Introduction à la logique moderne et au calcul propositionel

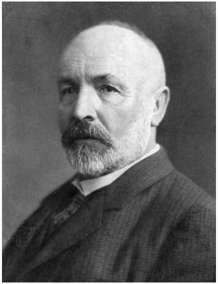
Erwan Le Quiniou

TD Maths-Info

Une histoire récente

En maths on démontre des propositions depuis plus de 4000 ans...
Paradoxalement, l'intérêt pour la logique est assez tardif.
L'essor de cette thématique commence au 19ème siècle !

Quelques logiciens célèbres



Georg Cantor
1845-1918
(Destin tragique)

Giuseppe Peano
1858-1932

David Hilbert
1862-1943

Kurt Gödel
1862-1943
(Destin tragique)

Quelques détracteurs non moins célèbres

Leopold Kronecker
1823-1891

Henri Poincaré
1854-1912

Un sarcasme de Henri : "Nous voyons d'abord M. Burali-Forti définir le nombre 1 de la manière suivante : [...] définition éminemment propre à donner une idée du nombre 1 aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler. J'entends trop mal le Péanien pour oser risquer une critique, mais je crains bien que cette définition ne contienne une pétition de principe, attendu que j'aperçois 1 en chiffre dans le premier membre et Un en toutes lettres dans le second."

Nous ne nous risquerons pas à définir les nombres entiers dans les système d'axiomes modernes aujourd'hui...

Qu'est ce que le calcul propositionnel ?

Déjà qu'est ce qu'une *proposition* ?

• Une *proposition* est une phrase qui porte sur des objets (mathématiques ou non) et qui est soit vraie soit fausse.

Exemple : Avec les nombres entier, on peut regarder les propositions :

P : "2 est pair." qui est vraie.
Q : "2 n'est pas pair." qui est fausse.

Dans cet exemple on a pu observer une première opération logique, la négation de la proposition P que l'on note "non P" ou "$\neg P$."

Tableaux de vérité

Le calcul propositionnel, c'est trouver les tableaux de vérités pour les opérations de la logique, comme on écrirait une table d'addition ou de multiplication.

Exemple : Tableau de vérité pour la négation $\neg$

P	✓Vrai	✗Faux
$\neg P$	✗	✓

Deuxième exemple, le "ou".

En maths, le "ou" est inclusif.

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
P ou Q	✓	✓	✓	✗

Exemple : Soit n un entier.

$P(n)$: "n est pair."

$Q(n)$: "n est multiple de 3."

En fonction de $n \in \mathbb{N}$, on rencontre toutes les valeurs de vérité possible pour $P(n)$ et $Q(n)$ comme dans le tableau.

Dans la vie de tous les jours, le "ou" est plutôt exclusif : c'est l'un ou l'autre mais pas les deux.

$\rightsquigarrow$ Ne répondez jamais "les deux svp" si on vous demande "sur place ou à emporter ?".

Exercice (pas de piège)

Remplissez les tableaux de vérités suivants :

P	✓	✗
$\neg P$	✗	✓
$\neg(\neg P)$		

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
P et Q				

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
P ou Q				
$\neg(P$ ou $Q)$				

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$\neg P$ et $\neg Q$				

• Certaines propositions ont les même valeurs de vérités sur leur ligne. On appelle cela une tautologie et l'on écrit que les deux propositions sont équivalentes avec le symbole " $\iff$ ".

Exemples : $\neg(\neg P) \iff P$ (*Principe du tiers-exclus/de non-contradiction*).

$\neg(P \text{ ou } Q) \iff \neg P \text{ et } \neg Q$,
"Dire que P ou Q est faux revient à dire que à la fois P et Q sont faux."

L'opération logique au cœur des maths

En maths, on cherche le plus souvent à démontrer des propositions de la forme

$$P \implies Q,$$

(sous-entendu démontrer que ces prop sont vraies).

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$P \implies Q$	✓	✗	✓	✓

En pratique, les deux dernières colonnes ne sont jamais utiles pour écrire des preuves.
Le fait que P soit tout le temps fausse donne lieu a des énoncés absurdes.

Démontrer une implication

Soient P et Q deux propositions.
Pour démontrer la phrase type "$P \implies Q$", on utilise le corps de démonstration suivant :

Supposons P
...
...(suite de déductions, calculs, application de théorèmes)
...
Alors Q

Exemple : Pour $x \in \mathbb{R}$, P(x): "x est un réel positif."

Q(x): "$-x$ est un réel négatif."

Ici, on a "$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \implies Q(x)$." est vraie...
mais aussi "$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \implies P(x)$.".

• Avec le principe de double implication, on a "$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \iff Q(x)$."

Raisonnement par l'absurde

Quand on arrive pas à démontrer une proposition P directement, il faut essayer de montrer que sa négation $\neg P$ est absurde/fausse.
• On obtient alors que P est vraie car $P \iff \neg(\neg P)$.

Exemple important

Pour démontrer que "$\forall x \in A, P(x)$" est vraie par l'absurde,
il faut montrer que "$\exists x \in A, \neg P(x)$" est fausse.

$\rightsquigarrow$ Pour vous entraîner avec les quantificateurs vous pouvez nier les propositions suivantes :
"Il existe un chien au pellage rouge vif."
"Tous les chiens aiment les os."

Exercice 2 sur les tableaux de vérités

1. Remplissez ça (n'hésitez pas à rajouter des lignes intermédiaires aux tableaux)

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$P \implies Q$	✓	✗	✓	✓
P et $\neg Q$				

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$\neg(P$ et $Q)$				
$\neg P$ ou $\neg Q$				

2. Niez la proposition P et démontrez $\neg P$ avec :

• P: "$\forall n \in \mathbb{N}$, 'n est multiple de deux.' ".

• P: "$\exists n \in \mathbb{N}$, '$n = 6k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et n est multiple de deux.' ".

Récapitulatif des tautologies utiles

Quantificateurs :

$$\neg(\text{"}\forall x \in A, P(x)\text{"}) \iff \text{"}\exists x \in A, \neg P(x)\text{"}$$

$$\neg(\text{"}\exists x \in A, P(x)\text{"}) \iff \text{"}\forall x \in A, \neg P(x)\text{"}$$

Principe du tier exclu/de non-contradiction

P	✓	✓
$\neg(\neg P)$	✓	✗

Principe de double implication

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$P \iff Q$	✓	✗	✗	✓
$P \implies Q$ et $Q \implies P$	✓	✗	✗	✓

Récap 2

Raisonnement par l'absurde

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$P \implies Q$	✓	✗	✓	✓
$\neg(P$ et $\neg Q)$	✓	✗	✓	✓

Règles de calcul pour les "non ou" et "non et"

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$\neg(P$ ou $Q)$	✗	✗	✗	✓
$\neg P$ et $\neg Q$	✗	✗	✗	✓

P	✓	✓	✗	✗
Q	✓	✗	✓	✗
$\neg(P$ et $Q)$	✗	✓	✓	✓
$\neg P$ ou $\neg Q$	✗	✓	✓	✓

Merci pour votre attention.
Le diapo sera sur le site bientôt :

Ou cherchez "Erwan Le Quiniou Lille" sur internet.