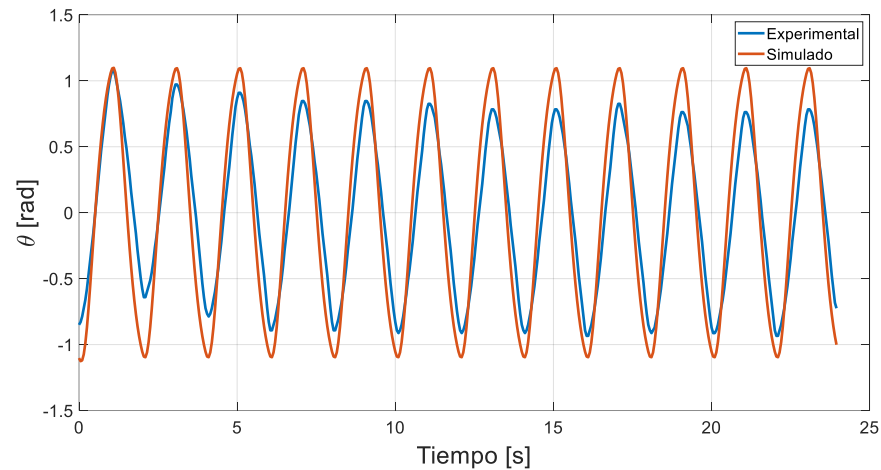


Figura 7. Posición angular experimental y simulada. Fuente: Elaboración propia.

La tercera variable de interés, velocidad angular $\omega(t)$, se aprecia en la Figura 8. El cambio en la posición angular difiere significativamente en los valores máximos y mínimos alcanzados. La simulación indica que, bajo las condiciones dadas, el mecanismo debería lograr una rapidez de aproximadamente 3.5rad/s. No obstante, los resultados experimentales indican un máximo de alrededor de 2.5rad/s.

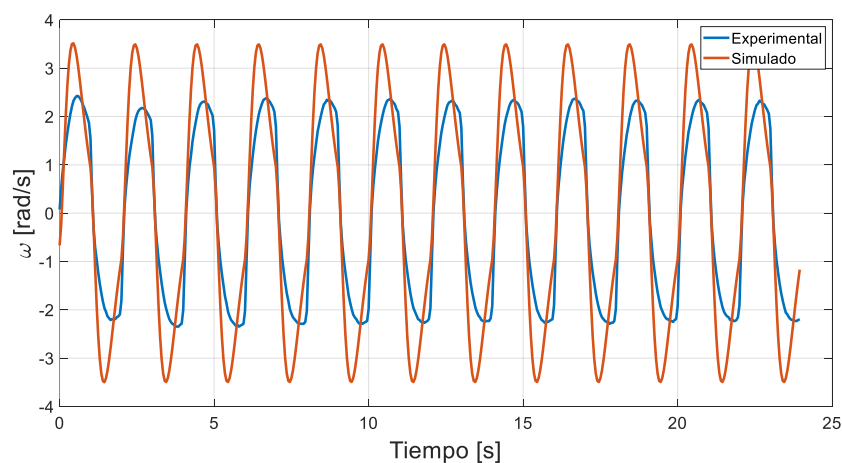


Figura 8. Velocidad angular experimental y simulada. Fuente: Elaboración propia.

La atenuación aproximadamente constante, junto con el traslado hacia la derecha de la función experimental sugiere la presencia de una fuerza lineal que se opone al movimiento. Esta se identificó como una fricción viscosa rotacional B [Nms/rad], que debe incluirse en la ecuación diferencial de la velocidad angular, resultando en $\dot{\omega}(t) = \frac{K_t}{J} I_a(t) - \Delta x(t) \left(\frac{Rk_2 + Rk_1}{J} \right) - \frac{B}{J} \omega(t)$.

Considerando el contexto del sistema, se implementó una fricción viscosa rotacional de 0.0009Nms/rad en la simulación. Se realizó una evaluación preliminar cualitativa de los resultados simulados tras este ajuste. La Figura 9 compara los datos experimentales con la nueva simulación, mostrando que en ciertos ciclos la corriente real sigue un comportamiento similar al modelo. Sin embargo, se observa una resistencia al cambio en el mecanismo real, ya que los resultados experimentales no presentan mesetas de la misma magnitud que la simulación.

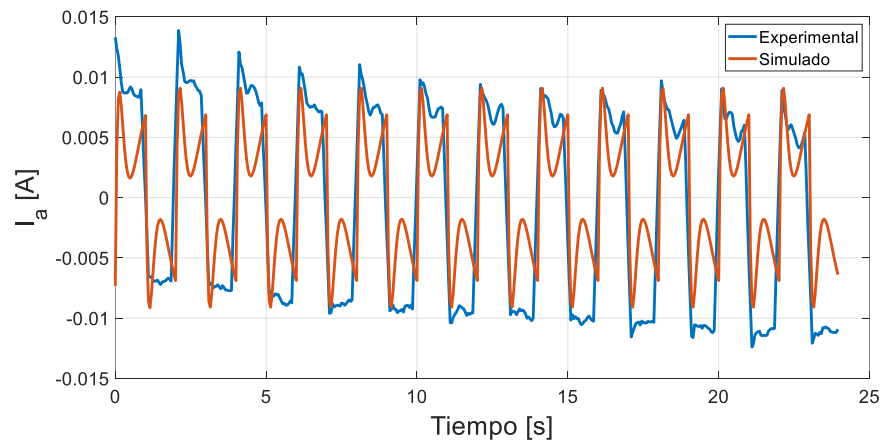


Figura 9. Corriente experimental y simulada con ajuste de fricción viscosa rotacional.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez se compara el nuevo modelo con los resultados experimentales en la Figura 10, se aprecia de mejor manera la mejora que supone la inclusión de una fricción viscosa rotacional de 0.0009 Nms/rad . Ahora, el retraso es casi imperceptible y la diferencia de magnitudes se redujo.

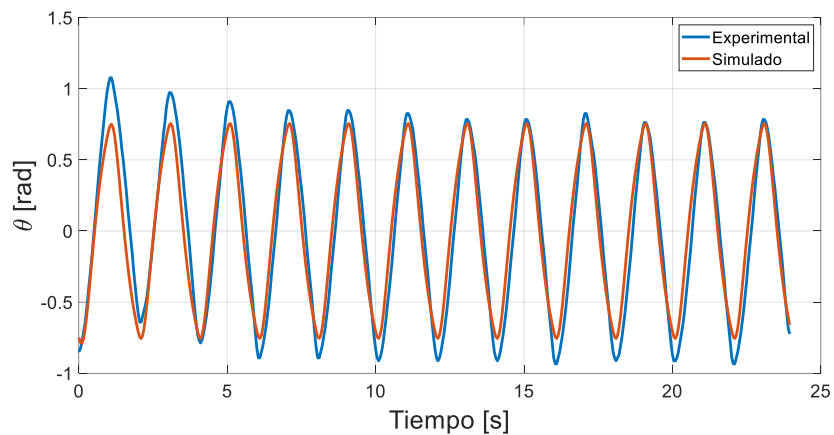


Figura 10. Posición angular experimental y simulada con ajuste de fricción viscosa rotacional. Fuente: Elaboración propia.

De manera similar, la Figura 11 muestra un menor desfase de velocidad angular experimental y simulada tras implementar el ajuste de la fricción viscosa rotacional. Si bien las formas de las gráficas no se ven idénticas como en el caso de la posición angular, la diferencia entre picos es casi nula. Estos nuevos valores ratifican la necesidad de incluir una fricción viscosa rotacional y darle un valor numérico de 0.0009 Nms/rad .

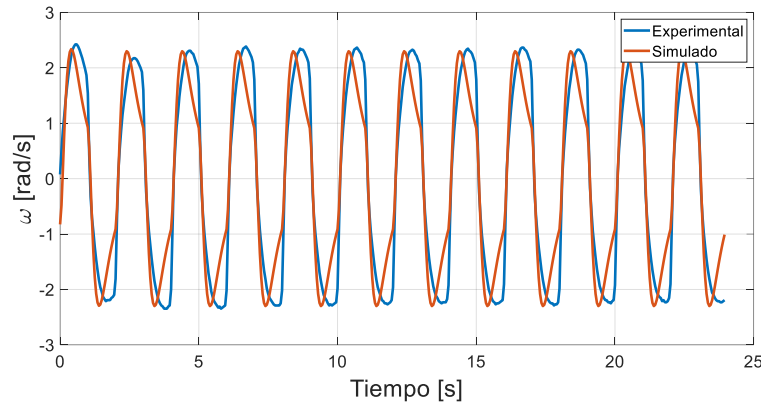


Figura 11. Velocidad angular experimental y simulada con ajuste de fricción viscosa rotacional. Fuente: Elaboración propia.

La inclusión de la fricción viscosa rotacional en el modelo redujo el retraso y la diferencia de amplitudes entre la simulación ajustada y los datos experimentales, aunque persistió una mayor magnitud en los valores inferiores experimentales debido a la influencia gravitacional en la configuración vertical del sistema.

Para complementar el análisis, se calculó el ECM como medida objetiva de las discrepancias. La Tabla 2 muestra una mejora general tras las correcciones, con la mayor reducción en la corriente y el menor cambio en el desplazamiento angular debido a su alta similitud inicial entre los datos simulados y experimentales.

Tabla 2. Errores cuadrático medio antes y después de ajuste con fricción viscosa rotacional. Fuente: Elaboración propia.

Variable	ECM $B = 0$ [Nms/rad]	ECM $B = 0.0009$ [Nms/rad]
$\theta(t)$	0.07848	0.03086
$\omega(t)$	0.98459	0.40519
$I_a(t)$	6.237313	2.77181e-5

4. Conclusiones

El estudio permitió identificar experimentalmente la fricción viscosa rotacional del mecanismo piñón y doble cremallera, ajustando el modelo con mayor precisión. Este hallazgo es clave en mecatrónica y automatización, donde comprender el comportamiento dinámico es fundamental para diseñar e implementar estrategias de control basadas en modelos. Se demostró la viabilidad de describir sistemas con ecuaciones diferenciales y de validar los mismos con herramientas de simulación como Matlab-Simulink. Se evidenció la importancia de implementar sensores que permitan adquirir señales con suficiente calidad y cantidad para identificar experimentalmente parámetros inciertos en la dinámica del sistema. Debe tenerse en cuenta que cuando la identificación experimental de los parámetros inciertos no es posible, se obtienen modelos dinámicos con incertidumbres para los cuales se diseñan estrategias de control robusto. La dinámica descrita en el presente trabajo permite el diseño e implementación de estrategias de control convencionales basadas en modelos.

5. Referencias

Litak, G., & Friswell, M. I. (2004). Nonlinear vibration in Gear Systems. *Nonlinear Dynamics of Production Systems*, 339–348.

<https://doi.org/10.1002/3527602585.ch19>

Mancuso, J.R., & Jones, R. (2001). Coupling Interface Connection.

Mottershead, J. E., & Friswell, M. I. (1993). Model updating in Structural Dynamics: A survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2), 347–375.

<https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1340>

Ogata, K. (2014). *System dynamics*. Pearson Education Limited.

Palm, W. J. (2021). *System dynamics*. McGraw-Hill Education.

Southern Illinois University. (2015, October). *LESSON 14: TRANSFER FUNCTIONS*

OF DC MOTORS. Lesson 14: Transfer Functions of Dc Motors. Obtenido el

2025, de

<https://www.engr.siu.edu/staff/spezia/Web438A/Lecture%20Notes/lesson14et438a.pdf>.