1 EXOS chapitre nombres et suite réelles

Ce document contient les réponses/correction des exo 2.1, 2.2 , 2.3, 2.4, 2.9, 2.12 (2), 2.20 et 2.21

Exercice. (Réponses de l'exo 2.1)

(1) $2(x+4) = 3x - 5, \quad D = \mathbb{R},\ S = \{13\}.$

(2) $2x^2 + 3x + 4 \geq 0, \quad D = \mathbb{R},\ S = \mathbb{R}.$

(3) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x+2}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\},\ S = \{2\}.$

(4) $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-3}{x-1}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1, 2\},\ S = \{7/5\}.$

(5) $\dfrac{2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\},\ S = \{0\}.$

(6) $\dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{x+2}{2x-1}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1/2, 1\},\ S = \{4-\sqrt{11}, 4+\sqrt{11}\}.$

(7) $\sqrt{2-x} = x \quad D =]-\infty, 2],\ S = \{1\}.$

(8) $\dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{x+3}{x^2-9}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\},\ S = \{-2\}.$

(9) $\sqrt{5-x^2} - x = 1, \quad D = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}],\ S = \{1\}.$

(10) $\dfrac{3-x}{2x-1} \geq 0, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1/2\},\ S =]1/2, 3].$

(11) $\dfrac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\},\ S =]-3, 1] \cup]3, +\infty[.$

(12) $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x-1}{x+1}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\},\ S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[.$

Exercice. (Réponses de l'exo 2.2)

(1) L'équation $\dfrac{1}{x+2} = y$ pour $x \neq -2$ admet une solution si et seulement si $y \neq 0$, cette

dernière est donnée par $x = \frac{1}{y} - 2$.

(2) L'équation $-x^2 + 2x = y$ pour $x \in \mathbb{R}$ admet des solutions si et seulement si $y \leq 1$, ces dernières sont données par $x_1 = 1 - \sqrt{1-y}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{1-y}$.

(3) L'équation $\frac{x-1}{x+1} = y$ pour $x \neq -1$ admet une solution si et seulement si $y \neq 1$, cette dernière est donnée par $x = \frac{1+y}{1-y}$.

(4) L'équation $2 + \sqrt{x} = y$ pour $x \geq 0$ admet une solution si et seulement si $y \geq 2$, cette dernière est donnée par $x = (y-2)^2$.

(5) L'équation $\sqrt{1+x} = y$ pour $x \geq -1$ admet une solution si et seulement si $y \geq 0$, cette dernière est donnée par $x = y^2 - 1$.

(6) L'équation $\sqrt{1+x^2} - x = y$ pour $x \in \mathbb{R}$ admet une solution donnée par $x_1 = (1-y^2)/(2y)$ pour $y \neq 0$ si et seulement si $x_1 + y \geq 0$, c'est à dire $y \in]0, +\infty[$. Dans le cas où $y = 0$, il n'y a pas de solutions car l'équation $\sqrt{1+x^2} = x$ implique l'équation $1 = 0$.

Exercice. (Consignes exo 2.3) essayez de refaire cet exo en justifiant les passage d'une inégalité à l'autre avec des arguments tel que :
"On applique la fonction décroissante f ce qui inverse le sens des inégalités."
"On applique la fonction croissante g ce qui préserve les inégalités."
"On multiplie par un nombre négatif ce qui inverse les inégalités (ce qui revient à dire qu'on multiplie par un nombre positif puis qu'on applique la fonction $x \mapsto -x$)."

Exercice. (Correction de l'exo 2.4)
La fonction $g : x \mapsto |x-1|$ satisfait

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1, \\ -x+1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

Résolvons l'équation $g(x) = 3$. La formule de g présentant deux cas en fonction x, il est judicieux de procéder en distinguant le cas $x \geq 1$ et le cas $x \leq 1$.
Si $x \geq 1$, l'équation équivaut à $x - 1 = 3$ ce qui signifie que $x = 4$.
Si $x \leq 1$ l'équation équivaut à $1 - x = 3$ ce qui signifie que $x = -2$.
L'ensemble des solution est donc $S = \{-2, 4\}$.

• Si on a l'habitude de résoudre des équations et inéquations avec valeur absolue, on peut utiliser l'équivalence pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction arbitraire et m un nombre arbitraire,

$$|h(x)| = m \text{ si et seulement si } h(x) = m \text{ ou } h(x) = -m. \tag{1.1}$$

de même pour traiter les autres questions on peut utiliser

$$|h(x)| \leq m \text{ si et seulement si } -m \leq h(x) \leq m \tag{1.2}$$

et aussi

$$|h(x)| \geq m \text{ si et seulement si } h(x) \leq -m \text{ ou } h(x) \geq m \tag{1.3}$$

La preuve n'est pas dûre et on peut se rappeler de ces équivalences (ou du moins ne pas les mélanger) en gardant en tête le graphe de la fonction valeur absolue.

On résout $|x-1| > 3$, cette inéquation équivaut à $x-1>3$ ou $x-1<-3$. L'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$.

On va résoudre l'inéquation $|x-1| > 3$, cette dernière équivaut à $-3 < x-1 < 3$. L'ensemble des solutions est donc $S =]-2, 4[$.

On résout enfin l'inéquation $|x-1| \leq 3$ c'est à dire $|x-1| < 3$ ou $|x-1| = 3$ l'ensemble des solutions est $S = \{-2, 4\} \cup]-2, 4[= [-2, 4]$.
(2) Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |1+x| + |x-1| - 3$, dressons le tableau de signe de $1+x$ et de $x-1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

Il y a donc trois possibilité pour $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{si } x \leq -1, \\ -1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

(3) On résout l'équation $|x+1| + |x-1| = 3$ pour $x \in \mathbb{R}$. Cette équation équivaut à $f(x) = 0$. En utilisant la formule de f on trouve $S = \{-3/2, 3/2\}$.
On résout maintenant l'équation $|x+1| + |x-1| = 1$ qui équivaut à $f(x) = -2$. Donc il n'y a pas de solution pour $x \in [-1, 1]$. Pour $x \leq -1$, l'équation équivaut à $-2x-3 = -2$ donc $x = -1/2$ ainsi il n'y a pas de solution dans $]-\infty, -1]$. Pour $x \geq 1$, l'équation équivaut à $2x-3 = -2$ donc $x = 1/2$ donc il n'y a pas de solution dans $[1, +\infty[$. En conclusion $S = \emptyset$.

Méthode astucieuse trouvée par un de vos camarades : pour l'équation $|x+1| + |x-1| = 1$ on peut remarquer que cette équation implique $x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 1$ donc $2x^2 = -1$. Il n'y a de fait pas de solutions.

On résout l'inéquation $|x+1| + |x-1| \leq 1$ qui revient à $f(x) \leq -2$.
Il n'y a pas de solutions pour $x \in [-1, 1]$.

Pour $x \leq -1$, l'équation revient à $x \geq -1/2$ donc il n'y a pas de solutions.
Pour $x \geq 1$, l'équation revient à $x \leq 1/2$ donc il n'y a pas de solution non plus. De fait $S = \emptyset$.

On résout l'inéquation $|x+1| + |x-1| \leq 3$ qui revient à $f(x) \leq 0$.
Tout $x \in [-1, 1]$ est solution.
Pour $x \leq -1$, l'équation revient à $x \leq -3/2$.
Pour $x \geq 1$, l'équation revient à $x \geq 3/2$.
Donc l'ensemble de solutions est $S =]-\infty, -3/2] \cup [-1, 1] \cup [3/2, +\infty[$.

(4) L'inégalité triangulaire pour a, b deux nombre réels s'écrit $|a - b| \leq |a| + |b|$ trouvez a et b pour montrer $2 \leq |x+1| + |x-1|$.

(5) notez que la fonction à deux variable $d : (a, b) \mapsto |a - b|$ est une distance. Par exemple l'équation $|x - 1| = 3$ décrit les points à distance 3 de 1. Intéressons nous à l'inéquation $|x+1|+|x-1| \leq 3$, le solutions sont les points tels que la distance à 1 et -1 est plus petite que 3.

Exercice. (Réponses de l'exo 2.9) L'ensemble $A_1 = [0, 5] \cap \mathbb{Q}$ est minoré par 0 qui est son minimum et majoré par 5 qui est son maximum. Dans ce cas la borne supérieure et inférieures coïcident avec respectivement le maximum et le minimum de A_1.

L'ensemble $A_2 =]0, 5[\cap \mathbb{Q}$ admet comme borne inférieure 0 (donc 0 est un minorant) et comme borne supérieure 5. La borne inférieure et la borne supérieure ne sont pas des éléments de A_2 donc A_2 n'a ni de plus grand ni de plus petit élément.

L'ensemble $A_3 = \{1+1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$ admet 2 comme borne inférieure et 1 comme borne supérieure. 2 appartient à A_3 car $1 + 1/n = 2$ lorsque $n = 1$. Par contre 1 n'est pas atteint car on peut montrer que $1 + 1/n > 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

L'ensemble $A_4 = \{(-1)^n + 1/n\}$ admet comme borne supérieure $3/2$ et comme borne inférieure -1. Pour le voir il faut séparer l'ensemble A_4 en $\{1 + 1/(2k), k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1 + 1/(2k+1), k \in \mathbb{N}\}$. La borne sup et la borne inf sont des éléments de A_4 pour $n = 2$ et $n = 1$ respectivement.

Exercice. (Exo 2.12 (2)) Dans la mesure du possible on calcule l'infimum et le suprémum des suites. Cela vous permet vérifier si votre résultat tient la route : Votre majorant doit être supérieur ou égal au sup et le minorant doit être inférieur ou égal au inf.
(a)

$$\text{on a } u_n = \begin{cases} 4/n, \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -2/n, \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

De fait pour n pair, $0 \leq u_n \leq 4/2$, car $x \mapsto 1/x$ est décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour n impair, on a $-2/1 \leq u_n \leq 0$, car $x \mapsto -1/x$ est croissant sur $]-\infty, 0[$.

Donc $-2 \leq u_n \leq 2$.
Ces minorants et majorants sont optimaux car atteints respectivement pour $n = 1$ et $n = 2$.

(b) On remarque que $cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut simplifier u_n de la sorte

$$u_n = 5(-1)^n + \frac{3(n+1) - 2}{n+1} = 5(-1)^n + 3 - \frac{2}{n+1}.$$

On peut montrer comme pour le (a) que $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = -3$. Cet infimum est atteint pour $n = 1$. Pour la borne sup, c'est plus délicat. On peut remarquer que $2/(n+1)$ apporte une contribution négative mais qui tend vers 0 alors que le terme $5(-1)^n$ vaut alternativement -5 et 5 peut importe à quel point n est grand. On conjecture donc que $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = 8$.

Proof. Déjà le nombre 8 est un majorant car $5(-1)^n + 3 - 2/(n+1) \leq 5 + 3$.
Il reste à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ le nombre $8 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de (u_n). Cela nous amène à montrer que l'inéquation $u_n > 8 - \varepsilon$ admet des solutions. On se place dans le cas ou $n = 2k$ est pair. L'inéquation se réécrit

$$8 - \frac{2}{n+1} > 8 - \varepsilon.$$

$$\iff \frac{2}{n+1} < \varepsilon,$$

$$\iff n + 1 > 2/\varepsilon.$$

Donc $8 - \varepsilon$ n'est pas un majorant, en effet $u_n > 8 - \varepsilon$ dès lors que $n > 2/\varepsilon - 1$. $\square$

(c) Pour cet exemple calculer les bornes sup et inf demande pas mal d'investissement (on peut étudier les variations de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2\sin(x))^2 - 1}{2 - \cos(2x)}.$$

Le sup et inf de la suite coïcident avec ceux de la fonction f car les valeurs prises par la suite sont denses dans l'ensemble $f(\mathbb{R})$. Ce dernier point est non trivial et la démo est difficile au niveau L1, voir une illustration sur cette vidéo ytb).

On a $1 \leq 2 - \cos(2n) \leq 3$ donc $1/3 \leq 1/(2 - \cos(2n)) \leq 1$.
On a aussi $-3 \leq 2(\sin(n))^2 - 1 \leq 1$ donc

$$-\frac{3}{2 - \cos(2n)} \leq u_n \leq \frac{1}{2 - \cos(2n)}.$$

On conclut avec les bornes calculées précédemment que

$$-3 \leq u_n \leq 1,$$

car $1/(2 - \cos(2n)) \leq 1$ et $-3/(2 - \cos(2n)) \geq -3$.

(d) On rappelle qu'une suite convergente est bornée. Écrite telle quelle il n'est pas clair que u_n converge. On peut se convaincre que u_n tend vers 0 avec un petit calcul :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on simplifie u_n de la sorte :

$$\begin{aligned}
& u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2}, \\
\iff \; & u_n = \frac{n+1-(n-1)}{n+1+2\sqrt{n+1}\sqrt{n-1}+n-1} = \frac{2}{2n+2\sqrt{n+1}\sqrt{n-1}}.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto 2x + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ est croissante sur $[1, +\infty[$ comme somme d'une fonction croissante et d'un produit de deux fonctions croissantes. Il vient que (u_n) est décroissante. Finalement comme (u_n) tend vers 0 on conclut $0 \leq u_n \leq u_1$ et $0 = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exercice. (Correction de l'exo 2.20)
Si (u_n) est une suite vérifiant, pour un certain réel $0 < k < 1$,

$$|u_{n+1}| \leq k|u_n|, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

alors (u_n) converge vers 0.

Proof. Montrons que (u_n) vérifie $|u_n| \leq k^n|u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
Pour $n = 0$ on a bien $|u_0| \leq k^0|u_0| = |u_0|$.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq k^n|u_0|$, nous devons montrer qu'alors $|u_{n+1}| \leq k^{n+1}|u_0|$. En utilisant l'hypothèse que j'ai faite sur ma suite, il vient $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Comme par hypothèse de récurrence, on a $|u_n| \leq k^n|u_0|$, on peut conclure que $|u_{n+1}| \leq k^{n+1}|u_0|$.
Par le principe de récurrence, on déduit que $|u_n| \leq k^n|u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Maintenant on peut appliquer le théorème des gendarmes car

$$-k^n|u_0| \leq u_n \leq k^n|u_0|,$$

et que les suite géométriques $k^n|u_0|$ et $-k^n|u_0|$ convergent vers 0 du fait de $0 < k < 1$. □

(2) si maintenant $u_{n+1} \geq k|u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $k > 1$ et $u_0 > 0$, un raisonement similaire à celui de la question précédente montre que

$$u_n \geq k^n u_0.$$

Par le théorème de comparaison, puisque $k^n u_0$ diverge vers $+\infty$, il vient que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice. (Correction de l'exo 2.21)
(1) Supposons que la suite (u_n) vérifie $u_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

avec $|l| < 1$. Montrons que (u_n) converge vers 0.
On souhaite utiliser la question (1) de l'exo 2.20.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon.$$

De cette inégalité, il vient que

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

<u>Cas 1</u> Si $l \geq 0$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = (1 - l)/2$) on a donc

$$|u_n|(l - \varepsilon) < \frac{u_{n+1}|u_n|}{u_n} < (l + \varepsilon)|u_n|,$$

$$\implies |u_n|(-l - \varepsilon) < \frac{u_{n+1}|u_n|}{u_n} < |u_n|(l + \varepsilon).$$

Notons $k = l + \varepsilon$. Comme $|u_n|/u_n = 1$ ou -1, on peut conclure dans les deux cas que

$$-k|u_n| < u_{n+1} < k|u_n|,$$

ce qui conclut en vertu de 2.20 (1).
Cas 2 Si $l \leq 0$ vous pouvez vérifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > -1$ et essayer d'aboutir à $-k|u_n| < u_{n+1} < k|u_n|$ avec $k = \varepsilon - l$.

(2) Si $|l| > 1$ on peut montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $|l| = 1$ on ne peut rien dire. La suite (u_n) peut diverger vers $\pm\infty$ (par exemple si $u_n = \pm n$), elle peut converger (par exemple la suite stationnaire $u_n = 4$) ou bien ne pas converger (par exemple la suite $u_n = (-1)^n$).

(3) (i) Si $x = 0$ la suite est stationnaire égale à 0. Sinon, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)x}{n}.$$

Ce rapport converge vers x lorsque $n \to +\infty$. Donc (u_n) tend vers 0 lorsque $|x| < 1$. Pour $|x| > 1$ la suite diverge vers $+\infty$ si $x > 1$ et vers $-\infty$ si $x < -1$. Le critère de la question précédente ne s'applique pas si $|x| = 1$ mais on peut traiter ce cas à la main pour voir que (u_n) diverge vers $-\infty$ si $x = -1$ ou vers $+\infty$ si $x = 1$.

(ii) si $x = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car la suite est stationnaire. Si $x \neq 0$, on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 x}{(n+1)^2}.$$

On raisonne comme précedemment pour obtenir que u_n converge vers 0 lorsque $|x| \leq 1$ et diverge vers $+\infty$ lorsque $x \geq 1$ ou vers $-\infty$ lorsque $x \leq -1$.

(iii) Si $x = 0$ alors la suite est stationnaire et tend vers 0. Si $x \neq 0$, on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}.$$

Comme ce rapport converge vers 0 quel que soit $x \neq 0$, on déduit que (u_n) converge vers 0.