1 EXOS chapitre le corps des nombres complexes

Ce document contient les réponses/correction des exo 3.8 et 3.9

Exercice. (Exo 3.8) (1) $z^2 - (11-5i)z + 24 - 27i = 0$.
$\Delta = (11-5i)^2 - 4(24-27i) = 121 - 25 - 110i - 96 + 108i = -2i$. Comme les racines carrées de $-2i$ sont $\omega_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 1 - i$ et $\omega_2 = -\omega 1 = -1 + i$ les solutions sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{11-5i+1-i}{2}, \quad & z_2 &= \frac{11-5i-1+i}{2}, \\ z_1 &= 6-3i, & z_2 &= 5-2i. \end{aligned}$$

(2) $z^2 + z + 1 = 0$.
$\Delta = 1^2 - 4 = -3$ donc les solutions de l'équation sont $z_1 = 1/2 + \sqrt{3}i/2$ et $z_2 = 1 - \sqrt{3}i/2$.

(3) $P(z) = z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$.
$\Delta = (5-14i)^2 - 4 \times (-2) \times (5i+12) = 25 - 196 - 140i + 40i + 96 = -75 - 100i = 25(-3-4i)$.
Soit $\omega = a + ib$ une racine carrée de $-3-4i$. Les nombres a et b vérifient le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = -3, \\ 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) = -4, \\ a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{16+9} = 5, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 2, \\ 2ab = -4, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1, \\ b = -2/a, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

On trouve que Δ admet pour racine carrées $\omega_1 = 5(1-2i)$ et $\omega_2 = -5(1-2i)$. Les solutions de l'équations sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{5-14i+5-10i}{2}, \quad & z_2 &= \frac{5-14i-5+10i}{2}, \\ z_1 &= 5-12i, & z_2 &= -2i. \end{aligned}$$

Dans ce cas on peut facilement vérifier que z_1 et z_2 sont racine car $-2i \times z_1 = -2(5i+12)$ et $-2i + z_1 = 5 - 14i$ (ce qui équivaut pour rappel à $(X - z_1)(X - z_2) = P(X)$ du fait de $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2$.)

(4) $z^4 - (1-i)z^2 - i = 0$.
Une nombre $z \in \mathbb{C}$ satisfait l'équation si et seulement si $z^2 = y$ avec $y \in \mathbb{C}$ solution de $Q(y) = y^2 - (1-i)y - i = 0$. Trouvons les 2 racines complexes de Q. on a

$$\Delta = (1-i)^2 - 4 \times (-i) = 1^2 - 1^2 - 2i + 4i = 2i.$$

En calculant le discriminant Δ, on se rend compte que $1-i$ et son opposé sont les racines carrées de $-2i$, donc leur conjugués sont les racines carrées de $2i$. Ainsi les racines carrées de Δ sont $\omega_1 = 1 + i$ et $\omega_2 = -1 - i$ Les solutions de l'équation $Q(y) = 0$ sont donc

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1-i+1+i}{2}, \quad & y_2 &= \frac{1-i-1-i}{2}, \\ y_1 &= 1, & y_2 &= -i. \end{aligned}$$

Comme les deux racines carrées de y_1 et les deux racines carrées de y_2 sont solutions de l'équation originale, on trouve donc 4 solutions

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, \quad \text{et} z_4 = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2.$$

Exercice. (Exo 3.9) Soit

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi[&\to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned}$$

Admettons que f soit bijective, comme $e^{it} \in \mathbb{S}^1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on déduit que l'espace d'arrivée est le plus grand possible. L'espace de départ est aussi le plus grand possible pour que l'exponentielle complexe soit injective, car pour tout réel x n'appartenant pas à $[-\pi, \pi[$, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2k\pi \in [-\pi, \pi[$ et ces deux éléments ont la même image par l'application exponentielle complexe.

Montrons que f est effectivement bijective. Pour l'injectivité, si t et t_* sont deux éléments de $[-\pi, \pi[$ tels que $e^{it} = e^{it_*}$, on déduit que $\cos(t) = \cos(t_*)$. Donc $t_* = t$ ou bien $t_* = -t$ et $t \neq -\pi$. Dans le second cas, on déduit que $\sin(t_*) = \sin(-t) = -\sin(t)$ et comme $\sin(t_*) = \sin(t)$ on obtient $\sin(t) = -\sin(t)$ ce qui n'est possible que si $t = 0$ ou $t = -\pi$. Donc $t = 0$ et $t_* = -t = t = 0$. Dans tous les cas, on a

$$t_* = t,$$

donc f est injective.
Pour la surjectivité, montrons que l'équation $e^{it} = z$ admet une solution pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| = 1$ (c-à-d $z \in \mathbb{S}^1$) Soit $z \in \mathbb{S}^1$, si $\mathrm{Re}(z) > 0$ le nombre réel $t = \arctan(\mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z))$ vérifie $e^{it} = z$. En effet comme $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\tan(t) = \sin(t)/\cos(t)$ avec $\cos(t) > 0$, et donc

$$\cos(t)^2 = \frac{1}{1 + (\tan(t))^2},$$

cela donne $\cos(t^2) = \mathrm{Re}(z)^2/(\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2)$ ce qui implique $\cos(t) = \mathrm{Re}(z)$ car $\cos(t) > 0$. On calcule

$$e^{it} = \cos(t)(1 + i\tan(t)) = \mathrm{Re}(z)(1 + i\,\mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z)) = z,$$

ce qui conclut.
Si $\mathrm{Re}(z) < 0$, en prenant $t = \arctan(\mathrm{Im}(-z)/\mathrm{Re}(-z)) - \pi$, on trouve

$$e^{it} = -ze^{-i\pi} = z.$$

Enfin si $\mathrm{Re}(z) = 0$ on sait que $z = i = e^{i\pi/2}$ ou $z = -i = e^{3\pi/2}$. Ainsi f est bijective car injective et surjective.