

GROUPES DE WEIL, FONCTIONS L ET FACTEURS ϵ : CAS ARCHIMÉDIEN ET NON ARCHIMÉDIEN

XAVIER PIGÉ

TABLE DES MATIÈRES

1. Groupes de Weil	1
1.1. Généralités	1
1.2. Groupes de Weil locaux archimédiens	2
2. Caractères additifs et multiplicatifs des corps archimédiens	3
2.1. Valeur absolue normalisée	3
2.2. Cas multiplicatif	3
2.3. Cas additif	5
2.4. Transformée de Fourier	5
3. Fonctions L et facteurs ϵ	6
3.1. L'exemple de la fonction zêta de Riemann	6
3.2. Fonctions L	7
3.3. Fonctions zêta locales et facteurs γ	8
3.4. Calcul des facteurs γ et ϵ	9
3.5. Conclusion	13
Références	13

Les références sont :

- Deligne [Del73], qui donne les résultats (sans preuve) et dont j'ai suivi les conventions ;
- Ramakrishnan et Valenza [RV99], qui donne les preuves des résultats mais avec de nombreuses erreurs ;
- Bushnell et Henniart [BH06], qui ne traite que le cas non archimédien ;
- Serre [Ser80], qui ne parle pas de fonctions L ou de facteurs ϵ mais qui constitue une référence indispensable pour tout ce qui touche aux corps locaux non archimédiens.

1. GROUPES DE WEIL

Cette section ne sera pas traitée durant la séance de groupe de travail, en raison du peu de temps dont nous disposons.

1.1. Généralités. Soit K un corps fini, local ou global. Pour rappel, un corps local est un corps localement compact pour une topologie non discrète ; il s'agit également des corps qu'on obtient en complétant un corps global en une place. Leur topologie est toujours induite par une certaine valeur absolue, multiplicative et à valeurs dans \mathbf{R}_+ . Celle-ci est unique à un exposant près. Il existe deux sortes de corps locaux, archimédiens (la suite des entiers naturels n'admet pas de sous-suite convergente) et non archimédiens. En fait, il n'y a à isomorphisme près que deux corps archimédiens, à savoir \mathbf{R} et \mathbf{C} . Les corps non archimédiens, quant à eux, sont les corps à valuation discrète et corps résiduel fini. Il s'agit donc des extensions finies des \mathbf{Q}_p pour p un nombre premier (cas mixte) et des $k((t))$ pour k un corps fini (cas d'équicaractéristique).

À ce corps K , on peut associer un *groupe de Weil* W_K , qui est un groupe topologique localement compact. Dans le cas d'un corps fini ou d'un corps local non archimédien, ce groupe de Weil est un sous-groupe de $\text{Gal}(K)$ le groupe de Galois absolu de K (mais avec une autre topologie), de sorte que le groupe de Galois absolu de K est la complétion de W_K pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice finis.

Supposons désormais K local non archimédien. Dans ce cas, la théorie du corps de classe local donne un isomorphisme canonique

$$(1.1) \quad W_K^{\text{ab}} \simeq K^*.$$

Rappelons que, si G est un groupe, son groupe dérivé G^{der} est le sous-groupe engendré par les commutateurs $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. C'est un sous-groupe distingué, et le quotient par celui-ci est appelé *abélianisé* de G et noté G^{ab} . Il vérifie la propriété universelle suivante : pour tout groupe abélien H et tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow H$, il existe une unique factorisation de f en $\tilde{f} : G^{\text{ab}} \rightarrow H$.

L'isomorphisme de corps de classe vérifie un certain nombre de fonctorialités, que nous allons maintenant détailler. Soit L une extension finie de K (qui est donc aussi un corps local non archimédien). La théorie de Galois donne une inclusion $\text{Gal}(L) \subset \text{Gal}(K)$ en tant que sous-groupe ouvert d'indice $[L : K]$. On pourra facilement vérifier que cette inclusion induit une inclusion $W_L \subset W_K$ en tant que sous-groupe ouvert d'indice $[L : K]$. De cette inclusion on déduit un morphisme entre les abélianisés

$$W_L^{\text{ab}} \rightarrow W_K^{\text{ab}}.$$

Notons que, bien qu'il soit déduit d'une inclusion, ce morphisme n'a aucune raison d'être injectif. En fait, la théorie du corps de classe nous dit qu'on a un diagramme commutatif :

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} W_L^{\text{ab}} & \longrightarrow & W_K^{\text{ab}} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ L^* & \xrightarrow{N_{L/K}} & K^* \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes données par la théorie du corps de classe, et où $N_{L/K} : L^* \rightarrow K^*$ est la norme galoisienne. Pour rappel, cette norme est le déterminant de l'endomorphisme K -linéaire induit par la multiplication dans L : si $a \in L$, on en déduit $m_a : x \in L \mapsto ax \in L$, et on définit $N_{L/K}(a) = \det m_a$.

Dans l'autre sens, on a une inclusion évidente $K^* \subset L^*$. On en déduit une injection $W_K^{\text{ab}} \hookrightarrow W_L^{\text{ab}}$. Or, lorsque G est un groupe et H un sous-groupe d'indice fini de G , il existe toujours un morphisme canonique, dit de *transfert*, noté $t : G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$. Pour le définir, fixons $(\eta_a)_{a \in H \setminus G}$ un système de représentants des classes à droite de H dans G . Pour $a \in H \setminus G$ et $g \in G$, posons $t_a(g) = \eta_a g \eta_a^{-1}$. Il est clair que $t_a(g) \in H$. Posons alors $t(g) = \prod_{a \in H \setminus G} t_a(g)$, qui est bien défini dans H^{ab} . On peut voir que t ne dépend pas du choix de η , et qu'il s'agit d'un morphisme de groupes $G \rightarrow H^{\text{ab}}$. Puisqu'il s'agit d'un morphisme vers un groupe abélien, d'après la propriété universelle de l'abélianisé, il se factorise en $t : G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$. La théorie du corps de classe affirme alors qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} W_K^{\text{ab}} & \xrightarrow{t} & W_L^{\text{ab}} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ K^* & \hookrightarrow & L^* \end{array}.$$

1.2. Groupes de Weil locaux archimédiens. Nous allons maintenant construire les groupes de Weil locaux pour les corps archimédiens \mathbf{R} et \mathbf{C} . L'objectif est qu'ils vérifient autant que possible les mêmes propriétés que les groupes de Weil locaux non archimédiens, à savoir être des groupes topologiques localement compacts qui vérifient l'isomorphisme de la théorie du corps de classe local 1.1 et les deux fonctorialités 1.2 et 1.3. Un corollaire évident est que ces groupes ne sont certainement pas des sous-groupes du groupe de Galois absolu.

1.2.1. Le cas $K = \mathbf{C}$. Dans le cas du corps des complexes, on souhaite donc que le groupe de Weil vérifie $W_{\mathbf{C}}^{\text{ab}} = \mathbf{C}^*$. De plus, puisque \mathbf{C} est algébriquement clos, on veut que son groupe de Weil soit aussi simple que possible, puisque la non-commutativité du groupe de Weil dans le cas local sert principalement à encoder les extensions du corps (elle permet d'obtenir les diagrammes 1.2 et 1.3). Par conséquent, on définit de façon assez naturelle $W_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^*$ - ou, si on préfère, $W_K = K^*$, pour tenir compte de la présence d'automorphismes non triviaux.

1.2.2. Le cas $K = \mathbf{R}$. On va construire $W_{\mathbf{R}}$ à partir de $W_{\mathbf{C}}$. Puisque $[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = 2$, on souhaite que $W_{\mathbf{C}}$ soit un sous-groupe d'indice 2 de $W_{\mathbf{R}}$. Par conséquent, il doit exister un élément $j \in W_{\mathbf{R}} \setminus W_{\mathbf{C}}$ tel que $W_{\mathbf{R}}$ est engendré par $W_{\mathbf{C}}$ et j , et que $j^2 \in W_{\mathbf{C}}$. Notons $\sigma : W_{\mathbf{C}} \rightarrow W_{\mathbf{C}}$ le morphisme de groupes qu'on déduit de l'action de j par conjugaison, et soit $a = j^2$.

L'application de transfert $t : W_{\mathbf{R}} \rightarrow W_{\mathbf{C}} = W_{\mathbf{C}}^{\text{ab}}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} t(z) &= z \cdot (jzj^{-1}) = z\sigma(z) \\ t(jz) &= jzj^{-1} \cdot (jjz) = az\sigma(z) \end{aligned}$$

pour $z \in W_{\mathbf{C}}$. Or on sait que, via l'isomorphisme du corps de classe, cette application coïncide avec l'inclusion $\mathbf{R}^* \subset \mathbf{C}^*$. En particulier, elle est à valeurs dans \mathbf{R}^* . Ainsi, $z\sigma(z) \in \mathbf{R}^*$, et donc il existe $\theta(z) \in \mathbf{R}^*$ tel que $\sigma(z) = \theta(z)\bar{z}$. De plus, $z\sigma(z) \in \mathbf{R}^*$ et $az\sigma(z) \in \mathbf{R}^*$, donc $a \in \mathbf{R}^*$.

D'autre part, la norme $N_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}$ est donnée par $z \mapsto |z|^2$. En particulier, d'après le diagramme 1.2, le noyau du morphisme $W_{\mathbf{C}} = W_{\mathbf{C}}^{\text{ab}} \rightarrow W_{\mathbf{R}}^{\text{ab}}$ est le groupe \mathbf{S}^1 des complexes de module 1. Puisque $W_{\mathbf{C}}$ est un sous-groupe d'indice 2 de $W_{\mathbf{R}}$, l'image de ce morphisme est un sous-groupe d'indice au plus 2 de $W_{\mathbf{R}}^{\text{ab}}$, avec égalité si et seulement si $W_{\mathbf{R}}^{\text{der}} \subset W_{\mathbf{C}}$. Ici, l'image de $W_{\mathbf{C}}$ dans $W_{\mathbf{R}}^{\text{ab}} \simeq \mathbf{R}^*$ est \mathbf{R}_+^* , d'indice 2. Par conséquent, $W_{\mathbf{R}}^{\text{der}} = \mathbf{S}^1$. Soit à présent $z \in W_{\mathbf{C}}$. Alors :

$$[z, j] = jzj^{-1}j^{-1} = z\sigma(z^{-1}) = z\bar{z}^{-1}\theta(z^{-1})$$

On a déjà $z\bar{z}^{-1} \in \mathbf{S}^1$, et donc $\theta(z^{-1}) \in \mathbf{S}^1$. Par conséquent, θ est à valeurs réelles et de module 1, donc θ ne prend pour valeurs que ± 1 . De plus, σ est continu, donc θ aussi, et $\theta(1) = 1$ par définition. Donc θ est identiquement égal à 1 et σ est nécessairement la conjugaison complexe. Ceci implique notamment que \mathbf{R}^* est central dans $W_{\mathbf{R}}$.

On en déduit encore que $a < 0$. On peut donc écrire $a = -b^2$. Quitte à remplacer j par $b^{-1}j$, on se ramène à $j^2 = -1$.

Ainsi, le groupe de Weil de \mathbf{R} est nécessairement l'extension de \mathbf{C}^* par un élément j tel que $j^2 = -1$ et $jzj^{-1} = \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbf{C}^*$. L'usage de la notation j tout au long de ce paragraphe fait allusion aux quaternions de Hamilton \mathbf{H} , dans lesquels on peut plonger $W_{\mathbf{R}}$.

2. CARACTÈRES ADDITIFS ET MULTIPLICATIFS DES CORPS ARCHIMÉDIENS

On va chercher à classer les caractères additifs et multiplicatifs des corps locaux, en particulier archimédiens. Les caractères multiplicatifs seront simplement appelés caractères, tandis que l'adjectif additif sera toujours précisé.

2.1. Valeur absolue normalisée. On a indiqué plus haut que la topologie d'un corps local venait toujours d'une certaine valeur absolue, unique à exposant près. En fait, il existe une valeur absolue canonique, que l'on appelle *valeur absolue normalisée*. Pour la définir, soit K un corps local, et soit μ une mesure de Haar quelconque sur K . Pour tout $a \in K^*$, notons $m_a : x \in K \mapsto a^{-1}x$. Alors $(m_a)_*\mu$ est encore une mesure de Haar sur K . Par conséquent, il existe un unique réel strictement positif $\|a\|$ tel que $(m_a)_*\mu = \|a\|\mu$. On pose $\|0\| = 0$, et on peut alors vérifier que $\|\cdot\|$ est une valeur absolue sur K , et induit sa topologie.

Sur \mathbf{R} , on vérifie que $\|a\| = |a|$ la valeur absolue usuelle, et sur \mathbf{C} que $\|a\| = |a|^2$. Sur un corps local non archimédien, de valuation $v : K^* \rightarrow \mathbf{Z}$ et de corps résiduel k à q éléments, on a $\|a\| = q^{-v(a)}$.

Remarque 2.1. La valeur absolue normalisée est souvent notée simplement $|\cdot|$. Cependant, vu l'importance ici accordée aux corps locaux archimédiens et le risque de confusions sur \mathbf{C} , on a choisi de changer la notation.

2.2. Cas multiplicatif. Dans cette section, on détaille quels sont les caractères (multiplicatifs) des corps locaux archimédiens \mathbf{R} et \mathbf{C} . Pour rappel :

Définition 2.2. Soit K un corps local. Un *caractère* (multiplicatif) de K est un morphisme continu $\chi : K^* \rightarrow \mathbf{C}^*$. On note $X(K^*)$ l'ensemble des caractères.

Remarque 2.3. On emploie parfois plutôt le terme de *quasi-caractère*, le terme de « caractère » étant alors réservé à ce que nous appellerons caractères *unitaires*, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbf{S}^1 .

Il est clair que les caractères forment un groupe, dont les caractères unitaires sont un sous-groupe. Soit K un corps local, avec une valeur absolue normalisée notée $\|\cdot\|$. Notons $U = \{x \in K : \|x\| = 1\}$, et $\Gamma \subset \mathbf{R}_+^*$ l'image de la valeur absolue sur K^* , de sorte que $\Gamma = \mathbf{R}_+^*$ dans le cas archimédien, et $\Gamma = q^{\mathbf{Z}}$ sinon. On a une suite exacte

$$1 \rightarrow U \rightarrow K^* \rightarrow \Gamma \rightarrow 1,$$

qui est de plus scindée. En effet, pour $K = \mathbf{R}$, l'inclusion $\mathbf{R}_+^* \subset \mathbf{R}^*$ fournit une section. Dans le cas $K = \mathbf{C}$, l'application $x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \sqrt{x}$ fournit une section. Enfin, dans le cas d'un corps local non archimédien, une section est donnée par le choix d'une uniformisante. Fixons donc un choix de section (celui décrit précédemment pour \mathbf{R} ou \mathbf{C} , et une uniformisante notée ϖ pour un corps local non archimédien), et

notons $r : K^* \rightarrow U$ la rétraction qui s'en déduit. En particulier, pour $K = \mathbf{R}$, r est l'application signe, et pour $K = \mathbf{C}$ il s'agit de l'application argument. Remarquons enfin que U est compact.

Lemme 2.4. *Soit K un corps local, et soit $\chi \in X(K^*)$. Notons U l'ensemble des points de K de valeur absolue 1. Il existe un complexe $s \in \mathbf{C}$ et un unique morphisme continu $\mu : U \rightarrow \mathbf{S}^1$ tel que, pour tout $z \in K$, on ait*

$$\chi(z) = \mu(r(z)) \|z\|^s.$$

Remarque 2.5. Dans le cas d'un corps local non archimédien, s n'est évidemment pas unique puisque le groupe Γ est discret. En revanche, à cette indétermination près, s est unique, puisqu'on le déduit de $\chi|_{\ker r}$. En particulier, dans le cas d'un corps local archimédien, s est unique.

Démonstration. L'unicité de μ est évidente, puisqu'on peut retrouver μ comme la restriction de χ à U . Notons que cette restriction est nécessairement à valeurs dans \mathbf{S}^1 car U est compact. Il reste donc à prouver que, si χ est trivial sur U , alors χ est de la forme $\|\cdot\|^s$. Si χ est trivial sur U , on peut le descendre en $\tilde{\chi} : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}^*$, et il s'agit de montrer que $\tilde{\chi}$ est de la forme $x \mapsto x^s$. Dans le cas où Γ est discret (c'est-à-dire si K n'est pas archimédien), le résultat est évident. Sinon, on a $\Gamma = \mathbf{R}_+^*$, et le résultat correspond à la classification bien connue des groupes à un paramètre dans \mathbf{C}^* . \square

Dans la suite, on emploiera la notation suivante :

Définition 2.6. Soit $s \in \mathbf{C}$. On définit $\omega_s \in X(K^*)$ comme étant le caractère donné par

$$\omega_s(x) = \|x\|^s$$

pour $x \in K^*$.

Pour écrire cela de façon un peu plus canonique : on a une suite exacte

$$1 \rightarrow H \rightarrow X(K^*) \rightarrow X(U) \rightarrow 1$$

avec $H = \mathbf{C}$ si K est archimédien, $H = \mathbf{C}/2i\pi \ln(q)^{-1}\mathbf{Z}$ si K est non archimédien avec un corps résiduel à q éléments, et $X(U)$ le groupe des morphismes de groupes continus $U \rightarrow \mathbf{S}^1$. De plus, cette suite exacte est scindée, de façon non canonique dans le cas non archimédien. Dans ce cas, un scindage est donné par le choix d'une uniformisante.

Définition 2.7. Soit $\chi \in X(K)$. Écrivons $\chi = \mu\omega_s$ avec $\mu \in X(U)$, $s \in \mathbf{C}$.

- (1) On dit que χ est *non ramifié* si $\mu = 1$.
- (2) Bien que s ne soit pas bien défini en général, sa partie réelle l'est. On appelle cette dernière l'*exposant* de χ .

Remarque 2.8. Un caractère est unitaire si et seulement s'il est d'exposant nul.

Intéressons-nous de plus près au groupe $X(U)$ pour K archimédien.

Proposition 2.9. (1) Si $K = \mathbf{R}$, on a $U = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Par conséquent, $X(U)$ est le groupe à deux éléments. En particulier, pour tout $\chi \in X(\mathbf{R}^*)$, il existe un unique entier $N \in \{0, 1\}$ et un unique complexe s tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on ait

$$\chi(x) = x^{-N} |x|^s.$$

- (2) Si $K = \mathbf{C}$, on a $U = \mathbf{S}^1$. Par conséquent, $X(U) = \mathbf{Z}$. En particulier, pour tout $\chi \in X(\mathbf{C}^*)$, il existe un unique entier $N \in \mathbf{Z}$ et un unique complexe s tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, on ait

$$\chi(z) = z^{-N} |z|^{2s}.$$

Démonstration. Le cas $K = \mathbf{R}$ est évident, et la description est obtenue en appliquant le lemme 2.4. Il est à noter qu'on a légèrement modifié la description : lorsque $N = 1$, le complexe s donné par le lemme 2.4 vaut 1 de moins que celui que nous avons ici, car au lieu de x le lemme 2.4 utilisait la fonction signe.

Pour ce qui est du cas $K = \mathbf{C}$, il vient du fait qu'on connaît bien les morphismes de groupes continus $\mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}^*$, et qu'on sait qu'ils sont donnés par $z \mapsto z^N$ pour $N \in \mathbf{Z}$. La même remarque que dans le cas réel s'applique. \square

Remarque 2.10. En écrivant les caractères sous cette forme, on suit Deligne. Cette écriture permet d'aboutir aux descriptions les plus simples des fonctions L .

Par ailleurs, Deligne fait également le choix suivant : plutôt que d'autoriser $N < 0$ dans le cas complexe, on peut choisir d'écrire $\chi(z) = \bar{z}^{-|N|} |z|^{2(s+N)}$.

On aura dans la suite besoin de la notation suivante :

Définition 2.11. Soit $\chi \in X(K^*)$. Son *dual décalé* est

$$\chi^\vee = \chi^{-1} \omega_1.$$

2.3. Cas additif. Traitons maintenant le cas des caractères additifs des corps locaux archimédiens.

Définition 2.12. Soit K un corps local. Un *caractère additif* de K est un morphisme de groupes continu $\psi : (K, +) \rightarrow (\mathbf{S}^1, \times)$. Les caractères additifs forment un groupe, noté \hat{K} .

On a de plus une action de K sur \hat{K} , définie de la façon suivante : soit $\psi \in \hat{K}$ et $a \in K$. On définit $\psi_a : F \rightarrow \mathbf{S}^1$ par $\psi_a(x) = \psi(ax)$. Il s'agit encore d'un caractère. De plus, si $a \neq 0$, alors ψ_a est trivial si et seulement si ψ est trivial. En fait, on a ainsi muni \hat{K} d'une structure de K -espace vectoriel. On peut vérifier qu'il est de dimension 1.

Dans le cas des corps locaux archimédiens, on obtient la description suivante :

Proposition 2.13. (1) Soit $K = \mathbf{R}$. Alors $\hat{\mathbf{R}}$ est l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \mapsto \exp(2i\pi x\xi) \in \mathbf{S}^1$ pour $\xi \in \mathbf{R}$.

(2) Soit $K = \mathbf{C}$. Alors $\hat{\mathbf{C}}$ est l'ensemble des $z \in \mathbf{C} \mapsto \exp(4i\pi \operatorname{Re}(z\xi)) \in \mathbf{S}^1$ pour $\xi \in \mathbf{C}$.

Remarque 2.14. La raison pour laquelle on a mis un facteur 4 dans le cas $K = \mathbf{C}$ est que, plutôt que $\operatorname{Re}(z)$, Deligne met $\operatorname{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(z)$, soit $2\operatorname{Re}(z)$.

Dans la suite, lorsqu'on travaille sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} , on prend pour caractère additif ψ le caractère obtenu dans la description précédente avec $\xi = 1$.

Sur les corps locaux non archimédiens, la continuité d'un caractère additif ψ assure que son noyau est non trivial. On définit le *niveau* de $\psi \in \hat{K}$ comme étant le plus petit entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathfrak{m}^n \subset \ker \psi$, avec \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O} l'anneau des entiers de K .

Construisons des caractères additifs standard sur les corps locaux non archimédiens.

2.3.1. Caractéristique mixte. Soit K un corps local non archimédien de caractéristique nulle, et soit p sa caractéristique résiduelle. Alors K est une extension finie de \mathbf{Q}_p . En fixant un plongement de \mathbf{Q}_p dans K , on obtient alors une forme \mathbf{Q}_p -linéaire canonique $\operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p} : K \rightarrow \mathbf{Q}_p$, la trace. Pour rappel, elle est définie de la façon suivante : si $a \in K$, il induit un endomorphisme \mathbf{Q}_p -linéaire de K par multiplication. La trace de a est alors la trace de cet endomorphisme. Cette forme linéaire est non nulle (car l'extension est séparable), donc surjective. Par conséquent, pour définir un caractère additif non trivial sur K , il suffit de prendre un caractère additif non trivial sur \mathbf{Q}_p et de composer par $\operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}$.

Prenons donc $K = \mathbf{Q}_p$. Soit $x \in \mathbf{Q}_p$, posons n le plus petit entier naturel tel que $p^n x \in \mathbf{Z}_p$, et soit r tel que $r \equiv p^n x [p^n]$. On pose

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{2i\pi r}{p^n}\right),$$

qui est bien défini. Il s'agit d'un caractère additif non trivial, de niveau 0.

Le caractère additif de K qui s'en déduit n'est en revanche pas de niveau 0. Son niveau est un certain entier négatif.

2.3.2. Équicaractéristique. Soit $K = \mathbf{F}_q((t))$ le corps local non archimédien de caractéristique p et dont le corps résiduel compte q éléments. Pour $x = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n t^n$, on pose

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{2i\pi \operatorname{Tr}_{\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_p} a_{-1}}{p}\right).$$

Il s'agit d'un caractère additif non trivial de K , de niveau 0.

2.4. Transformée de Fourier. Soit K un corps local. Rappelons sur quelles fonctions on effectue la transformée de Fourier.

Définition 2.15. (1) Si K est archimédien, une *fonction de Schwartz* sur K est une fonction $f : K \rightarrow \mathbf{C}$ qui est \mathbf{C}^∞ et telle que, pour tout polynôme $P \in K[X]$, on ait $P(x)f(x) \rightarrow 0$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.

(2) Une *fonction de Schwartz-Bruhat* sur K est une fonction de Schwartz si K est archimédien, et une fonction localement constante à support compact sinon.

On note $\mathcal{S}(K)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat. C'est un \mathbf{C} -espace vectoriel.

Définissons à présent la transformée de Fourier.

Définition 2.16. Soit $\psi \in \hat{K}$. La transformée de Fourier (associée à ψ) d'une fonction $f \in \mathcal{S}(K)$ est la fonction \hat{f} donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_K f(x)\psi(x\xi)dx$$

pour tout $\xi \in K$. On a encore $\hat{f} \in \mathcal{S}(K)$.

Remarque 2.17. Si on veut faire cela de manière plus canonique, on peut définir $\mathcal{S}(E)$ pour tout K -espace vectoriel de dimension finie (qui est canoniquement muni d'une topologie). En particulier, on a défini $\mathcal{S}(\hat{K})$. On définit alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\hat{K})$ par $\hat{f}(\xi) = \int_K f(x)\langle x, \xi \rangle dx$. Plus généralement, si E est un K -espace vectoriel de dimension finie, on peut poser $\hat{E} = \text{Hom}_{\text{cont}}(E, \mathbf{S}^1) = E \otimes_K \hat{K}$. Si on fixe une mesure de Haar dx sur E , on peut alors de même construire une transformée de Fourier $f \in \mathcal{S}(E) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}(\hat{E})$.

On a le théorème suivant d'inversion de Fourier :

Théorème 2.18. Soit $\psi \in \hat{K}$, et dx une mesure de Haar sur K . Il existe alors une constante c telle que, pour tout $f \in \mathcal{S}(K)$, on ait

$$\hat{\hat{f}}(x) = cf(-x)$$

pour $x \in K$.

Lorsque la constante c est égale à 1, on dit que la mesure de Haar dx est auto-duale pour ψ . De plus, pour tout $\psi \in \hat{K}$, une telle mesure existe et est unique.

Dans le cas archimédien, le caractère additif ψ usuel a été choisi de sorte que la mesure auto-duale soit la mesure de Lebesgue. Dans le cas non archimédien, on définit le *niveau* de ψ comme étant $n_\psi = \inf\{n \in \mathbf{Z} : \mathfrak{m}^n \subset \ker \psi\}$, avec \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O} l'anneau des entiers de K . Alors la mesure de Haar auto-duale pour ψ vérifie $\int_{\mathcal{O}} dx = 1$ si et seulement si ψ est de niveau 0. Dans la suite, on fixe donc ψ un tel caractère additif.

3. FONCTIONS L ET FACTEURS ϵ

Nous allons définir des fonctions L , qui à tout caractère associent une valeur dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, et des facteurs ϵ , qui à un caractère (et un caractère additif, et une mesure de Haar sur K) associent une valeur dans \mathbf{C}^* .

3.1. L'exemple de la fonction zêta de Riemann. L'exemple le plus simple et le plus connu de fonction L globale est la fonction ζ de Riemann, donnée par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

pour $\text{Re}(s) > 1$. Dans la théorie plus générale des fonctions L de Dirichlet, il s'agit de la fonction L associée au caractère trivial. Deux faits très importants sur cette fonction sont, d'une part, son prolongement méromorphe à \mathbf{C} et l'équation fonctionnelle de la fonction, et d'autre part sa factorisation sur $\text{Re}(s) > 1$.

À titre de motivation pour la suite, nous allons traiter cet exemple. Nous verrons ainsi apparaître les principales quantités qui nous intéresseront, à savoir les fonctions L locales.

3.1.1. Équation fonctionnelle et symétrisation. Commençons par l'équation fonctionnelle. Désormais, ζ désigne le prolongement (unique) de la série précédente en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} , avec un unique pôle simple en 1. Elle vérifie alors l'équation fonctionnelle

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s),$$

où Γ est la fonction Γ d'Euler donnée par

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

pour $\text{Re}(s) > 0$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, qui permet de prolonger Γ en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} avec des pôles simples en les entiers négatifs.

Tâchons de symétriser cette équation fonctionnelle : on cherche à rajouter un facteur $\xi(s) = A(s)\zeta(s)$ de sorte que

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

Prenons $A(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2})$. Alors $A(1-s) = \pi^{-1/2} \cdot \pi^{s/2} \Gamma(\frac{1-s}{2})$, donc :

$$\begin{aligned} \xi(1-s) &= A(1-s) \zeta(1-s) \\ &= \pi^{-1/2} \cdot \pi^{s/2} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \cdot 2(2\pi)^{-s} \cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s) \zeta(s) \\ &= \pi^{-1/2} 2^{1-s} \cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(\frac{1-s}{2}) \Gamma(s) \pi^{-s/2} \zeta(s). \end{aligned}$$

Il reste donc à voir

$$2\pi^{-1/2} \cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(\frac{1-s}{2}) \Gamma(s) = \Gamma(\frac{s}{2}).$$

Pour cela, on utilise deux identités classiques sur la fonction Γ , à savoir la *formule de réflexion d'Euler*

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

et la *formule de duplication de Legendre*

$$\Gamma(s) \Gamma(s + \frac{1}{2}) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi} \Gamma(2s).$$

En appliquant d'abord la seconde pour diviser en deux le facteur $\Gamma(s)$ du membre de gauche, celui-ci se réécrit

$$\frac{1}{\pi} \cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(\frac{1-s}{2}) \Gamma(\frac{s+1}{2}) \Gamma(\frac{s}{2}).$$

La première permet alors de réécrire le produit $\Gamma(\frac{1-s}{2}) \Gamma(\frac{s+1}{2})$ sous la forme $\frac{\pi}{\sin(\pi(1-s)/2)}$, ou encore $\frac{\pi}{\cos(\pi s/2)}$, et donc finalement on a l'égalité voulue.

3.1.2. Produit eulérien et fonctions L locales. Intéressons-nous maintenant à l'écriture de ζ - et donc de ξ - comme produit eulérien. Il est bien connu que, pour $\text{Re}(s) > 1$, on a

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

où p parcourt les nombres premiers. Posons $L_p(s) = \frac{1}{1 - p^{-s}}$ pour tout p premier. Posons également $L_\infty(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2})$. Alors

$$\xi(s) = \prod_p L_p(s),$$

où p parcourt cette fois-ci les nombres premiers et ∞ , c'est-à-dire toutes les places de \mathbf{Z} . On a donc factorisé une fonction L globale en produit de fonctions L locales associées à chaque place.

3.2. Fonctions L . L'objectif ici est de définir des fonctions L locales associées aux caractères des corps locaux. Plus précisément, pour tout corps local K et tout $\chi \in X(K^*)$, on va définir $L(\chi) \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. On obtient alors une fonction L en posant $L(s, \chi) = L(\chi \omega_s)$. Il s'agira, par construction, d'une fonction méromorphe.

3.2.1. Cas complexe. Soit $\chi \in X(\mathbf{C}^*)$, qu'on écrit $\chi(z) = \sigma(z)^{-N} |z|^{2s}$ avec $N \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{C}$ et σ qui est la conjugaison ou l'identité. On définit alors

$$L(\chi) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s),$$

avec $\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$.

Remarque 3.1. Cette définition est celle de Deligne, elle a l'avantage de l'élégance. Vérifions qu'elle coïncide avec celle de Ramakrishnan et Valenza. Pour cela, on écrit $\chi(re^{i\theta}) = r^{2t} e^{in\theta}$. Posons $\epsilon = 1$ si σ est l'identité, $\epsilon = -1$ sinon. On a alors $n = -\epsilon N$ et $2t = 2s - N$. Ainsi, $N = -\epsilon n = |n|$, et $s = t + \frac{|n|}{2}$, ce qui permet de retrouver la définition de Ramakrishnan et Valenza.

Attention, il y a plusieurs typos dans celle-ci : ils oublient le facteur 2 dans la première définition de $\Gamma_{\mathbf{C}}$ (mais le mettent ensuite), et ils oublient de mettre un facteur 2 devant leur s en écrivant $\chi(re^{i\theta}) = r^{2s} e^{in\theta}$. Mais ce 2 est nécessaire si on veut avoir l'équation fonctionnelle que nous écrirons dans un instant.

3.2.2. Cas réel. Soit $\chi \in X(\mathbf{R}^*)$, qu'on écrit $\chi(x) = x^{-N} |x|^s$ avec $N \in \{0, 1\}$ et $s \in \mathbf{C}$. On définit alors

$$L(\chi) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s),$$

avec $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2})$.

Remarque 3.2. Cette définition est à nouveau celle de Deligne. On vérifie sans peine qu'elle coïncide avec celle de Ramakrishnan et Valenza.

Remarquons également qu'on retrouve ici le facteur L_∞ de la fonction ζ . Ce n'est absolument pas une coïncidence : le corps local associé à la place ∞ de \mathbf{Z} est \mathbf{R} .

3.2.3. *Cas non archimédien.* Soit $\chi \in X(K^*)$ avec K un corps local non archimédien. On pose alors :

$$L(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi \text{ est ramifié} \\ \frac{1}{1-\chi(\varpi)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est à noter que ceci ne dépend pas de l'uniformisante, grâce à l'hypothèse de non ramification. Si on prend $\chi = \omega_s$, $K = \mathbf{Q}_p$, on reconnaît également les facteurs L_p de la fonction ζ .

La méromorphie suit immédiatement des définitions. Remarquons de plus que, tous les cas, on a l'équation fonctionnelle (qui suit des définitions par un calcul immédiat) :

$$L((\chi\omega_s)^\vee) = L(1-s, \chi^{-1}).$$

3.3. Fonctions zêta locales et facteurs γ . Le groupe K^* est localement compact, et il possède donc une mesure de Haar. En fait, on voit aisément (par définition de la valeur absolue normalisée) que $d^*x = c \frac{dx}{||x||}$ est une telle mesure de Haar, pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$. Dans la suite, on note d^*x cette mesure, avec $c = 1$.

Introduisons à présent les fonctions zêta locales de Tate.

Définition 3.3. Soient $f \in \mathcal{S}(K)$, $\chi \in X(K^*)$. On pose alors

$$Z(f, \chi) = \int_{K^*} f(x) \chi(x) d^*x$$

lorsque cette intégrale converge.

Commençons par étudier la convergence des fonctions zêta locales de Tate.

Lemme 3.4. Soient $f \in \mathcal{S}(K)$, $\chi \in X(K^*)$. Si l'exposant σ de χ est strictement positif, alors l'intégrale précédente est absolument convergente.

Démonstration. Traitons le cas archimédien. Pour $x \in K^*$, on a $||f(x)\chi(x)|| = ||f(x)|| \cdot ||x||^\sigma$. Vu la définition de d^*x , il s'agit de voir que l'intégrale $\int_{K^*} ||f(x)|| \cdot ||x||^{\sigma-1} dx$ converge. Au voisinage de ∞ , cela suit de la définition des fonctions de Schwartz car $||f(x)|| = o(||x||^{-n})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $||f(x)|| \cdot ||x||^{\sigma-1} = o(||x||^{-n+\sigma-1})$, dont l'intégrale converge en ∞ pour n assez grand. En 0, on a $||f(x)|| = O(1)$, donc on se ramène à montrer la convergence de $||x||^{\sigma-1}$. Or, dans le cas réel, l'intégrale de $|x|^\alpha = ||x||^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > -1$, ce qui nous redonne ici $\sigma > 0$. Dans le cas complexe, l'intégrale de $|z|^\alpha = ||z||^{\alpha/2}$ converge si et seulement si $\alpha > -2$, ce qui ici encore nous redonne $\sigma > 0$.

Dans le cas non archimédien, il existe un certain $n \in \mathbf{Z}$ tel que f s'écrive comme une combinaison linéaire finie de $\mathbf{1}_{a+m^n}$, $a \in K$. Lorsque $a \notin m^n$, l'intégrale converge clairement. Il ne reste donc qu'à traiter le cas $f = \mathbf{1}_{m^n}$, $n \in \mathbf{Z}$. Pour $x \in K^*$, on a $|\chi(x)| = |\mu(x)| \cdot |\omega_s(x)| = q^{-sv(x)}$, où $\chi = \mu\omega_s$ est la décomposition du lemme 2.4. Donc

$$\int_{K^*} |f(x)\chi(x)| d^*x = \sum_{l \geq n} \int_{v(x)=l} q^{-sl} d^*x = (1-q^{-1}) \sum_{l \geq n} q^{-sl}$$

car $\text{Vol}(\{v(x) = l\}, d^*x) = \text{Vol}(\mathcal{O}^\times, d^*x) = \text{Vol}(\mathcal{O}^\times, dx) = 1 - q^{-1}$. Donc la somme converge si et seulement si $\text{Re}(s) > 0$, ce qu'il fallait démontrer. \square

On peut à présent démontrer un résultat remarquable de Tate, l'équation fonctionnelle locale.

Proposition 3.5. Soit $\chi \in X(K^*)$ d'exposant $\sigma \in]0, 1[$. Il existe alors un complexe $\gamma(\chi, \psi, dx)$ tel que $Z(\hat{f}, \chi^\vee) = \gamma(\chi, \psi, dx) Z(f, \chi)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(K)$. De plus, la fonction

$$s \mapsto \gamma(\chi\omega_s, \psi, dx)$$

est méromorphe sur le domaine $\sigma + \text{Re}(s) \in]0, 1[$.

Démonstration. Remarquons que les fonctions zêta qui interviennent sont bien définies (l'exposant de χ^\vee étant, par définition, égal à $1 - \sigma$). On commence par montrer que, pour $f, g \in \mathcal{S}(K)$, on a

$$Z(\hat{f}, \chi^\vee) Z(g, \chi) = Z(f, \chi) Z(\hat{g}, \chi^\vee),$$

ce qui donnera l'existence du facteur γ . Pour ce qui est de son unicité, elle vient immédiatement du fait que la fonction zêta locale d'un caractère n'est pas nulle. Enfin, pour montrer la méromorphie, il suffira de vérifier que les fonctions zêta locales sont holomorphes.

Écrivons

$$(G) = Z(\hat{f}, \chi^\vee) Z(g, \chi) = \int_{K^* \times K^*} \hat{f}(x) g(y) \chi(yx^{-1}) ||x|| d^*x d^*y.$$

On fait à présent le changement de variable $(x, y) \mapsto (xy, y)$, qui préserve les mesures de Haar. On trouve

$$\begin{aligned} (G) &= \int_{K^* \times K^*} \hat{f}(xy)g(y)\chi(x^{-1})||xy||d^*xd^*y \\ &= \int_{K^* \times K^*} \hat{f}(xy)g(y)\chi(x^{-1})dxdy \\ &= \int_{K \times K} \hat{f}(xy)g(y)\chi(x^{-1})dxdy \\ &= \int_{K \times K \times K} f(z)g(y)\psi(xyz)\chi(x^{-1})dxdy \end{aligned}$$

et la dernière expression est symétrique entre f et g . On en déduit l'égalité désirée.

Pour ce qui est de l'holomorphie des fonctions zêta locales, cela suit immédiatement des résultats usuels sur l'holomorphie des intégrales à paramètres, car pour tout $x \in K^*$ la fonction $s \in \mathbf{C} \mapsto f(x)\chi(x)||x||^s$ est clairement holomorphe. \square

3.4. Calcul des facteurs γ et ϵ . On va à présent calculer explicitement le facteur γ dans les différents cas - réel, complexe et non archimédien. Nous verrons apparaître naturellement des facteurs ϵ , que nous définirons plus tard.

L'idée va être de choisir intelligemment des fonctions f , de sorte que $Z(f, \chi) = L(\chi)$ à une constante près, et de même $Z(\hat{f}, \chi^\vee) = L(\chi^\vee)$ à une constante près. On définira le rapport des deux constantes comme étant le facteur ϵ .

3.4.1. Cas réel. Rappelons que dans ce cas $\psi(x) = \exp(2i\pi x)$, et que dx est la mesure de Lebesgue. Soit $\chi \in X(\mathbf{R}^*)$, et prenons dans un premier temps $\chi = \omega_s$ avec $\text{Re}(s) > 0$. Posons alors $f(x) = e^{-\pi x^2}$ la gaussienne, qui est une fonction de Schwartz. Alors

$$Z(f, \chi) = \int_{\mathbf{R}^*} e^{-\pi x^2} |x|^s d^*x = 2 \int_0^\infty e^{-\pi x^2} x^{s-1} dx.$$

Faisons le changement de variable $u = \pi x^2$. On a donc $x = \pi^{-1/2} u^{1/2}$, donc $x^{s-1} dx = (2\pi)^{-1} x^{s-2} (2\pi x dx) = \frac{1}{2} \pi^{-s/2} u^{\frac{s}{2}-1} du$. On en déduit

$$Z(f, \chi) = \pi^{-s/2} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Gamma_{\mathbf{R}}\left(\frac{s}{2}\right) = L(\chi).$$

D'autre part, $\hat{f} = f$, et par conséquent :

$$(3.1) \quad \gamma(\chi, \psi, dx) = \frac{Z(\hat{f}, \chi^\vee)}{Z(f, \chi)} = \frac{L(\chi^\vee)}{L(\chi)}$$

ce qui implique que $\gamma(\chi, \psi, dx)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbf{C} tout entier.

Traisons maintenant le cas $\chi(x) = x^{-1}|x|^s$, toujours en exposant strictement positif, c'est-à-dire $\text{Re}(s) > 1$. Posons alors $f(x) = xe^{-\pi x^2}$, qui est encore une fonction de Schwartz. On trouve cette fois encore

$$Z(f, \chi) = \int_{\mathbf{R}^*} e^{-\pi x^2} |x|^s d^*x = \Gamma_{\mathbf{R}}(s) = L(\chi)$$

d'après le calcul précédent. D'autre part, f est la dérivée de $-\frac{1}{2\pi}e^{-\pi x^2}$. Donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{2i\pi x\xi} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\pi x^2} \cdot 2i\pi \xi e^{2i\pi x\xi} dx \\ &= i\xi \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2 + 2i\pi x\xi} dx \\ &= i\xi e^{-\pi \xi^2} \\ &= i f(\xi). \end{aligned}$$

Par conséquent, $Z(\hat{f}, \chi^\vee) = iL(\chi^\vee)$, d'où on déduit

$$(3.2) \quad \gamma(\chi, \psi, dx) = i \frac{L(\chi^\vee)}{L(\chi)}$$

En particulier, γ possède de nouveau un prolongement méromorphe à \mathbf{C} tout entier.

Après avoir traité ce cas, il paraît relativement naturel d'introduire :

Définition 3.6. Le *facteur epsilon* $\epsilon(\chi, \psi, dx)$ d'un caractère χ est défini par l'équation

$$\gamma(\chi, \psi, dx) = \epsilon(\chi, \psi, dx) \frac{L(\chi^\vee)}{L(\chi)}.$$

Il est immédiat que $\epsilon(\chi, \psi, dx) \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe. On va montrer qu'en fait $\epsilon(\chi, \psi, dx) \in \mathbf{C}^*$ - en particulier, ce facteur est holomorphe, ce qui justifie le fait de lui accorder une attention particulière.

Mentionnons la dépendance de ϵ en ψ et dx :

Lemme 3.7. *On a l'égalité suivante :*

$$\epsilon(\chi, \psi_a, t \cdot dx) = \chi(a) \|a\|^{-1} t \cdot \epsilon(\chi, \psi, dx)$$

pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in K^*$.

On a donc montré que, dans le cas réel, si χ est sous la forme normale de la proposition 2.9, soit $\chi(x) = x^{-N}|x|^s$, $N \in \{0, 1\}$, $s \in \mathbf{C}$, on a :

$$\epsilon(\chi, \psi, dx) = i^N.$$

3.4.2. Cas complexe. Rappelons que dans ce cas $\psi(z) = \exp(4i\pi \operatorname{Re}(z))$ et que la mesure est $|dz \wedge d\bar{z}| = 2dad\bar{b}$ si on pose $z = a + ib$ (on évite d'écrire $x + iy$, car dx est notre notation pour une mesure de Haar abstraite). Soit $\chi \in X(\mathbf{C}^*)$, qu'on écrit $\chi(z) = \sigma(z)^{-n}|z|^{2s}$ avec $n \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{C}$ et σ qui est l'identité ou la conjugaison. Les fonctions L , facteurs γ et autres sont invariants par automorphismes continus de K . Par conséquent, on peut supposer $\sigma = \operatorname{id}$.

Posons

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi} z^n e^{-2\pi|z|^2}.$$

Lemme 3.8. *La transformée de Fourier de f_n est*

$$\hat{f}_n(z) = \frac{1}{2\pi} i^n f_n(\bar{z}).$$

Notons également que, dans les coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, on a

$$\begin{aligned} d^*z &= \frac{1}{|z|^2} |dz \wedge d\bar{z}| \\ &= r^{-2} (e^{i\theta} dr + ire^{i\theta} d\theta) \wedge (e^{-i\theta} dr - ire^{-i\theta} d\theta) \\ &= r^{-2} |-ir dr \wedge d\theta + ir d\theta dr| \\ &= 2r^{-1} dr d\theta. \end{aligned}$$

On peut à présent calculer les fonctions zêta locales de f_n :

$$\begin{aligned} Z(f_n, \chi) &= \int_{\mathbf{C}^*} f_n(z) \chi_{s,n}(z) d^*z \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{C}^*} (z^n e^{-2\pi|z|^2}) (z^{-n} |z|^{2s}) d^*z \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-2\pi r^2} r^{2s-1} dr d\theta \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-2\pi r^2} r^{2s-1} dr \\ &= 2 \cdot 2^{-s} \int_0^\infty e^{-\pi u^2} u^{2s-1} du \end{aligned}$$

avec $u = \sqrt{2}r$. On reconnaît les intégrales du cas réel, et on en déduit

$$Z(f_n, \chi) = 2^{-s} \Gamma_{\mathbf{R}}(2s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) = L(\chi).$$

Notons ensuite que, d'autre part,

$$\chi^\vee(z) = |z|^2 \chi(z)^{-1} = z^n |z|^{2(1-s)} = \bar{z}^{-n} |z|^{2(n+1-s)} = \chi'(\bar{z})$$

avec $\chi'(z) = z^{-n} |z|^{2(n+1-s)}$. On a en particulier $L(\chi') = L(\chi^\vee)$. Par conséquent, en appliquant le calcul précédent :

$$\begin{aligned} Z(\hat{f}_n, \chi^\vee) &= i^n Z(f_n \circ \operatorname{conj}, \chi' \circ \operatorname{conj}) \\ &= i^n Z(f_n, \chi') \\ &= i^n L(\chi') \\ &= i^n L(\chi^\vee) \end{aligned}$$

où conj est la conjugaison complexe. On en déduit

$$\epsilon(\chi, \psi, dx) = i^n.$$

3.4.3. Cas non archimédien. Le calcul est plus long. On fixe ψ de niveau 0 et dx la mesure de Haar normalisée par $\int_{\mathcal{O}} dx = 1$, qui est auto-duale pour ψ . Si χ est non ramifié, on montrera

$$(3.3) \quad \epsilon(\chi, \psi, dx) = 1.$$

Si χ est ramifié, on a

$$(3.4) \quad \epsilon(\chi, \psi, dx) = \int_{K^*} \chi^{-1}(x) \psi(x) dx.$$

Dans les deux cas, il est à valeurs dans \mathbf{C}^* .

Soit $\chi = \mu\omega_s$ un caractère de K^* , et soit n le plus petit entier naturel tel que $1 + \mathfrak{m}^n$ (ou, si $n = 0$, \mathcal{O}^\times) soit inclus dans $\ker \chi$ - ou, de façon équivalente, dans $\ker \mu$. On définit le *conducteur* de χ comme étant l'idéal \mathfrak{m}^n . On note également $U_n = 1 + \mathfrak{m}^n$ si $n > 0$, et $U_0 = \mathcal{O}^\times$. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in \mathfrak{m}^{-n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_K f(x)\psi(x\xi)dx \\ &= \int_{\mathfrak{m}^{-n}} \psi(x(\xi+1))dx. \end{aligned}$$

Supposons $n = 0$. Alors, si $\xi \notin \mathcal{O}$, l'application $x \in \mathcal{O} \mapsto \psi(x(\xi+1))$ est un caractère non trivial de \mathcal{O} , donc $\hat{f}(\xi) = 0$. Si $\xi \in \mathcal{O}$, alors $\psi(x(\xi+1)) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{O}$, et donc $\hat{f}(\xi) = 1$.

Supposons à présent $n > 0$. Si $\xi \notin -1 + \mathfrak{m}^n$, alors de même que précédemment l'application $x \in \mathfrak{m}^{-n} \mapsto \psi(x(\xi+1))$ définit un caractère non trivial de \mathfrak{m}^n , et donc $\hat{f}(\xi) = 0$. D'autre part, si $\xi \in -1 + \mathfrak{m}^n$, alors $\psi(x(\xi+1)) = 1$ pour tout $x \in \mathfrak{m}^n$, et donc $\hat{f}(\xi) = q^n$. Donc

$$\hat{f} = \begin{cases} 1_{\mathcal{O}} & \text{si } n = 0 \\ q^n 1_{-1+\mathfrak{m}^n} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Calculons à présent $Z(f, \chi)$. On a :

$$\begin{aligned} Z(f, \chi) &= \int_{K^*} f(x)\chi(x)d^*x \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \int_{v(x)=l} f(x)\chi(x)d^*x \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \int_{\mathcal{O}^\times} f(\varpi^l x)\chi(\varpi^l x)d^*x \\ &= \sum_{l \geq -n} \int_{\mathcal{O}^\times} \psi(\varpi^l x)\mu(\varpi^l x)\omega_s(\varpi^l x)d^*x \\ &= \sum_{l \geq -n} q^{-ls} \int_{\mathcal{O}^\times} \psi(\varpi^l x)\mu(x)dx \end{aligned}$$

où la dernière égalité utilise le fait que $d^*x = dx$ sur \mathcal{O} , par définition de d^*x .

Si $n = 0$, alors $\psi(\varpi^l x) = 1$ pour tout $l \geq -n$ et $x \in \mathcal{O}^\times$. De plus, $\mu = 1$. Donc on peut réécrire

$$Z(f, \chi) = \sum_{n \geq 0} q^{-ls} \int_{\mathcal{O}^\times} dx = (1 - q^{-1})(1 - q^{-s})^{-1} = (1 - q^{-1})L(\chi).$$

Dans le cas $n > 0$, le calcul va faire appel aux sommes de Gauss.

Définition 3.9. À un caractère multiplicatif $\mu : \mathcal{O}^\times \rightarrow \mathbf{S}^1$ et un caractère additif $\lambda : \mathcal{O}^\times \rightarrow \mathbf{Q}^1$, on associe une *somme de Gauss*

$$g(\mu, \lambda) = \int_{\mathcal{O}^\times} \omega(x)\lambda(x)dx.$$

On a alors

$$Z(f, \chi) = \sum_{l \geq -n} q^{-ls} g(\mu, \psi_{\varpi^l}).$$

Le lemme suivant nous permettra de calculer les sommes de Gauss :

Lemme 3.10. Soient $\mu : \mathcal{O}^\times \rightarrow \mathbf{S}^1$ un caractère multiplicatif de conducteur \mathfrak{m}^n , et soit $\lambda : \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{S}^1$ un caractère additif de conducteur \mathfrak{m}^r (c'est-à-dire de niveau r). Alors les égalités suivantes sont vérifiées :

- (1) si $r < n$, alors $g(\mu, \lambda) = 0$;
- (2) si $r = n = 0$, alors $|g(\mu, \lambda)|^2 = (1 - q^{-1})^2$;
- (3) si $r = n > 0$, alors $|g(\mu, \lambda)|^2 = q^{-r}$;
- (4) si $r > n$, alors $|g(\mu, \lambda)|^2 = \text{Vol}(U_r) - q^{-1}\text{Vol}(U_{r-1})$, qui vaut 0 si $r \geq 2$ et q^{-2} si $r = 1$.

Démonstration. Supposons $r < n$. On partitionne \mathcal{O}^\times en classes modulo U_r . Pour $a \in \mathcal{O}^\times$, $b \in \mathcal{O}$, on a $\lambda(a(1 + \varpi^r b)) = \lambda(a)\lambda(\varpi^r ab) = \lambda(a)$ par définition du niveau, ce qui permet d'écrire

$$g(\mu, \lambda) = \sum_{\mathcal{O}^\times/U_r} \lambda(a)\mu(a) \int_{U_r} \mu(u)du$$

en choisissant un système de représentants (a) des classes modulo U_r . Comme $\omega|_{U_r}$ est non trivial, l'intégrale est nulle, ce qui montre que $g(\mu, \lambda) = 0$.

Supposons à présent $r \geq n$. Alors

$$\begin{aligned} |g(\mu, \lambda)|^2 &= g(\mu, \lambda) \bar{g}(\mu, \lambda) \\ &= \int_{\mathcal{O}^\times \times \mathcal{O}^\times} \mu(xy^{-1}) \lambda(x-y) dx dy \\ &= \int_{\mathcal{O}^\times} \mu(z) h(z) dz, \end{aligned}$$

où $h(z) = \int_{\mathcal{O}^\times} \lambda(y(z-1)) dy$. On a alors

$$h(z) = \int_{\mathcal{O}} \lambda(y(z-1)) dy - \int_{\mathfrak{m}} \lambda(y(z-1)) dy.$$

Si $v(z-1) \geq r$, la première définition de h donne déjà $h(z) = 1 - q^{-1}$, car $\lambda(y(z-1)) = 1$ sur \mathcal{O} . Si $v(z-1) = r-1$, alors dans la seconde définition de h on trouve que la première intégrale est nulle, en tant qu'intégrale d'un caractère non trivial sur \mathcal{O} , et donc $h(z) = -q^{-1}$. Enfin, si $v(z-1) < r-1$, dans la seconde définition les deux intégrales sont prises pour des caractères non triviaux, et sont donc nulles. D'où

$$h(z) = \begin{cases} 1 - q^{-1} & \text{si } v(z-1) \geq r \\ -q^{-1} & \text{si } v(z-1) = r-1 \\ 0 & \text{si } v(z-1) \leq r-2. \end{cases}$$

On en déduit que, si $r = 0$ (et donc en particulier $n = 0$, et donc $\mu = 1$), alors, puisqu'on est toujours dans le premier cas pour $z \in \mathcal{O}^\times$,

$$|g(\mu, \lambda)|^2 = (1 - q^{-1}) \int_{\mathcal{O}^\times} dz = (1 - q^{-1})^2.$$

Si $r > 0$, alors

$$\begin{aligned} |g(\mu, \lambda)|^2 &= \int_{U_{r-1}} \mu(z) h(z) dz \\ &= \int_{U_r} \mu(z) dz - q^{-1} \int_{U_{r-1}} \mu(z) dz \\ &= q^{-r} - q^{-1} \int_{U_{r-1}} \mu(z) dz. \end{aligned}$$

Donc, si $r = n$, la dernière intégrale s'annule, et on trouve $|g(\mu, \lambda)|^2 = q^{-r}$. Si $r > n$, la dernière intégrale vaut $\text{Vol}(U_{r-1})$ et on trouve la formule attendue. \square

En particulier, pour $l > -n$, comme ψ_{ϖ^l} est de niveau $-l$, le lemme 3.10 affirme que $g(\mu, \psi_{\varpi^l}) = 0$. D'où

$$Z(f, \chi) = q^{ns} g(\mu, \psi_{\varpi^{-n}}).$$

Comme ici $n > 0$ et que $\mu, \psi_{\varpi^{-n}}$ ont le même niveau n , on a en particulier $Z(f, \chi) \in \mathbf{C}^*$ d'après le lemme 3.10.

Calculons à présent $Z(\hat{f}, \chi^\vee)$.

Dans le cas où $n = 0$, on a $\mu = 1$ et donc ;

$$\begin{aligned} Z(\hat{f}, \chi) &= \int_{K^*} \hat{f}(x) \chi^\vee(x) d^*x \\ &= \sum_l \int_{v(x)=l} \hat{f}(x) \chi^\vee(x) d^*x \\ &= \sum_{l \geq 0} \int_{v(x)=l} \omega_{1-s}(x) d^*x \\ &= \sum_{l \geq 0} q^{-l(1-s)} (1 - q^{-1}) \\ &= (1 - q^{-1}) (1 - q^{-(1-s)})^{-1} \\ &= (1 - q^{-1}) L(\chi^\vee), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, puisqu'on avait aussi $Z(f, \chi) = (1 - q^{-1}) L(\chi)$, que l'on a

$$\epsilon(\chi, \psi, dx) = 1$$

pour χ non ramifié.

Supposons à présent $n > 0$. Alors

$$\begin{aligned} Z(\hat{f}, \chi^\vee) &= \int_{K^*} \hat{f}(x) \chi^\vee(x) d^*x \\ &= q^n \int_{-1 + \mathfrak{m}^n} \mu^{-1}(x) \omega_{1-s}(x) d^*x \\ &= q^n \int_{1 + \mathfrak{m}^n} \mu^{-1}(-1) d^*x \\ &= \mu(-1) \end{aligned}$$

car pour $x \in -1 + \mathfrak{m}^n$ on a $\mu(x) = \mu(-1)\mu(-x) = \mu(-1)$, puisque $-x \in 1 + \mathfrak{m}^n \subset \ker \mu$, et $\mu(-1) = \mu^{-1}(-1)$. Par conséquent, puisque $L(\chi) = L(\chi^\vee) = 1$, on trouve

$$\epsilon(\chi, \psi, dx) = \frac{Z(\hat{f}, \chi^\vee)}{Z(f, \chi)} = \mu(-1) g(\mu, \psi_{\varpi^{-n}})^{-1} q^{-ns}.$$

On peut encore la réécrire, en utilisant le fait que

$$\overline{g(\mu, \psi_{\varpi^{-n}})} = g(\bar{\mu}, \psi_{-\varpi^{-n}}) = \mu(-1)g(\bar{\mu}, \psi_{t^{-n}})$$

et que

$$|g(\mu, \psi_{\varpi^{-n}})|^2 = q^{-n},$$

on peut réécrire le facteur ϵ sous la forme

$$\epsilon(\chi, \psi, dx) = g(\bar{\mu}, \psi_{\varpi^{-n}})q^{-n(s-1)}.$$

En particulier, le facteur ϵ n'a ni zéros ni pôles.

Vérifions les formules 3.3 et 3.4, données avant le calcul. Dans le cas des caractères non ramifiés, on a obtenu l'égalité. Pour les caractères ramifiés,

$$\begin{aligned} \int_{K^*} \chi^{-1}(x)\psi(x)dx &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \int_{v(x)=l} \mu^{-1}(x)\omega_{-s}(x)\psi(x)dx \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} q^{ls} \int_{v(x)=l} \mu^{-1}(x)\psi(x)dx \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} q^{l(s-1)} \int_{\mathcal{O}^\times} \mu^{-1}(x)\psi(\varpi^l x)dx \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} q^{l(s-1)} g(\mu^{-1}, \psi_{\varpi^l}). \end{aligned}$$

Le caractère ψ_{ϖ^l} est de niveau $-l$, donc d'après le lemme 3.10 les sommes de Gauss pour $l \neq -n$ sont nulles. L'intégrale précédente se réécrit donc

$$\int_{K^*} \chi^{-1}(x)\psi(x)dx = q^{-n(s-1)}g(\mu^{-1}, \psi_{\varpi^{-n}}),$$

comme voulu.

Remarque 3.11. Le cas des corps locaux archimédiens de caractéristique nulle se traite de façon analogue. La difficulté supplémentaire est que l'anneau des entiers n'est plus son propre orthogonal pour la trace. Ceci n'induit aucune véritable complication, mais il faut désormais tenir compte d'un nouvel idéal, la *différente*, défini comme l'inverse de l'orthogonal de l'anneau des entiers. En particulier, les formules que l'on obtient sont très similaires.

3.5. Conclusion. On a le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.12. Soient $f \in \mathcal{S}(K)$ et $\chi \in X(K^*)$ d'exposant σ . Alors :

- (1) $Z(f, \chi)$ est une intégrale absolument convergente si $\sigma > 0$;
- (2) si $\sigma \in]0, 1[$, la fonction zêta locale vérifie l'équation fonctionnelle

$$Z(\hat{f}, \chi^\vee) = \gamma(\chi, \psi, dx)Z(f, \chi)$$

pour une certaine constante $\gamma(\chi, \psi, dx)$ indépendante de f ;

- (3) la fonction $s \mapsto \gamma(\chi\omega_s, \psi, dx)$ est méromorphe pour s dans la bande $\text{Re}(s) + \sigma \in]0, 1[$, et possède un prolongement méromorphe à \mathbf{C} tout entier ;
- (4) le facteur $\epsilon(\chi, \psi, dx) = \gamma(\chi, \psi, dx) \frac{L(\chi)}{L(\chi^\vee)}$ est dans \mathbf{C}^* .

On a de plus le tableau, lorsque dx est la mesure de Haar standard et ψ est, sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} , le caractère standard, et sur un corps local non archimédien, un caractère de niveau 0, et si \mathfrak{m}^n est le conducteur de χ dans le cas ramifié :

	$K = \mathbf{R}$	$K = \mathbf{C}$	K non archimédien
Caractère $\chi(x)$	$x^{-N} x ^s, N \in \{0, 1\}$	$\sigma(z)^{-N} z ^{2s}, N \in \mathbf{N}$	$\mu(x)q^{-sv(x)}, \mu \in X(U)$
Fonction $L(\chi)$	$\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$	$\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$	$\begin{cases} \frac{1}{1-\chi(\varpi)} = \frac{1}{1-q^{-s}} & \text{si } \mu = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
Facteur ϵ	i^N	i^N	$\begin{cases} 1 & \text{si } \mu = 1 \\ \int_{K^*} \chi^{-1}\psi dx = q^{-n(s-1)}g(\bar{\mu}, \psi_{\varpi^{-n}}) & \text{sinon} \end{cases}$

RÉFÉRENCES

- [BH06] Colin J. BUSHNELL et Guy HENNIART. *The Local Langlands Conjecture for $GL(2)$* . Réd. par A. CHENCINER, J. COATES et S. R. S. VARADHAN. T. 335. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [Del73] P. DELIGNE. “Les Constantes Des Equations Fonctionnelles Des Fonctions L”. In : *Modular Functions of One Variable II*. Sous la dir. de Pierre DELIGNE et Willem KUIJK. T. 349. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1973, p. 501-597.

- [RV99] Dinakar RAMAKRISHNAN et Robert J. VALENZA. *Fourier Analysis on Number Fields*. Graduate Texts in Mathematics 186. New York Heidelberg : Springer, 1999. 350 p.
- [Ser80] Jean-Pierre SERRE. *Corps locaux*. 3. éd., corr. Publications de l'Institut de mathématique de l'Université de Nancago 8. Paris : Hermann, 1980. 245 p.