Solución a los Problemas de los Viernes

Juan Camacho, Santiago Correa

18 de Octubre 2024

Problema 1

Enunciado: Considere un sistema conformado por dos partículas de masa m unidas por tres resortes: dos con constante elástica k (los externos) y uno con constante elástica $3k$ (el central). Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones del sistema.

Solución

Definición de coordenadas

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos de las masas 1 y 2 respecto a sus posiciones de equilibrio.

Análisis de fuerzas

- **Masa 1:**

$$\begin{aligned} F_{\text{izq}} &= -kx_1 \\ F^{(1)}_{\text{central}} &= -3k(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

- **Masa 2:**

$$\begin{aligned} F_{\text{der}} &= -kx_2 \\ F^{(2)}_{\text{central}} &= -3k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{\text{izq}} + F^{(1)}_{\text{central}} = -kx_1 - 3k(x_1 - x_2) \\ &= -kx_1 - 3kx_1 + 3kx_2 = -4kx_1 + 3kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= F_{\text{der}} + F^{(2)}_{\text{central}} = -kx_2 - 3k(x_2 - x_1) \\ &= -kx_2 - 3kx_2 + 3kx_1 = -4kx_2 + 3kx_1 \end{aligned}$$

Forma matricial

Las ecuaciones se pueden escribir como:

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k & 3k \\ 3k & -4k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Resolución del problema de autovalores

Buscamos soluciones de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Sustituyendo:

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k & 3k \\ 3k & -4k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$\left(\begin{pmatrix} -4k & 3k \\ 3k & -4k \end{pmatrix} + m\omega^2 \mathbf{I} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\det \left(\begin{pmatrix} -4k - m\omega^2 & 3k \\ 3k & -4k - m\omega^2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Calculando el determinante:

$$\begin{aligned} \left(-4k - m\omega^2\right)^2 - (3k)^2 &= 0 \\ \left(4k + m\omega^2\right)^2 - 9k^2 &= 0 \\ \left(4k + m\omega^2\right)^2 &= 9k^2 \end{aligned}$$

Tomando raíces cuadradas:

$$4k + m\omega^2 = \pm 3k$$

Resolvemos para ω^2:

- **Primera solución** $(+3k)$**:**

$$4k + m\omega^2 = 3k \implies m\omega^2 = -k \implies \omega^2 = -\frac{k}{m} \text{ (No física)}$$

- **Segunda solución** $(-3k)$**:**

$$4k + m\omega^2 = -3k \implies m\omega^2 = -7k \implies \omega^2 = -\frac{7k}{m} \text{ (No física)}$$

Sin embargo, al reevaluar los signos y replantear las ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - 3kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 3kx_1 + 4kx_2 = 0 \end{cases}$$

La matriz se convierte en:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4k & -3k \\ -3k & 4k \end{pmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$(4k - m\omega^2)^2 - (-3k)^2 = 0 \implies (4k - m\omega^2)^2 - 9k^2 = 0$$

Desarrollando:

$$(4k - m\omega^2)^2 = 9k^2$$

Tomando raíces cuadradas:

$$4k - m\omega^2 = \pm 3k$$

Resolvemos:

- **Primera solución** $(+3k)$**:**

$$4k - m\omega^2 = 3k \implies m\omega^2 = k \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

- **Segunda solución** $(-3k)$**:**

$$4k - m\omega^2 = -3k \implies m\omega^2 = 7k \implies \omega^2 = \frac{7k}{m}$$

Modos normales

- **Para** $\omega^2 = \frac{k}{m}$**:**

$$\left(\begin{pmatrix} 4k & -3k \\ -3k & 4k \end{pmatrix} - m\omega^2 \mathbf{I} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$:

$$\begin{pmatrix} 4k - k & -3k \\ -3k & 4k - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$\begin{pmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene $A_1 = A_2$.

- **Para** $\omega^2 = \frac{7k}{m}$**:**

$$\left(\begin{pmatrix} 4k & -3k \\ -3k & 4k \end{pmatrix} - m\omega^2 \mathbf{I} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo $\omega^2 = \frac{7k}{m}$:

$$\begin{pmatrix} 4k - 7k & -3k \\ -3k & 4k - 7k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3k & -3k \\ -3k & -3k \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene $A_1 = -A_2$.

Conclusión

Las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$$

Los modos normales son:

- **Primer modo:** $x_1 = x_2$
- **Segundo modo:** $x_1 = -x_2$

Problema 2

Enunciado: Para un sistema como se muestra en la figura (dos masas iguales y todos los resortes iguales), calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones transversales.

Solución

Definición de coordenadas

Consideramos que las masas sólo pueden moverse verticalmente. Denotamos:

- $y_1(t)$: desplazamiento vertical de la masa 1.
- $y_2(t)$: desplazamiento vertical de la masa 2.

Análisis de fuerzas

Para pequeñas oscilaciones, las fuerzas verticales debidas a los resortes se pueden aproximar como:

- **Resortes externos:**
$$F_{1L}^{(y)} = -ky_1, \quad F_{2R}^{(y)} = -ky_2$$
- **Resorte central:**
$$F_{1C}^{(y)} = -k(y_1 - y_2), \quad F_{2C}^{(y)} = -k(y_2 - y_1)$$

Ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= F_{1L}^{(y)} + F_{1C}^{(y)} = -ky_1 - k(y_1 - y_2) = -2ky_1 + ky_2 \\ m\ddot{y}_2 &= F_{2R}^{(y)} + F_{2C}^{(y)} = -ky_2 - k(y_2 - y_1) = -2ky_2 + ky_1 \end{aligned}$$

Forma matricial

$$m \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolución del problema de autovalores

Buscamos soluciones de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Sustituyendo:

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Calculando el determinante:

$$(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$
$$(2k - m\omega^2)^2 = k^2$$

Tomando raíces cuadradas:

$$2k - m\omega^2 = \pm k$$

Resolvemos para ω^2:

- **Primera solución** $(+k)$**:**

$$2k - m\omega^2 = k \implies m\omega^2 = k \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

- **Segunda solución** $(-k)$**:**

$$2k - m\omega^2 = -k \implies m\omega^2 = 3k \implies \omega^2 = \frac{3k}{m}$$

Modos normales

- **Para** $\omega^2 = \frac{k}{m}$**:**

$$\begin{pmatrix} 2k - k & -k \\ -k & 2k - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene $B_1 = B_2$.

- **Para** $\omega^2 = \frac{3k}{m}$**:**

$$\begin{pmatrix} 2k - 3k & -k \\ -k & 2k - 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene $B_1 = -B_2$.

Conclusión

Las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Los modos normales son:

- **Primer modo:** $y_1 = y_2$
- **Segundo modo:** $y_1 = -y_2$

Problema 3

Enunciado: Para un sistema como se muestra en la figura (dos masas iguales m, cargas $+q$ y todos los resortes de constante elástica k), calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones horizontales.

Solución

Definición de coordenadas

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos horizontales de las masas 1 y 2 respecto a sus posiciones de equilibrio.

Análisis de fuerzas

- **Resortes externos:**
$$F_{\text{resorte},1} = -kx_1, \quad F_{\text{resorte},2} = -kx_2$$
- **Resorte central:**
$$F_{\text{central},1} = -k(x_1 - x_2), \quad F_{\text{central},2} = -k(x_2 - x_1)$$
- **Fuerza electrostática:**
$$F_e = \frac{k_e q^2}{(l + x_2 - x_1)^2} \approx \frac{k_e q^2}{l^2}\left(1 - \frac{2(x_2 - x_1)}{l}\right)$$
  El cambio en la fuerza es:
$$\Delta F_e = -\frac{2k_e q^2}{l^3}(x_2 - x_1)$$

Ecuaciones de movimiento

Masa 1:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) + \Delta F_e \\
&= -2kx_1 + kx_2 + \frac{2k_e q^2}{l^3}(x_2 - x_1) \\
&= \left(-2k - \frac{2k_e q^2}{l^3}\right) x_1 + \left(k + \frac{2k_e q^2}{l^3}\right) x_2
\end{aligned}$$

Masa 2:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) - \Delta F_e \\
&= -2kx_2 + kx_1 - \frac{2k_e q^2}{l^3}(x_2 - x_1) \\
&= \left(-2k - \frac{2k_e q^2}{l^3}\right) x_2 + \left(k + \frac{2k_e q^2}{l^3}\right) x_1
\end{aligned}$$

Forma matricial

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} & k + \frac{2k_e q^2}{l^3} \\ k + \frac{2k_e q^2}{l^3} & -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Resolución del problema de autovalores

Buscamos soluciones de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Obtenemos:

$$\left(\begin{pmatrix} -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} & k + \frac{2k_e q^2}{l^3} \\ k + \frac{2k_e q^2}{l^3} & -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} \end{pmatrix} + m\omega^2 \mathbf{I} \right) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\left(-2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} + m\omega^2\right)^2 - \left(k + \frac{2k_e q^2}{l^3}\right)^2 = 0$$

Simplificando:

$$\left(m\omega^2 - 2k - \frac{2k_e q^2}{l^3}\right)^2 = \left(k + \frac{2k_e q^2}{l^3}\right)^2$$

Tomando raíces cuadradas:

$$m\omega^2 - 2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} = \pm \left(k + \frac{2k_e q^2}{l^3}\right)$$

Resolvemos para ω^2:

- **Primera solución** $(+)$**:**

$$m\omega^2 = 2k + \frac{2k_e q^2}{l^3} + k + \frac{2k_e q^2}{l^3} = 3k + \frac{4k_e q^2}{l^3}$$

- **Segunda solución** $(-)$**:**

$$m\omega^2 = 2k + \frac{2k_e q^2}{l^3} - \left(k + \frac{2k_e q^2}{l^3}\right) = k$$

Las frecuencias naturales son:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3k + \frac{4k_e q^2}{l^3}}{m}$$

Modos normales

- **Para $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$:**
  La matriz se convierte en:

$$\begin{pmatrix} -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} + k & k + \frac{2k_e q^2}{l^3} \\ k + \frac{2k_e q^2}{l^3} & -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k - \frac{2k_e q^2}{l^3} & k + \frac{2k_e q^2}{l^3} \\ k + \frac{2k_e q^2}{l^3} & -k - \frac{2k_e q^2}{l^3} \end{pmatrix}$$

  De donde se obtiene $C_1 = C_2$.

- **Para $\omega_2^2 = \frac{3k + \frac{4k_e q^2}{l^3}}{m}$:**
  La matriz se convierte en:

$$\begin{pmatrix} -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} + 3k + \frac{4k_e q^2}{l^3} & k + \frac{2k_e q^2}{l^3} \\ k + \frac{2k_e q^2}{l^3} & -2k - \frac{2k_e q^2}{l^3} + 3k + \frac{4k_e q^2}{l^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + \frac{2k_e q^2}{l^3} & k + \frac{2k_e q^2}{l^3} \\ k + \frac{2k_e q^2}{l^3} & k + \frac{2k_e q^2}{l^3} \end{pmatrix}$$

  De donde se obtiene $C_1 = -C_2$.

Conclusión

Las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k + \frac{4k_e q^2}{l^3}}{m}}$$

Los modos normales son:

- **Primer modo:** $x_1 = x_2$
- **Segundo modo:** $x_1 = -x_2$