

L1-MI-S1

Semaine-2

Contents

Chapter 1. Ensembles et Applications	1
Exercice 1.12	1
Solution	1
Chapter 2. Nombres et Suites Réels	3
1. Valeur absolue	3
Exercice 2.1(3)	4
Solution	5
Exercice 2.1(5)	5
Solution	6
Exercice 2.1(8)	7
Solution	7
Exercice 2.1(10)	8
Solution	8
Exercice 2.1(11)	10
Solution	10
Exercice 2.2(1)	11
Solution	11
Conclusion	12
Exercice 2.2(2)	12
Solution	12
Exercice 2.2(3)	14
Solution	14
Conclusion	15
Exercice 2.2(4)	15
Solution	15
Conclusion	16
Exercice 2.3(1.a)	16
Solution	16
Solution	17
Exercice 2.3(1.c)	18
Solution	18
Conclusion	19

CHAPTER 1

Ensembles et Applications

Exercice 1.12

Soit E un ensemble à n éléments et soit m un entier strictement positif. Déterminer :

- (1) Le nombre d'éléments de E^m .
- (2) Le nombre de parties de E^m .

Solution

1. Le nombre d'éléments de E^m . L'ensemble E^m représente le **produit cartésien** de E par lui-même m fois. En d'autres termes, un élément de E^m est un m -uplet de la forme :

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{avec} \quad x_i \in E \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m.$$

Comme E a exactement n éléments, pour chaque x_i , il y a n choix possibles. Ainsi, le nombre total d'éléments dans E^m , noté $|E^m|$, est :

$$|E^m| = n^m.$$

Conclusion : Le nombre d'éléments de E^m est n^m .

2. Le nombre de parties de E^m . Le nombre de parties d'un ensemble A est donné par $2^{|A|}$, où $|A|$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble A . Ici, l'ensemble E^m contient n^m éléments, comme démontré précédemment.

Par conséquent, le nombre de parties de E^m , noté $\mathcal{P}(E^m)$, est :

$$\mathcal{P}(E^m) = 2^{|E^m|} = 2^{n^m}.$$

Conclusion : Le nombre de parties de E^m est 2^{n^m} .

Explication des étapes.**(1) Première partie :**

- E^m est le produit cartésien de l'ensemble E par lui-même m fois. Cela signifie que chaque élément de E^m est une séquence de longueur m , où chaque élément de la séquence provient de E .
- Comme E a n éléments, pour chaque position dans la séquence, il y a n choix possibles. Le nombre total de séquences (ou d'éléments dans E^m) est donc n^m .

(2) Deuxième partie :

- Le nombre de parties d'un ensemble est déterminé par le nombre de sous-ensembles possibles. Pour un ensemble contenant k éléments, le nombre de sous-ensembles est 2^k (car pour chaque élément, il existe deux possibilités : l'inclure dans le sous-ensemble ou ne pas l'inclure).
- Dans notre cas, l'ensemble E^m contient n^m éléments, donc le nombre total de parties de cet ensemble est 2^{n^m} .

CHAPTER 2

Nombres et Suites Réels

1. Valeur absolue

La notion de **valeur absolue** est fondamentale en mathématiques, en particulier dans l'étude des inégalités. Elle permet de mesurer la distance d'un nombre réel à l'origine sur la droite réelle, et elle intervient dans de nombreux domaines, comme l'analyse ou l'algèbre.

1.1. Définition de la valeur absolue. Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est définie comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En termes simples, la valeur absolue de x est toujours positive ou nulle, quelle que soit la valeur de x . Elle représente la distance entre x et l'origine 0 sur la droite réelle.

Quelques exemples :

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |0| = 0.$$

1.2. Propriétés de la valeur absolue. La valeur absolue possède plusieurs propriétés importantes :

- **Positivité** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- **Multiplicativité** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- **Additivité (inégalité triangulaire)** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ces propriétés sont utiles dans la résolution d'inégalités et dans l'étude des distances en analyse.

1.3. Inégalités liées à la valeur absolue. La valeur absolue est souvent utilisée dans les inégalités. Voici quelques exemples courants :

1.3.1. *Inégalité* $|x| \leq a$. Soit $a \geq 0$ un réel. L'inégalité $|x| \leq a$ signifie que la distance entre x et 0 est inférieure ou égale à a . Cela se traduit par :

$$-a \leq x \leq a.$$

Ainsi, résoudre l'inégalité $|x| \leq a$ revient à résoudre l'inégalité double $-a \leq x \leq a$.

Exemple : Résolvons l'inégalité $|x| \leq 3$:

$$-3 \leq x \leq 3.$$

La solution est donc $x \in [-3, 3]$.

1.3.2. *Inégalité* $|x| \geq a$. Soit $a \geq 0$. L'inégalité $|x| \geq a$ signifie que la distance entre x et 0 est au moins a . Cela se traduit par :

$$x \leq -a \quad \text{ou} \quad x \geq a.$$

En d'autres termes, x est soit inférieur ou égal à $-a$, soit supérieur ou égal à a .

Exemple : Résolvons l'inégalité $|x| \geq 2$:

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$$

La solution est donc $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

1.3.3. *Inégalité triangulaire*. L'inégalité triangulaire, déjà mentionnée, est une des propriétés fondamentales de la valeur absolue :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Cette inégalité exprime le fait que la distance totale parcourue en passant par deux points est toujours supérieure ou égale à la distance directe entre ces deux points.

Exemple : Pour $x = 3$ et $y = -5$, nous avons :

$$|x + y| = |3 - 5| = |-2| = 2,$$

tandis que $|x| + |y| = |3| + |-5| = 3 + 5 = 8$. Donc, $|x + y| = 2 \leq 8$.

1.4. Conclusion. La valeur absolue est une fonction très utile pour mesurer des distances et pour résoudre des inégalités. Sa compréhension et son utilisation sont essentielles dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment en analyse et en algèbre.

Exercice 2.1(3)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2}$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition. Il est important de s'assurer que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

$-\frac{1}{x}$ est défini si $x \neq 0$. $-\frac{2}{x+2}$ est défini si $x+2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

Étape 2 : Résoudre l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2}.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons multiplier les deux côtés par $x(x+2)$ afin de se débarrasser des fractions :

$$x(x+2) \cdot \frac{1}{x} = x(x+2) \cdot \frac{2}{x+2}.$$

Cela simplifie à :

$$x+2 = 2x.$$

Étape 3 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$x+2 = 2x.$$

Soustrayons x des deux côtés pour isoler x :

$$2 = x.$$

Ainsi, la solution de l'équation est $x = 2$.

Étape 4 : Vérification. Il est toujours important de vérifier que la solution obtenue ne viole pas les restrictions du domaine de définition. Nous avons trouvé $x = 2$, et cette valeur est dans le domaine de définition puisque $x \neq 0$ et $x \neq -2$.

Exercice 2.1(5)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition de l'expression. Il faut s'assurer que les dénominateurs ne s'annulent pas, car la division par zéro est interdite.

$-\frac{2}{x^2-4}$ est défini si $x^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x^2 \neq 4$. Cela donne $x \neq 2$ et $x \neq -2$. $-\frac{1}{x-2}$ est défini si $x - 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 2 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

Étape 2 : Simplifier l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}.$$

Nous reconnaissons que $x^2 - 4$ est une différence de carrés, ce qui peut être factorisé ainsi :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{x - 2}.$$

Étape 3 : Éliminer les dénominateurs. Nous pouvons maintenant multiplier les deux côtés de l'équation par $(x - 2)$, à condition que $x \neq 2$ (ce que nous avons déjà exclu du domaine de définition). Cela nous donne :

$$\frac{2}{x + 2} = 1.$$

Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$\frac{2}{x + 2} = 1.$$

Multipliant les deux côtés par $x + 2$, on obtient :

$$2 = x + 2.$$

En soustrayant 2 des deux côtés :

$$x = 0.$$

Étape 5 : Vérification. Nous avons trouvé $x = 0$, et cette valeur est bien dans le domaine de définition, car $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

Étape 6 : Conclusion. La solution de l'équation est :

$$x = 0.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.

Exercice 2.1(8)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, il est essentiel de déterminer le domaine de définition. Pour cela, il faut que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{x+3}{x-3}$ est défini si $x-3 \neq 0$, donc $x \neq 3$. - $\frac{x+3}{x^2-9}$ est défini si $x^2-9 \neq 0$, ce qui équivaut à $(x-3)(x+3) \neq 0$, donc $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 3 \quad \text{et} \quad x \neq -3.$$

Étape 2 : Simplifier l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

Nous reconnaissons que x^2-9 est une différence de carrés, donc nous pouvons factoriser :

$$x^2-9 = (x-3)(x+3).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}.$$

Étape 3 : Éliminer les dénominateurs. Nous remarquons que $x+3$ apparaît dans les deux membres de l'équation. À condition que $x+3 \neq 0$ (c'est-à-dire $x \neq -3$, déjà exclu du domaine de définition), nous pouvons diviser les deux côtés de l'équation par $x+3$, ce qui simplifie l'équation à :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation plus simple :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

Nous pouvons multiplier les deux côtés de l'équation par $x-3$, à condition que $x \neq 3$ (ce qui est déjà exclu), ce qui donne :

$$1 = \frac{1}{x+3}.$$

Ensuite, nous résolvons cette équation en multipliant par $x+3$:

$$x+3 = 1.$$

En soustrayant 3 des deux côtés, nous obtenons :

$$x = -2.$$

Étape 5 : Vérification. La solution $x = -2$ appartient bien au domaine de définition, car $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Étape 6 : Conclusion. La solution de l'équation est :

$$x = -2.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$.

Exercice 2.1(10)

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'inéquation, il est important de déterminer le domaine de définition, c'est-à-dire les valeurs de x qui rendent l'expression définie. L'expression est une fraction et la division par zéro est interdite, donc nous devons nous assurer que le dénominateur ne soit pas nul.

Le dénominateur $2x-1$ ne doit pas être égal à zéro :

$$2x-1 \neq 0.$$

Résolvons cette équation :

$$2x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Étape 2 : Étudier le signe du numérateur et du dénominateur. L'inéquation à résoudre est :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

Pour résoudre cette inéquation, nous devons étudier le signe du numérateur $3-x$ et du dénominateur $2x-1$. Nous chercherons les intervalles où le produit de ces deux expressions est positif ou nul.

1. **Signe du numérateur $3-x$ ** :

$$3-x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3.$$

Donc, le numérateur est positif ou nul pour $x \leq 3$, et négatif pour $x > 3$.

2. **Signe du dénominateur $2x-1$ ** :

$$2x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Le dénominateur est positif pour $x > \frac{1}{2}$ et négatif pour $x < \frac{1}{2}$.

Étape 3 : Résoudre l'inéquation. Nous devons maintenant combiner les informations sur les signes du numérateur et du dénominateur pour trouver les intervalles où la fraction est positive ou nulle. Pour ce faire, nous construisons un tableau de signes.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$3-x$	+	+	0	-
$2x-1$	-	0	+	+
$\frac{3-x}{2x-1}$	-	non défini	0	-

D'après ce tableau de signes, nous pouvons observer que : - L'expression $\frac{3-x}{2x-1}$ est négative sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$, - L'expression n'est pas définie pour $x = \frac{1}{2}$, - L'expression est nulle pour $x = 3$, - L'expression est négative sur $]3, +\infty[$.

Nous cherchons les valeurs de x pour lesquelles la fraction est positive ou nulle, donc la solution est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

Étape 4 : Conclusion. La solution de l'inéquation est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

Le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, mais la solution finale exclut déjà ce point où la fraction est non définie.

Exercice 2.1(11)

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine dans lequel x se trouve :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Pour résoudre cette inéquation, nous devons d'abord nous assurer que les expressions dans le dénominateur ne sont pas égales à zéro, car la division par zéro n'est pas définie.

Le dénominateur de l'inéquation est $(3+x)(3-x)$, qui s'annule lorsque :

$$3+x=0 \quad \text{ou} \quad 3-x=0.$$

Cela donne $x = -3$ et $x = 3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

Étape 2 : Étudier le signe de chaque facteur. Nous devons maintenant examiner le signe de chaque facteur du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

Les trois facteurs à considérer sont : $-x-1$, $-3+x$, $-3-x$.

Nous devons déterminer le signe de chaque facteur en fonction des valeurs de x . Pour cela, identifions les points critiques où chaque facteur s'annule : $-x-1=0$ lorsque $x=1$, $-3+x=0$ lorsque $x=-3$, $-3-x=0$ lorsque $x=3$.

Ces points divisent la droite réelle en différents intervalles. Nous allons maintenant construire un tableau de signes pour ces intervalles.

Étape 3 : Tableau de signes. Voici les intervalles et le tableau de signes correspondant :

x	$] -\infty, -3[$	$] -3, 1[$	1	$] 1, 3[$	$] 3, +\infty[$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$3+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Étape 4 : Résoudre l'inéquation. Nous cherchons les valeurs de x pour lesquelles l'expression est inférieure ou égale à zéro, c'est-à-dire :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

D'après le tableau de signes, l'expression est négative ou nulle sur les intervalles $] -3, 1]$ et $]3, +\infty[$.

Cependant, nous devons exclure les points où le dénominateur s'annule, c'est-à-dire $x = -3$ et $x = 3$. Par conséquent, la solution de l'inéquation est :

$$x \in] -3, 1] \cup]3, +\infty[.$$

Étape 5 : Conclusion. La solution de l'inéquation est donc :

$$x \in] -3, 1] \cup]3, +\infty[.$$

Le domaine de définition initial excluait $x = -3$ et $x = 3$, ce qui est bien respecté dans la solution finale.

Exercice 2.2(1)

On cherche à résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations d'inconnue x suivantes :

$$\frac{1}{x+2} = y,$$

où y est un paramètre réel. Pour chacune de ces équations, nous déterminerons l'ensemble des réels y pour lesquels l'équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$\frac{1}{x+2} = y.$$

Étape 1 : Résolution de l'équation. Nous cherchons à isoler x . Pour ce faire, nous réécrivons l'équation de la manière suivante :

$$\frac{1}{x+2} = y.$$

Nous multiplions ensuite les deux côtés de l'équation par $x+2$ (en supposant que $x \neq -2$, car cela rendrait le dénominateur nul) :

$$1 = y(x+2).$$

En développant le côté droit :

$$1 = yx + 2y.$$

Nous isolons ensuite x :

$$1 - 2y = yx.$$

Enfin, nous divisons par y (en supposant que $y \neq 0$) :

$$x = \frac{1 - 2y}{y}.$$

Ainsi, la solution en x en fonction de y est :

$$x = \frac{1 - 2y}{y}, \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Étape 2 : Recherche des conditions sur y . Nous devons maintenant examiner pour quels réels y l'équation admet une solution en x . Deux cas doivent être exclus :

- Lorsque $y = 0$, l'équation devient $\frac{1}{x+2} = 0$, ce qui est impossible car il n'existe aucun x tel que $\frac{1}{x+2} = 0$. Donc, $y = 0$ est exclu.
- $x = -2$ rendrait le dénominateur nul dans l'expression originale $\frac{1}{x+2}$. Cependant, si $x = -2$, alors $\frac{1}{x+2}$ est indéfini, donc cette valeur de x est également exclue.

En résumé, l'équation admet une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Conclusion

L'ensemble des solutions x de l'équation $\frac{1}{x+2} = y$ est donné par :

$$x = \frac{1 - 2y}{y}, \quad \text{pour } y \neq 0.$$

L'équation admet donc une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 2.2(2)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des réels l'équation suivante en l'inconnue x :

$$-x^2 + 2x = y,$$

où y est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels y pour lesquels cette équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$-x^2 + 2x = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons d'abord la réécrire sous une forme standard d'équation quadratique.

Étape 1 : Mise sous forme standard. Nous réarrangeons l'équation pour obtenir une forme quadratique :

$$-x^2 + 2x - y = 0.$$

Multiplions ensuite toute l'équation par -1 pour simplifier le terme en x^2 :

$$x^2 - 2x + y = 0.$$

Nous avons maintenant une équation quadratique de la forme :

$$x^2 - 2x + y = 0,$$

où y est un paramètre.

Étape 2 : Utilisation du discriminant. Nous allons maintenant utiliser la méthode du discriminant pour résoudre cette équation quadratique. Le discriminant Δ est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

où l'équation quadratique est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Ici, nous avons $a = 1$, $b = -2$ et $c = y$. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times y = 4 - 4y.$$

Étape 3 : Analyse des solutions en fonction de y . Nous devons maintenant analyser les solutions en fonction de la valeur de $\Delta = 4 - 4y$.

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $4 - 4y > 0$ ou encore $y < 1$, l'équation aura deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $4 - 4y = 0$ ou $y = 1$, l'équation aura une unique solution réelle.
- Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire $4 - 4y < 0$ ou $y > 1$, l'équation n'aura aucune solution réelle.

Étape 4 : Résolution de l'équation. Lorsque $\Delta \geq 0$, les solutions de l'équation quadratique sont données par la formule :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Substituons les valeurs de b , a , et Δ :

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2}.$$

Simplifions cette expression :

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont :

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 - y} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 - \sqrt{1 - y}.$$

Ces solutions existent uniquement si $y \leq 1$, car $\sqrt{1-y}$ est défini seulement lorsque $1-y \geq 0$, c'est-à-dire $y \leq 1$.

Étape 5 : Conclusion. L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation $-x^2 + 2x = y$ admet une solution est donc $y \in (-\infty, 1]$.

Les solutions en x sont données par :

$$x = 1 \pm \sqrt{1-y}, \quad \text{pour } y \leq 1.$$

Exercice 2.2(3)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation suivante en l'inconnue x :

$$\frac{x-1}{x+1} = y,$$

où y est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels y pour lesquels cette équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$\frac{x-1}{x+1} = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons suivre les étapes suivantes.

Étape 1 : Résolution de l'équation. Nous cherchons à isoler x dans l'équation. Pour ce faire, nous multiplions les deux côtés de l'équation par $x+1$ (en supposant que $x \neq -1$, car cela rendrait le dénominateur nul) :

$$x-1 = y(x+1).$$

Nous développons ensuite le côté droit :

$$x-1 = yx+y.$$

Maintenant, nous isolons x dans cette équation. En regroupant les termes contenant x du même côté :

$$x-yx = y+1.$$

Nous pouvons factoriser x du côté gauche :

$$x(1-y) = y+1.$$

Enfin, nous résolvons pour x en divisant par $1-y$ (à condition que $y \neq 1$, car cela annulerait le dénominateur) :

$$x = \frac{y+1}{1-y}.$$

Ainsi, la solution pour x en fonction de y est :

$$x = \frac{y+1}{1-y}, \quad \text{pour } y \neq 1.$$

Étape 2 : Recherche des conditions sur y . Nous devons maintenant examiner les valeurs de y pour lesquelles l'équation admet une solution. Deux restrictions doivent être considérées :

- $x + 1 \neq 0$, ce qui signifie $x \neq -1$. Cependant, cette condition n'ajoute pas de restriction supplémentaire, car elle est implicitement respectée dans la résolution de l'équation.
- La fraction $\frac{y+1}{1-y}$ est définie pour $y \neq 1$, car lorsque $y = 1$, le dénominateur est nul.

En résumé, l'équation admet une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Conclusion

L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation $\frac{x-1}{x+1} = y$ admet une solution est :

$$y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Pour ces valeurs de y , la solution en x est donnée par :

$$x = \frac{y+1}{1-y}.$$

Exercice 2.2(4)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des réels l'équation suivante en l'inconnue x :

$$2 + \sqrt{x} = y,$$

où y est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels y pour lesquels cette équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$2 + \sqrt{x} = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons procéder étape par étape.

Étape 1 : Isoler la racine carrée. Nous isolons la racine carrée dans l'équation en soustrayant 2 des deux côtés :

$$\sqrt{x} = y - 2.$$

Étape 2 : Résolution de l'équation. Nous élevons ensuite les deux membres au carré pour éliminer la racine carrée, à condition que $y - 2 \geq 0$ (car la racine carrée n'est définie que pour des réels positifs) :

$$x = (y - 2)^2.$$

Ainsi, la solution en x est :

$$x = (y - 2)^2.$$

Étape 3 : Conditions sur y . Pour que l'équation $2 + \sqrt{x} = y$ ait une solution, il est nécessaire que la racine carrée soit définie. Cela impose que $y - 2 \geq 0$, c'est-à-dire :

$$y \geq 2.$$

En effet, si $y < 2$, le membre droit $y - 2$ serait négatif, ce qui est impossible puisque \sqrt{x} est toujours un nombre non négatif pour $x \geq 0$.

Étape 4 : Conclusion. L'équation $2 + \sqrt{x} = y$ admet une solution en x pour $y \geq 2$. L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation a une solution est donc $y \in [2, +\infty[$.

Pour ces valeurs de y , la solution en x est donnée par :

$$x = (y - 2)^2.$$

Conclusion

L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation $2 + \sqrt{x} = y$ admet une solution est :

$$y \in [2, +\infty[.$$

Pour chaque $y \geq 2$, la solution pour x est :

$$x = (y - 2)^2.$$

Exercice 2.3(1.a)

Nous devons encadrer l'expression suivante :

$$\frac{1}{3x+1}x + 2,$$

où $x \in [1, 3]$, c'est-à-dire déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour cette expression lorsque x appartient à l'intervalle $[1, 3]$.

Solution

Nous avons l'expression :

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}x + 2,$$

et nous devons étudier $f(x)$ pour $x \in [1, 3]$.

Étape 1 : Étudier l'expression $\frac{x}{3x+1}$. Commençons par encadrer le terme $\frac{x}{3x+1}$ pour $x \in [1, 3]$.

- Lorsque $x = 1$, nous avons :

$$\frac{1}{3 \times 1 + 1} = \frac{1}{4}.$$

- Lorsque $x = 3$, nous avons :

$$\frac{3}{3 \times 3 + 1} = \frac{3}{10}.$$

Nous devons dériver l'expression suivante :

$$f(x) = \frac{x}{3x+1}$$

par rapport à x .

Solution

Pour dériver une fonction de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$, nous utilisons la **règle du quotient**. Cette règle s'énonce comme suit :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Ici, nous avons : - $u(x) = x$ et $v(x) = 3x + 1$.

Étape 1 : Calcul des dérivées de $u(x)$ et $v(x)$. - La dérivée de $u(x) = x$ est :

$$u'(x) = 1.$$

- La dérivée de $v(x) = 3x + 1$ est :

$$v'(x) = 3.$$

Étape 2 : Application de la règle du quotient. En appliquant la règle du quotient, nous obtenons :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{3x+1} \right) = \frac{(1)(3x+1) - (x)(3)}{(3x+1)^2}.$$

Étape 3 : Simplification de l'expression. Simplifions le numérateur :

$$(1)(3x+1) - (x)(3) = 3x+1 - 3x = 1.$$

Ainsi, la dérivée de $f(x)$ est donnée par :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{3x+1} \right) = \frac{1}{(3x+1)^2}.$$

Since $f'(x)$ is strictly positive for all $x \in [1, 3]$, thus the function $f(x)$ is strictly increasing. Ainsi, pour $x \in [1, 3]$, nous avons :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{x}{3x+1} \leq \frac{3}{10}.$$

Étape 2 : Encadrer $f(x)$. L'expression complète est donnée par :

$$f(x) = \frac{x}{3x+1} + 2.$$

En utilisant les encadrements obtenus précédemment pour $\frac{x}{3x+1}$, nous ajoutons 2 de chaque côté de l'inégalité :

$$2 + \frac{1}{4} \leq \frac{x}{3x+1} + 2 \leq 2 + \frac{3}{10}.$$

En calculant les bornes :

$$2 + \frac{1}{4} = 2 + 0,25 = 2,25,$$

et

$$2 + \frac{3}{10} = 2 + 0,3 = 2,3.$$

Ainsi, nous obtenons l'encadrement suivant pour $f(x)$:

$$2,25 \leq f(x) \leq 2,3, \quad \text{pour } x \in [1, 3].$$

Exercice 2.3(1.c)

Encadrer (c'est-à-dire majorer et minorer) l'expression suivante :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}},$$

pour $x \in [1, 3]$.

Solution

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$, lorsque x appartient à l'intervalle $[1, 3]$.

Étape 1 : Calcul des valeurs aux bornes de l'intervalle.
Commençons par évaluer l'expression aux extrémités de l'intervalle donné.

- Lorsque $x = 1$, nous avons :

$$f(1) = \frac{1^2}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577.$$

- Lorsque $x = 3$, nous avons :

$$f(3) = \frac{3^2}{\sqrt{3+2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4,024.$$

Étape 2 : Analyse du comportement de $f(x)$. La fonction $f(x)$ est composée d'un numérateur x^2 , qui est une fonction croissante pour $x \geq 0$, et d'un dénominateur $\sqrt{x+2}$, qui est également croissant. En conséquence, la fonction $f(x)$ est croissante sur l'intervalle $[1, 3]$.

Ainsi, pour $x \in [1, 3]$, la valeur minimale de $f(x)$ est obtenue en $x = 1$ et la valeur maximale en $x = 3$.

Étape 3 : Encadrement de $f(x)$. Nous avons donc l'encadrement suivant pour $f(x)$ sur l'intervalle $x \in [1, 3]$:

$$0,577 \leq f(x) \leq 4,024.$$

Conclusion

L'expression $\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$ pour $x \in [1, 3]$ est encadrée par :

$$0,577 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \leq 4,024.$$