Taller 2

Sección 2.1.6

3a) Tabla de multiplicación de G_Δ

$G_\Delta = \{ I, R_i, \overline{R_j}, X_K \}$ R_i = Contra Reloj

R_j = Reloj

$G_\Delta = \{ I, R_1, R_2, R_3, \ldots$

$\ldots, \overline{R_1}, \overline{R_2}, \overline{R_3}, X_A, X_B, X_C \}$

donde $R_i = \frac{2\pi}{3} n$, $n = 1, 2, 3$

$\overline{R_j} = -\frac{2\pi}{3} n$, $n = 1, 2, 3$

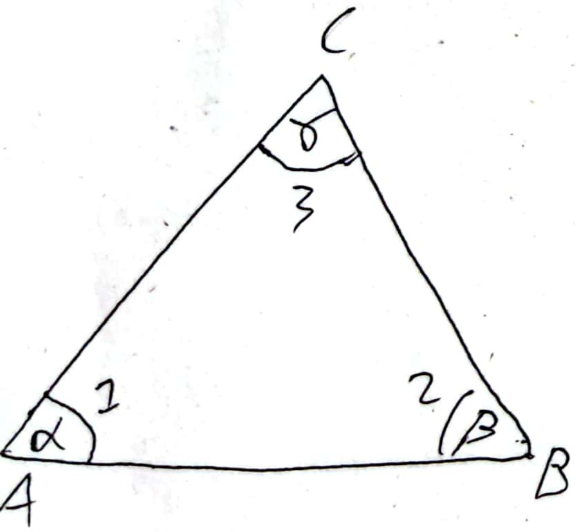
No se toman en cuenta $R_2, R_3, \overline{R_2}$ y $\overline{R_3}$, puesto que con $\overline{R_1}$ y R_1 podemos obtener las anterior mencionadas.

Se puede observar también el elemento identidad representado por I, es decir G_Δ:

$G_\Delta = \{ I, R_1, \overline{R_1}, X_A, X_B, X_C \}$

$G_\Delta = \{ I, R_1, \overline{R_1}, X_A, X_B, X_C \} \rightarrow$ conjunto elementos

	I	R_1	$\bar{R}_1$	X_A	X_B	X_C
I	I	R_1	$\bar{R}_1$	X_A	X_B	X_C
R_1	R_1	$\bar{R}_1$	I	X_C	X_A	X_B
$\bar{R}_1$	$\bar{R}_1$	I	R_1	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_1$
X_B	X_B	X_C	X_A	$\bar{R}_1$	I	R_1
X_C	X_C	X_A	X_B	R_1	$\bar{R}_2$	I



Elemento Inicial (Triángulo):

$$\Delta = [\alpha \quad \beta \quad \gamma] = I$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ Posición

A B C

Operación ó $\bullet$

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ \Delta = I = [& 1 & 2 & 3 \;] \end{array}$$

Para facilitar operaciones, los elementos α, β y γ, los tomaremos como números 1, 2, 3 respectivamente y dependiendo de su posición A, B, C nos definirá su operador, es decir:

$$\Delta \cdot R_1 = [1 \quad 2 \quad 3] \cdot R_1$$

Moveremos los elementos a la derecha $\rightarrow$

$$\boxed{\Delta \cdot R_1 = [3 \quad 1 \quad 2] = \Delta R_1}$$

Es decir vamos a permutar.

Para los demás operaciones:

$$\Delta \cdot \bar{R_1} = [1 \quad 2 \quad 3] \cdot \bar{R_1}$$

moveremos los elementos a la izquierda $\leftarrow$

$$\boxed{\Delta \cdot \bar{R_1} = [2 \quad 3 \quad 1] = \Delta \bar{R_1}}$$

$$\Delta \cdot X_A = [\underset{A}{1} \quad \boxed{\underset{B}{2} \quad \underset{C}{3}}\,] \cdot X_A$$

Dejamos quieta la posición A, posteriormente intercambiamos B y C.

$$\boxed{\Delta \cdot X_A = [1 \quad 3 \quad 2] = \Delta X_A}$$

Ahora:

$$\Delta \cdot X_B = [\underset{A}{1} \quad \underset{B}{2} \quad \underset{C}{3}] \cdot X_B$$

Dejamos quieta la posición B y intercambiamos A y C.

$$\boxed{\Delta \cdot X_B = [3 \quad 2 \quad 1] = \Delta X_B}$$

Por último:

$$\Delta \cdot X_C = [\underset{A}{1} \quad \underset{B}{2} \quad \underset{C}{3}] \cdot X_C$$

$$\boxed{\Delta \cdot X_C = [2 \quad 1 \quad 3] = \Delta X_C}$$

Ahora realizamos las operaciones y completamos nuestra tabla.

3b) Conjunto del triángulo:

$$C_\Delta = \{ I, R_1, \bar{R_1}, X_A, X_B, X_C \}$$

Para ser un grupo debemos satisfacer:

1. Cerrado ✓

$$\Delta \cdot R_1 = \Delta_{R_1}$$

$$\Delta_{R_1} \cdot X_A = \Delta_{X_B}$$

se cumple, ya que al operarar sigue perteneciendo al conjunto del triángulo.

2. Asociativa ✓

$$(\Delta \cdot R_1) \cdot X_C = \Delta \cdot (R_1 \cdot X_C)$$

$$X_A = X_A$$

se satisface, puesto que al asociar de diferente manera y operar, obtenemos el mismo resultado.

3. Neutro ✓

Tenemos el elemento I.

4. Inverso o simétrico ✓

Debemos obtener la identidad a partir de la operación, $e \square e^{-1} = I$

Para $R_1, \bar{R_1}$:

$$\Delta R_1 \cdot R_1 = [3 \quad 1 \quad 2] \cdot R_1$$

$$\Delta R_1 \cdot \bar{R_1} = [1 \quad 2 \quad 3] = I$$ ✓

Para X_A,

$$\Delta X_A \cdot X_A = [1 \quad 3 \quad 2] \cdot X_A$$

$$\Delta X_A \cdot X_A = [1 \quad 2 \quad 3] = I$$ ✓

De esta manera con todos los elementos, como se observa en la tabla.

5. Conmutativo o Abeliano ✗

Debemos comprobar la conmutatividad al operar $e_2 \square e_1 = e_1 \square e_2$, en caso contrario no se cumpliría.

$$\Delta X_A \cdot X_B = \Delta X_B \cdot X_A$$

$$\bar{R_1} = R_1$$ ✗

No se cumple.