Asignación 3, Métodos Matemáticos para Físicos I

Santiago Correa Vergara - 2182212
Jeicor Esneider Florez Pabón - 2231338
Juan José Camacho Olmos - 2180800

Universidad Industrial de Santander
Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martínez
Grupo E1

26 de Junio de 2024

Índice

Resumen

El objetivo principal de esta asignación es calcular los momentos de orden cero, uno y dos de una distribución de masas, los autovalores y autovectores, y finalmente la matriz de transformación en la base de autovectores. También se analizarán y responderán las preguntas relacionadas.
Además, analizaremos la relación entre distintos datos económicos del país Colombia utilizando la matriz de covarianza. Calcularemos los autovalores y autovectores de esta matriz, y como se mencionó previamente, se calculará la matriz de transformación en la base de autovectores. Nos enfocaremos específicamente en los datos del porcentaje del Producto Interno Bruto (P.I.B.) gastado en Salud, Defensa, Educación, Ciencia y Tecnología. Paralelamente, se analizarán y responderán las preguntas relacionadas.

Abstract

The main objective of this assignment is to compute the zeroth, first, and second moments of a mass distribution, the eigenvalues and eigenvectors, and finally the transformation matrix in the eigenvector basis. Related questions will also be analyzed and addressed.
Additionally, we will examine the relationship between various economic data of Colombia using the covariance matrix. We will compute the eigenvalues and eigenvectors of this matrix, and as mentioned earlier, compute the transformation matrix in the eigenvector basis. We will specifically focus on the percentage of Gross Domestic Product (GDP) spent on Health, Defense, Education, Science, and Technology. Concurrently, related questions will be analyzed and answered.

1. Información acerca del software utilizado

1.1. pip3 list

Al momento del desarrollo de esta asignación se utilizaron los siguientes paquetes:

```
Package                      Version
---------------------------- -----------
absl-py                      2.1.0
astunparse                   1.6.3
attrs                        23.2.0
certifi                      2024.6.2
charset-normalizer           3.3.2
contourpy                    1.2.1
cycler                       0.12.1
fastjsonschema               2.20.0
flatbuffers                  24.3.25
fonttools                    4.53.0
gast                         0.5.4
google-pasta                 0.2.0
grpcio                       1.64.1
h5py                         3.11.0
idna                         3.7
jsonschema                   4.22.0
jsonschema-specifications    2023.12.1
jupyter_core                 5.7.2
jupytext                     1.16.2
keras                        3.3.3
kiwisolver                   1.4.5
libclang                     18.1.1
Markdown                     3.6
markdown-it-py               3.0.0
MarkupSafe                   2.1.5
matplotlib                   3.9.0
mdit-py-plugins              0.4.1
mdurl                        0.1.2
ml-dtypes                    0.3.2
mpmath                       1.3.0
namex                        0.0.8
nbformat                     5.10.4
numpy                        1.26.4
opt-einsum                   3.3.0
optree                       0.11.0
packaging                    24.1
pandas                       2.2.2
pendulum                     3.0.0
pillow                       10.3.0
pip                          23.0.1
platformdirs                 4.2.2
protobuf                     4.25.3
Pygments                     2.18.0
pyparsing                    3.1.2
PyQt5                        5.15.10
PyQt5-Qt5                    5.15.2
PyQt5-sip                    12.13.0
python-dateutil              2.9.0.post0
pytz                         2024.1
PyYAML                       6.0.1
referencing                  0.35.1
requests                     2.32.3
rich                         13.7.1
rpds-py                      0.18.1
setuptools                   66.1.1
six                          1.16.0
sympy                        1.12.1
tensorboard                  2.16.2
tensorboard-data-server      0.7.2
tensorflow                   2.16.1
tensorflow-io-gcs-filesystem 0.37.0
termcolor                    2.4.0
time-machine                 2.14.1
traitlets                    5.14.3
typing_extensions            4.12.2
tzdata                       2024.1
urllib3                      2.2.2
Werkzeug                     3.0.3
wheel                        0.43.0
wrapt                        1.16.0
```

1.2. python3 –version

La versión de python3 que se utilizo fue Python 3.11.2.

2. Base teórica

2.1. Momento generalizado y casos particulares

En general los momentos de una función $f(x)$ de variable x real continua con x definida alrededor de un valor promedio de la variable $\bar{x}$ se define como:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)(x-\bar{x})^n \tag{1}$$

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}(|x_i\rangle)\ (|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^n \tag{2}$$

donde,

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x\rangle_i \tag{3}$$

Por lo tanto los momentos son:

Momento de orden cero o masa total del sistema.

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i \tag{4}$$

Momento de orden uno o centro de masa del sistema.

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle) \tag{5}$$

Momento de orden dos o tensor de inercia del sistema.

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^2 \tag{6}$$

por lo tanto el momento de orden dos está definido como,

$$\mu_2(v) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)^2 & \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)(|x_2\rangle - |\bar{x}_2\rangle) \\ \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)(|x_1\rangle - |\bar{x}_1\rangle) & \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

eso quiere decir que $\mu_2(v) =$ Tensor Momento de Inercia

$$\text{Tensor Inercia} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)^2 & \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)(|x_2\rangle - |\bar{x}_2\rangle) \\ \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)(|x_1\rangle - |\bar{x}_1\rangle) & \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)^2 \end{pmatrix}$$

donde, $I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2)$, $I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2)$ e $I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} -m_i(x_i y_i)$.

2.2. Matriz Covarianza

Nuestra matriz de covarianza es la siguiente.

$v_i = 1$ se tomará de esta manera puesto que estamos comparando conjuntos de datos mas no tensor momento de inercia de un conjunto de masas.

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} \text{Var}(A) & \text{Cov}(A,B) \\ \text{Cov}(B,A) & \text{Var}(B) \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)^2}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)(|x_2\rangle - |\bar{x}_2\rangle)}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)(|x_1\rangle - |\bar{x}_1\rangle)}{N} & \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)^2}{N} \end{pmatrix} \tag{8}$$

es decir la varianza de A:

$$\text{Var}(A) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)^2}{N} \tag{9}$$

y la varianza de B:

$$\text{Var}(A) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)^2}{N} \tag{10}$$

a su vez $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \mathbf{Cov}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$ (es decir es válido para todos los elementos diferentes de la diagonal) puesto que nuestra matriz covarianza es una matriz simétrica:

$$\text{Cov}(A,B) = \text{Cov}(B,A) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)(|x_2\rangle - |\bar{x}_2\rangle)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)(|x_1\rangle - |\bar{x}_1\rangle)}{N} \tag{11}$$

es decir:

Si $\text{Cov}(A,B) = 0$ entonces no existe relación lineal entre A y B.

Si $\text{Cov}(A,B) > 0$ entonces existe una relación lineal directa o positiva entre A y B. Esto es, a mayores valores de A, en promedio tenemos mayores valores de B y viceversa.

Si Si $\text{Cov}(A,B) < 0$ entonces existe una relación lineal inversa o negativa entre A y B. Esto es, a mayores valores de A, en promedio tenemos menores valores de B y viceversa.

Entonces podemos decir que cuando $\text{Cov}(A,B) \neq 0$ varian juntos (en conjunto) a la vez.

Y si extrapolamos de (6), (7) para el caso de cuatro conjunto de datos o variables:

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} \text{Var}(A) & \text{Cov}(A,B) & \text{Cov}(A,C) & \text{Cov}(A,D) \\ \text{Cov}(B,A) & \text{Var}(B) & \text{Cov}(B,C) & \text{Cov}(B,D) \\ \text{Cov}(C,A) & \text{Cov}(C,B) & \text{Var}(C) & \text{Cov}(C,D) \\ \text{Cov}(D,A) & \text{Cov}(D,B) & \text{Cov}(D,C) & \text{Var}(D) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Hay que tener bastante cuidado puesto que a simple vista parece que tensor momento de inercia o momento generalizado cuando n = 2 sea “igual“ a la matriz de covarianza, ya que no son lo mismo y tampoco se calculan de la misma manera.

2.3. Matriz de correlación

A partir de la matriz de covarianzaa.

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \text{Cov}(A,B) \\ \text{Cov}(B,A) & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$$

de $\text{Var}(A) = \sigma_A^2$, $\text{Var}(B) = \sigma_B^2$ y $\text{Cov}(A,B) = \sigma_{A,B}^2$
Por lo tanto donde las desviaciones estándar son:

$$\sigma_A = \sqrt{\text{Var}(A)}$$
$$\sigma_B = \sqrt{\text{Var}(B)}$$
$$\sigma_{A,B} = \sqrt{\text{Var}(A,B)}$$

y utilizando las desviaciones estandar,

$$\rho_{AB} = \frac{\text{Cov}(A,B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

son los coeficientes de correlación entre las variables A y B.
La matriz de correlación se calcula como:

$$\text{Matriz Correlacion} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{AB} \\ \rho_{BA} & 1 \end{pmatrix}$$

como se puede observar en la diagonal siempre nos resultará uno, y así como la matriz de covarianza es simétrica, la matriz de correlación también lo es, por lo tanto se cumple que $\boldsymbol{\rho_{AB} = \rho_{BA}}$.

2.4. Autovalores y Autovectores

Se tiene una matriz arbitraria A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los autovalores (λ) de A, resolvemos la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{13}$$

Donde I es la matriz identidad:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo A y I en la ecuación característica, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

resolviendo el deterimante,

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \tag{15}$$

por lo tanto,

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \tag{16}$$

Estos son los autovalores λ de la matriz A.
Los autovectores correspondientes se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ para cada autovalor λ,

Para el auto valor λ_1:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{17}$$

resolviendo el sistema, tenemos:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Para el auto valor λ_2:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{19}$$

resolviendo el sistema, tenemos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Por lo tanto los autovectores son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Hay que tener en cuenta que aunque encontremos N autovalores no significa que tengamos N autovectores, pues debemos garantizar que se cumpla el No Degenerado, esto significa que nuestros N autovalores sean independientes los unos de los otros y no haya ninguno repetido o igual a otro.

2.5. Matriz de transformación

Se tiene una matriz arbitraria A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Esta matriz A puede ser diagonalizable, lo que significa que se puede expresar como $A = PDP^{-}1$, donde P es una matriz de vectores propios (autovectores) y D es una matriz diagonal de autovalores.

La matriz P está compuesta por columnas que son autovectores de A. Estos autovectores forman una base en la que A tiene una forma más simple (diagonal) en términos de los autovalores.

Por lo tanto, al multiplicar $P^{-}1$ por A y luego por P (recordando que en álgebra lineal las matrices se multiplican de izquierda a derecha), se realiza un cambio de base. Esta operación transforma la matriz A en una nueva matriz representada en la base de autovectores contenidos en P, siempre y cuando los autovectores correspondientes a los distintos autovalores de A sean linealmente independientes.

3. Primer punto

Consideremos un sistema conformado por n partıculas de masas distintas masas dispersas en un volumen, tal y como muestra el archivo se datos . El archivo datosmasas.cv se encuentra en el https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMaterialesAsignaciones/DatosTensores/datosmasas.csv

Los códigos que nos resuelven el Punto 1 en 2-D y 3-D se encuentran en https://github.com/santycorreav/Met_Mat_Fis_1/blob/main/Codigos

3.1. Inciso a)

Para la distribución de masas en el plano xy (2-D):

3.1.1. Momento de orden cero, la masa total del sistema

$$\text{Masa Total} = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Donde m_i es la masa de la i-ésima partícula.

$$\text{Masa Total} = 4627{,}0$$

3.1.2. Momento de orden uno el centro de masa del sistema

$$\text{Centro De Masa} = (x, y) \tag{22}$$

Donde x es la absica (coordenada horizontal) y y es la ordenada (coordenada vertical) de nuestro centro de masa.

$$x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Donde (x_i, y_i) son las coordenadas de la i-ésima partícula.

$$\text{Centro de Masa} = \begin{pmatrix} 825{,}8152 & 776{,}9185 \end{pmatrix}$$

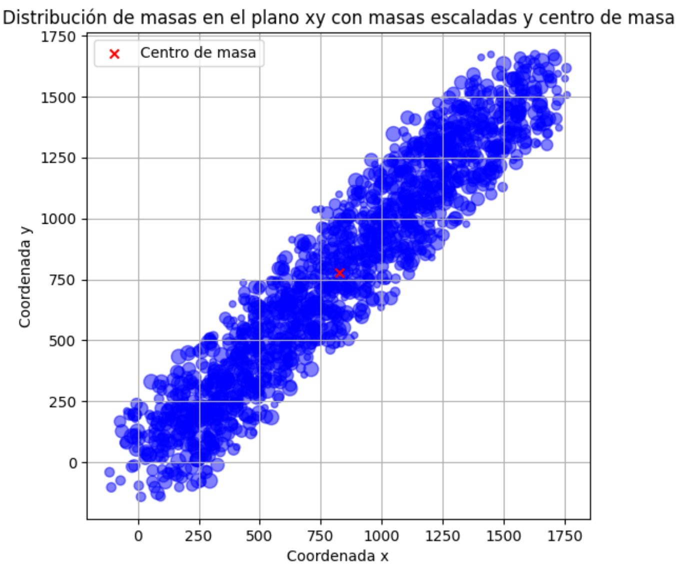

Figura 1: Centro de Masa de las N masas en 2D

3.1.3. Momento de orden dos, el tensor momento de inercia del sistema

Nuestro tensor momento de inercia es:

$$\text{Tensor Inercia 2D} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 963660148{,}2827 & -911747911{,}3361 \\ -911747911{,}3361 & 958535589{,}0089 \end{pmatrix}$$

3.1.4. Primera pregunta

¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?

Respuesta: *No, puesto que si el tensor de inercia tiene elementos en todas sus componentes, significa que los momentos de inercia no están alineados exclusivamente con los ejes xx, yy, y zz del sistema cartesiano. En este contexto, los vectores base del sistema cartesiano no actuarían como autovectores del tensor de inercia. Los autovectores son aquellos vectores especiales que, al aplicar el tensor de inercia, resultan en el mismo vector, posiblemente escalado por un factor (el autovalor correspondiente). Cuando el tensor de inercia no es diagonal, implica que los autovectores no coinciden con los vectores cartesianos estándar, por lo tanto, estos últimos no formarían una base natural para describir la distribución de masa en términos de sus momentos de inercia*

3.1.5. Segunda pregunta

Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.

$$\text{Autovalores} = \begin{pmatrix} 1872849380{,}3542 & 49346356{,}9373 \end{pmatrix}$$

$$\text{Autovectores} = \begin{pmatrix} 0{,}7081 & 0{,}7061 \\ -0{,}7061 & 0{,}7081 \end{pmatrix}$$

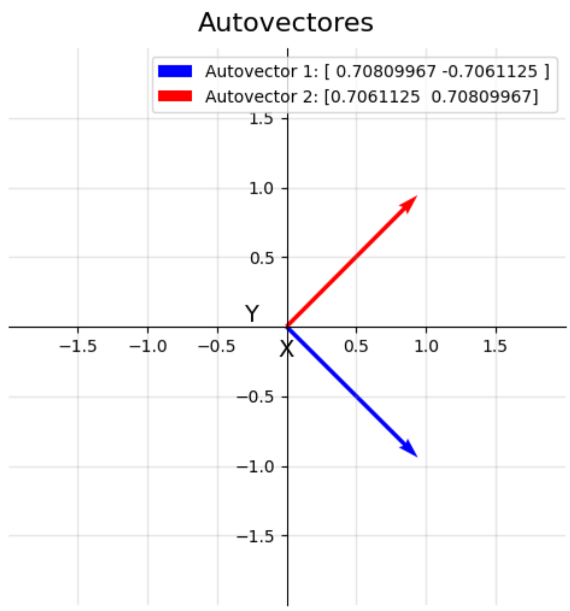

Figura 2: Centro de Masa de las N masas en 2D

3.1.6. Tercera pregunta

Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores con- formada por los ejes principales.

$$\text{Matriz Transformacion} = \begin{pmatrix} 1872849380{,}3542 & -0{,}0 \\ -0{,}0 & 49346356{,}9373 \end{pmatrix}$$

3.2. Inciso b)

Se realizó nuevamente los calculos de los momentos de orden cero, uno y dos pero en este caso en 3-D.

Para la distribución de masas en el plano xyz (3-D):

Masa total:

$$\text{Masa Total} = 4627{,}0$$

Centro de masa:

$$\text{Centro de Masa 3D} = \begin{pmatrix} 821{,}9739 & 775{,}8702 & 15{,}0633 \end{pmatrix}$$

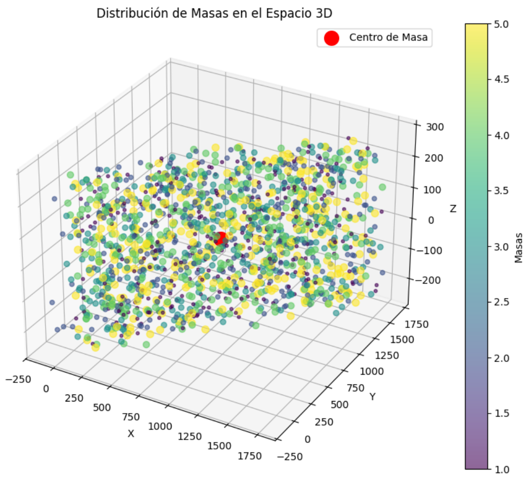

Figura 3: Centro de Masa de las N masas en 2D

Tensor inercia:

$$\text{Tensor Inercia 3D} = \begin{pmatrix} 958535589{,}0089 & 911747911{,}3361 & -7142048{,}6358 \\ 911747911{,}3361 & 963660148{,}2827 & -1929597{,}2371 \\ -7142048{,}6358 & -1929597{,}2371 & 101843320{,}6981 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores:

$$\text{Autovalores 3D} = \begin{pmatrix} 1872872576{,}5017 & 49087482{,}2103 & 102078999{,}2777 \end{pmatrix}$$

$$\text{Autovectores 3D} = \begin{pmatrix} 0{,}7061 & 0{,}7065 & -0{,}0469 \\ 0{,}7081 & -0{,}7042 & 0{,}0519 \\ -0{,}0036 & 0{,}0699 & 0{,}9975 \end{pmatrix}$$

Matriz Transformación:

$$\text{Matriz Transformación 3D} = \begin{pmatrix} 1872872576{,}5017 & 0{,}0 & -0{,}0 \\ -0{,}0 & 49087482{,}2103 & -0{,}0 \\ 0{,}0 & -0{,}0 & 102078999{,}2777 \end{pmatrix}$$

4. Segundo Punto

El Banco Mundial https://data.worldbank.org mantiene una estadıstica de los datos económicos de casi todos los paıses. En particular estamos interesados en calcular la matriz de covariancia del del producto interno bruto (GDP) que se ha empleado en el paıs en los últimos 15 años en Defensa, Salud, Educación y Ciencia y Tecnología.

El código que nos resuelve este punto (2) se encuentra en https://github.com/santycorreav/Met_Mat_Fis_1/tree/main/DocPDF

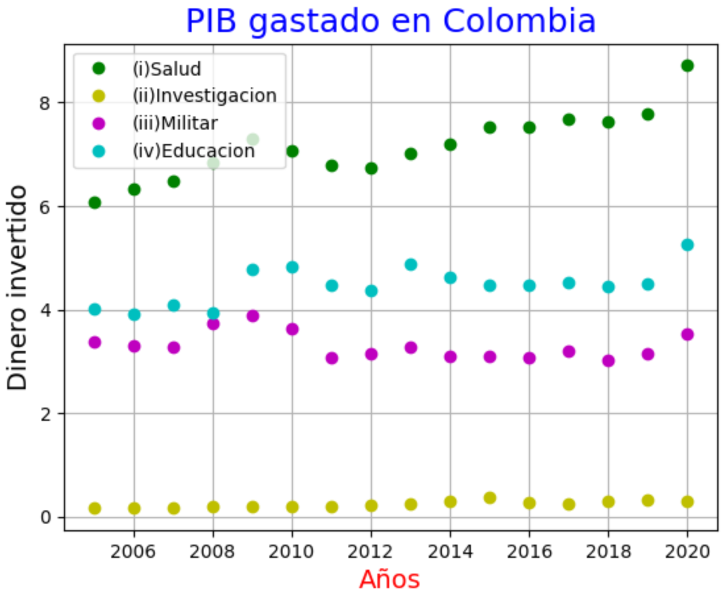

Figura 4: Datos Utilizados PIB Colombia 2005-2020

4.1. Inciso a)

Calcule la matriz de covariancia y la matriz de correlación entre estos parámetros:

Esta es la matriz covarianza calculandolo manualmente, La covarianza se calcula dividiendo por N (el número de elementos). Esta es la matriz que se usó en todos los cálculos posteriores.

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} 0{,}3965 & 0{,}0278 & -0{,}0041 & 0{,}1666 \\ 0{,}0278 & 0{,}0037 & -0{,}0076 & 0{,}0095 \\ -0{,}0041 & -0{,}0076 & 0{,}063 & 0{,}0121 \\ 0{,}1666 & 0{,}0095 & 0{,}0121 & 0{,}1254 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz covarianza calculandolo usando numpy.cov, La covarianza se calcula dividiendo por N-1 (lo cual se conoce como el estimador insesgado.).

$$\text{Matriz Covarianza numpy} = \begin{pmatrix} 0{,}4229 & 0{,}0296 & -0{,}0044 & 0{,}1777 \\ 0{,}0296 & 0{,}0039 & -0{,}0081 & 0{,}0101 \\ -0{,}0044 & -0{,}0081 & 0{,}0672 & 0{,}0129 \\ 0{,}1777 & 0{,}0101 & 0{,}0129 & 0{,}1338 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz Correlacion} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}7298 & -0{,}0259 & 0{,}7469 \\ 0{,}7298 & 1{,}0 & -0{,}4985 & 0{,}4429 \\ -0{,}0259 & -0{,}4985 & 1{,}0 & 0{,}1364 \\ 0{,}7469 & 0{,}4429 & 0{,}1364 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

4.2. Inciso b)

Para la matriz de covariancia, en este espacio de parámetros, queremos encontrar sus autovalores y autovectores.

$$\text{Autovalores} = \begin{pmatrix} 0{,}4775 & 0{,}0709 & 0{,}0394 & 0{,}0008 \end{pmatrix}$$

$$\text{Autovectores} = \begin{pmatrix} 0{,}9016 & 0{,}1962 & -0{,}3786 & 0{,}0732 \\ 0{,}0614 & 0{,}1197 & 0{,}0166 & -0{,}9908 \\ 0{,}0025 & -0{,}8755 & -0{,}4696 & -0{,}1136 \\ 0{,}4283 & -0{,}425 & 0{,}7974 & -0{,}0114 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el significado de los autovalores y autovectores de esta matriiz?

Respuesta: *Los autovectores de la matriz de covarianza representan las direcciones principales de máxima varianza en los datos. Esto significa que estos vectores indican las direcciones en las cuales los datos tienen la mayor dispersión. Las magnitudes de los autovalores correspondientes indican la varianza a lo largo de estas direcciones.*

4.3. Inciso c)

Encuentre la matriz de transformación que nos lleva de la matriz en la base original a la representación de la matriz en la base de autovalores y autovectores.

$$\text{Datos} = \begin{pmatrix} 0{,}4775 & 0{,}0 & -0{,}0 & 0{,}0 \\ -0{,}0 & 0{,}0709 & 0{,}0 & -0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0394 & 0{,}0 \\ -0{,}0 & -0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0008 \end{pmatrix}$$

5. Referencias

Taller Tensores y Autovalores, Matemáticas Avanzadas Luis. A. Núñez

Matemáticas avanzadas con aplicaciones en Python-SymPy Héctor Hernández y Luis. A. Núñez

Mathematical methods for physics and engineering Riley K. F., Hobson, M. P. y Bence, S. J. (1999)