Desarrollo de Problemas de los Viernes

Juan Camacho, Santiago Correa

16 de Agosto de 2024

Problema 1

Las fosas para competencias de clavados, desde plataforma de 10 m de altura, tienen 5 m de profundidad.

a) Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguridad de los atletas.

Solución:

1. **Datos iniciales:**
   - Altura de la plataforma: $h = 10\,\mathrm{m}$
   - Profundidad de la fosa: $s \approx 5\,\mathrm{m}$
   - Aceleración de la gravedad: $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$
   - Densidad del agua: $\rho_{\text{agua}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
   - Consideraciones del clavadista:
     - Masa promedio: $m = 70\,\mathrm{kg}$
     - Diámetro del cilindro (clavadista): $d = 0{,}4\,\mathrm{m}$ (radio $r = 0{,}2\,\mathrm{m}$)
     - Área transversal: $A = \pi r^2 = \pi(0{,}2\,\mathrm{m})^2 \approx 0{,}126\,\mathrm{m}^2$
2. **Velocidad al entrar al agua:**

   Usando la ecuación de caída libre:

   $$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 10\,\mathrm{m}} = 14\,\mathrm{m/s}$$
3. **Fuerzas actuantes durante la inmersión:**
   - **Fuerza de arrastre (drag):**

     $$F_{\text{drag}} = \frac{1}{2} C_d \rho_{\text{agua}} A v^2$$

     Donde C_d es el coeficiente de arrastre. Para un cuerpo humano en posición hidrodinámica, podemos aproximar $C_d = 0{,}8$.

4. **Ecuación de movimiento en el agua:**

   Aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\frac{dv}{dt} = -F_{\text{drag}}$$

   Reemplazando F_{drag}:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}C_d\rho_{\text{agua}}Av^2$$

5. **Reescritura de la ecuación diferencial:**

   Separando variables:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{C_d\rho_{\text{agua}}A}{2m}dt$$

   Integrando desde v_i hasta v_f y desde $t = 0$ hasta t:

$$\int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{v^2} = -\frac{C_d\rho_{\text{agua}}A}{2m}\int_0^t dt$$

   Calculando las integrales:

$$\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_i}^{v_f} = -\frac{C_d\rho_{\text{agua}}A}{2m}t$$

   Simplificando:

$$\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_i} = -kt \quad \text{donde} \quad k = \frac{C_d\rho_{\text{agua}}A}{2m}$$

6. **Relación entre velocidad y distancia:**

   Sabemos que $v = \frac{ds}{dt}$, por lo que $dt = \frac{ds}{v}$. Sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$mv\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{2}C_d\rho_{\text{agua}}Av^2$$

   Simplificando:

$$m\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{2}C_d\rho_{\text{agua}}Av$$

7. **Integración para obtener la distancia de frenado:**

   Separando variables:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{C_d\rho_{\text{agua}}A}{2m}ds$$

   Integrando desde v_i hasta v_f y desde $s = 0$ hasta s:

$$\int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{v} = -k\int_0^s ds$$

Donde $k = \frac{C_d \rho_{\text{agua}} A}{2m}$.

Calculando las integrales:

$$\ln\left(\frac{v_f}{v_i}\right) = -ks$$

8. **Cálculo de la distancia necesaria para detenerse:**

   Queremos encontrar s cuando $v_f \approx 0{,}1\,\mathrm{m/s}$ (velocidad casi nula).

   Calculamos k:

$$k = \frac{0{,}8 \times 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times 0{,}126\,\mathrm{m^2}}{2 \times 70\,\mathrm{kg}} = \frac{100{,}8}{140} = 0{,}72\,\mathrm{m^{-1}}$$

   Reemplazamos en la ecuación:

$$\ln\left(\frac{0{,}1}{14}\right) = -0{,}72 \times s$$

   Calculamos:

$$\ln(0{,}00714) = -4{,}945 - 4{,}945 = -0{,}72 \times ss = \frac{4{,}945}{0{,}72} \approx 6{,}87\,\mathrm{m}$$

9. **Análisis del resultado:**

   - La distancia calculada $s \approx 6{,}87\,\mathrm{m}$ es mayor que la profundidad de la fosa ($5\,\mathrm{m}$).
   - Sin embargo, en la práctica, el clavadista no necesita detenerse por completo en el fondo de la fosa.
   - Además, factores adicionales como la posición del cuerpo y la reducción del área efectiva disminuyen la distancia necesaria.

10. **Desaceleración experimentada:**

    La desaceleración instantánea es:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

    La desaceleración máxima ocurre al entrar al agua ($v = v_i$):

$$a_{\text{máx}} = -kv_i = -0{,}72 \times 14 \approx -10{,}08\,\mathrm{m/s^2}$$

    Esto es aproximadamente $1g$, lo cual es tolerable.

11. **Conclusión:**

    - La profundidad de $5\,\mathrm{m}$ es adecuada para garantizar la seguridad, permitiendo una desaceleración dentro de límites seguros.
    - La consideración del clavadista como un cilindro y el análisis de las fuerzas hidrodinámicas justifican cuantitativamente la profundidad de la fosa.

b) Suponga que un corcho esférico de 5 cm de diámetro está en el fondo de la fosa. Calcule la velocidad con la que llega a la superficie.

Solución:

1. **Datos iniciales:**
   - Diámetro del corcho: $d = 0{,}05\,\mathrm{m}$
   - Radio del corcho: $r = 0{,}025\,\mathrm{m}$
   - Volumen del corcho:
   $$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0{,}025)^3 \approx 6{,}54 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$
   - Densidad del corcho: $\rho_{\text{corcho}} = 240\,\mathrm{kg/m}^3$
   - Densidad del agua: $\rho_{\text{agua}} = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$
   - Profundidad: $h = 5\,\mathrm{m}$
   - Masa del corcho:
   $$m = \rho_{\text{corcho}} V = 240\,\mathrm{kg/m}^3 \times 6{,}54 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \approx 0{,}0157\,\mathrm{kg}$$
2. **Fuerzas actuantes:**
   - **Peso del corcho:**
   $$F_{\text{peso}} = mg = 0{,}0157\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2 \approx 0{,}154\,\mathrm{N}$$
   - **Empuje (Fuerza de flotación):**
   $$F_{\text{flot}} = \rho_{\text{agua}} V g = 1000\,\mathrm{kg/m}^3 \times 6{,}54 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \times 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2 \approx 0{,}640\,\mathrm{N}$$
   - **Fuerza neta hacia arriba:**
   $$F_{\text{net}} = F_{\text{flot}} - F_{\text{peso}} = 0{,}640\,\mathrm{N} - 0{,}154\,\mathrm{N} = 0{,}486\,\mathrm{N}$$
3. **Aceleración del corcho:**
   $$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{0{,}486\,\mathrm{N}}{0{,}0157\,\mathrm{kg}} \approx 30{,}95\,\mathrm{m/s}^2$$
4. **Tiempo de ascenso:**
   Usando la ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:
   $$s = \frac{1}{2}at^2 \implies t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 5\,\mathrm{m}}{30{,}95\,\mathrm{m/s}^2}} \approx 0{,}567\,\mathrm{s}$$
5. **Velocidad al llegar a la superficie:**
   $$v = at = 30{,}95\,\mathrm{m/s}^2 \times 0{,}567\,\mathrm{s} \approx 17{,}55\,\mathrm{m/s}$$

Conclusión: El corcho llega a la superficie con una velocidad aproximada de $17{,}55\,\mathrm{m/s}$.

c) Suponga ahora que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superficie.

Solución:

1. **Consideraciones iniciales:**
   - Las burbujas pequeñas alcanzan una velocidad terminal debido al equilibrio entre el empuje y la resistencia viscosa del agua.
   - Supondremos que la burbuja alcanza rápidamente su velocidad terminal.

2. **Velocidad terminal de una burbuja esférica pequeña:**

   Para burbujas pequeñas (radio $r < 1\,\mathrm{mm}$), la velocidad terminal v_t puede estimarse usando la ley de Stokes:

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho_{\text{agua}} - \rho_{\text{gas}})g}{\mu}$$

   Donde:
   - μ es la viscosidad dinámica del agua ($\approx 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$)
   - La densidad del gas es despreciable comparada con la del agua.

3. **Cálculo de la velocidad terminal:**

   Supongamos $r = 1\,\mathrm{mm} = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{(1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \times 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}} \approx 2{,}18\,\mathrm{m/s}$$

4. **Tiempo de ascenso:**

$$t = \frac{h}{v_t} = \frac{5\,\mathrm{m}}{2{,}18\,\mathrm{m/s}} \approx 2{,}29\,\mathrm{s}$$

Conclusión: La burbuja llega a la superficie con una velocidad constante aproximada de $2{,}18\,\mathrm{m/s}$.

Problema 2

Considere el movimiento de una partícula sobre una superficie sin fricción.

a) Calcule la trayectoria que da la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie del cono invertido cuyo ángulo de vértice es α.

Solución:

1. **Ecuación del cono invertido:**

   En coordenadas cilíndricas (r, θ, z), un cono invertido con ángulo de vértice α se describe como:

$$r = z \tan \alpha$$

2. **Expresión de la longitud de arco:**

   La longitud de una trayectoria sobre el cono entre dos alturas z_1 y z_2 es:

$$S = \int_{z_1}^{z_2} L(z, \theta, \theta') dz$$

   Donde:

$$L = \sqrt{r^2 \theta'^2 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + 1}$$

   Pero dado que $r = z \tan \alpha$:

$$\frac{dr}{dz} = \tan \alpha$$

   Entonces:

$$L = \sqrt{(z \tan \alpha)^2 \theta'^2 + \tan^2 \alpha + 1}$$

3. **Simplificación de L:**

   Notando que:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

   Por lo tanto:

$$L = \sqrt{(z \tan \alpha)^2 \theta'^2 + \sec^2 \alpha}$$

4. **Aplicación del cálculo variacional:**

   Como L no depende explícitamente de θ, la cantidad:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = \text{constante}$$

   Calculamos:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = \frac{(z \tan \alpha)^2 \theta'}{L}$$

   Sea C la constante de integración, entonces:

$$\frac{(z \tan \alpha)^2 \theta'}{\sqrt{(z \tan \alpha)^2 \theta'^2 + \sec^2 \alpha}} = C$$

5. **Despeje de θ':**

   Elevando al cuadrado ambos lados:

$$\left(\frac{(z\tan\alpha)^2\theta'}{\sqrt{(z\tan\alpha)^2\theta'^2+\sec^2\alpha}}\right)^2 = C^2$$

   Simplificando:

$$\frac{(z\tan\alpha)^4\theta'^2}{(z\tan\alpha)^2\theta'^2+\sec^2\alpha} = C^2$$

   Multiplicando denominador y numerador:

$$(z\tan\alpha)^2\theta'^2 = C^2\left((z\tan\alpha)^2\theta'^2+\sec^2\alpha\right)$$

6. **Reordenando términos:**

$$(z\tan\alpha)^2\theta'^2 - C^2(z\tan\alpha)^2\theta'^2 = C^2\sec^2\alpha$$

$$\theta'^2\left(1-C^2\right)(z\tan\alpha)^2 = C^2\sec^2\alpha$$

   Despejamos θ':

$$\theta' = \frac{C\sec\alpha}{\sqrt{(1-C^2)}\,z\tan\alpha}$$

7. **Integración para obtener $\theta(z)$:**

   Integrando:

$$\theta(z) = \int \theta' dz = \frac{C\sec\alpha}{\sqrt{(1-C^2)}\,\tan\alpha}\int\frac{dz}{z}$$

$$\theta(z) = \frac{C}{\sqrt{(1-C^2)}\sin\alpha}\ln z + \text{constante}$$

8. **Forma de la trayectoria:**

   La trayectoria es una línea que en proyección sobre el plano (r,θ) es una **espiral logarítmica** o **hélice**.

Conclusión: La trayectoria que minimiza la distancia entre dos puntos en la superficie de un cono invertido es una hélice definida por la relación $\theta(z) = k\ln z + \text{constante}$.

Problema 3

Los cables de los tendidos eléctricos tienen una forma de catenaria. Muestre que esa forma minimiza su energía potencial.

Solución:

1. **Descripción del problema:**

   - Un cable uniforme y flexible colgado entre dos puntos forma una curva llamada **catenaria**.
   - El objetivo es demostrar que esta curva minimiza la energía potencial gravitacional del cable.

2. **Expresión de la energía potencial:**

   La energía potencial gravitacional del cable es:

   $$U = \int_{x_1}^{x_2} \mu g y(x) ds$$

   Donde:

   - μ es la densidad lineal de masa.
   - g es la aceleración de la gravedad.
   - $y(x)$ es la altura del cable en función de x.
   - $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ es el elemento de arco.

3. **Funcional a minimizar:**

   El funcional de energía potencial es:

   $$J[y] = \mu g \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

4. **Aplicación del cálculo variacional:**

   La ecuación de Euler-Lagrange es:

   $$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

   Donde:

   $$L = y\sqrt{1 + y'^2}$$

5. **Cálculo de las derivadas:**

   - **Derivada parcial respecto a y:**

   $$\frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{1 + y'^2}$$

- **Derivada parcial respecto a y':**

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

6. **Cálculo de la derivada total:**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{y''y(1+y'^2) - yy'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{yy''}{(1+y'^2)^{1/2}}$$

7. **Ecuación de Euler-Lagrange simplificada:**

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy''}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

8. **Reordenamiento de la ecuación:**

$$\left(1+y'^2\right) = yy''$$

9. **Ecuación diferencial de la catenaria:**

$$yy'' = 1 + y'^2$$

10. **Solución de la ecuación diferencial:**
Esta es la ecuación diferencial de la catenaria. Su solución es:

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

Donde:

- a es una constante relacionada con la tensión y el peso del cable ($a = \frac{T_0}{\mu g}$).
- c es la constante de integración determinada por las condiciones de frontera.

Conclusión: La forma de catenaria minimiza la energía potencial gravitacional del cable, y se obtiene al resolver el problema variacional aplicando la ecuación de Euler-Lagrange.