# Solución a los Problemas de los Viernes

Juan Camacho, Santiago Correa

25 de Octubre de 2024

## Problema 1

**Enunciado:**

1. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio de los siguientes cuerpos:

a) Una placa semicircular de masa $M$ y radio $R$ que se encuentra sobre una superficie plana.

b) Una hemisfera de masa $M$ y radio $R$.

### 1a. Placa semicircular

**Descripción del problema:**

Una placa semicircular está apoyada sobre su borde curvo en una superficie plana. Queremos determinar la frecuencia de pequeñas oscilaciones cuando se inclina ligeramente de su posición de equilibrio.

#### Centro de masa

El centro de masa de una placa semicircular está ubicado a una distancia vertical $\overline{y}$ desde el borde plano:

$$\overline{y} = \frac{4R}{3\pi} \tag{1}$$

#### Momento de inercia

El momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al plano de la placa es:

$$I = \frac{MR^2}{4} \tag{2}$$

### Energía potencial

Cuando la placa se inclina un ángulo pequeño $\theta$, el centro de masa se eleva una altura $h(\theta)$:

$$h(\theta) = (R - \overline{y})(1 - \cos\theta) \approx \frac{(R - \overline{y})\theta^2}{2} \tag{3}$$

Donde hemos usado la aproximación para ángulos pequeños $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.
La energía potencial es:

$$U(\theta) = Mgh(\theta) = \frac{Mg(R - \overline{y})\theta^2}{2} \tag{4}$$

### Energía cinética

La energía cinética rotacional es:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \tag{5}$$

### Lagrangiano y ecuación de movimiento

El lagrangiano es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Mg(R - \overline{y})\theta^2 \tag{6}$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \tag{7}$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I\dot{\theta} \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -Mg(R - \overline{y})\theta \tag{9}$$

La ecuación de movimiento es:

$$I\ddot{\theta} + Mg(R - \overline{y})\theta = 0 \tag{10}$$

### Frecuencia de oscilación

Esta es una ecuación diferencial de oscilación armónica simple, cuya solución es:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \tag{11}$$

Donde la frecuencia angular $\omega$ es:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg(R-\overline{y})}{I}} \tag{12}$$

Sustituyendo los valores de $I$ y $\overline{y}$:

$$I = \frac{MR^2}{4} \tag{13}$$

$$\overline{y} = \frac{4R}{3\pi} \tag{14}$$

$$R - \overline{y} = R - \frac{4R}{3\pi} = R\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) \tag{15}$$

Entonces:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgR\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)}{\frac{MR^2}{4}}} = \sqrt{\frac{4g\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)}{R}} \tag{16}$$

Calculamos numéricamente:

$$1 - \frac{4}{3\pi} \approx 1 - \frac{4}{9.4248} \approx 0.5756 \tag{17}$$

$$\omega \approx \sqrt{\frac{4g \times 0.5756}{R}} \approx \sqrt{\frac{2.3024g}{R}} \approx 1.518\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{18}$$

**Respuesta:** La frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega \approx 1.518\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{19}$$

## 1b. Hemisfera

**Descripción del problema:**

Una hemisfera sólida está apoyada sobre su superficie curva en una superficie plana. Queremos determinar la frecuencia de pequeñas oscilaciones cuando se inclina ligeramente de su posición de equilibrio.

### Centro de masa

El centro de masa de una hemisfera sólida está a una distancia vertical desde el plano base:

$$d = R - h_{\mathrm{cm}} \tag{20}$$

Donde $h_{\mathrm{cm}}$ es la distancia desde el centro de la esfera al centro de masa:

$$h_{\mathrm{cm}} = \frac{3R}{8} \quad \Rightarrow \quad d = R - \frac{3R}{8} = \frac{5R}{8} \tag{21}$$

**Momento de inercia**

El momento de inercia de una hemisfera sólida respecto a un eje horizontal que pasa por su centro de masa es:

$$I = \frac{83}{320} M R^2 \tag{22}$$

**Energía potencial**

Para pequeñas inclinaciones $\theta$:

$$h(\theta) = d(1 - \cos\theta) \approx \frac{d\theta^2}{2} \tag{23}$$

La energía potencial es:

$$U(\theta) = Mgh(\theta) = \frac{Mgd\theta^2}{2} \tag{24}$$

**Energía cinética**

La energía cinética rotacional es:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \tag{25}$$

**Ecuación de movimiento**

El lagrangiano es:

$$L = T - U = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} Mgd\theta^2 \tag{26}$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$I\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0 \tag{27}$$

**Frecuencia de oscilación**

La frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}} \tag{28}$$

Sustituyendo los valores:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\left(\frac{5R}{8}\right)}{\frac{83}{320} M R^2}} = \sqrt{\frac{g\left(\frac{5R}{8}\right)}{\frac{83}{320} R^2}} = \sqrt{\frac{5 \times 320 g}{8 \times 83 R}} = \sqrt{\frac{1600 g}{664 R}} \tag{29}$$

Simplificando:

$$\omega = \sqrt{\frac{400g}{166R}} \tag{30}$$

$$\approx \sqrt{\frac{400g}{166R}} \tag{31}$$

$$\approx 1.549\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{32}$$

**Respuesta:** La frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega \approx 1.549\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{33}$$

# Problema 2

**Enunciado:**

Un cono circular uniforme de altura $h$, ángulo de vértice $\alpha$, y masa $m$ rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal $(x, y)$:

a) Encuentre la energía cinética.

b) Calcule el tiempo requerido para retornar a la posición original del cono.

c) Calcule las componentes del momento angular del cono.

## Descripción del problema

El cono rueda sin deslizar sobre su lado en el plano horizontal, manteniendo su vértice en el origen del sistema de coordenadas. El eje del cono forma un ángulo constante $\theta = \alpha$ con la vertical.

## a) Energía cinética

### Parámetros y relaciones geométricas

- Radio de la base del cono:

$$a = h \tan\alpha \tag{34}$$

- Relación entre las velocidades angulares (condición de rodadura sin deslizamiento):

$$\omega = \Omega \sin\alpha \tag{35}$$

Donde:

- $\omega = \dot{\psi}$ es la velocidad angular de rotación alrededor del eje del cono (spin). - $\Omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular de precesión alrededor del eje vertical $z$.

**Momento de inercia del cono**

- Momento de inercia respecto al eje del cono:

$$I_3 = \frac{3}{10} m a^2 \tag{36}$$

- Momento de inercia respecto a un eje perpendicular al eje del cono:

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{80} m(4h^2 + a^2) \tag{37}$$

**Velocidades angulares**

Las componentes de la velocidad angular en términos de los ángulos de Euler son:

$$\omega_1 = \Omega \sin\alpha \sin\psi \tag{38}$$
$$\omega_2 = \Omega \sin\alpha \cos\psi \tag{39}$$
$$\omega_3 = \Omega \cos\alpha + \omega = \Omega \cos\alpha + \Omega \sin\alpha = \Omega(\sin\alpha + \cos\alpha) \tag{40}$$

**Energía cinética traslacional**

La velocidad del centro de masa es:

$$v_{\text{cm}} = R\Omega = h \tan\alpha \cdot \Omega = a\Omega \tag{41}$$

La energía cinética traslacional es:

$$T_{\text{tras}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} m (a\Omega)^2 = \frac{1}{2} m a^2 \Omega^2 \tag{42}$$

**Energía cinética rotacional**

Calculamos cada término:

1. Suma de $\omega_1^2 + \omega_2^2$:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = (\Omega \sin\alpha)^2 (\sin^2\psi + \cos^2\psi) = (\Omega \sin\alpha)^2 \tag{43}$$

2. Energía cinética rotacional:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \tag{44}$$
$$= \frac{1}{2} I_1 (\Omega \sin\alpha)^2 + \frac{1}{2} I_3 \left[\Omega(\sin\alpha + \cos\alpha)\right]^2 \tag{45}$$

Sustituyendo los valores de $I_1$ y $I_3$:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{80}m(4h^2+a^2)\right)(\Omega\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}ma^2\right)\left[\Omega(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]^2 \tag{46}$$

$$= \frac{3}{160}m(4h^2+a^2)(\Omega\sin\alpha)^2 + \frac{3}{20}ma^2\left[\Omega(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]^2 \tag{47}$$

**Energía cinética total**

Sumando las energías cinéticas traslacional y rotacional:

$$T = T_{\text{tras}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}ma^2\Omega^2 + \frac{3}{160}m(4h^2+a^2)(\Omega\sin\alpha)^2 + \frac{3}{20}ma^2\left[\Omega(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]^2 \tag{48}$$

Esta es la expresión de la energía cinética total del cono que rueda sin deslizar.

## b) Tiempo requerido para retornar a la posición original

El tiempo necesario para que el cono regrese a su posición original es el período de la precesión:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{49}$$

Donde $\Omega$ es la velocidad angular de precesión alrededor del eje vertical.

## c) Componentes del momento angular

Las componentes del momento angular en el sistema del cuerpo (ejes del cono) son:

$$L_1 = I_1\omega_1 = I_1\Omega\sin\alpha\sin\psi \tag{50}$$
$$L_2 = I_1\omega_2 = I_1\Omega\sin\alpha\cos\psi \tag{51}$$
$$L_3 = I_3\omega_3 = I_3\Omega(\sin\alpha+\cos\alpha) \tag{52}$$

Estas son las componentes del momento angular respecto a los ejes principales del cono.

Para obtener las componentes en el sistema inercial, se requiere transformar estas componentes utilizando los ángulos de Euler. Sin embargo, dado que $\theta = \alpha$ es constante y el movimiento es simétrico, podemos concluir que las componentes en el sistema inercial son funciones de $\Omega$, $\alpha$, y los momentos de inercia.

**Respuesta:** Las componentes del momento angular del cono son:

$$L_x = L_1 = I_1\Omega\sin\alpha\sin\psi \tag{53}$$
$$L_y = L_2 = I_1\Omega\sin\alpha\cos\psi \tag{54}$$
$$L_z = L_3 = I_3\Omega(\sin\alpha+\cos\alpha) \tag{55}$$