Asignación 3, Métodos Matemáticos para Físicos I

Santiago Correa - 2182212
Jeicor Esneider Florez Pabón - 2231338
Juan José Camacho Olmos - 2180800

Universidad Industrial de Santander
Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martínez
Grupo E1

26 de Junio de 2024

Índice

Resumen

El objetivo principal de esta asignación es calcular los momentos de orden cero, uno y dos de una distribución de masas, a su vez se analizaran y responderan los resultados. También analizaremos la relación entre distintos datos económicos del país Colombia utilizando la matriz de covarianza, en específico el porcentaje gastado de producto interno bruto o P.I.B en Salud, Defensa, Educación y Ciencia y Tecnología. Asimismo se hará el analisis correspondiente y se responderan las preguntas planteadas.

1. Información acerca del software utilizado

1.1. pip3 list

Para el desarrollo de esta asignación se utilizaron los siguientes paquetes:

```
Package                     Version
--------------------------- -----------
absl-py                     2.1.0
astunparse                  1.6.3
attrs                       23.2.0
certifi                     2024.6.2
charset-normalizer          3.3.2
contourpy                   1.2.1
cycler                      0.12.1
fastjsonschema              2.20.0
flatbuffers                 24.3.25
fonttools                   4.53.0
gast                        0.5.4
google-pasta                0.2.0
grpcio                      1.64.1
h5py                        3.11.0
idna                        3.7
jsonschema                  4.22.0
jsonschema-specifications   2023.12.1
jupyter_core                5.7.2
jupytext                    1.16.2
keras                       3.3.3
kiwisolver                  1.4.5
libclang                    18.1.1
Markdown                    3.6
markdown-it-py              3.0.0
MarkupSafe                  2.1.5
matplotlib                  3.9.0
mdit-py-plugins             0.4.1
```

mdurl	0.1.2
ml-dtypes	0.3.2
mpmath	1.3.0
namex	0.0.8
nbformat	5.10.4
numpy	1.26.4
opt-einsum	3.3.0
optree	0.11.0
packaging	24.1
pandas	2.2.2
pendulum	3.0.0
pillow	10.3.0
pip	23.0.1
platformdirs	4.2.2
protobuf	4.25.3
Pygments	2.18.0
pyparsing	3.1.2
PyQt5	5.15.10
PyQt5-Qt5	5.15.2
PyQt5-sip	12.13.0
python-dateutil	2.9.0.post0
pytz	2024.1
PyYAML	6.0.1
referencing	0.35.1
requests	2.32.3
rich	13.7.1
rpds-py	0.18.1
setuptools	66.1.1
six	1.16.0
sympy	1.12.1
tensorboard	2.16.2
tensorboard-data-server	0.7.2
tensorflow	2.16.1
tensorflow-io-gcs-filesystem	0.37.0
termcolor	2.4.0
time-machine	2.14.1
traitlets	5.14.3
typing_extensions	4.12.2
tzdata	2024.1
urllib3	2.2.2
Werkzeug	3.0.3
wheel	0.43.0

```
wrapt                         1.16.0
```

1.2. python3 version

La versión de python3 que se utilizo fue Python 3.11.2.

2. Base teórica

2.1. Momento generalizado y casos particulares

En general los momentos de una función $f(x)$ de variable x real continua con x definida alrededor de un valor promedio de la variable $\bar{x}$ se define como:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)(x-\bar{x})^n \tag{1}$$

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}(|x_i\rangle)\ (|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^n \tag{2}$$

donde,

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x\rangle_i \tag{3}$$

Por lo tanto los momentos son:

Momento de orden cero o masa total del sistema

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i \tag{4}$$

Momento de orden uno o centro de masa del sistema

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle) \tag{5}$$

Momento de orden dos o tensor de inercia del sistema

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^2 \tag{6}$$

por lo tanto el momento de orden dos está definido como:

$$\mu_2(v) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)^2 & \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)(|x_2\rangle - |\bar{x}_2\rangle) \\ \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)(|x_1\rangle - |\bar{x}_1\rangle) & \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

que es la misma matriz covarianza,

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} \text{Var}(A) & \text{Cov}(A,B) \\ \text{Cov}(B,A) & \text{Var}(B) \end{pmatrix}$$

es decir la varianza de A:

$$\text{Var}(A) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)^2 \tag{8}$$

y la varianza de B:

$$\text{Var}(B) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)^2 \tag{9}$$

a su vez $\text{Cov}(A,B) = \text{Cov}(B,A)$ puesto que nuestra matriz covarianza es una matriz simétrica:

$$\text{Cov}(A,B) = \text{Cov}(B,A) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^1\rangle - |\bar{x}^1\rangle)(|x_2\rangle - |\bar{x}_2\rangle) = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x^2\rangle - |\bar{x}^2\rangle)(|x_1\rangle - |\bar{x}_1\rangle) \tag{10}$$

es decir:
Si $\text{Cov}(A,B) = 0$ entonces no existe relación lineal entre A y B.
Si $\text{Cov}(A,B) > 0$ entonces existe una relación lineal directa o positiva entre A y B. Esto es, a mayores valores de A, en promedio tenemos mayores valores de B y viceversa.
Si Si $\text{Cov}(A,B) < 0$ entonces existe una relación lineal inversa o negativa entre A y B. Esto es, a mayores valores de A, en promedio tenemos menores valores de B y viceversa.
Entonces podemos decir que cuando $\text{Cov}(A,B) \neq 0$ varian juntos (en conjunto) a la vez.

Y si extrapolamos de (6), (7) para el caso de cuatro conjunto de datos o variables:

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} \text{Var}(A) & \text{Cov}(B,A) & \text{Cov}(C,A) & \text{Cov}(D,A) \\ \text{Cov}(A,B) & \text{Var}(B) & \text{Cov}(C,B) & \text{Cov}(D,B) \\ \text{Cov}(A,C) & \text{Cov}(B,C) & \text{Var}(C) & \text{Cov}(D,C) \\ \text{Cov}(A,D) & \text{Cov}(B,D) & \text{Cov}(C,D) & \text{Var}(D) \end{pmatrix} \tag{11}$$

2.2. Matriz de correlación

La matriz de covarianza es:

$$\text{Matriz Covarianza} = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \text{Cov}(A,B) \\ \text{Cov}(B,A) & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$$

de $\text{Var}(A) = \sigma_A^2$, $\text{Var}(B) = \sigma_B^2$ y $\text{Cov}(A,B) = \sigma_{A,B}^2$
Por lo tanto donde las desviaciones estándar son:

$$\sigma_A = \sqrt{\text{Var}(A)}$$
$$\sigma_B = \sqrt{\text{Var}(B)}$$
$$\sigma_{A,B} = \sqrt{\text{Var}(A,B)}$$

y utilizando las desviaciones estandar,

$$\rho_{AB} = \frac{\text{Cov}(A,B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

son los coeficientes de correlación entre las variables A y B.

La matriz de correlación se calcula como:

$$\text{Matriz Correlacion} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{AB} \\ \rho_{BA} & 1 \end{pmatrix}$$

como se puede observar en la diagonal siempre nos resultará uno, y así como la matriz de covarianza es simétrica, la matriz de correlación también lo es, por lo tanto se cumple que $\rho_{AB} = \rho_{BA}$.

2.3. Autovalores y Autovectores

Se tiene una matriz arbitraria A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los autovalores (λ) de A, resolvemos la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{12}$$

Donde I es la matriz identidad:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo A y I en la ecuación característica, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

resolviendo el deterimante,

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \tag{14}$$

por lo tanto,

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0 \tag{15}$$

Estos son los autovalores λ de la matriz A.
Los autovectores correspondientes se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\mathbf{v}=0$ para cada autovalor λ,

Para el auto valor λ_1:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

resolviendo el sistema, tenemos:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Para el auto valor λ_2:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

resolviendo el sistema, tenemos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Por lo tanto los autovectores son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \tag{20}$$

2.4. Matriz de transformación

Se tiene una matriz arbitraria A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Esta matriz A puede ser diagonalizable, lo que significa que se puede expresar como $A = PDP^-1$, donde P es una matriz de vectores propios (autovectores) y D es una matriz diagonal de autovalores.

La matriz P está compuesta por columnas que son autovectores de A. Estos autovectores forman una base en la que A tiene una forma más simple (diagonal) en términos de los autovalores.

Por lo tanto al multiplicar P^-1 por A y luego por P, se realiza un cambio de base. Esta operación transforma la matriz A a una nueva matriz que está representada en la base dada por los autovectores contenidos en P.

3. Primer punto

Consideremos un sistema conformado por n partıculas de masas distintas masas dispersas en un volumen, tal y como muestra el archivo se datos . El archivo datosmasas.cv se encuentra en el `https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMaterialesAsignaciones/DatosTensores/datosmasas.csv`

Los códigos que nos resuelven el Punto 1 en 2-D y 3-D se encuentra en `https://github.com/santycorreav/Met_Mat_Fis_1/blob/main/Codigos`

3.1. Inciso a)

Para la distribución de masas en el plano xy (2-D):

3.1.1. Momento de orden cero, la masa total del sistema

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Donde m_i es la masa de la i-ésima partícula.

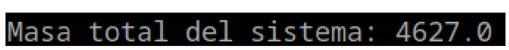

Masa total del sistema: 4627.0

Figura 1: Masa Total

3.1.2. Momento de orden uno el centro de masa del sistema

$$x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Donde (x_i, y_i) son las coordenadas de la i-ésima partícula.

```
Centro de masa del sistema (coordenada x): 825.8152150421439
Centro de masa del sistema (coordenada y): 776.9185217203371
```

Figura 2: Coordenadas centro de masa

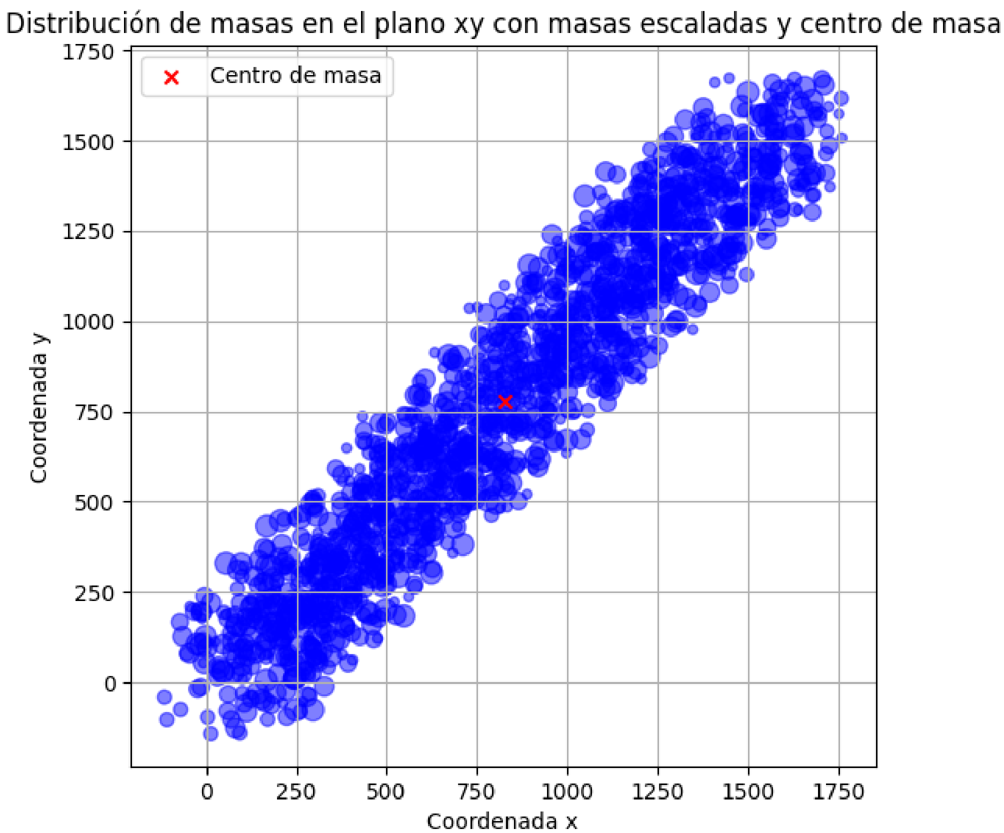
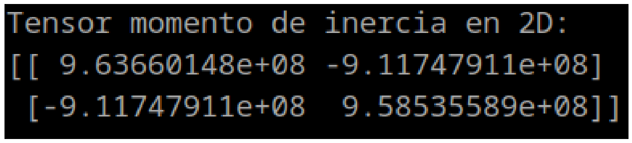


Figura 3: Momento Uno

3.1.3. Momento de orden dos, el tensor momento de inercia del sistema

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2), \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2), \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i y_i)$$



```
Tensor momento de inercia en 2D:
[[ 9.63660148e+08 -9.11747911e+08]
 [-9.11747911e+08  9.58535589e+08]]
```

Figura 4: Tensor momento de inercia

3.1.4. Primera pregunta

¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?

3.1.5. Segunda pregunta

Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.

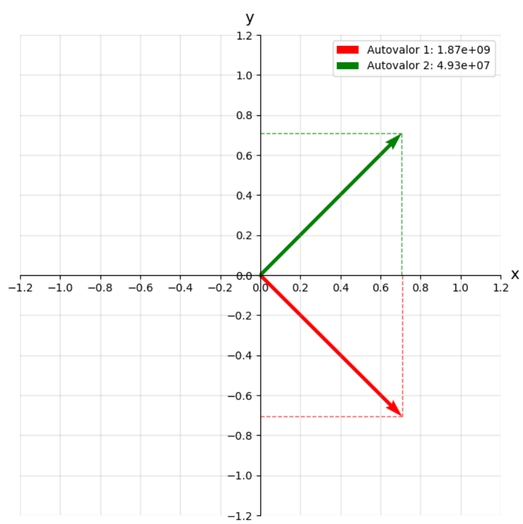


Figura 5: Autovalores

```
Autovectores:
[[ 0.70809967  0.7061125 ]
 [-0.7061125   0.70809967]]
```

Figura 6: Autovectores

3.1.6. Tercera pregunta

Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales.

```
Matriz original en la base de autovectores y autovalores:
[[1.87284938e+09 2.61415887e+00]
 [2.61415889e+00 4.93463569e+07]]
```

Figura 7: Matriz Transformación

3.2. Inciso b)

Se realizó nuevamente los calculos de los momentos de orden cero, uno y dos pero en este caso en 3-D.

Para la distribución de masas en el plano xyz (3-D):

Masa total:

```
Masa total del sistema: 4627.0
```

Figura 8: Masa Total

Centro de masa:

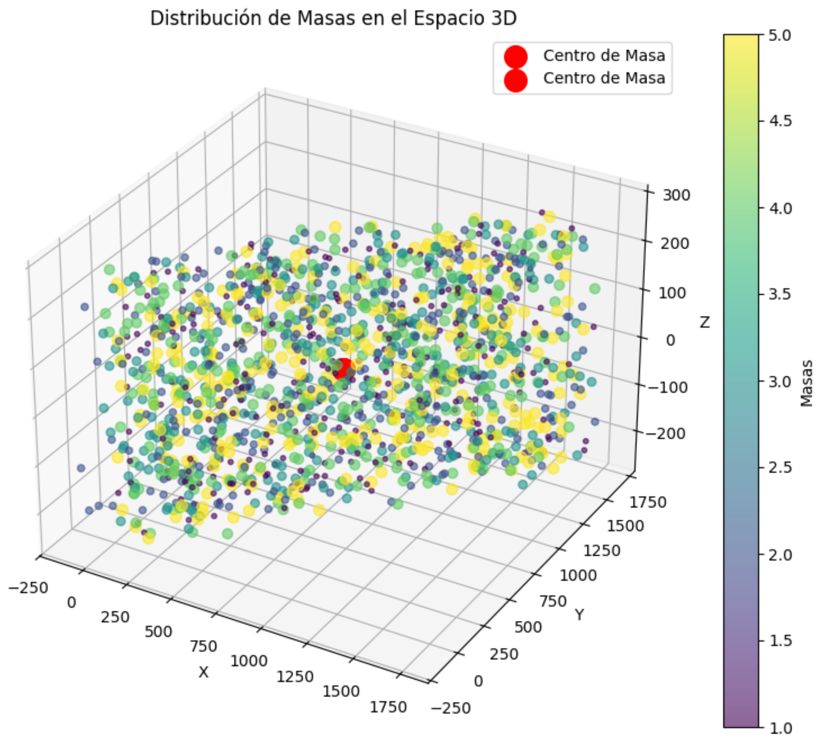


Figura 9: Centro de masa 3-D

Tensor inercia:

```
Tensor de inercia en 3D:
[[ 9.58535589e+08  9.11747911e+08 -7.14204864e+06]
 [ 9.11747911e+08  9.63660148e+08 -1.92959724e+06]
 [-7.14204864e+06 -1.92959724e+06  1.01843321e+08]]
```

Figura 10: Tensor inercia 3-D

Autovalores y autovectores:

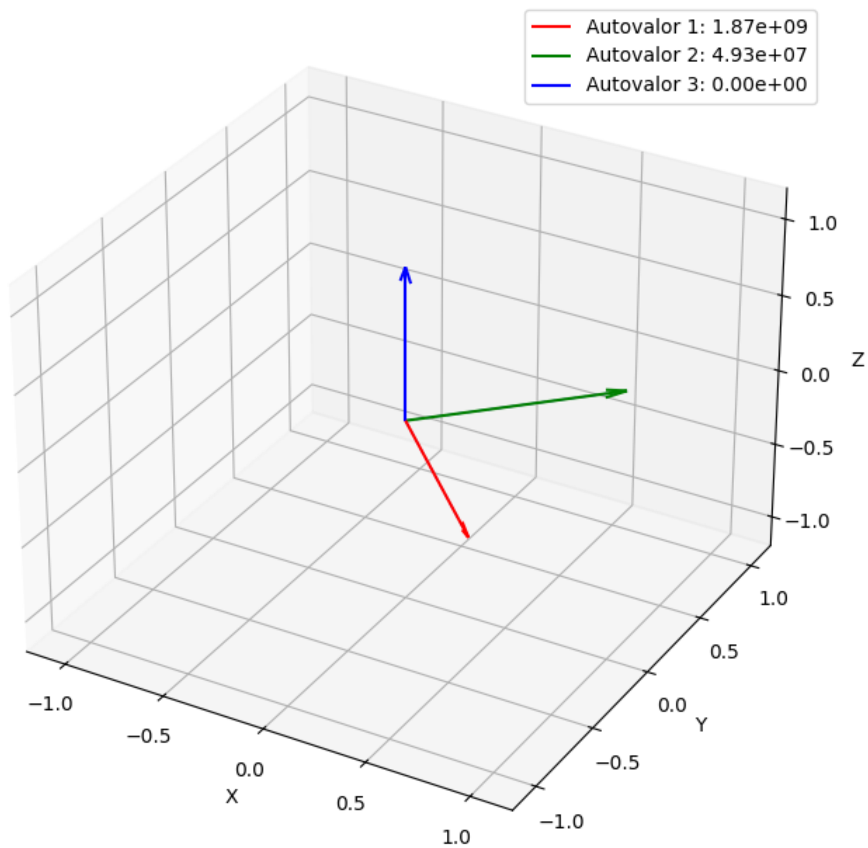


Figura 11: Autovalores y autovectores

4. Segundo Punto

El Banco Mundial https://data.worldbank.org mantiene una estadıstica de los datos económicos de casi todos los paıses. En particular estamos interesados en calcular la matriz de covariancia del del producto interno bruto (GDP) que se ha empleado en el paıs en los últimos 15 años en Defensa, Salud, Educación y Ciencia y Tecnología.

4.1. Inciso a)

Calcule la matriz de covarianza y la matriz de correlación entre estos parámetros

```
Esta es la matriz de Covarianza:
[0.42292861643669305, 0.029648399527855814, -0.004371997888960307, 0.17768028972438016]
[0.029648399527855814, 0.003901848390243204, -0.008073506925789209, 0.010118838716967905]
[-0.004371997888960307, -0.008073506925789209, 0.06722067963747051, 0.012938408120707607]
[0.17768028972438016, 0.010118838716967905, 0.012938408120707607, 0.13379242016156054]
```

Figura 12: Matriz Covarianza

```
Matriz de Correlación:
[[ 1.          0.72984817 -0.02592955  0.7469473 ]
 [ 0.72984817  1.         -0.49851195  0.44287353]
 [-0.02592955 -0.49851195  1.          0.13643118]
 [ 0.7469473   0.44287353  0.13643118  1.        ]]
```

Figura 13: Matriz Correlacion

4.2. Inciso b)

Para la matriz de covarianza, en este espacio de parámetros, queremos encontrar sus autovalores y autovectores.

```
Autovalores:
[0.50934332 0.07558507 0.04201359 0.00090158]

Autovectores:
[[ 0.90155195  0.1961641  -0.37862929  0.07323657]
 [ 0.06141786  0.11974935  0.01664385 -0.9907628 ]
 [ 0.00249671 -0.87553002 -0.46962321 -0.11355609]
 [ 0.42828227 -0.42500226  0.79738126 -0.01142359]]
```

Figura 14: Autovalores y Autovectores

¿Cuál es el significado de los autovalores y autovectores de esta matriiz?

Respuesta: *Los autovectores de la matriz de covarianza representan las direcciones principales de máxima varianza en los datos. Esto significa que estos vectores indican las direcciones en las cuales los datos tienen la mayor dispersión. Las magnitudes de los autovalores correspondientes* *indican la varianza a lo largo de estas direcciones. Así, los autovectores ayudan a identificar las características dominantes o las tendencias significativas en los datos.*

4.3. Inciso c)

Encuentre la matriz de transformación que nos lleva de la matriz en la base original a la representación de la matriz en la base de autovalores y autovectores.

```
Matriz original en la base de autovectores y autovalores:
[[ 5.09343319e-01  1.01243767e-16  5.66979096e-17 -9.23522317e-18]
 [ 1.63591507e-18  7.55850746e-02 -5.26032186e-18 -1.25215967e-17]
 [ 1.83511523e-17 -1.23531589e-17  4.20135857e-02 -6.63452738e-19]
 [-5.86417579e-18 -5.12089719e-18  2.79174920e-17  9.01584926e-04]]
```

Figura 15: Matriz de transformación

5. Referencias

Matemáticas avanzadas con aplicaciones en Python-SymPy Héctor Hernández y Luis. A. Núñez

Mathematical methods for physics and engineering Riley K. F., Hobson, M. P. y Bence, S. J. (1999)