

## Plan

- I. Facteurs epsilon de caractères
- II. Def. Deligne et formulaire, pour  $GL(N)$
- III. Calculs pour  $GL(2)$ , et aspects Sage/Magma
- IV. Au-delà (vers Gan-Gross-Prasad)

GT Mladen  
11/03/25  
3

\* Illustration "II" pour courbe elliptique (ou FM poids pair pour  $\Gamma_0(N)$ )

$$E/\mathbb{Q} \rightsquigarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\rho} GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \rightsquigarrow (W_{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\rho} GL_2(\mathbb{C})), \quad \rho^\vee \simeq \rho$$
$$L(E, s) = \epsilon(E, s) L(E, s-1)$$

Fait: Si  $\rho \simeq \rho^\vee$  symplectique (plutôt que orthogonal)

$$\epsilon(E, \tfrac{1}{2}) = \pm 1 \quad \text{explicite (produit de facteurs } \epsilon \text{ locaux)} \quad \prod_{\ell \mid N} \epsilon_\ell(E)(\pm i)^{\frac{\ell-1}{2}}$$

- $\epsilon = 1 \rightarrow \text{ord}_{s=1} L(s, E) = \text{pair}, \text{ souvent } L(1, E) \neq 0$
  - $\epsilon = -1 \rightarrow L(1, E) = 0$
- } cf. BSD

Ce nombre décrit la géométrie locale de la courbe elliptique.

On peut tordre par un caractère (quadratique pour préserver l'auto-dualité)

→ Trouver  $D$  tq.  $\epsilon(E_D) = -\epsilon(E)$  ? grâce au formulaire de Deligne !

i.e. changer le  
signe  
(pour obtenir  $\epsilon = -1$ )

\* Vers GGP

$$G = GL_N \text{ e.g.}, \quad \rho$$

"

$$H = GL_n \text{ e.g.}, \quad \rho'$$

$$\rho|_{G_n} = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \dots \quad \underline{Q} \quad \rho' \text{ apparaît dans les } \rho_i ?$$

$$\text{i.e. } \text{Hom}_{G_n}(\rho, \rho') \neq 0 ?$$

"Réponse": oui si  $\epsilon = 1$  (conj. GGP).

Les facteurs  $\epsilon$  sont donc cruciaux dans ces questions !

En effet, pour  $\chi$  non ramifié :  $\varepsilon_p = \chi_p(p^{\text{cond } \chi_p}) = 1$

pour  $\chi$  ramifié :  $\varepsilon_p = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \chi_p(x_p) \psi_p(x_p) dx_p \stackrel{\text{ex}}{=} \text{"somme de Gauss"}$

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times} \chi_p(a) \psi_p(a)$$

Un des objectifs (cf. Deligne §5) est d'établir un formulaire pour ces calculs et ces facteurs  $\varepsilon$  de caractères.

\* Il existe d'autres fonctions  $L$  en théorie des nombres, avec des facteurs  $\varepsilon$  sous-jacents mais a priori peu accessibles en pratique : c'était l'objectif de Deligne.

Rappelons que si  $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{C})$  est une représentation, on peut lui associer une fonction  $L$  :

$$L(\rho, s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \det(1 - p^{-s} \text{Frob}_p | V^{\text{I}_p}) \underbrace{L(s, V_\infty)}_{\substack{\text{recte explicite} \\ (\text{facteurs } \Gamma)}} \quad \text{fonction } L \text{ d'Artin}$$

Conjecturellement, FE :  $L(s, V) = \varepsilon(s, V) L(1-s, V^*)$ ,  $\varepsilon(s, V) = \varepsilon(\frac{1}{2}, V) c^{s-\frac{1}{2}}$  ?  
Qui serait  $\varepsilon(\frac{1}{2}, V)$  ?

Thm (Deligne) "Facteurs  $\varepsilon$  pour  $\mathbb{Q}_p$ " (mais aussi les autres corps)

- $\exists ! \varepsilon(\chi_p, \psi_p, dx_p) \in \mathbb{C}^\times$ ,
- coïncident avec Gauss si  $\dim V_p = 1$
  - inductif en degré zéro :  $\varepsilon(\chi, \psi) = \varepsilon(V|_{\mathbb{Q}_p}, \psi_F)$ ,  $\forall \dim V = 0$
  - $\varepsilon(V_1 \oplus V_2) = \varepsilon(V_1) \varepsilon(V_2)$

" $\varepsilon(V_1 \oplus V_2) = \varepsilon(V_1) / \varepsilon(V_2)$ " (rep. virtuelle)

Ex :  $\mathbb{Q}_p^2/\mathbb{Q}_p$  degré 2,  $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  caractère d'ordre fini

i.e.  $\chi : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  (cops de classe local)

Donc on peut considérer l'induite  $\text{Ind}_{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\chi) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$

On a alors  $\frac{\varepsilon(\chi)}{\varepsilon(\chi')} = \frac{\varepsilon(\text{Ind } \chi)}{\varepsilon(\text{Ind } \chi')}$

Avec  $\chi' = 1$ , on obtient  $\text{Ind } \chi' = 1 \oplus \varepsilon_{\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p}$  (carac. quadratique)

d'où  $\varepsilon(\text{Ind } \chi) = \varepsilon(\chi) \varepsilon(e)$ , puis on peut monter inductivement.

# INTRODUCTION

Point de départ : sommes de Gauss (on fait : facteurs  $\varepsilon$  en dimension 1)

\*  $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  caractère de Dirichlet

$$\tau(\chi) := \sum_{a=1}^{N-1} \chi(a) e\left(\frac{a}{N}\right) \quad \text{somme de Gauss, intervenant dans FE } L(\chi, s)$$

$\uparrow$  mult.       $\uparrow$  additif

i.e.  $L(\chi, s) = e(\chi, s) L(\bar{\chi}, 1-s)$   
 $\uparrow$   
 "facteur epsilon"  
 ou "constante locale"

$$\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{N}} \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{U}$$

\* Ces objets se généralisent aux caractères de Hecke (i.e. caractères du ray dans d'un corps de nombres),  $\chi$ .

$$L(s, \chi) = \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} \frac{\chi(a)}{Na^s}, \quad \text{qui a aussi FE avec } E(\chi, s)$$

lié à  $e(\frac{1}{2}, s)$ , cond,  $i^\alpha$

\* Thèse de Tate : voit  $\chi$  comme caractère du groupe d'idèles (cf. chap. 3)

Deligne généralise pour  $GL(N)$  :  $\chi : K^\times \backslash A_K^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$

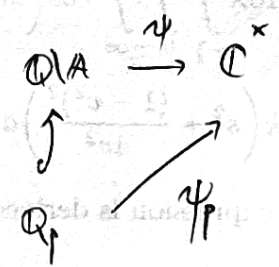
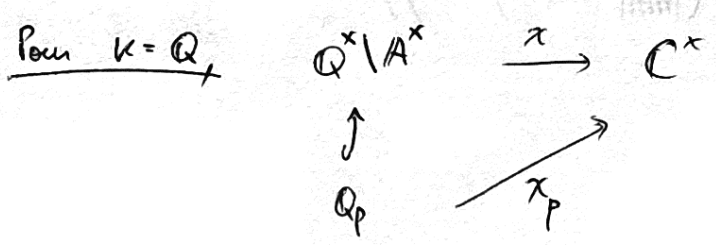
$$\mathbb{Q}_p^\times \simeq p^{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{Z}/p)^\times \times (1 + \underbrace{\mathbb{Z}_p}_{\hat{\mathbb{Z}}_p}) \quad \text{donc } K_v^\times \text{ est "facile" : } K_v^\times \simeq \omega^\mathbb{Z} \times (\mathbb{O}_v^\times / \omega^m) \times (1 + \omega^m \mathbb{O}_v)$$

( $\neq \frac{K_v^\times}{\mathbb{Q}_p^\times}$ )

$\psi : K \backslash A_K \rightarrow \mathbb{C}^\times$  (il existe un choix "canonique"  $\psi_0$  si  $K = \mathbb{Q}$ )

i.e.  $\text{Ker}(\psi_0|_{\mathbb{Q}_p}) = \mathbb{Z}_p^\times$ ,  $\psi_0|_{\mathbb{R}} = e(\pm \cdot)$

On note  $\psi_K = \psi_0 \circ \text{tr}_{K/\mathbb{Q}}$



On a (cf. Deligne)  $E(\chi, \psi, dx) := \prod_{p \leq \infty} E(\chi_p, \psi_p, dx_p)$  (Théorème)  
 $\uparrow$  très simples pour  $\uparrow$  "non ramifié"