Solución a los Problemas de los Viernes

Juan Camacho, Santiago Correa

13 de Septiembre de 2024

Problema 1

Un cometa de masa m se mueve en una trayectoria parabólica alrededor del Sol y cruza la órbita terrestre. Suponga que la órbita terrestre es circular y que está en el mismo plano que la trayectoria del cometa. Encuentre el máximo número de días que el cometa puede permanecer dentro de la órbita de la Tierra.

Solución

Para determinar el tiempo máximo que el cometa puede permanecer dentro de la órbita terrestre, consideraremos la trayectoria parabólica del cometa y calcularemos el tiempo que tarda en moverse desde el punto donde ingresa a la órbita de la Tierra hasta el punto donde sale de ella.

En una trayectoria parabólica, la energía total E es cero:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

donde:

- v es la velocidad del cometa en un punto a distancia r del Sol.
- G es la constante de gravitación universal.
- M es la masa del Sol.

La velocidad del cometa en cualquier punto es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

El tiempo que el cometa tarda en desplazarse entre dos puntos en su órbita parabólica puede calcularse utilizando las ecuaciones de movimiento para trayectorias parabólicas. El tiempo desde el perihelio hasta una distancia r es:

$$t - t_p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r_p^3}{GM}}\left(\tan\xi + \frac{1}{3}\tan^3\xi\right)$$

donde:

- t_p es el tiempo en el perihelio.
- r_p es la distancia al perihelio (punto de mayor acercamiento al Sol).

- ξ está dada por:

$$\tan\xi = \sqrt{\frac{r}{r_p} - 1}$$

Para el caso de máxima permanencia dentro de la órbita terrestre, consideramos que el cometa pasa muy cerca del Sol, es decir, $r_p \approx 0$. En este caso, la expresión se simplifica y el tiempo desde el perihelio hasta $r = R$ (radio de la órbita terrestre) es:

$$t_R - t_p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2R^3}{GM}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Sin embargo, para $r_p \approx 0$, $\tan\xi$ tiende a infinito, lo cual no es práctico.

Alternativamente, podemos considerar el tiempo que tarda el cometa en caer desde una distancia infinita hasta $r = R$ en movimiento radial (aunque en una órbita parabólica el movimiento no es radial, esta aproximación nos dará una estimación del tiempo máximo).

El tiempo de caída desde el infinito hasta $r = R$ es:

$$t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2R^3}{GM}}$$

Calculamos este tiempo utilizando los valores conocidos:

- $GM = 1{,}327 \times 10^{20}\ \mathrm{m^3/s^2}$ (constante gravitacional solar).
- $R = 1{,}496 \times 10^{11}$ m (distancia promedio de la Tierra al Sol).

Sustituyendo:

$$t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2(1{,}496 \times 10^{11}\ \mathrm{m})^3}{1{,}327 \times 10^{20}\ \mathrm{m^3/s^2}}}$$

Calculamos el numerador:

$$2(1{,}496 \times 10^{11}\ \mathrm{m})^3 = 2 \times (1{,}496 \times 10^{11}\ \mathrm{m})^3 = 2 \times 3{,}352 \times 10^{33}\ \mathrm{m^3} = 6{,}704 \times 10^{33}\ \mathrm{m^3}$$

Calculamos la raíz cuadrada:

$$t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{6{,}704 \times 10^{33}\ \mathrm{m^3}}{1{,}327 \times 10^{20}\ \mathrm{m^3/s^2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{5{,}051 \times 10^{13}\ \mathrm{s^2}} = \frac{2}{3} \times 7{,}104 \times 10^6\ \mathrm{s}$$

Por lo tanto:

$$t = 4{,}736 \times 10^6\ \mathrm{s}$$

Convertimos este tiempo a días:

$$\text{Número de días} = \frac{t}{86400\ \text{s/día}} = \frac{4{,}736 \times 10^6\ \mathrm{s}}{86400\ \text{s/día}} \approx 54{,}8\ \text{días}$$

Respuesta: El cometa puede permanecer un máximo de aproximadamente **55 días** dentro de la órbita terrestre.

Problema 2

Una partícula se mueve en el potencial $V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$.

a) Determine la órbita de la partícula $r = r(\theta)$.

Solución:

Para encontrar la ecuación de la órbita, utilizamos la ecuación diferencial de la órbita para fuerzas centrales:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

donde $u = \frac{1}{r}$ y $L = mr^2\dot{\theta}$ es el momento angular (constante).

Primero, encontramos la fuerza $F(r)$:

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} = -\left(-\frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3}\right) = \frac{a}{r^2} + \frac{2b}{r^3}$$

En términos de u:

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = au^2 + 2bu^3$$

Sustituimos en la ecuación de la órbita:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2}\left(au^2 + 2bu^3\right)$$

Simplificamos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{ma}{L^2}u^2 - \frac{2mb}{L^2}u^3$$

Reordenamos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{ma}{L^2}u^2 + \frac{2mb}{L^2}u^3 = 0$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. Sin embargo, podemos considerar soluciones aproximadas o casos especiales. Si los términos no lineales son pequeños, podemos utilizar métodos perturbativos.

Alternativamente, si suponemos que $b = 0$, la ecuación se simplifica:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + ku^2 = 0 \quad \text{donde} \quad k = \frac{ma}{L^2}$$

Esta ecuación es conocida y puede resolverse utilizando métodos estándar.

Sin embargo, dado que la ecuación general es complicada, podemos considerar soluciones particulares o aproximadas dependiendo de los valores de a y b.

Respuesta: La ecuación de la órbita es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{ma}{L^2}u^2 + \frac{2mb}{L^2}u^3 = 0$$

b) Dibuje esquemáticamente el potencial efectivo para este sistema.

Solución:

El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ incluye el potencial $V(r)$ y el término centrífugo:

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Agrupamos los términos en $\frac{1}{r^2}$:

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{a}{r} + \frac{1}{r^2}\left(b + \frac{L^2}{2m}\right)$$

El gráfico de $V_{\text{ef}}(r)$ vs. r muestra cómo el potencial efectivo varía con la distancia. Tendrá un mínimo si el término en $\frac{1}{r^2}$ es positivo y suficientemente grande para equilibrar el término en $\frac{1}{r}$.

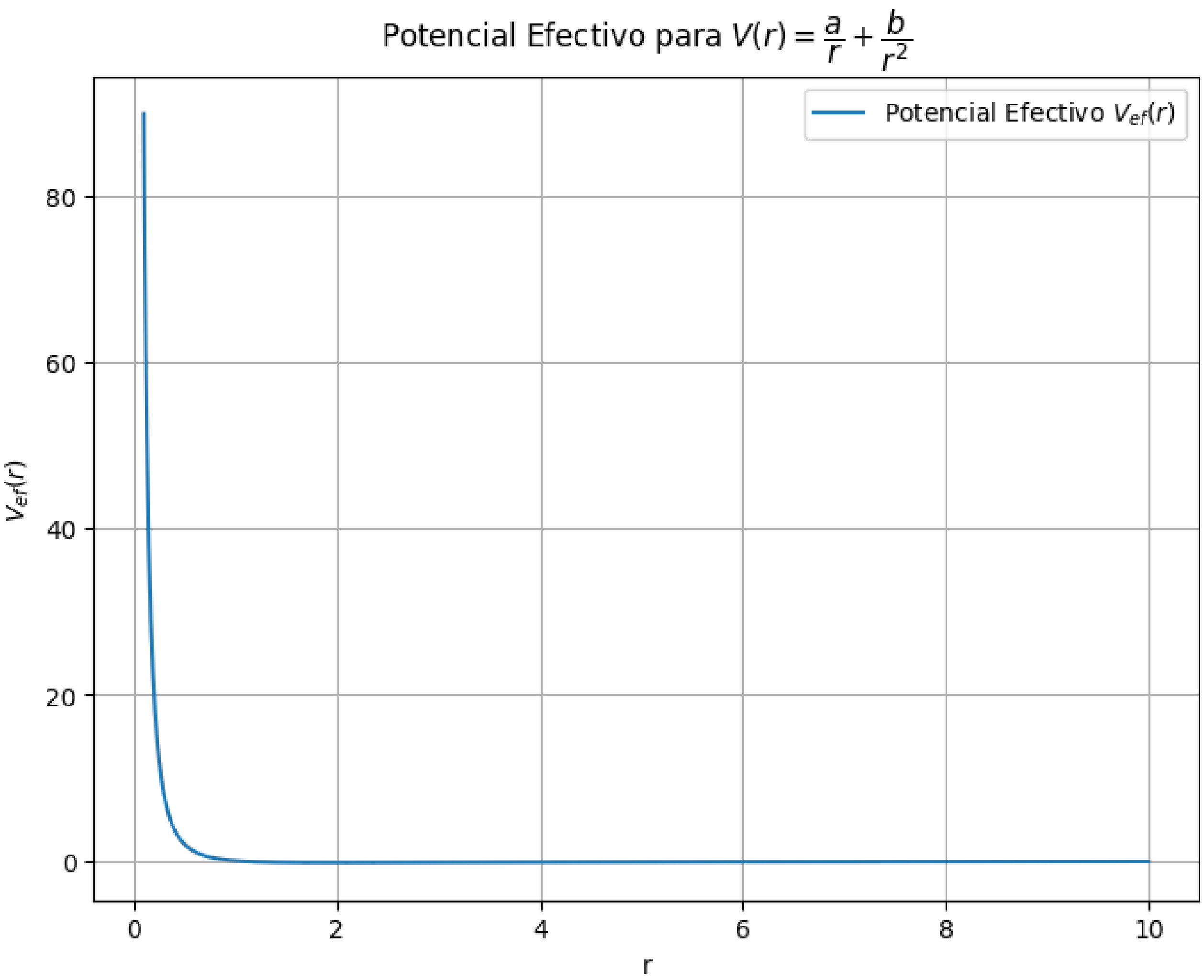

Figura 1: Potencial efectivo para el sistema

Respuesta: El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ presenta una combinación de términos en $\frac{1}{r}$ y $\frac{1}{r^2}$. El gráfico esquemático muestra un potencial que disminuye a medida que r aumenta, con una posible barrera o mínimo dependiendo de los valores de a, b y L.

Problema 3

Considere ahora el potencial de Yukawa $V(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/a}$, donde $k > 0$ y $a > 0$ son constantes.

a) Encuentre la condición de estabilidad de una órbita circular de radio r_0.

Solución:

Para que una órbita circular de radio r_0 sea estable, el potencial efectivo debe tener un mínimo en $r = r_0$. Esto implica que:

1. La primera derivada del potencial efectivo es cero en $r = r_0$:

$$\left.\frac{dV_{\text{ef}}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$$

2. La segunda derivada es positiva en $r = r_0$:

$$\left.\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0$$

El potencial efectivo es:

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{k}{r}e^{-r/a} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Calculamos la primera derivada:

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = \frac{ke^{-r/a}}{r^2}\left(1 + \frac{r}{a}\right) - \frac{L^2}{mr^3}$$

Establecemos $r = r_0$ y igualamos a cero:

$$\frac{ke^{-r_0/a}}{r_0^2}\left(1 + \frac{r_0}{a}\right) - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0$$

Despejamos L^2:

$$L^2 = mke^{-r_0/a}\left(1 + \frac{r_0}{a}\right)r_0$$

Calculamos la segunda derivada:

$$\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2} = \frac{ke^{-r/a}}{r^3}\left(2 + \frac{4r}{a} + \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{3L^2}{mr^4}$$

Evaluamos en $r = r_0$ y utilizamos el valor de L^2 obtenido. La condición de estabilidad es que este resultado sea positivo.

Respuesta: La condición de estabilidad es que:

$$\left.\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0$$

usando el valor de L^2 obtenido de la condición de equilibrio.

b) Determine el período de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de esta órbita circular.

Solución:

Para pequeñas oscilaciones radiales alrededor de $r = r_0$, el movimiento radial puede aproximarse por:

$$m\ddot{r} + k_r(r - r_0) = 0$$

donde:

$$k_r = \left.\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\right|_{r=r_0}$$

La frecuencia angular de las oscilaciones radiales es:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m}}$$

El período de las oscilaciones es:

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}$$

Calculamos k_r utilizando la segunda derivada del potencial efectivo en $r = r_0$ (como se hizo en el apartado anterior) y luego obtenemos ω_r y T_r.

Respuesta: El período de pequeñas oscilaciones radiales es:

$$T_r = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\right|_{r=r_0}}}$$

Problema 4

Una partícula con momento angular L describe la órbita $r = a(1 + \cos\theta)$.

a) Encuentre la fuerza central que produce esta órbita

Solución:
Comenzamos utilizando la ecuación diferencial de la órbita para fuerzas centrales:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

donde $u = \dfrac{1}{r}$.
Dada la órbita $r = a(1 + \cos\theta)$, tenemos:

$$u = \frac{1}{a(1 + \cos\theta)}$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{a(1 + \cos\theta)^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2\sin^2\theta}{a(1 + \cos\theta)^3} - \frac{\cos\theta}{a(1 + \cos\theta)^2}$$

Simplificamos $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{2\sin^2\theta}{a(1 + \cos\theta)^3} - \frac{\cos\theta}{a(1 + \cos\theta)^2} + \frac{1}{a(1 + \cos\theta)}$$

Usando identidades trigonométricas y simplificaciones, obtenemos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{3}{a(1 + \cos\theta)^2}$$

Por lo tanto:

$$-\frac{m}{L^2} F(r) = \frac{3}{a(1 + \cos\theta)^2}$$

Dado que $r = a(1 + \cos\theta)$, entonces $(1 + \cos\theta) = \dfrac{r}{a}$, y sustituimos:

$$-\frac{m}{L^2} F(r) = \frac{3a}{r^2}$$

Despejando $F(r)$:

$$F(r) = -\frac{3aL^2}{mr^2}$$

Respuesta: La fuerza central es $F(r) = -\dfrac{3aL^2}{mr^2}$.

b) Calcule el período de esta órbita

Solución:

El período T es el tiempo que tarda la partícula en completar una revolución completa (θ de 0 a 2π).

Usamos la relación:

$$L = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Sustituimos $r = a(1 + \cos\theta)$:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{ma^2(1 + \cos\theta)^2}$$

El período es:

$$T = \int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{ma^2(1 + \cos\theta)^2}{L} d\theta$$

Calculamos la integral:

$$T = \frac{ma^2}{L} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{ma^2}{L} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$

Sabemos que:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi$$

Entonces:

$$T = \frac{ma^2}{L}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi ma^2}{L}$$

Respuesta: El período de la órbita es $T = \dfrac{3\pi ma^2}{L}$.

c) Determine la energía mínima que debe tener la partícula para escapar de esta órbita

Solución:

La energía total E es:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

Usando $L = mr^2\dot{\theta}$ y las expresiones de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$, encontramos que la energía total es constante y negativa (el sistema está ligado).

Para que la partícula escape, necesita $E \geq 0$. Por lo tanto, la energía mínima necesaria para escapar es:

$$E_{\text{escape}} = 0$$

La energía adicional requerida es la opuesta de la energía total actual de la partícula.

Respuesta: La partícula debe tener suficiente energía para que $E \geq 0$. La energía mínima necesaria para escapar es igual al valor absoluto de su energía total en la órbita.

Problema 5

Un cometa de masa $M_T/8$ y velocidad $-5v_T$ tiene una colisión completamente inelástica con la Tierra (i.e., el cometa y la Tierra quedan unidos después de la colisión), donde M_T y v_T son la masa y la velocidad orbital de la Tierra, respectivamente. La órbita terrestre puede suponerse circular alrededor del Sol con un radio R.

a) Calcule el afelio y el perihelio de la órbita de la Tierra después de la colisión

Solución:
Conservación del momento lineal:
Antes de la colisión:

$$\vec{P}_{\text{antes}} = M_T\vec{v}_T + \frac{M_T}{8}(-5\vec{v}_T) = M_T\vec{v}_T - \frac{5M_T}{8}\vec{v}_T = \frac{3M_T}{8}\vec{v}_T$$

Después de la colisión (masa total $M_{\text{total}} = M_T + \frac{M_T}{8} = \frac{9M_T}{8}$):

$$\vec{P}_{\text{después}} = M_{\text{total}}\vec{v}_f = \frac{9M_T}{8}\vec{v}_f$$

Igualando los momentos:

$$\frac{3M_T}{8}\vec{v}_T = \frac{9M_T}{8}\vec{v}_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{v_T}{3}$$

Conservación del momento angular:
Antes de la colisión:

$$L_{\text{antes}} = M_T R v_T - \frac{5M_T}{8}Rv_T = \frac{3M_T R v_T}{8}$$

Después de la colisión:

$$L_{\text{después}} = M_{\text{total}}Rv_f = \frac{9M_T}{8}R\left(\frac{v_T}{3}\right) = \frac{3M_T R v_T}{8}$$

Por lo tanto, el momento angular se conserva.
Determinación de los parámetros orbitales:
La energía específica después de la colisión es:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_f^2 - \frac{GM_S}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_T}{3}\right)^2 - \frac{v_T^2 R}{R} = \frac{v_T^2}{18} - v_T^2 = -\frac{17v_T^2}{18}$$

Donde usamos $GM_S = v_T^2 R$.
El semieje mayor a:

$$\varepsilon = -\frac{GM_S}{2a} \quad \Rightarrow \quad -\frac{17v_T^2}{18} = -\frac{v_T^2 R}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9R}{17}$$

La excentricidad e:

$$h = Rv_f = R\left(\frac{v_T}{3}\right) = \frac{Rv_T}{3}$$

El momento angular específico también es:

$$h = \sqrt{GM_S a(1-e^2)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{Rv_T}{3}\right)^2 = v_T^2 R a(1-e^2)$$

Simplificando:

$$\frac{R^2 v_T^2}{9} = v_T^2 R \left(\frac{9R}{17}\right)(1-e^2) \quad \Rightarrow \quad 1-e^2 = \frac{17}{81}$$

Por lo tanto:

$$e = \sqrt{1 - \frac{17}{81}} = \frac{8}{9}$$

Calculamos el perihelio (r_p) y el afelio (r_a):

$$r_p = a(1-e) = \frac{9R}{17}\left(1 - \frac{8}{9}\right) = \frac{R}{17}$$

$$r_a = a(1+e) = \frac{9R}{17}\left(1 + \frac{8}{9}\right) = R$$

Respuesta: El perihelio es $r_p = \dfrac{R}{17}$ y el afelio es $r_a = R$.

b) ¿Cuántos días dura un año terrestre después de la colisión?

Solución:
Usamos la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_S}$$

Sabemos que $GM_S = v_T^2 R$ y el período original es:

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_T}$$

Calculamos el nuevo período T:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{v_T^2 R} = \frac{4\pi^2 \left(\frac{9R}{17}\right)^3}{v_T^2 R} = \frac{4\pi^2 \frac{729R^3}{4913}}{v_T^2 R} = \frac{4\pi^2 \frac{729R^2}{4913}}{v_T^2}$$

El cociente de los períodos es:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{729}{4913} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{T_0} = \frac{27}{17\sqrt{17}} \approx 0{,}385$$

Por lo tanto:

$$T \approx 0{,}385 \times 365 \text{ días} \approx 140 \text{ días}$$

Respuesta: Después de la colisión, el año terrestre duraría aproximadamente 140 días.