Solución a los Problemas de los Viernes

Juan Camacho, Santiago Correa

8 de Noviembre 2024

Problema 1

Tal y como se muestra en la figura, el punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.

Solución

Paso 1: Definir las coordenadas generalizadas

Consideramos las siguientes variables:

- x: Coordenada horizontal del punto de suspensión del péndulo, que se mueve a lo largo de la parábola $y = ax^2$. - θ: Ángulo que forma el hilo del péndulo con la vertical.

Las coordenadas del punto de suspensión son (x, y), donde $y = ax^2$.

Las coordenadas de la masa m del péndulo son:

$$x' = x + l\sin\theta,$$
$$y' = y - l\cos\theta.$$

Paso 2: Calcular las velocidades

Derivamos las posiciones respecto al tiempo:

$$\dot{x}' = \dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta},$$
$$\dot{y}' = \dot{y} + l\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

Dado que $y = ax^2$, entonces:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(ax^2) = 2ax\dot{x}.$$

Por lo tanto:

$$\dot{y}' = 2ax\dot{x} - l\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

(Nota: La derivada de $y' = y - l\cos\theta$ es $\dot{y}' = \dot{y} + l\sin\theta\,\dot{\theta}$ debido a que $\frac{d}{dt}(-l\cos\theta) = l\sin\theta\,\dot{\theta}$.)

Paso 3: Calcular la energía cinética T

La energía cinética del péndulo es:

$$T = \frac{1}{2}m\left((\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2\right).$$

Sustituimos las expresiones de las velocidades:

$$(\dot{x}')^2 = \left(\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2,$$
$$(\dot{y}')^2 = \left(2ax\dot{x} - l\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2.$$

Expandiendo cada término:

$$\begin{aligned}
(\dot{x}')^2 &= \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\cos\theta\,\dot{\theta} + l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2, \\
(\dot{y}')^2 &= (2ax\dot{x})^2 - 2\cdot 2ax\dot{x}\cdot l\sin\theta\,\dot{\theta} + l^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 \\
&= 4a^2x^2\dot{x}^2 - 4axl\dot{x}\sin\theta\,\dot{\theta} + l^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2.
\end{aligned}$$

Sumando los dos términos:

$$(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\cos\theta\,\dot{\theta} + l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 - 4axl\dot{x}\sin\theta\,\dot{\theta} + l^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2.$$

Agrupamos términos similares:

$$(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 = \left(\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2\right) + 2l\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right).$$

Dado que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 = \left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2.$$

Por lo tanto, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2\right].$$

Paso 4: Calcular la energía potencial V

La energía potencial es:

$$V = mgy' = mg\left(y - l\cos\theta\right) = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right).$$

Paso 5: Escribir el Lagrangiano L

El Lagrangiano es:

$$L = T - V.$$

Sustituyendo T y V:

$$L = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2\right] - mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right).$$

Paso 6: Calcular los momentos conjugados
Los momentos conjugados son:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left[\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x} + l\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right)\right],$$
$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\left[l^2\dot{\theta} + l\dot{x}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right)\right].$$

Paso 7: Escribir el Hamiltoniano H
El Hamiltoniano es:

$$H = p_x\dot{x} + p_\theta\dot{\theta} - L.$$

Sustituimos p_x, p_θ y L:

$$H = \left[m\left(\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x} + l\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right)\right)\right]\dot{x} + \left[m\left(l^2\dot{\theta} + l\dot{x}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right)\right)\right]\dot{\theta} - L.$$

Expandiendo:

$$H = m\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) - L.$$

Notamos que el término $ml\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right)$ aparece dos veces, por lo que lo sumamos:

$$H = m\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2ml\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + ml^2\dot{\theta}^2 - L.$$

Sustituimos L:

$$H = m\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2ml\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + ml^2\dot{\theta}^2 - \left[\frac{1}{2}m\left(\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2\right) - mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)\right].$$

Simplificamos:

$$H = \frac{1}{2}m\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right).$$

Finalmente, el Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2\right] + mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right).$$

Conclusión
El Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\left(\cos\theta - 2ax\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2\right] + mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right).$$

Problema 2

Sea el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \sin\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2,$$

donde A, γ, y k son constantes.

a) Hallar el lagrangiano $\mathcal{L}$

Paso 1: Encontrar $\dot{q}$ en términos de p

La ecuación de Hamilton para $\dot{q}$ es:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - A\left(\frac{1}{m}\cos\gamma t\right) = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t.$$

Despejamos p:

$$p = m\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right) = m\dot{q} + A\cos\gamma t.$$

Paso 2: Sustituir p en $\mathcal{H}$

Sustituimos p en $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2m}\left(m\dot{q} + A\cos\gamma t\right)^2 - A\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right)\cos\gamma t - A\gamma q\sin\gamma t + \frac{1}{2}kq^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\dot{q}\cos\gamma t - \frac{A^2}{m}\cos^2\gamma t - A\gamma q\sin\gamma t + \frac{1}{2}kq^2.\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q\sin\gamma t + \frac{1}{2}kq^2.$$

Paso 3: Calcular el lagrangiano $\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H}$

Sustituimos p y $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left(m\dot{q} + A\cos\gamma t\right)\dot{q} - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q\sin\gamma t + \frac{1}{2}kq^2\right) \\ &= m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t + A\gamma q\sin\gamma t - \frac{1}{2}kq^2.\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t + A\gamma q\sin\gamma t - \frac{1}{2}kq^2.$$

Respuesta a (a):

El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t + A\gamma q\sin\gamma t - \frac{1}{2}kq^2.$$

b) Encontrar un lagrangiano equivalente, $\mathcal{L}'$, que no dependa de t

Paso 1: Proponer una transformación de coordenadas

Definimos una nueva coordenada:

$$Q = q + \frac{A}{k}\cos\gamma t.$$

Calculamos la derivada temporal:

$$\dot{Q} = \dot{q} - \frac{A}{k}\gamma\sin\gamma t.$$

Paso 2: Sustituir en el lagrangiano original

Sustituimos $q = Q - \frac{A}{k}\cos\gamma t$ y $\dot{q} = \dot{Q} + \frac{A}{k}\gamma\sin\gamma t$ en $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{Q} + \frac{A}{k}\gamma\sin\gamma t\right)^2 + A\left(\dot{Q} + \frac{A}{k}\gamma\sin\gamma t\right)\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t$$
$$+ A\gamma\left(Q - \frac{A}{k}\cos\gamma t\right)\sin\gamma t - \frac{1}{2}k\left(Q - \frac{A}{k}\cos\gamma t\right)^2.$$

Paso 3: Simplificar y eliminar términos dependientes de t

Al expandir y simplificar, los términos dependientes de t se cancelan, resultando en:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}kQ^2 + \text{constante}.$$

Respuesta a (b):

El lagrangiano equivalente independiente de t es:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}kQ^2.$$

c) Calcular la forma del nuevo Hamiltoniano asociado a $\mathcal{L}'$. ¿Cuál es la relación entre los dos Hamiltonianos?

Paso 1: Calcular el nuevo momento conjugado

El momento conjugado asociado a Q es:

$$P_Q = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{Q}} = m\dot{Q}.$$

Paso 2: Encontrar el nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}'$

El Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}' = P_Q\dot{Q} - \mathcal{L}' = \frac{P_Q^2}{2m} + \frac{1}{2}kQ^2.$$

Paso 3: Relación entre los Hamiltonianos

El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}'$ es el de un oscilador armónico simple, mientras que el Hamiltoniano original $\mathcal{H}$ incluye términos dependientes del tiempo. La transformación realizada elimina estas dependencias, simplificando el sistema.

Respuesta a (c):

El nuevo Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}' = \frac{P_Q^2}{2m} + \frac{1}{2}kQ^2.$$

La relación entre los dos Hamiltonianos es que $\mathcal{H}'$ es una forma simplificada y autónoma de $\mathcal{H}$ tras la transformación, representando un oscilador armónico sin dependencia temporal.

Problema 3

El Hamiltoniano de un cierto sistema físico es:

$$\mathcal{H} = q + te^p.$$

a) Mostrar que la transformación $Q = q + e^p, \quad P = p$ es canónica

Paso 1: Verificar las relaciones de Poisson

Para que una transformación sea canónica, debe preservar el corchete de Poisson:

$$\{Q, P\} = \{q + e^p, p\} = \{q, p\} + \{e^p, p\} = 1 + 0 = 1.$$

Respuesta a (a):

La transformación es canónica porque preserva el corchete de Poisson:

$$\{Q, P\} = 1.$$

b) Encontrar la función generatriz de esta transformación

Paso 1: Elegir el tipo de función generatriz

Como $P = p$, utilizamos una función generatriz de segundo tipo $F_2(q, P)$.

Paso 2: Encontrar $F_2(q, P)$

Las relaciones son:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q},$$
$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

Dado que $P = p$, tenemos:

$$P = \frac{\partial F_2}{\partial q}.$$

Integrando respecto a q:

$$F_2(q, P) = Pq + f(P),$$

donde $f(P)$ es una función de P.

Usando $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$:

$$Q = q + f'(P).$$

Pero sabemos que $Q = q + e^P$, por lo que:

$$f'(P) = e^P \implies f(P) = e^P + C.$$

Entonces, la función generatriz es:

$$F_2(q, P) = Pq + e^P + C.$$

Podemos ignorar la constante C ya que no afecta las ecuaciones de movimiento.

Respuesta a (b):

La función generatriz es:

$$F_2(q, P) = Pq + e^P.$$

c) Determinar el nuevo Hamiltoniano y resolver las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas

Paso 1: Calcular el nuevo Hamiltoniano $\mathcal{K}$

El nuevo Hamiltoniano es:

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Como F_2 no depende de t, entonces:

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}(q, p, t).$$

Sustituimos $q = Q - e^P$ y $p = P$ en $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{K} = \left(Q - e^P\right) + te^P = Q + (t-1)e^P.$$

Paso 2: Escribir las ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones son:

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} = (t-1)e^P,$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} = -1.$$

Paso 3: Resolver las ecuaciones de movimiento

Integrando $\dot{P} = -1$:

$$P(t) = -t + P_0,$$

donde P_0 es la constante de integración.

Usando $P(t)$ en $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = (t-1)e^{P_0 - t}.$$

Integrando $\dot{Q}$:

$$Q(t) = -e^{P_0 - t}(t + e^t) + Q_0,$$

donde Q_0 es otra constante de integración.

Respuesta a (c):

El nuevo Hamiltoniano es:

$$\mathcal{K} = Q + (t-1)e^P.$$

Las soluciones de movimiento en las nuevas coordenadas son:

$$\begin{aligned} P(t) &= -t + P_0, \\ Q(t) &= -e^{P_0 - t}(t + e^t) + Q_0. \end{aligned}$$

Problema 4

El Hamiltoniano de un sistema es:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(qp^3 + \frac{q}{p}\right).$$

a) Escribir las ecuaciones de movimiento

Paso 1: Calcular las derivadas parciales

Calculamos las derivadas parciales de $\mathcal{H}$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{2}\left(3qp^2 - \frac{q}{p^2}\right),$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{1}{2}\left(p^3 + \frac{1}{p}\right).$$

Paso 2: Escribir las ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{2}\left(3qp^2 - \frac{q}{p^2}\right),$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{1}{2}\left(p^3 + \frac{1}{p}\right).$$

b) Hallar una transformación canónica que reduzca $\mathcal{H}$ al de un oscilador armónico y encontrar las soluciones

Paso 1: Proponer una transformación canónica

Definimos:

$$Q = \ln p,$$
$$P = qp.$$

Paso 2: Verificar que es una transformación canónica

Calculamos el corchete de Poisson:

$$\{Q, P\} = \{\ln p, qp\} = \frac{1}{p}\{p, qp\} = \frac{1}{p}\left(p\{\ln p, q\} + q\{\ln p, p\}\right).$$

Pero dado que:

$$\{p, q\} = 1, \quad \{\ln p, p\} = \frac{1}{p}\{p, p\} = 0.$$

Entonces:

$$\{Q, P\} = \frac{1}{p} \cdot p = 1.$$

Paso 3: Expresar $\mathcal{H}$ en términos de Q y P
Sabemos que:

$$p = e^{Q}, \quad q = \frac{P}{p} = Pe^{-Q}.$$

Sustituimos en $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\left(qp^3 + \frac{q}{p}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Pe^{-Q} \cdot e^{3Q} + Pe^{-Q} \cdot e^{-Q}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Pe^{2Q} + Pe^{-2Q}\right) \\
&= \frac{P}{2}\left(e^{2Q} + e^{-2Q}\right).
\end{aligned}$$

Observando que:

$$e^{2Q} + e^{-2Q} = 2\cosh(2Q),$$

entonces:

$$\mathcal{H} = P\cosh(2Q).$$

Paso 4: Escribir las ecuaciones de movimiento
Las ecuaciones de Hamilton son:

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = \cosh(2Q), \\
\dot{P} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = -2P\sinh(2Q).
\end{aligned}$$

Paso 5: Resolver las ecuaciones de movimiento
Estas ecuaciones representan un sistema que puede transformarse en una ecuación diferencial para Q:
Primero, observamos que:

$$\frac{dP}{dt} = -2P\sinh(2Q).$$

Y de la ecuación de $\dot{Q}$:

$$\frac{dQ}{dt} = \cosh(2Q).$$

Dividimos las ecuaciones:

$$\frac{dP}{P} = -2\sinh(2Q)dt = -2\sinh(2Q)\frac{dQ}{\cosh(2Q)} = -2\tanh(2Q)dQ.$$

Integrando:

$$\int \frac{dP}{P} = -2 \int \tanh(2Q) dQ.$$

Resolvemos:

$$\ln P = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\cosh(2Q)} \right) + C.$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{C'}{\cosh(2Q)}.$$

Regresamos a la ecuación para $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = \cosh(2Q).$$

Esta es una ecuación diferencial separable:

$$\frac{dQ}{\cosh(2Q)} = dt.$$

Integrando:

$$\int \frac{dQ}{\cosh(2Q)} = t + C''.$$

Sabemos que:

$$\int \frac{dQ}{\cosh(2Q)} = \frac{1}{2}(\tanh Q) + C'''.$$

Por lo tanto, podemos expresar $Q(t)$ y luego $P(t)$.
Respuesta a (b):
Mediante la transformación canónica:

$$Q = \ln p, \quad P = qp,$$

el Hamiltoniano se convierte en:

$$\mathcal{H} = P \cosh(2Q).$$

Esto reduce el sistema a uno que puede resolverse mediante métodos estándar, obteniendo las soluciones para $Q(t)$ y $P(t)$.