

L1-MI-S1

TD Chapitre 2

Contents

Chapitre 2: Nombres et Suites Réels	1
1. Valeur absolue	1
2. Existence des solutions d'une équation quadratique réelle	2
Le discriminant	3
Cas 1 : $\Delta > 0$	3
Cas 2 : $\Delta = 0$	3
Cas 3 : $\Delta < 0$	3
Conclusion	3
Exercice 2.1(2)	4
Solution	4
Conclusion	4
Exercice 2.1(3)	5
Solution	5
Exercice 2.1(5)	6
Solution	6
Exercice 2.1(8)	7
Solution	7
Exercice 2.1(10)	8
Solution	8
Exercice 2.1(11)	10
Solution	10
Exercice 2.2(1)	11
Solution	11
Conclusion	12
Exercice 2.2(2)	12
Solution	12
Exercice 2.2(3)	14
Solution	14
Conclusion	15
Exercice 2.2(4)	15
Solution	15
Conclusion	16
Exercice 2.3(1.a)	16
Solution	16
Exercice 2.3(1.b)	17
Exercice 2.3(1.c)	18
Solution	18

Exercice 2.3(2.a)	19
Solution	19
Exercice 2.3(2.b)	20
Solution	20
Conclusion	21
Exercice 2.3(2.c)	21
Solution	21
Conclusion	22
Résolution	22
Exercice (Extra)	23
Solution	23
Exercice 2.7	24
Solution	24
Exercice 2.8	25
Solution	25
Conclusion	27
Exercice 2.9	27
Solution	28
Exercice 2.10	29
Conclusion :	30
Fibonacci	31
3. Définition de la suite de Fibonacci	31
4. Propriétés de la suite de Fibonacci	31
5. Applications de la suite de Fibonacci	32
6. Conclusion	32
Exercice 2.12 (1)	32
Exercice 2.12(2)	34
Solution	35
Conclusion	36
Définition de la convergence d'une suite réelle	36
Remarque	37
Exercice 2.13	37
Solution	38
Exercice 2.15	40
Solution	40
Exercice 2.16	41
Solution	42
Exercice 2.20 (2)	42
Exercice 2.18	43
Solution	44
Conclusion	45
Extra	45
Exercice 2.19	46
Exercice 2.24.1	47
Solution	47

Inégalité de Bernoulli	48
Preuve	48
Exercice 2.24.4	49
Solution	49
Exercice 2.24.6	50
Étape 1 : Définition des coefficients binomiaux	50
Étape 2 : Relation entre $\binom{n}{2k}$ et $\binom{n}{2k+1}$	50
Étape 3 : Mise en place de l'inégalité	50
Étape 4 : Simplification de l'inégalité	51
Conclusion	51
7. Fonctions continues	51
Imaginons un graphe sans "saut"	51
Définition intuitive	51
Exemple de fonction continue	51
Exemple de fonction non continue	52
Pourquoi la continuité est-elle importante ?	52
Conclusion	52
Définition de la continuité	52
Limite sous une fonction continue	52
Exemple	53
Remarque	53
Conclusion	53
Expansion de $\ln(1 + x)$	53

Chapitre 2: Nombres et Suites Réels

1. Valeur absolue

La notion de **valeur absolue** est fondamentale en mathématiques, en particulier dans l'étude des inégalités. Elle permet de mesurer la distance d'un nombre réel à l'origine sur la droite réelle, et elle intervient dans de nombreux domaines, comme l'analyse ou l'algèbre.

1.1. Définition de la valeur absolue. Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est définie comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En termes simples, la valeur absolue de x est toujours positive ou nulle, quelle que soit la valeur de x . Elle représente la distance entre x et l'origine 0 sur la droite réelle.

Quelques exemples :

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |0| = 0.$$

1.2. Propriétés de la valeur absolue. La valeur absolue possède plusieurs propriétés importantes :

- **Positivité** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- **Multiplicativité** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- **Additivité (inégalité triangulaire)** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ces propriétés sont utiles dans la résolution d'inégalités et dans l'étude des distances en analyse.

1.3. Inégalités liées à la valeur absolue. La valeur absolue est souvent utilisée dans les inégalités. Voici quelques exemples courants :

2. EXISTENCE DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE RÉELLE²

1.3.1. *Inégalité* $|x| \leq a$. Soit $a \geq 0$ un réel. L'inégalité $|x| \leq a$ signifie que la distance entre x et 0 est inférieure ou égale à a . Cela se traduit par :

$$-a \leq x \leq a.$$

Ainsi, résoudre l'inégalité $|x| \leq a$ revient à résoudre l'inégalité double $-a \leq x \leq a$.

Exemple : Résolvons l'inégalité $|x| \leq 3$:

$$-3 \leq x \leq 3.$$

La solution est donc $x \in [-3, 3]$.

1.3.2. *Inégalité* $|x| \geq a$. Soit $a \geq 0$. L'inégalité $|x| \geq a$ signifie que la distance entre x et 0 est au moins a . Cela se traduit par :

$$x \leq -a \quad \text{ou} \quad x \geq a.$$

En d'autres termes, x est soit inférieur ou égal à $-a$, soit supérieur ou égal à a .

Exemple : Résolvons l'inégalité $|x| \geq 2$:

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$$

La solution est donc $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

1.3.3. *Inégalité triangulaire*. L'inégalité triangulaire, déjà mentionnée, est une des propriétés fondamentales de la valeur absolue :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Cette inégalité exprime le fait que la distance totale parcourue en passant par deux points est toujours supérieure ou égale à la distance directe entre ces deux points.

Exemple : Pour $x = 3$ et $y = -5$, nous avons :

$$|x + y| = |3 - 5| = |-2| = 2,$$

tandis que $|x| + |y| = |3| + |-5| = 3 + 5 = 8$. Donc, $|x + y| = 2 \leq 8$.

1.4. Conclusion. La valeur absolue est une fonction très utile pour mesurer des distances et pour résoudre des inégalités. Sa compréhension et son utilisation sont essentielles dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment en analyse et en algèbre.

2. Existence des solutions d'une équation quadratique réelle

Une équation quadratique est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a , b , et c sont des réels, avec $a \neq 0$. La résolution de cette équation passe par l'utilisation du discriminant, un outil qui permet de déterminer le nombre et la nature des solutions.

Le discriminant

Le discriminant, noté Δ , est défini par l'expression :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le discriminant permet d'étudier l'existence et la nature des solutions d'une équation quadratique. Trois cas principaux se présentent en fonction de la valeur de Δ .

Cas 1 : $\Delta > 0$

Si $\Delta > 0$, cela signifie que l'équation quadratique admet deux solutions réelles et distinctes. Ces solutions sont données par la formule suivante :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ainsi, lorsque le discriminant est strictement positif, l'équation a deux solutions distinctes.

Cas 2 : $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0$, cela signifie que l'équation quadratique admet une solution réelle double (on parle parfois de solution unique mais répétée). Cette solution est donnée par la formule :

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Dans ce cas, le sommet de la parabole représentative de l'équation quadratique touche l'axe des abscisses en un seul point.

Cas 3 : $\Delta < 0$

Si $\Delta < 0$, l'équation quadratique n'admet pas de solution réelle. En effet, $\sqrt{\Delta}$ n'existe pas dans \mathbb{R} car on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif dans l'ensemble des réels. Cela signifie que la parabole représentative de l'équation quadratique ne coupe pas l'axe des abscisses.

Conclusion

L'utilisation du discriminant est un outil fondamental pour déterminer l'existence et la nature des solutions d'une équation quadratique dans l'ensemble des réels :

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle double.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Ce critère est crucial pour analyser rapidement les solutions d'une équation quadratique.

Exercice 2.1(2)

Résoudre dans l'ensemble des réels l'inéquation suivante :

$$2x^2 + 3x + 4 \geq 0.$$

Solution

Pour résoudre cette inéquation, nous allons commencer par examiner l'équation associée :

$$2x^2 + 3x + 4 = 0.$$

Étape 1 : Calcul du discriminant. L'équation quadratique $2x^2 + 3x + 4 = 0$ est de la forme générale $ax^2 + bx + c = 0$, où $a = 2$, $b = 3$, et $c = 4$.

Le discriminant Δ est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

En substituant les valeurs de a , b et c , nous obtenons :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23.$$

Étape 2 : Interprétation du discriminant. Le discriminant est $\Delta = -23$, qui est un nombre négatif. Cela signifie que l'équation $2x^2 + 3x + 4 = 0$ n'a pas de solutions réelles. Par conséquent, la parabole représentative de la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

Étape 3 : Analyse du signe de l'expression quadratique. Puisque le coefficient $a = 2$ est strictement positif et que le discriminant est négatif, cela signifie que la parabole $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses. En d'autres termes, $f(x)$ est strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$2x^2 + 3x + 4 > 0.$$

Étape 4 : Conclusion. L'inéquation $2x^2 + 3x + 4 \geq 0$ est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels :

$$S = \mathbb{R}.$$

Conclusion

L'inéquation $2x^2 + 3x + 4 \geq 0$ n'a pas de solutions nulles, mais elle est toujours vraie pour tous les réels. Par conséquent, l'ensemble des solutions de cette inéquation est \mathbb{R} , c'est-à-dire tous les réels.

Exercice 2.1(3)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2}$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition. Il est important de s'assurer que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{1}{x}$ est défini si $x \neq 0$. - $\frac{2}{x+2}$ est défini si $x+2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

Étape 2 : Résoudre l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2}.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons multiplier les deux côtés par $x(x+2)$ afin de se débarrasser des fractions :

$$x(x+2) \cdot \frac{1}{x} = x(x+2) \cdot \frac{2}{x+2}.$$

Cela simplifie à :

$$x+2 = 2x.$$

Étape 3 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$x+2 = 2x.$$

Soustrayons x des deux côtés pour isoler x :

$$2 = x.$$

Ainsi, la solution de l'équation est $x = 2$.

Étape 4 : Vérification. Il est toujours important de vérifier que la solution obtenue ne viole pas les restrictions du domaine de définition. Nous avons trouvé $x = 2$, et cette valeur est dans le domaine de définition puisque $x \neq 0$ et $x \neq -2$.

Exercice 2.1(5)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition de l'expression. Il faut s'assurer que les dénominateurs ne s'annulent pas, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{2}{x^2-4}$ est défini si $x^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x^2 \neq 4$. Cela donne $x \neq 2$ et $x \neq -2$. - $\frac{1}{x-2}$ est défini si $x - 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 2 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

Étape 2 : Simplifier l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}.$$

Nous reconnaissons que $x^2 - 4$ est une différence de carrés, ce qui peut être factorisé ainsi :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{x - 2}.$$

Étape 3 : Éliminer les dénominateurs. Nous pouvons maintenant multiplier les deux côtés de l'équation par $(x - 2)$, à condition que $x \neq 2$ (ce que nous avons déjà exclu du domaine de définition). Cela nous donne :

$$\frac{2}{x + 2} = 1.$$

Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$\frac{2}{x + 2} = 1.$$

Multipliant les deux côtés par $x + 2$, on obtient :

$$2 = x + 2.$$

En soustrayant 2 des deux côtés :

$$x = 0.$$

Étape 5 : Vérification. Nous avons trouvé $x = 0$, et cette valeur est bien dans le domaine de définition, car $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

Étape 6 : Conclusion. La solution de l'équation est :

$$x = 0.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.

Exercice 2.1(8)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, il est essentiel de déterminer le domaine de définition. Pour cela, il faut que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{x+3}{x-3}$ est défini si $x-3 \neq 0$, donc $x \neq 3$. - $\frac{x+3}{x^2-9}$ est défini si $x^2-9 \neq 0$, ce qui équivaut à $(x-3)(x+3) \neq 0$, donc $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 3 \quad \text{et} \quad x \neq -3.$$

Étape 2 : Simplifier l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

Nous reconnaissons que x^2-9 est une différence de carrés, donc nous pouvons factoriser :

$$x^2-9 = (x-3)(x+3).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}.$$

Étape 3 : Éliminer les dénominateurs. Nous remarquons que $x+3$ apparaît dans les deux membres de l'équation. À condition que $x+3 \neq 0$ (c'est-à-dire $x \neq -3$, déjà exclu du domaine de définition), nous pouvons diviser les deux côtés de l'équation par $x+3$, ce qui simplifie l'équation à :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation plus simple :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

Nous pouvons multiplier les deux côtés de l'équation par $x-3$, à condition que $x \neq 3$ (ce qui est déjà exclu), ce qui donne :

$$1 = \frac{1}{x+3}.$$

Ensuite, nous résolvons cette équation en multipliant par $x+3$:

$$x+3 = 1.$$

En soustrayant 3 des deux côtés, nous obtenons :

$$x = -2.$$

Étape 5 : Vérification. La solution $x = -2$ appartient bien au domaine de définition, car $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Étape 6 : Conclusion. La solution de l'équation est :

$$x = -2.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$.

Exercice 2.1(10)

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'inéquation, il est important de déterminer le domaine de définition, c'est-à-dire les valeurs de x qui rendent l'expression définie. L'expression est une fraction et la division par zéro est interdite, donc nous devons nous assurer que le dénominateur ne soit pas nul.

Le dénominateur $2x-1$ ne doit pas être égal à zéro :

$$2x-1 \neq 0.$$

Résolvons cette équation :

$$2x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Étape 2 : Étudier le signe du numérateur et du dénominateur. L'inéquation à résoudre est :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

Pour résoudre cette inéquation, nous devons étudier le signe du numérateur $3-x$ et du dénominateur $2x-1$. Nous chercherons les intervalles où le produit de ces deux expressions est positif ou nul.

1. **Signe du numérateur $3-x$ ** :

$$3-x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3.$$

Donc, le numérateur est positif ou nul pour $x \leq 3$, et négatif pour $x > 3$.

2. **Signe du dénominateur $2x-1$ ** :

$$2x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Le dénominateur est positif pour $x > \frac{1}{2}$ et négatif pour $x < \frac{1}{2}$.

Étape 3 : Résoudre l'inéquation. Nous devons maintenant combiner les informations sur les signes du numérateur et du dénominateur pour trouver les intervalles où la fraction est positive ou nulle. Pour ce faire, nous construisons un tableau de signes.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$3-x$	+	+	0	-
$2x-1$	-	0	+	+
$\frac{3-x}{2x-1}$	-	non défini	0	-

D'après ce tableau de signes, nous pouvons observer que : - L'expression $\frac{3-x}{2x-1}$ est négative sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$, - L'expression n'est pas définie pour $x = \frac{1}{2}$, - L'expression est nulle pour $x = 3$, - L'expression est négative sur $]3, +\infty[$.

Nous cherchons les valeurs de x pour lesquelles la fraction est positive ou nulle, donc la solution est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

Étape 4 : Conclusion. La solution de l'inéquation est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

Le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, mais la solution finale exclut déjà ce point où la fraction est non définie.

Exercice 2.1(11)

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine dans lequel x se trouve :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Pour résoudre cette inéquation, nous devons d'abord nous assurer que les expressions dans le dénominateur ne sont pas égales à zéro, car la division par zéro n'est pas définie.

Le dénominateur de l'inéquation est $(3+x)(3-x)$, qui s'annule lorsque :

$$3+x=0 \quad \text{ou} \quad 3-x=0.$$

Cela donne $x = -3$ et $x = 3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

Étape 2 : Étudier le signe de chaque facteur. Nous devons maintenant examiner le signe de chaque facteur du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

Les trois facteurs à considérer sont : $-x-1$, $-3+x$, $-3-x$.

Nous devons déterminer le signe de chaque facteur en fonction des valeurs de x . Pour cela, identifions les points critiques où chaque facteur s'annule : $-x-1=0$ lorsque $x=1$, $-3+x=0$ lorsque $x=-3$, $-3-x=0$ lorsque $x=3$.

Ces points divisent la droite réelle en différents intervalles. Nous allons maintenant construire un tableau de signes pour ces intervalles.

Étape 3 : Tableau de signes. Voici les intervalles et le tableau de signes correspondant :

x	$] -\infty, -3[$	$] -3, 1[$	1	$] 1, 3[$	$] 3, +\infty[$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$3+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Étape 4 : Résoudre l'inéquation. Nous cherchons les valeurs de x pour lesquelles l'expression est inférieure ou égale à zéro, c'est-à-dire :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

D'après le tableau de signes, l'expression est négative ou nulle sur les intervalles $] -3, 1]$ et $]3, +\infty[$.

Cependant, nous devons exclure les points où le dénominateur s'annule, c'est-à-dire $x = -3$ et $x = 3$. Par conséquent, la solution de l'inéquation est :

$$x \in] -3, 1] \cup]3, +\infty[.$$

Étape 5 : Conclusion. La solution de l'inéquation est donc :

$$x \in] -3, 1] \cup]3, +\infty[.$$

Le domaine de définition initial excluait $x = -3$ et $x = 3$, ce qui est bien respecté dans la solution finale.

Exercice 2.2(1)

On cherche à résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations d'inconnue x suivantes :

$$\frac{1}{x+2} = y,$$

où y est un paramètre réel. Pour chacune de ces équations, nous déterminerons l'ensemble des réels y pour lesquels l'équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$\frac{1}{x+2} = y.$$

Étape 1 : Résolution de l'équation. Nous cherchons à isoler x . Pour ce faire, nous réécrivons l'équation de la manière suivante :

$$\frac{1}{x+2} = y.$$

Nous multiplions ensuite les deux côtés de l'équation par $x+2$ (en supposant que $x \neq -2$, car cela rendrait le dénominateur nul) :

$$1 = y(x+2).$$

En développant le côté droit :

$$1 = yx + 2y.$$

Nous isolons ensuite x :

$$1 - 2y = yx.$$

Enfin, nous divisons par y (en supposant que $y \neq 0$) :

$$x = \frac{1 - 2y}{y}.$$

Ainsi, la solution en x en fonction de y est :

$$x = \frac{1 - 2y}{y}, \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Étape 2 : Recherche des conditions sur y . Nous devons maintenant examiner pour quels réels y l'équation admet une solution en x . Deux cas doivent être exclus :

- Lorsque $y = 0$, l'équation devient $\frac{1}{x+2} = 0$, ce qui est impossible car il n'existe aucun x tel que $\frac{1}{x+2} = 0$. Donc, $y = 0$ est exclu.
- $x = -2$ rendrait le dénominateur nul dans l'expression originale $\frac{1}{x+2}$. Cependant, si $x = -2$, alors $\frac{1}{x+2}$ est indéfini, donc cette valeur de x est également exclue.

En résumé, l'équation admet une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Conclusion

L'ensemble des solutions x de l'équation $\frac{1}{x+2} = y$ est donné par :

$$x = \frac{1 - 2y}{y}, \quad \text{pour } y \neq 0.$$

L'équation admet donc une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 2.2(2)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des réels l'équation suivante en l'inconnue x :

$$-x^2 + 2x = y,$$

où y est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels y pour lesquels cette équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$-x^2 + 2x = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons d'abord la réécrire sous une forme standard d'équation quadratique.

Étape 1 : Mise sous forme standard. Nous réarrangeons l'équation pour obtenir une forme quadratique :

$$-x^2 + 2x - y = 0.$$

Multiplions ensuite toute l'équation par -1 pour simplifier le terme en x^2 :

$$x^2 - 2x + y = 0.$$

Nous avons maintenant une équation quadratique de la forme :

$$x^2 - 2x + y = 0,$$

où y est un paramètre.

Étape 2 : Utilisation du discriminant. Nous allons maintenant utiliser la méthode du discriminant pour résoudre cette équation quadratique. Le discriminant Δ est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

où l'équation quadratique est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Ici, nous avons $a = 1$, $b = -2$ et $c = y$. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times y = 4 - 4y.$$

Étape 3 : Analyse des solutions en fonction de y . Nous devons maintenant analyser les solutions en fonction de la valeur de $\Delta = 4 - 4y$.

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $4 - 4y > 0$ ou encore $y < 1$, l'équation aura deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $4 - 4y = 0$ ou $y = 1$, l'équation aura une unique solution réelle.
- Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire $4 - 4y < 0$ ou $y > 1$, l'équation n'aura aucune solution réelle.

Étape 4 : Résolution de l'équation. Lorsque $\Delta \geq 0$, les solutions de l'équation quadratique sont données par la formule :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Substituons les valeurs de b , a , et Δ :

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2}.$$

Simplifions cette expression :

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont :

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 - y} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 - \sqrt{1 - y}.$$

Ces solutions existent uniquement si $y \leq 1$, car $\sqrt{1-y}$ est défini seulement lorsque $1-y \geq 0$, c'est-à-dire $y \leq 1$.

Étape 5 : Conclusion. L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation $-x^2 + 2x = y$ admet une solution est donc $y \in (-\infty, 1]$.

Les solutions en x sont données par :

$$x = 1 \pm \sqrt{1-y}, \quad \text{pour } y \leq 1.$$

Exercice 2.2(3)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation suivante en l'inconnue x :

$$\frac{x-1}{x+1} = y,$$

où y est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels y pour lesquels cette équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$\frac{x-1}{x+1} = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons suivre les étapes suivantes.

Étape 1 : Résolution de l'équation. Nous cherchons à isoler x dans l'équation. Pour ce faire, nous multiplions les deux côtés de l'équation par $x+1$ (en supposant que $x \neq -1$, car cela rendrait le dénominateur nul) :

$$x-1 = y(x+1).$$

Nous développons ensuite le côté droit :

$$x-1 = yx+y.$$

Maintenant, nous isolons x dans cette équation. En regroupant les termes contenant x du même côté :

$$x-yx = y+1.$$

Nous pouvons factoriser x du côté gauche :

$$x(1-y) = y+1.$$

Enfin, nous résolvons pour x en divisant par $1-y$ (à condition que $y \neq 1$, car cela annulerait le dénominateur) :

$$x = \frac{y+1}{1-y}.$$

Ainsi, la solution pour x en fonction de y est :

$$x = \frac{y+1}{1-y}, \quad \text{pour } y \neq 1.$$

Étape 2 : Recherche des conditions sur y . Nous devons maintenant examiner les valeurs de y pour lesquelles l'équation admet une solution. Deux restrictions doivent être considérées :

- $x + 1 \neq 0$, ce qui signifie $x \neq -1$. Cependant, cette condition n'ajoute pas de restriction supplémentaire, car elle est implicitement respectée dans la résolution de l'équation.
- La fraction $\frac{y+1}{1-y}$ est définie pour $y \neq 1$, car lorsque $y = 1$, le dénominateur est nul.

En résumé, l'équation admet une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Conclusion

L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation $\frac{x-1}{x+1} = y$ admet une solution est :

$$y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Pour ces valeurs de y , la solution en x est donnée par :

$$x = \frac{y+1}{1-y}.$$

Exercice 2.2(4)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des réels l'équation suivante en l'inconnue x :

$$2 + \sqrt{x} = y,$$

où y est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels y pour lesquels cette équation admet une solution.

Solution

L'équation donnée est :

$$2 + \sqrt{x} = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons procéder étape par étape.

Étape 1 : Isoler la racine carrée. Nous isolons la racine carrée dans l'équation en soustrayant 2 des deux côtés :

$$\sqrt{x} = y - 2.$$

Étape 2 : Résolution de l'équation. Nous élevons ensuite les deux membres au carré pour éliminer la racine carrée, à condition que $y - 2 \geq 0$ (car la racine carrée n'est définie que pour des réels positifs) :

$$x = (y - 2)^2.$$

Ainsi, la solution en x est :

$$x = (y - 2)^2.$$

Étape 3 : Conditions sur y . Pour que l'équation $2 + \sqrt{x} = y$ ait une solution, il est nécessaire que la racine carrée soit définie. Cela impose que $y - 2 \geq 0$, c'est-à-dire :

$$y \geq 2.$$

En effet, si $y < 2$, le membre droit $y - 2$ serait négatif, ce qui est impossible puisque \sqrt{x} est toujours un nombre non négatif pour $x \geq 0$.

Étape 4 : Conclusion. L'équation $2 + \sqrt{x} = y$ admet une solution en x pour $y \geq 2$. L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation a une solution est donc $y \in [2, +\infty[$.

Pour ces valeurs de y , la solution en x est donnée par :

$$x = (y - 2)^2.$$

Conclusion

L'ensemble des réels y pour lesquels l'équation $2 + \sqrt{x} = y$ admet une solution est :

$$y \in [2, +\infty[.$$

Pour chaque $y \geq 2$, la solution pour x est :

$$x = (y - 2)^2.$$

Exercice 2.3(1.a)

Nous devons encadrer l'expression suivante :

$$\frac{1}{3x+1}x + 2,$$

où $x \in [1, 3]$, c'est-à-dire déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour cette expression lorsque x appartient à l'intervalle $[1, 3]$.

Solution

Nous avons l'expression :

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}x + 2,$$

et nous devons étudier $f(x)$ pour $x \in [1, 3]$.

Étape 1 : Étudier l'expression $\frac{x}{3x+1}$. Commençons par encadrer le terme $\frac{x}{3x+1}$ pour $x \in [1, 3]$.

- Lorsque $x = 1$, nous avons :

$$\frac{1}{3 \times 1 + 1} = \frac{1}{4}.$$

- Lorsque $x = 3$, nous avons :

$$\frac{3}{3 \times 3 + 1} = \frac{3}{10}.$$

$$f(x) = \frac{x}{3x+1}, \quad x \in [1, 3].$$

Étape 2 : Différence et monotonie. Pour $x, y \in [1, 3]$, considérons la différence

$$\frac{y}{3y+1} - \frac{x}{3x+1} = \frac{y(3x+1) - x(3y+1)}{(3x+1)(3y+1)} = \frac{y-x}{(3x+1)(3y+1)}.$$

Comme $(3x+1)(3y+1) > 0$, le signe de cette différence est le même que celui de $y-x$. Ainsi, la fonction $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ est croissante sur $[1, 3]$. Le minimum est donc atteint en $x=1$ et le maximum en $x=3$:

$$f(1) = \frac{1}{4}, \quad f(3) = \frac{3}{10}.$$

On obtient alors la borne :

$$\boxed{\frac{1}{4} \leq \frac{x}{3x+1} \leq \frac{3}{10} \quad (x \in [1, 3])}.$$

Exercice 2.3(1.b)

$$f(x) = \frac{4x+2}{-2x+1}, \quad x \in [1, 3].$$

Remarque préalable. Pour $x \in [1, 3]$ on a $-5 \leq -2x+1 \leq 0$, donc le dénominateur est toujours négatif et f est bien définie et continue sur cet intervalle.

Méthode 1 — Différence et monotonie. Pour $x, y \in [1, 3]$, calculons la différence

$$\frac{4y+2}{-2y+1} - \frac{4x+2}{-2x+1} = \frac{(4y+2)(-2x+1) - (4x+2)(-2y+1)}{(-2x+1)(-2y+1)}.$$

En développant le numérateur on obtient

$$(4y+2)(-2x+1) - (4x+2)(-2y+1) = 8(y-x).$$

Comme $(-2x+1)(-2y+1) > 0$ (produit de deux nombres négatifs), le signe de la différence est le même que celui de $y-x$. Ainsi f est croissante sur $[1, 3]$. Par conséquent le minimum est atteint en $x=1$ et le maximum en $x=3$. On calcule

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1 + 2}{-2 \cdot 1 + 1} = \frac{6}{-1} = -6, \quad f(3) = \frac{4 \cdot 3 + 2}{-2 \cdot 3 + 1} = \frac{14}{-5} = -\frac{14}{5} = -2.8.$$

On a donc :

$$\boxed{-6 \leq \frac{4x+2}{-2x+1} \leq -\frac{14}{5} \quad (x \in [1, 3])}.$$

Exercice 2.3(1.c)

Encadrer (c'est-à-dire majorer et minorer) l'expression suivante :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}},$$

pour $x \in [1, 3]$.

Solution

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}, \quad x \in [1, 3].$$

Méthode 1 — Étudier f^2 par différences (algébrique).

Considérons

$$g(x) := f(x)^2 = \frac{x^4}{x+2}.$$

Pour $1 \leq x < y \leq 3$ on a

$$g(y) - g(x) = \frac{y^4}{y+2} - \frac{x^4}{x+2} = \frac{y^4(x+2) - x^4(y+2)}{(x+2)(y+2)}.$$

Le numérateur se factorise (identité algébrique) comme

$$y^4(x+2) - x^4(y+2) = (y-x) \left(y^3(x+2) + y^2x^2 + yx^3 + x^3(x+2) \right).$$

On vérifie immédiatement que, pour $x, y > 0$, le polynôme entre parenthèses est strictement positif. Ainsi, pour $y > x$ on a $g(y) - g(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $[1, 3]$.

Comme $f(x) > 0$ sur $[1, 3]$, l'accroissement de $g = f^2$ entraîne celui de f . Par conséquent f est strictement croissante sur $[1, 3]$, d'où les bornes

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f(3) = \frac{9}{\sqrt{5}},$$

et finalement

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{9}{\sqrt{5}} \quad (x \in [1, 3])}.$$

Méthode 2 — Réécriture et inégalités élémentaires.

On réécrit

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{\frac{x^4}{x+2}}.$$

Fixons $x \in [1, 3]$. Pour obtenir des bornes, il suffit de minorer et majorer la quantité $\frac{x^4}{x+2}$ sur $[1, 3]$. Comme la fonction $x \mapsto x^4$ est croissante sur $[1, 3]$ et $x \mapsto (x+2)^{-1}$ est décroissante, on obtient

$$\frac{1^4}{1+2} \leq \frac{x^4}{x+2} \leq \frac{3^4}{3+2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x^4}{x+2} \leq \frac{81}{5}.$$

En prenant la racine carrée (fonction croissante), on retrouve

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 2.3(2.a)

Encadrer l'expression suivante :

$$f(x) = |x|,$$

pour $x \in [-1, 3]$.

Solution

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $f(x) = |x|$, lorsque x appartient à l'intervalle $x \in [-1, 3]$.

Étape 1 : Définition de la fonction $|x|$. La fonction $|x|$ est définie comme :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 3]$, nous devons étudier deux cas : $x \in [-1, 0)$ et $x \in [0, 3]$.

Étape 2 : Analyse de $|x|$ pour $x \in [-1, 0)$. Pour $x \in [-1, 0)$, nous avons :

$$|x| = -x.$$

Dans cet intervalle, la valeur absolue de x est positive, mais x est négatif. Donc, $|x|$ est une fonction décroissante, atteignant une valeur maximale en $x = 0$.

- Lorsque $x = -1$, nous avons $|-1| = 1$. - Lorsque x s'approche de 0 à partir de la gauche, $|x| \rightarrow 0$.

Ainsi, pour $x \in [-1, 0)$, nous avons :

$$0 < |x| \leq 1.$$

Étape 3 : Analyse de $|x|$ pour $x \in [0, 3)$. Pour $x \in [0, 3)$, nous avons :

$$|x| = x.$$

Dans cet intervalle, la valeur absolue de x est simplement x , donc $|x|$ est croissante.

- Lorsque $x = 0$, nous avons $|0| = 0$. - Lorsque x s'approche de 3, mais sans l'atteindre, $|x|$ approche 3.

Ainsi, pour $x \in [0, 3)$, nous avons :

$$0 \leq |x| < 3.$$

Étape 4 : Encadrement final. En combinant les résultats des deux intervalles, nous obtenons l'encadrement suivant pour $x \in [-1, 3)$:

$$0 \leq |x| < 3.$$

Exercice 2.3(2.b)

Encadrer l'expression suivante :

$$f(x) = |x + 5|,$$

pour $x \in [-1, 3)$.

Solution

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $|x + 5|$, lorsque x appartient à l'intervalle $[-1, 3)$.

Étape 1 : Définition de la fonction $|x + 5|$. La fonction $|x + 5|$ est définie comme :

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{si } x + 5 \geq 0, \\ -(x + 5), & \text{si } x + 5 < 0. \end{cases}$$

Étant donné que $x \in [-1, 3)$, nous avons :

$$x + 5 \in [4, 8).$$

Puisque $x + 5 \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 3)$, nous avons toujours $|x + 5| = x + 5$ dans cet intervalle.

Étape 2 : Encadrement de l'expression. Dans l'intervalle $x \in [-1, 3)$, l'expression $x + 5$ varie entre les valeurs suivantes : - Lorsque $x = -1$, nous avons $x + 5 = -1 + 5 = 4$. - Lorsque x s'approche de 3, sans l'atteindre, nous avons $x + 5 \rightarrow 8$.

Ainsi, l'expression $|x + 5|$ est encadrée par :

$$4 \leq |x + 5| < 8.$$

Conclusion

L'expression $|x + 5|$ pour $x \in [-1, 3)$ est encadrée par :

$$4 \leq |x + 5| < 8.$$

Cela signifie que pour tout x dans cet intervalle, la valeur absolue de $x + 5$ varie entre 4 (inclus) et 8 (exclu).

Exercice 2.3(2.c)

Encadrer l'expression suivante :

$$f(x) = x^2 + 1,$$

pour $x \in [-1, 3)$.

Solution

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $x^2 + 1$, lorsque x appartient à l'intervalle $[-1, 3)$.

Étape 1 : Étude de la fonction $f(x) = x^2 + 1$. La fonction $f(x) = x^2 + 1$ est une fonction quadratique. Puisque le terme x^2 est toujours positif ou nul, la fonction $f(x)$ est croissante pour $x \geq 0$ et symétrique par rapport à $x = 0$.

Étape 2 : Valeurs aux bornes de l'intervalle. Nous étudions les valeurs de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle $x \in [-1, 3)$:

- Lorsque $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- Lorsque $x = 0$, nous avons :

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1.$$

- Lorsque $x = 3$ (valeur limite), nous avons :

$$f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10.$$

Cependant, $x = 3$ n'est pas inclus dans l'intervalle, donc la borne supérieure sera juste en dessous de 10.

Étape 3 : Encadrement de $f(x) = x^2 + 1$. Dans l'intervalle $x \in [-1, 3)$, l'expression $f(x) = x^2 + 1$ varie entre :

- Une valeur minimale de 1 (atteinte en $x = 0$), - Une valeur maximale de $f(x) \rightarrow 10$ lorsque x s'approche de 3 sans l'atteindre.

Ainsi, l'expression $x^2 + 1$ est encadrée par :

$$1 \leq x^2 + 1 < 10.$$

Conclusion

L'expression $x^2 + 1$ pour $x \in [-1, 3)$ est encadrée par :

$$1 \leq x^2 + 1 < 10.$$

Cela signifie que pour tout x dans cet intervalle, la valeur de $x^2 + 1$ varie entre 1 (inclus) et 10 (exclu).

Résolution

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$|x^2 - 1| - 2|x + 1| \geq 1.$$

On distingue les intervalles où les expressions à l'intérieur des valeurs absolues conservent un signe :

1. Cas $x < -1$.

Alors $x + 1 < 0$ et $|x + 1| = -(x + 1)$. De plus $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ (puisque $x^2 > 1$). L'inéquation devient

$$x^2 - 1 - 2(-(x + 1)) \geq 1 \iff x^2 - 1 + 2x + 2 \geq 1,$$

soit

$$x^2 + 2x + 1 \geq 1 \iff (x + 1)^2 \geq 1.$$

Sur $x < -1$, $|x + 1| = -(x + 1)$ donc $(x + 1)^2 \geq 1$ équivaut à $-(x + 1) \geq 1$, c.-à-d. $x \leq -2$. Ainsi, dans cet intervalle la solution est $x \leq -2$.

2. Cas $-1 \leq x < 1$.

Ici $x + 1 \geq 0$ donc $|x + 1| = x + 1$, et $x^2 - 1 \leq 0$ donc $|x^2 - 1| = 1 - x^2$. L'inéquation devient

$$1 - x^2 - 2(x + 1) \geq 1 \iff -x^2 - 2x - 1 \geq 1,$$

c.-à-d.

$$x^2 + 2x + 2 \leq 0.$$

Le discriminant de $x^2 + 2x + 2$ est $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, donc $x^2 + 2x + 2 > 0$ pour tout x . Il n'y a donc aucune solution dans $[-1, 1)$.

3. Cas $x \geq 1$.

Alors $x + 1 \geq 0$ et $x^2 - 1 \geq 0$, donc $|x + 1| = x + 1$ et $|x^2 - 1| = x^2 - 1$. L'inéquation s'écrit

$$x^2 - 1 - 2(x + 1) \geq 1 \iff x^2 - 2x - 3 \geq 1,$$

soit

$$x^2 - 2x - 4 \geq 0.$$

Les racines de $x^2 - 2x - 4$ sont $1 \pm \sqrt{5}$. Comme le polynôme est convexe, $x^2 - 2x - 4 \geq 0$ pour $x \leq 1 - \sqrt{5}$ ou $x \geq 1 + \sqrt{5}$. En restreignant au cas $x \geq 1$ on obtient la solution $x \geq 1 + \sqrt{5}$.

Bords. On vérifie rapidement $x = -1$ et $x = 1$: pour $x = -1$ l'expression vaut $0 \geq 1$ (faux), pour $x = 1$ elle vaut $-4 \geq 1$ (faux). Les points ne sont donc pas solutions.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans \mathbb{R} est

$$\boxed{(-\infty, -2] \cup [1 + \sqrt{5}, +\infty)}.$$

Exercice (Extra)

Recall the definitions of bounds before this. Montrer que pour tous réels x et y avec $x < y$, on a :

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Solution

Supposons $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$.

1. Montrons que $x < \frac{x+y}{2}$.

On a :

$$x < \frac{x+y}{2} \iff 2x < x+y \iff x < y,$$

ce qui est vrai par hypothèse. Donc $x < \frac{x+y}{2}$.

2. Montrons que $\frac{x+y}{2} < y$.

On a :

$$\frac{x+y}{2} < y \iff x+y < 2y \iff x < y,$$

ce qui est encore vrai par hypothèse. Donc $\frac{x+y}{2} < y$.

Ainsi, pour tout $x < y$, on obtient bien :

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

□

Exercice 2.7

Déterminer, quand ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :

- (1) L'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs ou nuls.
- (2) L'ensemble $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels compris entre 0 et 1 (inclus).
- (3) L'ensemble $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 (non inclus).

Solution**1. L'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs ou nuls.**

- **Majorant** : L'ensemble \mathbb{N} n'est pas majoré, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre qui soit supérieur ou égal à tous les éléments de \mathbb{N} , car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe toujours un entier $n + 1$ qui est plus grand.
- **Minorant** : Le minorant de \mathbb{N} est 0, car 0 est le plus petit entier naturel.
- **Borne inférieure** : La borne inférieure de \mathbb{N} est donc 0.
- **Borne supérieure** : L'ensemble \mathbb{N} n'a pas de borne supérieure car il est infini.
- **Plus grand élément** : Il n'y a pas de plus grand élément dans \mathbb{N} .
- **Plus petit élément** : Le plus petit élément est 0.

2. L'ensemble $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels entre 0 et 1 (inclus).

- **Majorant** : Un majorant de l'ensemble $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est 1, car tous les éléments de cet ensemble sont inférieurs ou égaux à 1.
- **Minorant** : Un minorant de l'ensemble $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est 0, car tous les éléments sont supérieurs ou égaux à 0.
- **Borne inférieure** : La borne inférieure est 0, qui est l'infimum de cet ensemble.
- **Borne supérieure** : La borne supérieure est 1, qui est le supremum de cet ensemble.
- **Plus grand élément** : Le plus grand élément de cet ensemble est 1.

- **Plus petit élément** : Le plus petit élément de cet ensemble est 0.

3. L'ensemble $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels strictement entre 0 et 1 (non inclus).

- **Majorant** : Un majorant de l'ensemble $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ est 1, car tous les éléments de cet ensemble sont strictement inférieurs à 1.
- **Minorant** : Un minorant de l'ensemble $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ est 0, car tous les éléments de cet ensemble sont strictement supérieurs à 0.
- **Borne inférieure** : La borne inférieure est 0, mais 0 n'appartient pas à l'ensemble.
- **Borne supérieure** : La borne supérieure est 1, mais 1 n'appartient pas à l'ensemble.
- **Plus grand élément** : Il n'y a pas de plus grand élément car l'ensemble ne contient pas 1 et pour tout élément $r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, on peut toujours trouver un rationnel plus proche de 1.
- **Plus petit élément** : Il n'y a pas de plus petit élément car l'ensemble ne contient pas 0 et pour tout élément $r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, on peut toujours trouver un rationnel plus proche de 0.

Exercice 2.8

On considère l'ensemble des nombres rationnels de la forme :

$$E = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Vérifier que cet ensemble est inclus dans l'intervalle $[0, 1)$.

Solution

L'ensemble E est défini par des expressions de la forme :

$$x_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que n est un entier strictement positif ($n \geq 1$).

Nous allons d'abord simplifier l'expression x_n :

$$x_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{n^2-1}{n}}{\frac{n^2+1}{n}} = \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

Étape 1 : Vérification de l'inclusion dans $[0, 1)$. Nous devons montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in [0, 1)$. Cela revient à vérifier que :

$$0 \leq x_n < 1.$$

1. ****Vérification que $x_n \geq 0$:****

L'expression $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ est toujours positive car pour tout $n \geq 1$, $n^2 - 1 \geq 0$ et $n^2 + 1 > 0$. Ainsi, $x_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

2. ****Vérification que $x_n < 1$:****

Nous devons montrer que $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$. Cela équivaut à :

$$n^2 - 1 < n^2 + 1.$$

Cette inégalité est évidente car $n^2 - 1$ est strictement inférieur à $n^2 + 1$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $x_n < 1$.

Nous avons donc montré que :

$$0 \leq x_n < 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, l'ensemble E est bien inclus dans l'intervalle $[0, 1)$.

Nous avons montré précédemment que l'ensemble E est constitué des éléments de la forme :

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1},$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$. Cette expression représente des valeurs pour $n \geq 1$.

(a) L'ensemble E est-il majoré ? L'ensemble E est composé de valeurs qui sont toutes inférieures à 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons montré que :

$$0 \leq x_n < 1.$$

Ainsi, l'ensemble E est ****majoré**** par 1, puisque toutes les valeurs de x_n sont strictement inférieures à 1. Donc, un ****majorant**** de E est 1.

(b) L'ensemble E est-il minoré ? Les valeurs de x_n sont également positives, comme nous l'avons démontré précédemment :

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \geq 0.$$

Ainsi, l'ensemble E est ****minoré**** par 0. Donc, un ****minorant**** de E est 0.

(c) L'ensemble E a-t-il un plus petit élément ? Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 - \frac{2}{n^2 + 1}.$$

Remarquons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n^2 + 1 \geq 1$, donc

$$x_n = 1 - \frac{2}{n^2 + 1} < 1.$$

Ainsi aucun élément de E n'est égal à 1.

Montrons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (à partir de $n = 0$ ou $n = 1$ selon la convention). Si $m > n$, alors $m^2 + 1 > n^2 + 1$ et donc $\frac{2}{m^2 + 1} < \frac{2}{n^2 + 1}$. En retranchant ces quantités à 1 on obtient

$$x_m = 1 - \frac{2}{m^2 + 1} > 1 - \frac{2}{n^2 + 1} = x_n.$$

Donc x_n est strictement croissante sur \mathbb{N} .

Comme $x_n < 1$ pour tout n et $x_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$ (en effet $\frac{2}{n^2+1} \rightarrow 0$), la borne supérieure de E dans \mathbb{R} est

$$\sup E = 1,$$

mais $1 \notin E$. Par conséquent E n'admet pas de plus grand élément (pas de maximum).

Conclusion

- (a) L'ensemble E est majoré par 1.
- (b) L'ensemble E est minoré par 0.
- (c) L'ensemble E a un plus petit élément qui est 0.
- (d) L'ensemble E n'a pas de plus grand élément, bien qu'il soit borné par 1.

Exercice 2.9

Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :

- $A_1 = [0, 5] \cap \mathbb{Q}$,
- $A_2 = (0, 5) \cap \mathbb{Q}$,
- $A_3 = \left\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$,
- $A_4 = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

Solution

1. Ensemble $A_1 = [0, 5] \cap \mathbb{Q}$. Cet ensemble contient tous les nombres rationnels x tels que $0 \leq x \leq 5$. Analysons ses propriétés :

- **Majorants** : Tous les réels ≥ 5 sont des majorants de A_1 .
- **Minorants** : Tous les réels ≤ 0 sont des minorants de A_1 .
- **Borne supérieure** : La borne supérieure est $\sup A_1 = 5$, car 5 est le plus grand élément de l'intervalle $[0, 5] \cap \mathbb{Q}$.
- **Borne inférieure** : La borne inférieure est $\inf A_1 = 0$, car 0 est le plus petit élément.
- **Plus grand élément** : Le plus grand élément de A_1 est 5, car 5 est dans A_1 .
- **Plus petit élément** : Le plus petit élément de A_1 est 0, car 0 est dans A_1 .

2. Ensemble $A_2 = (0, 5) \cap \mathbb{Q}$. Cet ensemble contient tous les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 5. Voici ses propriétés :

- **Majorants** : Tous les réels ≥ 5 sont des majorants de A_2 .
- **Minorants** : Tous les réels ≤ 0 sont des minorants de A_2 .
- **Borne supérieure** : La borne supérieure est $\sup A_2 = 5$, bien que 5 n'appartienne pas à A_2 , car c'est la limite supérieure des éléments.
- **Borne inférieure** : La borne inférieure est $\inf A_2 = 0$, bien que 0 n'appartienne pas à A_2 , car c'est la limite inférieure des éléments.
- **Plus grand élément** : Il n'y a pas de plus grand élément dans A_2 , car aucun élément n'atteint 5.
- **Plus petit élément** : Il n'y a pas de plus petit élément dans A_2 , car aucun élément n'atteint 0.

3. Ensemble $A_3 = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Cet ensemble est composé des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$, où n est un entier positif. Examinons ses propriétés :

- **Majorants** : Tous les réels ≥ 2 sont des majorants de A_3 , car :

$$1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

- **Minorants** : Tout réel ≤ 1 est un minorant de A_3 , car :

$$1 + \frac{1}{n} > 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

- **Borne supérieure** : La borne supérieure est $\sup A_3 = 2$, atteinte lorsque $n = 1$.
- **Borne inférieure** : La borne inférieure est $\inf A_3 = 1$, atteinte dans la limite lorsque $n \rightarrow \infty$.
- **Plus grand élément** : Le plus grand élément de A_3 est 2, pour $n = 1$.
- **Plus petit élément** : Il n'y a pas de plus petit élément dans A_3 , car 1 n'est jamais atteint.

4. **Ensemble** $A_4 = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Cet ensemble alterne entre des valeurs proches de 1 et -1 . Voici son analyse :

- **Majorants** : Un majorant évident de A_4 est $1 + \frac{1}{1} = 2$, car les valeurs de A_4 sont alternantes et bornées par 2.
- **Minorants** : -1 est un minorant car la valeur de $(-1)^n + \frac{1}{n}$ est toujours supérieure à -1 .
- **Borne supérieure** : La borne supérieure est $\sup A_4 = 2$, atteinte lorsque $n = 1$.
- **Borne inférieure** : La borne inférieure est $\inf A_4 = 0$, atteinte dans la limite lorsque $n \rightarrow \infty$.
- **Plus grand élément** : Le plus grand élément de A_4 est 2, pour $n = 1$.
- **Plus petit élément** : Le plus petit élément de A_4 est 0, atteignable dans la limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2.10

Soient A et B deux parties bornées et non vides de \mathbb{R} . Nous allons établir les assertions suivantes :

- (1) Si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.
- (2) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
- (3) $\sup(-A) = -\inf A$, où $-A = \{-a; a \in A\}$.
- (4) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, où $A+B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$.

Preuve de (1). Supposons que $A \subset B$. Par définition, tout élément de A est aussi un élément de B .

- Le supremum (borne supérieure) d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble. Comme chaque élément de A est aussi dans B , le supremum de A ne peut pas être plus grand que celui de B . Ainsi, $\sup A \leq \sup B$.

- De même, l'infimum (borne inférieure) est le plus grand des minorants d'un ensemble. Puisque tout élément de A est dans B , l'infimum de A ne peut pas être plus petit que celui de B . Ainsi, $\inf A \geq \inf B$.

Preuve de (2). Soit $A \cup B$ la réunion des ensembles A et B . Le supremum de $A \cup B$ est défini comme la plus petite borne supérieure de l'ensemble $A \cup B$.

- Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, nous avons nécessairement que $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$.

- Ainsi, le supremum de $A \cup B$ est nécessairement le maximum de $\sup A$ et $\sup B$, ce qui nous donne $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Preuve de (3). Soit $-A = \{-a; a \in A\}$ l'ensemble des opposés des éléments de A . Par définition :

- Le supremum de $-A$ est la plus petite borne supérieure des éléments de $-A$. Cela signifie que c'est la borne inférieure de A avec le signe opposé.

- Intuitivement, on inverse la notion de majorant et de minorant en prenant les opposés des éléments. Ainsi, $\sup(-A) = -\inf A$.

Preuve de (4). Considérons $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$. Le supremum de l'ensemble $A + B$ est la plus petite borne supérieure de toutes les sommes possibles d'éléments de A et de B .

- Le majorant de la somme $A + B$ doit être la somme des majorants de A et de B . Autrement dit, si $\sup A$ est le majorant de A et $\sup B$ celui de B , alors $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.

- De plus, aucune autre somme de majorants ne peut être plus petite que $\sup A + \sup B$. Par conséquent, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Conclusion :

Nous avons démontré les quatre assertions concernant les majorants, les minorants et les bornes des ensembles A et B . Ces résultats sont fondamentaux pour comprendre la théorie des ensembles et les propriétés des bornes dans \mathbb{R} .

Fibonacci

La suite de Fibonacci est une des suites les plus célèbres en mathématiques, nommée d'après le mathématicien italien Leonardo Fibonacci. Elle apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques et de la nature, notamment dans les modèles de croissance, la théorie des nombres et la géométrie.

3. Définition de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie de manière récurrente par la relation suivante :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2$$

Ainsi, chaque terme de la suite est la somme des deux termes précédents. Les premiers termes de la suite sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

4. Propriétés de la suite de Fibonacci

4.1. Formule explicite (Formule de Binet). Bien qu'il soit possible de calculer chaque terme de la suite de manière récursive, il existe une formule explicite qui permet de calculer directement le terme F_n sans avoir besoin de connaître les termes précédents. Cette formule est donnée par :

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est son conjugué. Cette formule est connue sous le nom de *formule de Binet*.

4.2. Relation avec le nombre d'or. Une propriété fascinante de la suite de Fibonacci est sa relation avec le nombre d'or φ . Lorsque n devient grand, le rapport entre deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers φ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Cela montre que la suite de Fibonacci est étroitement liée à des phénomènes géométriques dans la nature, où le nombre d'or apparaît souvent.

4.3. Somme des termes de Fibonacci. Une autre propriété intéressante est la somme des n premiers termes de la suite de Fibonacci. La somme des termes de F_0 à F_n est donnée par :

$$F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Par exemple, la somme des 5 premiers termes (0, 1, 1, 2, 3) est :

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 7 = F_7 - 1$$

4.4. Parité des termes. Les termes de la suite de Fibonacci suivent également un schéma régulier en termes de parité (nombre pair ou impair). Plus précisément :

F_n est pair si n est divisible par 3

Cela signifie que les termes $F_0, F_3, F_6, F_9, \dots$ sont des nombres pairs.

5. Applications de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci se retrouve dans de nombreux domaines scientifiques. Par exemple :

- **Nature** : La disposition des feuilles sur une tige, le motif des écailles des pommes de pin et la structure des spirales des coquillages suivent souvent des motifs basés sur la suite de Fibonacci.
- **Informatique** : La suite est utilisée dans les algorithmes de recherche et d'optimisation, tels que l'algorithme de recherche par intervalles basé sur Fibonacci.
- **Théorie des nombres** : La suite de Fibonacci est utilisée dans des études avancées sur les nombres premiers, les équations diophantiennes, et les fractions continues.

6. Conclusion

La suite de Fibonacci est un exemple classique d'une suite récurrente avec des propriétés fascinantes et de nombreuses applications dans différents domaines. Sa relation avec le nombre d'or et son apparition dans la nature en font un objet d'étude particulièrement intéressant pour les mathématiciens et les scientifiques.

Exercice 2.12 (1)

Étudier la monotonie des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a) u_n = \sqrt{n+3}, \quad (b) u_n = 2^n - n, \quad (c) u_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (d) u_n = \frac{n^2}{n-2}.$$

Remarque sur le domaine. On suppose $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Pour la suite (d) la valeur $n = 2$ rend le dénominateur nul : la suite n'est donc pas définie en $n = 2$. Dans la suite on étudiera la monotonie sur les valeurs de n où la suite est définie (et lorsque l'on compare u_n et u_{n+1} on s'assure que les deux termes existent).

Méthode. Pour chaque suite, on calcule la différence $\Delta_n := u_{n+1} - u_n$. Si $\Delta_n > 0$ (pour tout n convenable) la suite est strictement croissante, si $\Delta_n < 0$ elle est strictement décroissante.

(a) $u_n = \sqrt{n+3}$.

$$\Delta_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $\sqrt{n+4} > \sqrt{n+3}$ pour tout n . Ainsi $\Delta_n > 0$ pour tout n et la suite (u_n) est strictement croissante.

(b) $u_n = 2^n - n$.

$$\Delta_n = (2^{n+1} - (n+1)) - (2^n - n) = 2^n - 1.$$

Pour $n \geq 1$ on a $2^n - 1 \geq 1 > 0$. Pour $n = 0$, $\Delta_0 = 2^0 - 1 = 0$. Donc la suite est croissante sur \mathbb{N} et strictement croissante à partir de $n = 1$.

(c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

Calculons le rapport des termes consécutifs (méthode souvent plus simple pour des suites positives définies par des puissances et factoriels) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2}{n+1}.$$

- Si $\frac{2}{n+1} > 1$ (c.-à-d. $n < 1$) alors $u_{n+1} > u_n$. - Si $\frac{2}{n+1} = 1$ (c.-à-d. $n = 1$) alors $u_{n+1} = u_n$. - Si $\frac{2}{n+1} < 1$ (c.-à-d. $n \geq 2$) alors $u_{n+1} < u_n$.

Calcul des premiers termes pour voir la situation :

$$u_0 = \frac{2^0}{0!} = 1, \quad u_1 = \frac{2}{1} = 2, \quad u_2 = \frac{4}{2} = 2, \quad u_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1,33, \dots$$

Conclusion : la suite augmente de $n = 0$ à $n = 1$, on a $u_1 = u_2$, puis elle devient strictement décroissante à partir de $n = 2$. En particulier la suite n'est pas monotone sur tout \mathbb{N} , mais elle est strictement décroissante pour $n \geq 2$.

(d) $u_n = \frac{n^2}{n-2}$ (définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$).

Pour comparer u_{n+1} et u_n on calcule la différence (en s'assurant que $n \neq 1, 2$ pour que u_{n+1} et u_n existent) :

$$\Delta_n = u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{n-1} - \frac{n^2}{n-2} = \frac{(n+1)^2(n-2) - n^2(n-1)}{(n-1)(n-2)}.$$

Développons le numérateur :

$$(n+1)^2(n-2) - n^2(n-1) = n^2 - 3n - 2.$$

Donc pour $n \notin \{1, 2\}$ on a

$$\Delta_n = \frac{n^2 - 3n - 2}{(n-1)(n-2)}.$$

Étudions le signe de Δ_n pour les n pertinents (entiers ≥ 3) : - Pour $n \geq 3$ le dénominateur $(n-1)(n-2)$ est positif. Les racines du polynôme $n^2 - 3n - 2$ sont $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \approx -0,56$ et $3,56$. Pour les entiers n on a $n^2 - 3n - 2 < 0$ pour $n = 3$ et > 0 pour $n \geq 4$. Ainsi pour $n = 3$ on a $\Delta_3 < 0$ (donc $u_4 < u_3$), et pour tout $n \geq 4$ on a $\Delta_n > 0$ (donc la suite est strictement croissante à partir de $n = 4$).

Regardons aussi les premiers termes définis :

$$u_0 = \frac{0}{-2} = 0, \quad u_1 = \frac{1}{-1} = -1, \quad u_2 \text{ non déf.}, \quad u_3 = \frac{9}{1} = 9, \quad u_4 = \frac{16}{2} = 8.$$

On voit donc un comportement non monotone global : après la discontinuité en $n = 2$, la suite vaut $u_3 = 9$, puis baisse en $u_4 = 8$, puis remonte et devient strictement croissante pour $n \geq 4$.

Conclusions finales.

- (a) $u_n = \sqrt{n+3}$ est strictement croissante sur \mathbb{N} .
- (b) $u_n = 2^n - n$ est croissante sur \mathbb{N} et strictement croissante pour $n \geq 1$.
- (c) $u_n = 2^n/n!$: la suite augmente de $n = 0$ à $n = 1$, $u_1 = u_2$, puis est strictement décroissante pour $n \geq 2$.
- (d) $u_n = n^2/(n-2)$ n'est pas définie en $n = 2$. Pour $n \geq 3$ on a d'abord $u_4 < u_3$ (décroissance entre 3 et 4), puis la suite est strictement croissante pour tout $n \geq 4$. Donc il n'y a pas de monotonie globale sur tout $\mathbb{N} \setminus \{2\}$, mais la suite est strictement croissante à partir de $n = 4$.

Exercice 2.12(2)

Montrer que les suites suivantes sont bornées :

- (1) $u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n},$
- (2) $u_n = 5 \cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1},$
- (3) $u_n = \frac{2 \sin^2(n) - 1}{2 - \cos(2n)},$
- (4) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$

Solution

1. Étude de la suite $u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n}$. La suite u_n s'écrit :

$$u_n = \frac{1 + 3(-1)^n}{n}.$$

Comme $(-1)^n$ alterne entre 1 et -1 , il existe deux cas possibles :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1+3}{n} = \frac{4}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1-3}{n} = \frac{-2}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$-\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{4}{n}.$$

Or, pour $n \geq 1$, $\frac{4}{n}$ et $-\frac{2}{n}$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini. De plus, pour tout $n \geq 1$, la valeur absolue de u_n est inférieure ou égale à 4. Donc, la suite est bornée par $-2 \leq u_n \leq 4$.

2. Étude de la suite $u_n = 5 \cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1}$. La suite $\cos(n\pi)$ prend les valeurs $(-1)^n$, c'est-à-dire alterne entre 1 et -1 . Ainsi, on a :

$$u_n = 5(-1)^n + \frac{3n+1}{n+1}.$$

La partie $\frac{3n+1}{n+1}$ peut être réécrite :

$$\frac{3n+1}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1}.$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{2}{n+1}$ tend vers 0, donc $\frac{3n+1}{n+1}$ tend vers 3. En conséquence, on a :

$$u_n = 5(-1)^n + 3 - \frac{2}{n+1}.$$

Pour tout n , $5(-1)^n$ varie entre -5 et 5 , et $\frac{3n+1}{n+1}$ est proche de 3. On en déduit que la suite est bornée par :

$$-2 \leq u_n \leq 8.$$

3. Étude de la suite $u_n = \frac{2\sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)}$. La fonction $\sin^2(n)$ est bornée par $0 \leq \sin^2(n) \leq 1$, donc $2\sin^2(n) - 1$ est bornée par :

$$-1 \leq 2\sin^2(n) - 1 \leq 1.$$

De plus, on sait que $\cos(2n)$ est bornée par $-1 \leq \cos(2n) \leq 1$, donc le dénominateur $2 - \cos(2n)$ est borné par :

$$1 \leq 2 - \cos(2n) \leq 3.$$

Ainsi, la suite $u_n = \frac{2\sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)}$ est bornée par :

$$-\frac{1}{1} \leq u_n \leq \frac{1}{3},$$

soit :

$$-1 \leq u_n \leq \frac{1}{3}.$$

4. Étude de la suite $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$. On commence par simplifier cette expression. On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$:

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} = \frac{(n+1)-(n-1)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2}.$$

Cela donne :

$$u_n = \frac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2}.$$

Le dénominateur $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2$ est toujours strictement positif et augmente avec n . Pour $n \geq 1$, on a $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \geq 2$, donc :

$$u_n \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite est bornée par $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion

Nous avons démontré que les suites données sont toutes bornées :

- $u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n}$ est bornée par $-4 \leq u_n \leq 4$,
- $u_n = 5 \cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1}$ est bornée par $-2 \leq u_n \leq 8$,
- $u_n = \frac{2 \sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)}$ est bornée par $-1 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$,
- $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ est bornée par $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Définition de la convergence d'une suite réelle

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) ****converge**** vers un réel l (ou que l est la limite de u_n) si, pour tout $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Autrement dit, cela signifie que plus n devient grand, plus les termes de la suite u_n se rapprochent de l . On peut écrire cela sous forme abrégée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l.$$

Explication intuitive. Intuitivement, la convergence signifie que, lorsque n augmente, les valeurs de u_n se rapprochent de plus en plus de la valeur l , au point qu'elles deviennent aussi proches de l que l'on veut (en choisissant un ε très petit).

Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel l , on dit que la suite est *convergente*, et l est appelé la *limite* de la suite. Dans le cas contraire, on dit que la suite *diverge*.

Exemple. Considérons la suite $u_n = \frac{1}{n}$. Montrons que cette suite converge vers 0.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Cela revient à choisir n_0 tel que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \frac{1}{n}$ est plus petit que ε , ce qui prouve que $u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Dans la séance d'aujourd'hui, nous utiliserons le théorème suivant que vous avez fait au cours :

THEOREM 6.1. *Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Si la suite (u_n) est croissante et bornée, alors elle est convergente. Autrement dit, si :*

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

et

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_n \leq M \text{ pour tout } n \geq 1,$$

alors la suite (u_n) converge vers une limite réelle $l \in \mathbb{R}$. En effet,

$$l = \sup u_n : n \in \mathbb{N}.$$

Remarque

Ce théorème est une conséquence directe du *théorème de la borne supérieure*, qui affirme que toute partie non vide majorée de \mathbb{R} possède une borne supérieure. Ainsi, la suite convergera vers la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs.

Exercice 2.13

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_n = \ln(n+2) - \ln(n).$$

- (1) Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq 10^{-3}$.
- (2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon$.
- (3) Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)_{n \geq 0}$?

Solution

1. Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq 10^{-3}$. On commence par simplifier l'expression de u_n . En utilisant les propriétés des logarithmes, on obtient :

$$u_n = \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right).$$

Nous devons trouver le plus petit entier n_0 tel que :

$$|u_n| = \left| \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right| \leq 10^{-3}.$$

Pour cela, on utilise l'approximation du logarithme pour x proche de 0 :

L'expansion en série de Taylor de la fonction $\ln(1+x)$ autour de $x=0$ est donnée par :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

En notation plus générale, l'expansion peut s'écrire sous forme de série infinie :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Cette série converge pour $|x| < 1$ et donne une approximation de $\ln(1+x)$ pour des petites valeurs de x .

$$\ln(1+x) \approx x \quad \text{pour } x \text{ petit.}$$

Ainsi, pour n grand, on a :

$$\ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \approx \frac{2}{n}.$$

Nous cherchons n_0 tel que :

$$\frac{2}{n_0} \leq 10^{-3},$$

ce qui donne :

$$n_0 \geq \frac{2}{10^{-3}} = 2000.$$

Donc, le plus petit entier n_0 tel que $|u_n| \leq 10^{-3}$ pour $n \geq n_0$ est $n_0 = 2000$.

2. Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon$.

Nous devons maintenant généraliser pour un $\varepsilon > 0$. En suivant le même raisonnement que dans la question précédente, on cherche n_0 tel que :

$$\frac{2}{n_0} \leq \varepsilon,$$

ce qui donne :

$$n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Ainsi, le plus petit entier n_0 tel que $|u_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$ est :

$$n_0 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil.$$

3. Conclusion sur la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. La suite (u_n) tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. En effet, comme $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$, et sachant que $\ln(1+x) \approx x$ pour x petit, on a :

$$u_n \approx \frac{2}{n} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Ainsi, $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n| \leq \varepsilon$. Cela montre que la suite (u_n) est **négligeable**, c'est-à-dire qu'elle tend vers 0 de façon asymptotiquement négligeable.

Ceiling Function.

Definition. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, la *fonction plafond* (ou *ceiling function*) est définie par

$$\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

Autrement dit, $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier *plus grand ou égal* à x .

Propriétés principales.

(1) **Encadrement :**

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

(2) **Caractère entier :** $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(3) **Idempotence sur \mathbb{Z} :** Si $x \in \mathbb{Z}$, alors

$$\lceil x \rceil = x.$$

(4) **Monotonie :** Si $x \leq y$, alors

$$\lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil.$$

- (5) **Lien avec la fonction plancher :** Si $\lfloor x \rfloor$ désigne la fonction plancher, on a

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor.$$

- (6) **Translation par un entier :** Pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\lceil x + m \rceil = \lceil x \rceil + m.$$

Exemples.

$$\lceil 3.2 \rceil = 4, \quad \lceil -1.7 \rceil = -1, \quad \lceil 5 \rceil = 5.$$

Exercice 2.15

Montrer, en utilisant la définition de la convergence d'une suite, que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

converge vers $\frac{1}{2}$.

Solution

1. Rappel de la définition de la convergence d'une suite.

Soit (u_n) une suite de nombres réels et $L \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n \geq N \implies |u_n - L| < \varepsilon.$$

Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont arbitrairement proches de L à moins de ε .

2. Étude de la suite $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Nous cherchons à montrer que la suite u_n converge vers $\frac{1}{2}$. Pour cela, calculons la limite de u_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, les termes $\frac{1}{n}$ tendent vers 0, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Nous avons donc montré que la limite de u_n est $\frac{1}{2}$.

3. Vérification avec la définition de la convergence. Nous allons maintenant utiliser la définition de la convergence pour prouver que u_n converge effectivement vers $\frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

Calculons $|u_n - \frac{1}{2}|$:

$$|u_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right|.$$

Réécrivons cette expression sous un dénominateur commun :

$$|u_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right|.$$

Nous voulons que :

$$\left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon.$$

Cela équivaut à trouver n tel que :

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \quad \text{ou encore} \quad 2(2n+1) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Cela donne :

$$4n+2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

ce qui implique :

$$n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Ainsi, en prenant $N = \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil$, on a que pour tout $n \geq N$, la condition $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ est satisfaite.

4. Conclusion. Nous avons montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Ainsi, d'après la définition de la convergence, la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 2.16

Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ avec $l > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies u_n > \frac{l}{2} > 0$.

Solution

1. Hypothèses. Nous savons que la suite (u_n) converge vers l , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l,$$

avec $l > 0$.

D'après la définition de la convergence d'une suite, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_0 \implies |u_n - l| < \varepsilon.$$

2. Application avec $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Nous allons utiliser cette définition en choisissant $\varepsilon = \frac{l}{2}$, où l est la limite positive de la suite.

Ainsi, d'après la définition de la convergence, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$|u_n - l| < \frac{l}{2}.$$

Ce qui équivaut à :

$$-\frac{l}{2} < u_n - l < \frac{l}{2}.$$

En ajoutant l à toutes les parties de cette inégalité, on obtient :

$$l - \frac{l}{2} < u_n < l + \frac{l}{2},$$

ce qui donne :

$$\frac{l}{2} < u_n < \frac{3l}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, nous avons $u_n > \frac{l}{2}$.

3. Conclusion. Nous avons montré que, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ avec $l > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > \frac{l}{2} > 0$.

Cela conclut la démonstration.

First recall the properties of operations on sequences and then sub sequences have the same limit as the parent sequence. from Cours 3 and 4 and 5.

Exercice 2.20 (2)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et il existe $k > 1$ vérifiant

$$u_{n+1} \geq k u_n > 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Preuve. Nous montrons d'abord par récurrence que

$$u_n \geq k^n u_0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Initialisation. Pour $n = 0$ la propriété est vraie car $u_0 \geq k^0 u_0 = u_0$.

Hérédité. Supposons $u_n \geq k^n u_0$ pour un certain n . Alors, d'après l'hypothèse,

$$u_{n+1} \geq k u_n \geq k \cdot (k^n u_0) = k^{n+1} u_0.$$

Ainsi la propriété est vraie pour $n + 1$.

Par récurrence la minoration $u_n \geq k^n u_0$ tient pour tout entier $n \geq 0$.

Comme $k > 1$, la suite géométrique $k^n u_0$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Par comparaison (puisque $u_n \geq k^n u_0$ pour tout n), il s'ensuit que $u_n \rightarrow +\infty$.

Remarque quantitative. Pour toute borne $M > 0$, choisir un entier

$$N > \frac{\ln(M/u_0)}{\ln k}$$

assure que $k^N u_0 > M$, donc pour tout $n \geq N$ on a $u_n \geq k^n u_0 \geq k^N u_0 > M$. Cela montre explicitement que u_n dépasse toute borne M dès un rang fini, d'où la divergence vers $+\infty$.

□

Exercice 2.18

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer si la suite (u_n) converge ou diverge. Déterminer sa limite dans le cas où elle converge.

$$(1) \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$(2) \quad u_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n},$$

$$(3) \quad u_n = 1 + (-1)^n,$$

$$(4) \quad u_n = \frac{1+(-1)^n}{n},$$

$$(5) \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(6) \quad u_n = n^{(-1)^n},$$

$$(7) \quad u_n = 2^{1/n}.$$

Solution

1. Suite $u_n = 1 + (-1)^n$. Cette suite alterne entre deux valeurs :

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La suite n'admet pas de limite, car elle oscille entre 2 et 0. Elle diverge donc.

2. Suite $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$. Tout d'abord, observons que $1 + (-1)^n$ prend les valeurs 2 si n est pair, et 0 si n est impair. Cela signifie que :

$$u_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{0}{n} = 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{2}{n} \rightarrow 0$. Ainsi, u_n tend vers 0 que n soit pair ou impair.

La suite converge donc vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

3. Suite $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Étudions les premières valeurs de la suite :

$$\begin{aligned} u_0 &= \cos(0) = 1, \\ u_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ u_2 &= \cos(\pi) = -1, \\ u_3 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \\ u_4 &= \cos(2\pi) = 1. \end{aligned}$$

La suite u_n est périodique de période 4 et oscille entre 1, 0, -1, 0. Elle n'admet pas de limite et diverge.

4. Suite $u_n = n^{(-1)^n}$. Cette suite alterne en fonction de la parité de n :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, les termes pairs n tendent vers $+\infty$ et les termes impairs $\frac{1}{n}$ tendent vers 0.

La suite n'admet pas de limite à cause de cette oscillation entre n (qui tend vers l'infini) et $\frac{1}{n}$ (qui tend vers 0). Elle diverge.

5. Suite $u_n = 2^{1/n}$. Calculons la limite de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n = 2^{1/n}.$$

Utilisons le fait que lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{1/n} = 2^0 = 1.$$

La suite converge donc vers 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Conclusion

- La suite $u_n = 1 + (-1)^n$ diverge.
- La suite $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ converge vers 0.
- La suite $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ diverge.
- La suite $u_n = n^{(-1)^n}$ diverge.
- La suite $u_n = 2^{1/n}$ converge vers 1.

Jusqu'à présent, nous avons étudié des exemples de suites de nombres réels et nous avons vu la définition des propriétés suivantes :

- (1) Suites (strictement) croissantes et (strictement) décroissantes.
- (2) Suites bornées.

Nous allons maintenant aborder l'aspect le plus important de ces suites, appelé la ****convergence des suites****. Nous examinerons des exemples de suites convergentes ainsi que des exemples de suites qui ne convergent pas.

Extra

Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercice 2.19

Calculer les limites suivantes

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n^2).$$

Solution. On compare les deux termes : la suite 2^n croît exponentiellement tandis que n^2 ne croît que polynômialement. On a par exemple

$$\frac{2^n}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty,$$

donc 2^n domine n^2 et

$$2^n - n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 3n^2 + 1}{(n^2 + 1)(n^2 - 1)}.$$

Solution. Développons le dénominateur :

$$(n^2 + 1)(n^2 - 1) = n^4 - 1.$$

Ainsi

$$\frac{2n^4 + 3n^2 + 1}{(n^2 + 1)(n^2 - 1)} = \frac{2n^4 + 3n^2 + 1}{n^4 - 1}.$$

Divisons numérateur et dénominateur par n^4 :

$$\frac{2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{1 - \frac{1}{n^4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2 + 0 + 0}{1 - 0} = 2.$$

Donc la limite vaut 2.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (2^n - 3^n).$$

Solution. Factorisons $\left(\frac{1}{3}\right)^n$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n (2^n - 3^n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1.$$

Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Par conséquent

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1.$$

Exercice 2.24.1

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

sans rien savoir a priori sur l'exponentielle et le logarithme.

- (1) Montrer que pour tout $k \geq 3$, on a $\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3}$.

Solution

Étape 1 : Comparaison des fractions. On veut démontrer que pour tout $k \geq 3$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3}.$$

Si $k = 3$ nous avons $\frac{k-1}{k-3} = \infty$ et $\frac{k}{k-2} = 3$, et clairement $3 < \infty$. Donc, nous pouvons supposer que $k > 3$. Pour ce faire, nous allons comparer directement les deux fractions en réduisant à un même dénominateur. Il s'agit donc de montrer que :

$$\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3} \quad \text{ou} \quad \frac{k}{k-2} - \frac{k-1}{k-3} < 0.$$

Effectuons la différence des deux fractions :

$$\frac{k}{k-2} - \frac{k-1}{k-3} = \frac{k(k-3) - (k-1)(k-2)}{(k-2)(k-3)}.$$

Développons le numérateur :

$$k(k-3) = k^2 - 3k,$$

$$(k-1)(k-2) = k^2 - 2k - k + 2 = k^2 - 3k + 2.$$

Ainsi, la différence des deux fractions devient :

$$\frac{k(k-3) - (k-1)(k-2)}{(k-2)(k-3)} = \frac{(k^2 - 3k) - (k^2 - 3k + 2)}{(k-2)(k-3)}.$$

Simplifions le numérateur :

$$(k^2 - 3k) - (k^2 - 3k + 2) = -2.$$

La différence entre les deux fractions est donc :

$$\frac{-2}{(k-2)(k-3)}.$$

Étape 2 : Signe de l'expression. Le dénominateur $(k-2)(k-3)$ est strictement positif pour tout $k > 3$ car les deux facteurs sont positifs.

Ainsi, la différence $\frac{-2}{(k-2)(k-3)}$ est strictement négative pour tout $k > 3$. Cela montre que :

$$\frac{k}{k-2} - \frac{k-1}{k-3} < 0 \quad \text{pour tout } k > 3.$$

Par conséquent, nous avons bien :

$$\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3} \quad \text{pour tout } k \geq 3.$$

(2) En deduire que

()

Inégalité de Bernoulli

L'inégalité de Bernoulli stipule que pour tout $x \geq -1$ et pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n .

Preuve

Initialisation. Pour $n = 1$, on a :

$$(1+x)^1 = 1+x.$$

Ainsi, l'inégalité $(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$ est vraie pour $n = 1$.

Hérédité. Supposons que l'inégalité de Bernoulli est vraie pour un certain entier $n \geq 1$, c'est-à-dire que nous supposons que :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Nous devons montrer que l'inégalité est également vraie pour $n+1$, c'est-à-dire que :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

Nous avons :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous savons que :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x).$$

Développons le produit $(1 + nx)(1 + x)$:

$$(1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2.$$

Comme $nx^2 \geq 0$ pour $x \geq -1$, nous avons :

$$1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x.$$

Exercice 2.24.4

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, est croissante si et seulement si, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Solution

Étape 1 : Monotonie de la suite (u_n) . Nous cherchons à étudier la monotonie de la suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Pour savoir si cette suite est croissante, nous devons examiner la différence $u_{n+1} - u_n$. Cependant, il est plus pratique de comparer le rapport entre u_{n+1} et u_n . Calculons donc ce rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Nous devons déterminer si ce rapport est supérieur ou inférieur à 1. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est croissante, sinon elle est décroissante. Cependant, cette approche directe est compliquée à résoudre. Nous allons reformuler la condition de monotonie en termes d'inégalités plus accessibles.

Étape 2 : Inégalité à vérifier. After a change of variables from n to $n - 1$ we can rephrase our statement that we have to show. We need to show that

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, \quad \forall n \geq 2$$

if and only if

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n,$$

Exercice 2.24.6

Nous voulons montrer l'inégalité suivante :

$$n^2 \binom{n}{2k} > \binom{n}{2k+1} \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Étape 1 : Définition des coefficients binomiaux

Le coefficient binomial est défini par :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Cela représente le nombre de façons de choisir r éléments parmi n , sans tenir compte de l'ordre.

Étape 2 : Relation entre $\binom{n}{2k}$ et $\binom{n}{2k+1}$

Nous utilisons la relation suivante entre les coefficients binomiaux consécutifs :

$$\frac{\binom{n}{2k+1}}{\binom{n}{2k}} = \frac{n-2k}{2k+1}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\binom{n}{2k+1} = \binom{n}{2k} \times \frac{n-2k}{2k+1}.$$

Étape 3 : Mise en place de l'inégalité

L'inégalité que nous souhaitons montrer est :

$$n^2 \binom{n}{2k} > \binom{n}{2k+1}.$$

En utilisant la relation précédente, on a :

$$\binom{n}{2k+1} = \binom{n}{2k} \times \frac{n-2k}{2k+1}.$$

L'inégalité devient alors :

$$n^2 \binom{n}{2k} > \binom{n}{2k} \times \frac{n-2k}{2k+1}.$$

En divisant les deux côtés par $\binom{n}{2k}$, qui est strictement positif, nous obtenons :

$$n^2 > \frac{n-2k}{2k+1}.$$

Étape 4 : Simplification de l'inégalité

Nous devons maintenant montrer que l'inégalité suivante est vraie :

$$n^2(2k+1) > n - 2k.$$

Développons le côté gauche :

$$n^2(2k+1) = n^2(2k) + n^2 = 2kn^2 + n^2.$$

L'inégalité devient donc :

$$2kn^2 + n^2 > n - 2k.$$

Le côté gauche de cette inégalité croît très rapidement avec n , tandis que le côté droit reste linéaire. Ainsi, pour n suffisamment grand, cette inégalité est vérifiée.

Conclusion

L'inégalité $n^2 \binom{n}{2k} > \binom{n}{2k+1}$ est donc vraie pour tout $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, car le terme n^2 rend le côté gauche beaucoup plus grand que le côté droit à mesure que n augmente.

7. Fonctions continues

Les fonctions continues sont un concept fondamental en mathématiques, et elles sont particulièrement importantes en analyse. Pour comprendre ce que signifie la continuité d'une fonction, imaginons d'abord un exemple simple.

Imaginons un graphe sans "saut"

Une façon simple de comprendre une fonction continue est de penser à tracer le graphe d'une fonction sur du papier. Si tu peux tracer le graphe sans lever ton crayon, alors la fonction est continue. Cela signifie qu'il n'y a pas de "trou", de "saut" ou de "rupture" dans le graphe de la fonction.

Définition intuitive

Mathématiquement, une fonction $f(x)$ est dite **continue** en un point $x = a$ si, lorsque x se rapproche de a , la valeur de $f(x)$ se rapproche également de $f(a)$. En d'autres termes, il n'y a pas de surprise lorsque l'on s'approche de a , et la fonction "change en douceur" autour de ce point.

Exemple de fonction continue

Prenons la fonction $f(x) = x^2$. Son graphe est une parabole. Si tu regardes le graphe, tu verras qu'il n'y a pas de saut, de trou ou de rupture à n'importe quel point. Cela signifie que $f(x) = x^2$ est continue partout.

Exemple de fonction non continue

Une fonction qui **n'est pas** continue est, par exemple, une fonction qui a un saut. Prenons une fonction définie comme ceci :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction saute brusquement de 1 à 2 à $x = 0$. Donc, cette fonction n'est pas continue à $x = 0$, car il y a un saut.

Pourquoi la continuité est-elle importante ?

Les fonctions continues sont importantes parce qu'elles se comportent de manière prévisible. Elles sont essentielles pour modéliser des phénomènes réels comme le mouvement, la croissance, ou toute situation où il n'y a pas de changement brusque. Par exemple, la hauteur d'un objet en chute libre change continuellement avec le temps (sans saut), ce qui en fait un phénomène que l'on peut modéliser avec une fonction continue.

Conclusion

En résumé, une fonction est continue si tu peux dessiner son graphe sans lever ton crayon. Cela signifie qu'il n'y a pas de surprise dans la façon dont la fonction se comporte près de n'importe quel point.

Définition de la continuité

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue en un point $c \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Cela signifie que, lorsque x s'approche de c , la valeur de $f(x)$ s'approche de $f(c)$. Une fonction est dite continue sur un intervalle si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

Limite sous une fonction continue

Le théorème fondamental concernant les fonctions continues et les limites peut s'énoncer ainsi :

Théorème : Si une suite (x_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et si f est une fonction continue en l , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(l).$$

Cela signifie que, si une suite (x_n) converge vers l , et si f est continue en l , alors appliquer f après avoir pris la limite de la suite ou avant donne le même résultat.

Exemple

Prenons un exemple simple avec la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$. Si nous avons une suite (x_n) qui converge vers une limite $l \geq 0$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \sqrt{l}.$$

Ainsi, la limite de la suite des racines carrées est la racine carrée de la limite de la suite initiale.

Remarque

Cette propriété est extrêmement utile dans l'analyse des fonctions et des suites, car elle nous permet de simplifier le calcul des limites lorsqu'on sait qu'une fonction est continue.

Conclusion

En résumé, une fonction continue permet de faire "commuter" la limite à travers elle, ce qui est très pratique dans l'étude des suites et des fonctions. Cette propriété repose sur la définition même de la continuité et est utilisée fréquemment en analyse mathématique.

Expansion de $\ln(1+x)$

L'expansion de la fonction $\ln(1+x)$ pour $|x| < 1$ peut être obtenue à partir de son développement en série de Taylor. La série est donnée par :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

ou, de manière plus compacte, on peut écrire :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Si $l \neq p$, on peut, en se restreignant à une classe de congruence modulo $p-1$ (c.f. numéro suivant), prolonger la fonction $n \rightarrow l^n$ en une fonction continue sur \mathbb{Z}_p ; par contre, il n'y a rien à faire avec le facteur $(1-p^n)$ qui tend p -adiquement vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il semble donc normal d'être forcé de retirer ce dernier facteur si on veut que le produit soit p -adiquement continu.

Malheureusement, cette explication séduisante est un petit peu trop simpliste pour être juste, comme le montre l'exemple des fonctions L p -adiques attachées aux formes modulaires. Une définition des facteurs d'Euler qu'il faut mettre en p pour pouvoir espérer des propriétés de continuité p -adique pour une fonction L générale a été donnée

par Perrin-Riou. Cette définition utilise intensivement les anneaux de Fontaine.