Primera Asignación Mecánica Clásica

Juan José Camacho - 2180800
Fabian Archila - 2210693
Santiago Correa Vergara - 2182212

Universidad Industrial de Santander
PhD. Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martinez

30 de Agosto de 2024

Índice

Planteamiento del problema

Considere el caso de dos péndulos de igual masa m y que cuelgan, respectivamente, de dos varillas sin masa y de longitud . Estos péndulos están acoplados por un resorte de constante elástica k.

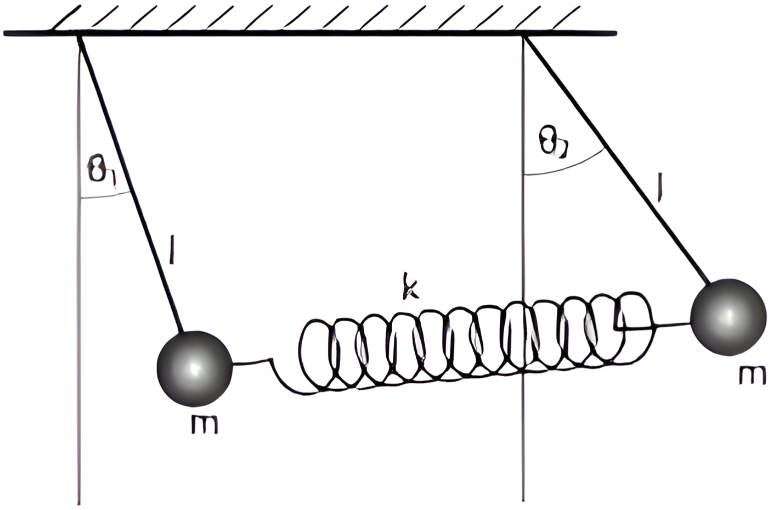

Figura 1: Dos péndulos acoplados a un resorte

a). Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema

b). Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.

c). ¿Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de las varillas? ¿Cómo influye la relación m1/m2 si consideramos que las masas son diferentes? ¿Cómo influye la relación l1/l2 si consideramos que el largo de las varillas es diferente?

d). ¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico.

e). Analice el comportamiento de su señal en términos del espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿Qué puede concluir de ambos comportamientos?

Inciso a) Ecuaciones de Movimiento del Sistema

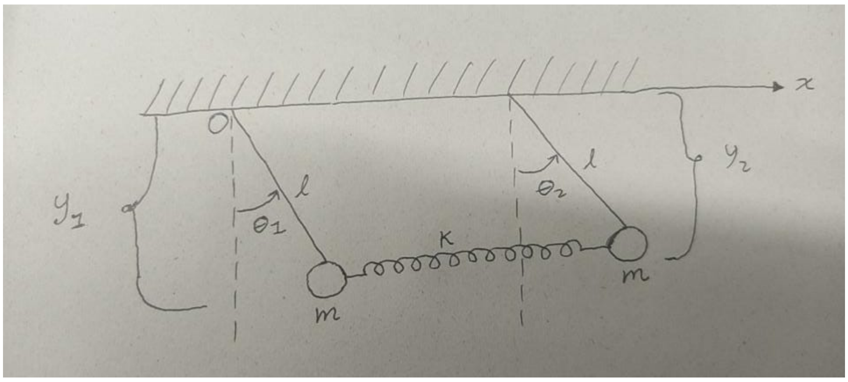

Figura 2: Esquema del problema con marco de referencia

Para poder encontrar las ecuaciones de movimiento debemos plantear nuestro marco de referencia, a partir de ahi podemos plantear nuestras coordenadas generalizadas que sean convenientes para nuestro problema. En este caso escogiemos coordenadas polares planes.

Para el caso de la masa 1 nuestras coordenadas en términos de (x,y) son:

$$y_1 = -lcos(\theta_1) \tag{1}$$

$$x_1 = lsin(\theta_1) \tag{2}$$

Para el caso de la masa 2 nuestras coordenadas en términos de (x,y) son:

$$y_2 = -lcos(\theta_2) \tag{3}$$

$$x_2 = lsin(\theta_2) \tag{4}$$

Ahora debemos encontrar la energía cinética del sistema, que se expresa de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

por lo tanto,

$$T = \frac{1}{2}m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 \tag{6}$$

como las masas son iguales, $m_1 = m_2 = m$ y realizamos factor común,

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \tag{7}$$

Ahora debemos hallar la energía potencial del sistema, debemos tener en cuenta el resorte que acopla nuestras dos masas:

$$U = -mglcos(\theta_1) - mglcos(\theta_2) + \frac{1}{2}k(lsin(\theta_1) - lsin(\theta_2))^2 \tag{8}$$

el término $(lsin(\theta_1) - lsin(\theta_2))^2$ nos define el desplazamiento del resorte, realizamos factor común, por lo tanto:

$$U = -mgl(cos(\theta_1) + cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}k(lsin(\theta_1) - lsin(\theta_2))^2 \tag{9}$$

Puesto que poseemos la energía cinética y la energía potencial, podemos calcular nuestro Lagrangiano (energía cinética menos energía potencial):

$$\mathcal{L} = T - U \tag{10}$$

reemplazamos los términos T y U que calculamos previamente,

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\right] - \left[-mgl(cos(\theta_1) + cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}k(lsin(\theta_1) - lsin(\theta_2))^2\right] \tag{11}$$

sacando nuestras expresiones de los corchetes obtenemos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(cos(\theta_1) + cos(\theta_2)) - \frac{1}{2}k(lsin(\theta_1) - lsin(\theta_2))^2 \tag{12}$$

Ahora para poder obtener las ecuaciones de movimiento debemos resolver las n ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0, \tag{15}$$

$$\vdots \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0. \tag{17}$$

Para nuestro caso en particular $n = 2$, y las coordenadas generalizadas son θ_1 y θ_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \tag{19}$$

Para nuestra coordenada generalizada θ_1 debemos resolver la ecuación (18), obteniendo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -mglsin(\theta_1) + kl(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1))lcos(\theta_1) \tag{20}$$

simplificando,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -mglsin(\theta_1) + kl^2cos(\theta_1)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1)) \tag{21}$$

ahora,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = ml^2\dot{\theta}_1 \tag{22}$$

derivamos con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = ml^2\ddot{\theta}_1 \tag{23}$$

Reemplazando las ecuaciones (21) y (23) en (18) obtenemos:

$$\left[ml^2\ddot{\theta}_1\right] - \left[-mglsin(\theta_1) + kl^2cos(\theta_1)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1))\right] = 0 \tag{24}$$

y por último simplificando,

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mglsin(\theta_1) - kl^2cos(\theta_1)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1)) = 0 \tag{25}$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mglsin(\theta_1) - kl^2cos(\theta_1)lsin(\theta_2) - kl^2cos(\theta_1)lsin(\theta_1) = 0 \tag{26}$$

obtenemos:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\sin(\theta_1) + \frac{k}{2m}\sin(2\theta_1) - \frac{k}{m}\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) = 0 \tag{27}$$

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\sin(\theta_1) - \frac{k}{2m}\sin(2\theta_1) + \frac{k}{m}\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)} \tag{28}$$

Para nuestra coordenada generalizada θ_2 debemos resolver la ecuación (19), obteniendo:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = -mglsin(\theta_2) - klcos(\theta_2)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1)) \tag{29}$$

ahora,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2 \tag{30}$$

derivamos con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\right) = ml^2\ddot{\theta}_2 \tag{31}$$

Reemplazando las ecuaciones (28) y (30) en (19) obtenemos:

$$\left[ml^2\ddot{\theta}_2\right] - [-mglsin(\theta_2) - klcos(\theta_2)(lsin(\theta_2) - lsin(\theta_1))] = 0 \tag{32}$$

y por último simplificando,

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + mglsin(\theta_2) + klcos(\theta_2)(lsin(\theta_2) + lsin(\theta_1)) = 0 \tag{33}$$

obtenemos:

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\sin(\theta_2) + \frac{k}{2m}\sin(2\theta_2) - \frac{k}{m}\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) = 0 \tag{34}$$

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\sin(\theta_2) - \frac{k}{2m}\sin(2\theta_2) + \frac{k}{m}\cos(\theta_2)\sin(\theta_1)} \tag{35}$$

Inciso b) Soluciòn sistema ecuaciones mediante integraciòn nùmerica

Para resolver las ecuaciones diferenciales del sistema, utilizamos un método numérico llamado *Runge-Kutta de cuarto orden*. Este método es muy popular porque ofrece una buena precisión al calcular soluciones aproximadas para ecuaciones diferenciales (a comparaciòn del mètodo de Euler Simple). En esencia, el método de Runge-Kutta divide el tiempo en pequeños intervalos y calcula cómo cambian las variables en cada uno de esos intervalos. Luego, combina estos cálculos para obtener una solución más precisa que la que se obtendría al utilizar métodos más simples.

Ahora para poder resolver nuestro sistema de ecuaciones primero debemos importar las bibliotecas necesarias: `numpy` para realizar cálculos matemáticos, `solve_ivp` de `scipy.integrate` para resolver las ecuaciones diferenciales, y `matplotlib.pyplot` para visualizar los resultados.

Tenemos tambien que definir los parámetros del sistema: la aceleración debida a la gravedad g, la longitud de las varillas l, la masa de las bolas m, y la constante elástica del resorte k.

Posteriormente creamos las ecuaciones de movimiento en una función llamada `ecuaciones_movimiento`. Esta función toma las variables del sistema, es decir, los ángulos θ_1, θ_2 y sus respectivas velocidades angulares ω_1, ω_2, y se calcula las derivadas correspondientes. Previamente habiamos obtenido las ecuaciones de movimiento que son (28) y (35), las volvemos a escribir:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\sin(\theta_1) - \frac{k}{2m}\sin(2\theta_1) + \frac{k}{m}\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \tag{36}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\sin(\theta_2) - \frac{k}{2m}\sin(2\theta_2) + \frac{k}{m}\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) \tag{37}$$

Ahora, para comenzar a implementar el mètodo mencionado se definen las condiciones iniciales de los ángulos $\theta_1(0)$ y $\theta_2(0)$, y se asume que las velocidades iniciales son cero. Estas condiciones se agrupan en una lista para ser utilizadas en la integración. Luego, se especifica el intervalo de tiempo durante el cual se llevará a cabo la simulación. La función `solve_ivp` se emplea para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales. Esta función devuelve la solución a lo largo del tiempo, basándose en el método de Runge-Kutta de 4º orden.

Para finalizar, extraemos las soluciones para los ángulos θ_1 y θ_2, y graficamos en función del tiempo. Esto permite observar la evolución de los ángulos de los péndulos acoplados y analizar cómo los parámetros del sistema afectan la dinámica de nuestro problema planteado.

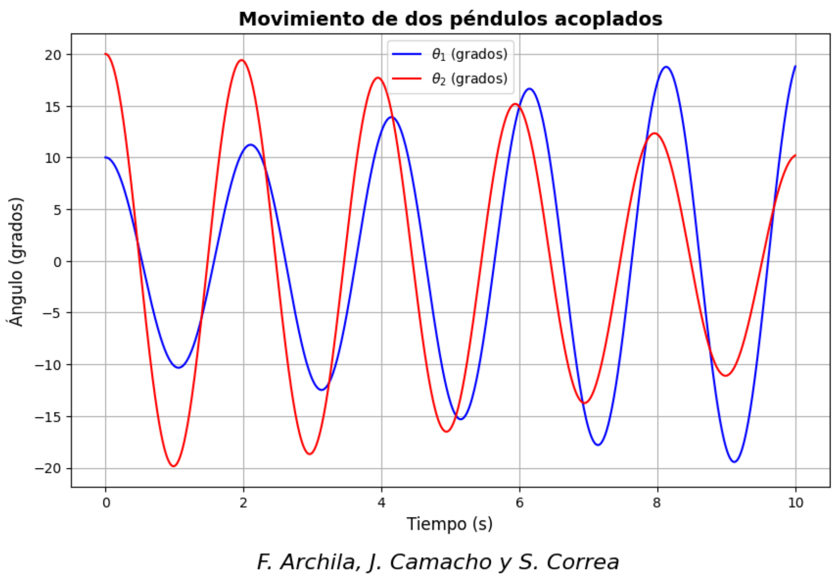

Figura 3: Solucion a nuestro sistema de ecuaciones

Inciso c) "Leves"diferencias en planteamiento de problema

Inciso d) ¿El sistema es caòtico?

Inciso e) Analizamos el sistema mediante espectro de potencias de Fourier

Inciso f) Àngulos pequeños y nuevamente: b), c), d) y e)