

# Primera Asignación Mecánica Clásica

Juan José Camacho - 2180800  
Fabian Archila - 2210693  
Santiago Correa Vergara - 2182212

Universidad Industrial de Santander  
PhD. Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martinez

30 de Agosto de 2024

# Índice

Planteamiento del problema	3
Inciso a) Ecuaciones de Movimiento del Sistema	4
Inciso b) Solución sistema ecuaciones mediante integración numérica	7
Inciso c) "Leves" diferencias en planteamiento de problema	8
Inciso d) ¿El sistema es caótico?	10
1. Identificación del Comportamiento Caótico	10
1.1. Sensibilidad a las Condiciones Iniciales . . . . .	10
1.2. Dependencia No Lineal . . . . .	10
1.3. Modos de Oscilación . . . . .	10
2. Espacio de Condiciones Iniciales y Comportamiento Caótico	10
2.1. Mapeo del Espacio de Fase . . . . .	10
2.2. Atracción a Atractores Extraños . . . . .	10
3. Ejemplo de Análisis Numérico	10
4. Conclusión sobre el Comportamiento Caótico	10
4.1. Identificación del Caos . . . . .	10
4.2. Condiciones para el Caos . . . . .	11
Inciso e) Analizamos el sistema mediante espectro de potencias de Fourier	11
5. Transformada de Fourier en el Análisis de Sistemas Dinámicos	11
5.1. Propósito de la Transformada de Fourier . . . . .	11
5.2. Aplicación de la Transformada de Fourier en el Sistema . . . . .	11
5.3. Interpretación de los Resultados . . . . .	11
6. Referencias	13

## Planteamiento del problema

Considere el caso de dos péndulos de igual masa  $m$  y que cuelgan, respectivamente, de dos varillas sin masa y de longitud  $l$ . Estos péndulos están acoplados por un resorte de constante elástica  $k$ .

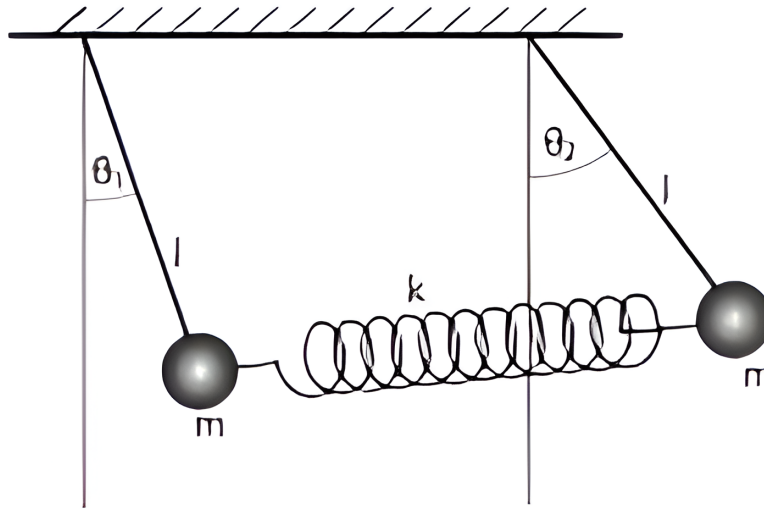


Figura 1: Dos péndulos acoplados a un resorte

- Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema
- Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.
- ¿Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de las varillas? ¿Cómo influye la relación  $m_1/m_2$  si consideramos que las masas son diferentes? ¿Cómo influye la relación  $l_1/l_2$  si consideramos que el largo de las varillas es diferente?
- ¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico.
- Analice el comportamiento de su señal en términos del espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿Qué puede concluir de ambos comportamientos?

## Inciso a) Ecuaciones de Movimiento del Sistema

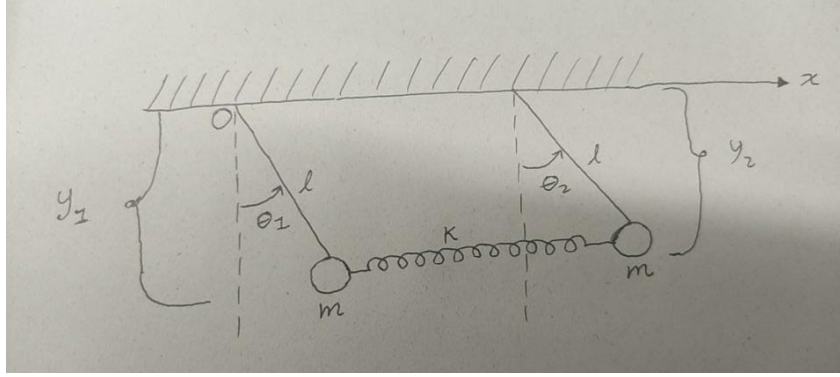


Figura 2: Esquema del problema con marco de referencia

Para poder encontrar las ecuaciones de movimiento debemos plantear nuestro marco de referencia, a partir de ahí podemos plantear nuestras coordenadas generalizadas que sean convenientes para nuestro problema. En este caso escogimos coordenadas polares planas.

Para el caso de la masa 1 nuestras coordenadas en términos de (x,y) son:

$$y_1 = -l\cos(\theta_1) \quad (1)$$

$$x_1 = l\sin(\theta_1) \quad (2)$$

Para el caso de la masa 2 nuestras coordenadas en términos de (x,y) son:

$$y_2 = -l\cos(\theta_2) \quad (3)$$

$$x_2 = l\sin(\theta_2) \quad (4)$$

Ahora debemos encontrar la energía cinética del sistema, que se expresa de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5)$$

por lo tanto,

$$T = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2 \quad (6)$$

como las masas son iguales,  $m_1 = m_2 = m$  y realizamos factor común,

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (7)$$

Ahora debemos hallar la energía potencial del sistema, debemos tener en cuenta el resorte que acopla nuestras dos masas:

$$U = -mgl\cos(\theta_1) - mgl\cos(\theta_2) + \frac{1}{2}k(l\sin(\theta_1) - l\sin(\theta_2))^2 \quad (8)$$

el término  $(l\sin(\theta_1) - l\sin(\theta_2))^2$  nos define el desplazamiento del resorte, realizamos factor común, por lo tanto:

$$U = -mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}k(l\sin(\theta_1) - l\sin(\theta_2))^2 \quad (9)$$

Puesto que poseemos la energía cinética y la energía potencial, podemos calcular nuestro Lagrangiano (energía cinética menos energía potencial):

$$\mathcal{L} = T - U \quad (10)$$

reemplazamos los términos T y U que calculamos previamente,

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right] - \left[ -mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}k(l\sin(\theta_1) - l\sin(\theta_2))^2 \right] \quad (11)$$

sacando nuestras expresiones de los corchetes obtenemos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) - \frac{1}{2}k(l\sin(\theta_1) - l\sin(\theta_2))^2 \quad (12)$$

Ahora para poder obtener las ecuaciones de movimiento debemos resolver las  $n$  ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0, \quad (15)$$

$$\vdots \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0. \quad (17)$$

Para nuestro caso en particular  $n = 2$ , y las coordenadas generalizadas son  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \quad (19)$$

Para nuestra coordenada generalizada  $\theta_1$  debemos resolver la ecuación (18), obteniendo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -mgl\sin(\theta_1) + kl(l\sin(\theta_2) - l\sin(\theta_1))\cos(\theta_1) \quad (20)$$

simplificando,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -mgl\sin(\theta_1) + kl^2\cos(\theta_1)(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \quad (21)$$

ahora,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = ml^2\dot{\theta}_1 \quad (22)$$

derivamos con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = ml^2 \ddot{\theta}_1 \quad (23)$$

Reemplazando las ecuaciones (21) y (23) en (18) obtenemos:

$$\left[ ml^2 \ddot{\theta}_1 \right] - \left[ -mglsin(\theta_1) + kl^2 cos(\theta_1)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1)) \right] = 0 \quad (24)$$

y por último simplificando,

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 + mglsin(\theta_1) - kl^2 cos(\theta_1)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1)) = 0 \quad (25)$$

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 + mglsin(\theta_1) - kl^2 cos(\theta_1)lsin(\theta_2) - kl^2 cos(\theta_1)lsin(\theta_1) = 0 \quad (26)$$

obtenemos:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin(\theta_1) + \frac{k}{2m} \sin(2\theta_1) - \frac{k}{m} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) = 0 \quad (27)$$

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{k}{2m} \sin(2\theta_1) + \frac{k}{m} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)} \quad (28)$$

Para nuestra coordenada generalizada  $\theta_2$  debemos resolver la ecuación (19), obteniendo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -mglsin(\theta_2) - klcos(\theta_2)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1)) \quad (29)$$

ahora,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2 \dot{\theta}_2 \quad (30)$$

derivamos con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = ml^2 \ddot{\theta}_2 \quad (31)$$

Reemplazando las ecuaciones (28) y (30) en (19) obtenemos:

$$\left[ ml^2 \ddot{\theta}_2 \right] - \left[ -mglsin(\theta_2) - klcos(\theta_2)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1)) \right] = 0 \quad (32)$$

y por último simplificando,

$$ml^2 \ddot{\theta}_2 + mglsin(\theta_2) + klcos(\theta_2)(lsin(\theta_2) + lsin(\theta_1)) = 0 \quad (33)$$

obtenemos:

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin(\theta_2) + \frac{k}{2m} \sin(2\theta_2) - \frac{k}{m} \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) = 0 \quad (34)$$

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_2) - \frac{k}{2m} \sin(2\theta_2) + \frac{k}{m} \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)} \quad (35)$$

## Inciso b) Solución sistema ecuaciones mediante integración numérica

Para resolver las ecuaciones diferenciales del sistema, utilizamos un método numérico llamado *Runge-Kutta de cuarto orden*. Este método es muy popular porque ofrece una buena precisión al calcular soluciones aproximadas para ecuaciones diferenciales (a comparación del método de Euler Simple). En esencia, el método de Runge-Kutta divide el tiempo en pequeños intervalos y calcula cómo cambian las variables en cada uno de esos intervalos. Luego, combina estos cálculos para obtener una solución más precisa que la que se obtendría al utilizar métodos más simples.

Ahora para poder resolver nuestro sistema de ecuaciones primero debemos importar las bibliotecas necesarias: `numpy` para realizar cálculos matemáticos, `solve_ivp` de `scipy.integrate` para resolver las ecuaciones diferenciales, y `matplotlib.pyplot` para visualizar los resultados.

Tenemos también que definir los parámetros del sistema: la aceleración debida a la gravedad  $g$ , la longitud de las varillas  $l$ , la masa de las bolas  $m$ , y la constante elástica del resorte  $k$ .

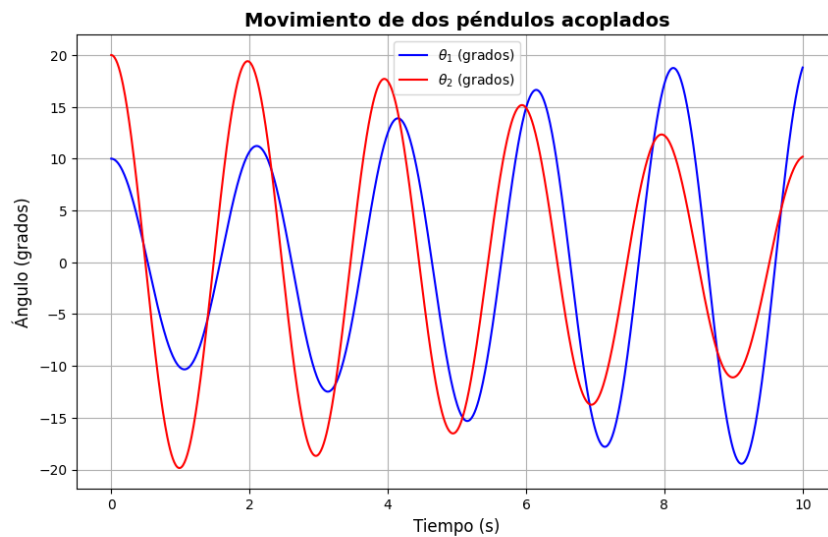
Posteriormente creamos las ecuaciones de movimiento en una función llamada `ecuaciones_movimiento`. Esta función toma las variables del sistema, es decir, los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y sus respectivas velocidades angulares  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , y se calcula las derivadas correspondientes. Previamente habíamos obtenido las ecuaciones de movimiento que son (28) y (35), las volvemos a escribir:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{k}{2m} \sin(2\theta_1) + \frac{k}{m} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad (36)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_2) - \frac{k}{2m} \sin(2\theta_2) + \frac{k}{m} \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \quad (37)$$

Ahora, para comenzar a implementar el método mencionado se definen las condiciones iniciales de los ángulos  $\theta_1(0)$  y  $\theta_2(0)$ , y se asume que las velocidades iniciales son cero. Estas condiciones se agrupan en una lista para ser utilizadas en la integración. Luego, se especifica el intervalo de tiempo durante el cual se llevará a cabo la simulación. La función `solve_ivp` se emplea para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales. Esta función devuelve la solución a lo largo del tiempo, basándose en el método de Runge-Kutta de 4º orden.

Para finalizar, extraemos las soluciones para los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y graficamos en función del tiempo. Esto permite observar la evolución de los ángulos de los péndulos acoplados y analizar cómo los parámetros del sistema afectan la dinámica de nuestro problema planteado.



F. Archila, J. Camacho y S. Correa

Figura 3: Solución a nuestro sistema de ecuaciones

## Inciso c) "Leves" diferencias en planteamiento de problema

### 1. Influencia de la Posición del Resorte

**Caso 1: El resorte conecta las masas.** En este caso, el resorte se conecta directamente entre las dos masas  $m_1$  y  $m_2$ . Aquí, la fuerza del resorte actúa directamente sobre las masas, afectando la dinámica de las oscilaciones. La fuerza restauradora del resorte será máxima cuando las masas se separen y mínima cuando se acerquen.

**Caso 2: El resorte está atado a media altura de las varillas.** En este escenario, el resorte se conecta en un punto entre las masas y el punto de suspensión de los péndulos. Esto introduce una diferencia significativa en el momento de fuerza aplicado por el resorte, ya que ahora la distancia desde el punto de aplicación de la fuerza hasta el punto de suspensión es menor. Esto podría reducir el impacto del resorte en las oscilaciones, especialmente en las amplitudes más pequeñas, y modificar la frecuencia natural del sistema.

#### Efectos observados:

- Cuando el resorte conecta las masas, el sistema puede exhibir un acoplamiento más fuerte entre las oscilaciones de los dos péndulos, lo que puede llevar a modos normales más complejos y, en algunos casos, a un comportamiento más caótico.
- Si el resorte está atado a media altura, la fuerza restauradora que ejerce en las oscilaciones puede ser menos significativa, lo que puede resultar en una dinámica más cercana a la de dos péndulos casi independientes, dependiendo de la longitud de las varillas y la constante del resorte.

### 2. Relación de las Masas $m_1/m_2$

**Caso 1:  $m_1 = m_2$ .** Este es el caso de simetría perfecta, donde ambos péndulos tienen la misma masa. La dinámica en este caso es relativamente sencilla y se pueden esperar modos normales bien definidos en los que ambos péndulos oscilan en fase o en contrafase.

**Caso 2:  $m_1 \neq m_2$ .** Si las masas son diferentes, el sistema pierde la simetría, lo que introduce una complejidad adicional en las ecuaciones de movimiento. Los modos normales se vuelven asimétricos, y la respuesta del sistema a perturbaciones iniciales será más compleja. Puede haber transferencia de energía entre los péndulos que resulta en oscilaciones con amplitudes variables, y el sistema puede exhibir resonancia cuando las frecuencias naturales se alinean de manera específica.

#### Efectos observados:

- La diferencia en masas provoca que las frecuencias naturales de los dos péndulos sean diferentes, lo que puede llevar a un comportamiento más caótico o a una oscilación acoplada más compleja.
- Dependiendo de la relación  $m_1/m_2$ , se puede observar un intercambio de energía más significativo entre los péndulos, lo que podría amplificar las oscilaciones de uno mientras disminuye las del otro.

### 3. Relación de las Longitudes $l_1/l_2$

**Caso 1:  $l_1 = l_2$ .** Este es el caso simétrico donde ambos péndulos tienen la misma longitud. Similar al caso de masas iguales, este sistema es más simple de analizar, y los modos normales estarán más definidos.

**Caso 2:  $l_1 \neq l_2$ .** Cuando las longitudes de los péndulos son diferentes, las frecuencias naturales de cada péndulo también serán diferentes, lo que introduce un acoplamiento más complejo. Las oscilaciones pueden tener amplitudes y frecuencias muy distintas, lo que podría complicar la dinámica del sistema.

#### Efectos observados:

- Una diferencia en longitudes altera la frecuencia natural de oscilación de cada péndulo, afectando el acoplamiento entre ellos.
- Esto puede dar lugar a patrones de oscilación más complejos, incluyendo posibles resonancias, donde uno de los péndulos podría transferir energía al otro, causando una amplificación o atenuación de las oscilaciones.



## Enfoque Matemático y Numérico

Para abordar numéricamente estas variaciones, puedes modificar las condiciones iniciales y los parámetros del sistema en las ecuaciones de movimiento y realizar simulaciones para observar cómo cambian las trayectorias de las oscilaciones.

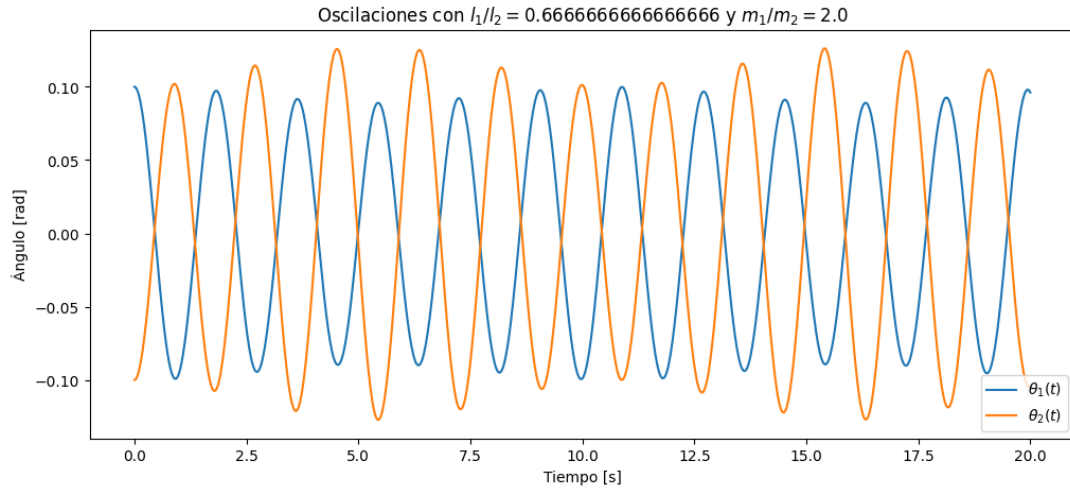


Figura 4: Primera variación de las relaciones entre longitudes y masas

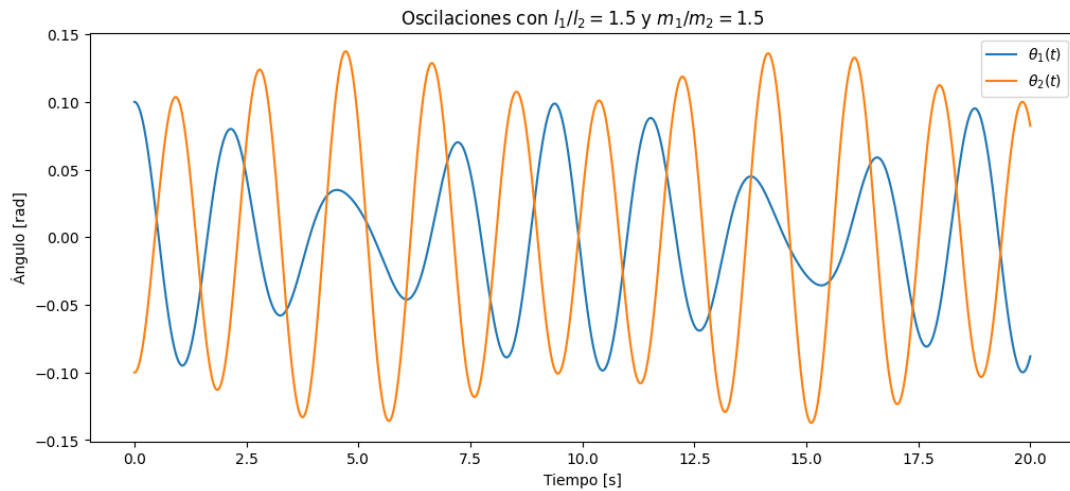


Figura 5: Segunda variación de las relaciones entre longitudes y masas

## Interpretación y Conclusiones

### Cambio de Posición del Resorte

Si simulas con el resorte conectado a las masas versus atado a la mitad de las varillas, notarás diferencias en la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones.

### Relaciones de Masa y Longitud

Al cambiar  $m_1/m_2$  y  $l_1/l_2$ , puedes observar cómo la dinámica del sistema se vuelve más compleja y cómo las oscilaciones se acoplan de maneras menos intuitivas en casos de simetría rota.

## Inciso d) ¿El sistema es caótico?

### 1. Identificación del Comportamiento Caótico

El comportamiento caótico es una característica importante en sistemas dinámicos no lineales, como el sistema de dos péndulos acoplados. Un sistema caótico es altamente sensible a las condiciones iniciales, lo que significa que pequeñas diferencias en el estado inicial pueden llevar a grandes divergencias en el comportamiento a largo plazo. Esto se conoce comúnmente como el "efecto mariposa".

#### 1.1. Sensibilidad a las Condiciones Iniciales

En un sistema caótico, dos trayectorias que parten de puntos iniciales muy cercanos divergen exponencialmente con el tiempo. Esta propiedad se puede cuantificar mediante el exponente de Lyapunov, que mide la tasa de divergencia de trayectorias cercanas.

#### 1.2. Dependencia No Lineal

El sistema es no lineal debido a las ecuaciones de movimiento que contienen términos senoidales. Esta no linealidad es un precursor del caos, especialmente cuando el sistema tiene más de un grado de libertad (como es el caso con los dos ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ).

#### 1.3. Modos de Oscilación

Cuando los péndulos oscilan en modos normales (por ejemplo, en fase o en contrafase), el comportamiento del sistema es predecible. Sin embargo, en ciertas condiciones (dependiendo de la energía total, las masas, longitudes, y la constante del resorte), las oscilaciones pueden volverse impredecibles y no repetitivas, señalando la transición a un régimen caótico.

### 2. Espacio de Condiciones Iniciales y Comportamiento Caótico

El espacio de condiciones iniciales es un concepto clave en la identificación del comportamiento caótico:

#### 2.1. Mapeo del Espacio de Fase

El espacio de fase del sistema, que consiste en las variables  $(\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2)$ , es donde se mapean las trayectorias del sistema. En un sistema caótico, el espacio de fase no exhibe patrones regulares, sino que las trayectorias se entrelazan de manera compleja y aparentemente aleatoria.

#### 2.2. Atracción a Atractores Extraños

En sistemas caóticos, las trayectorias en el espacio de fase pueden acercarse a lo que se conoce como un atractor extraño. Estos atractores tienen una estructura fractal y son indicativos de comportamiento caótico. La detección de estos atractores en el espacio de fase es una señal clara del caos.

### 3. Ejemplo de Análisis Numérico

Podemos realizar simulaciones numéricas para explorar las trayectorias en el espacio de fase bajo diferentes condiciones iniciales y determinar si el sistema exhibe comportamiento caótico.

### 4. Conclusión sobre el Comportamiento Caótico

#### 4.1. Identificación del Caos

El comportamiento caótico se manifiesta cuando las trayectorias divergen rápidamente a pesar de condiciones iniciales casi idénticas, y cuando el espacio de fase muestra patrones complejos y no repetitivos.

## 4.2. Condiciones para el Caos

El sistema tiende a ser más caótico bajo ciertas condiciones de energía total, con relaciones de masas y longitudes que favorecen modos de oscilación desincronizados, y con acoplamientos fuertes (alta constante del resorte).

## Inciso e) Analizamos el sistema mediante espectro de potencias de Fourier

## 5. Transformada de Fourier en el Análisis de Sistemas Dinámicos

La Transformada de Fourier es una herramienta matemática que permite descomponer una señal en sus componentes de frecuencia. En el caso del sistema de dos péndulos acoplados, el análisis de Fourier puede proporcionar información crucial sobre la naturaleza de las oscilaciones y ayudar a identificar patrones de comportamiento caótico.

### 5.1. Propósito de la Transformada de Fourier

El análisis en el dominio del tiempo nos proporciona una visión de cómo las variables del sistema (como los ángulos y las velocidades angulares) evolucionan con el tiempo. Sin embargo, este enfoque no siempre revela la complejidad del comportamiento dinámico. La Transformada de Fourier convierte estas señales del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, permitiendo identificar las frecuencias predominantes y detectar la presencia de un comportamiento caótico.

**Identificación de Modos Normales:** En un sistema acoplado lineal o débilmente no lineal, las oscilaciones tienden a concentrarse en unas pocas frecuencias bien definidas. La Transformada de Fourier de tales sistemas mostraría picos en estas frecuencias, correspondientes a los modos normales de oscilación.

**Señales de Caos:** En contraste, un sistema caótico mostrará un espectro de frecuencias más amplio y continuo, sin picos bien definidos, reflejando la complejidad y la falta de periodicidad en el comportamiento del sistema.

### 5.2. Aplicación de la Transformada de Fourier en el Sistema

Para aplicar la Transformada de Fourier a los datos obtenidos de las simulaciones numéricas del sistema de dos péndulos acoplados, se puede seguir el siguiente procedimiento:

**Obtener las Series Temporales:** A partir de la solución numérica del sistema, se obtienen las series temporales para los ángulos  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ , así como para las velocidades angulares  $\omega_1(t)$  y  $\omega_2(t)$ .

**Aplicar la Transformada de Fourier:** Se aplica la Transformada de Fourier a estas series temporales, lo que genera un espectro de frecuencia para cada una de las variables.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt$$

Donde  $\hat{X}(f)$  es la representación de Fourier de la función temporal  $x(t)$ , y  $f$  es la frecuencia.

**Análisis del Espectro de Frecuencia:** El espectro resultante se analiza para identificar las frecuencias dominantes. Un espectro con picos nítidos sugiere un comportamiento regular, mientras que un espectro más difuso indica un comportamiento caótico.

### 5.3. Interpretación de los Resultados

**Comportamiento Regular:** Si el sistema exhibe modos normales de oscilación, el espectro de Fourier mostrará un número limitado de frecuencias predominantes. Este patrón es indicativo de un sistema regular o cuasi-periódico, donde las oscilaciones siguen patrones repetitivos.

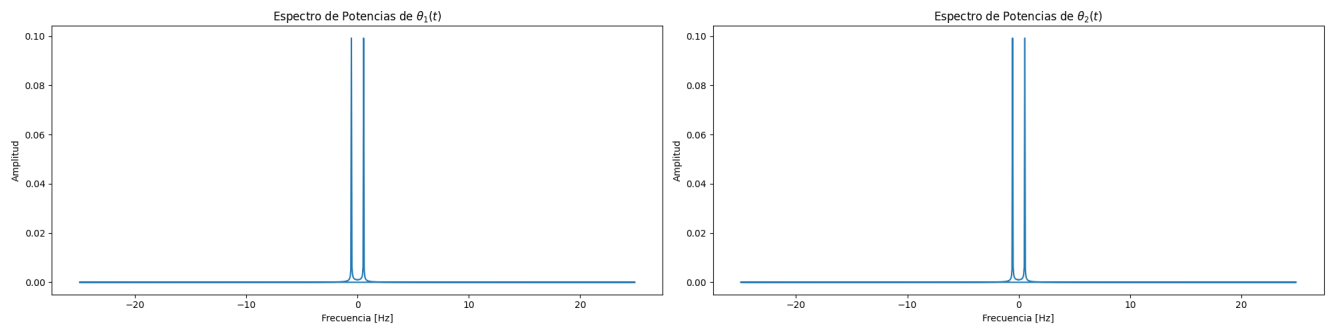


Figura 6: Espectro de Potencias

**Comportamiento Caótico:** Un espectro de Fourier que se extiende sobre un amplio rango de frecuencias, sin picos claramente definidos, es característico de un comportamiento caótico. Este tipo de espectro refleja la imprevisibilidad inherente al sistema, donde múltiples frecuencias interactúan de manera compleja y no repetitiva.

## 6. Referencias

### Referencias

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Course of Theoretical Physics, Vol. 1, 3rd ed. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [2] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. Addison-Wesley, 2001.
- [3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed. Springer, 1989.
- [4] G.R. Fowles and G.L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, 7th ed. Brooks Cole, 2005.
- [5] K.R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed. Addison-Wesley, 1971.