

L1-MI-S1

TD Chapitre 1

Contents

Chapter 1. Ensembles et Applications	1
Exercice 1.1	1
Solution	1
Exercice 1.2	2
Solution	3
Résumé	4
Exercice 1.3	4
Solution	4
Résumé	6
Exercice 1.5	6
Solution	6
Exemple	7
Résumé	8
Exercice 1.6	8
Exercice 1.7.3 et 1.7.4	9
Solution	9
Exercice 1.8	10
Solution	10
Exercice 1.9	12
Solution	12
Exercice 1.10	14
Solution	14
Exercice 1.11	15
Solution	15
Explication	16
Deuxième partie : Somme des coefficients binomiaux de rang pair	16
Explication	17
Exercice 1.12	18
Solution	18
Exercice 1.14	19
Solution	19
Exercice 1.18	20
Solution	20

CHAPTER 1

Ensembles et Applications

Exercice 1.1

Nous savons que si a et b sont deux nombres réels, et que leur produit $ab = 0$, alors soit $a = 0$, soit $b = 0$. Nous avons le système (S) d'inconnues réelles x et y suivant :

$$(S) : \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 & (E1) \\ (x-2)y = 0 & (E2) \end{cases}$$

Solution

(1) Détermination des solutions des équations $(E1)$, $(E2)$ et du système (S) . On doit trouver x et y qui satisferont les deux équations simultanément.

Solution de l'équation $(E1)$: $(x-1)(y-2) = 0$. L'équation $(E1)$ est un produit de deux termes qui est égal à zéro. Nous avons deux possibilités :

$$(x-1)(y-2) = 0 \implies (x-1) = 0 \quad \text{ou} \quad (y-2) = 0.$$

Cela signifie que soit $x = 1$, soit $y = 2$. Les solutions sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 & \text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \\ y = 2 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E1)$ est :

$$E_1 = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Solution de l'équation $(E2)$: $(x-2)y = 0$. De la même manière, $(E2)$ est aussi un produit de deux termes égal à zéro. Nous avons :

$$(x-2)y = 0 \implies (x-2) = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Cela signifie que soit $x = 2$, soit $y = 0$. Les solutions sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x = 2 & \text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \\ y = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E2)$ est :

$$E_2 = \{(2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Solution du système (S). Pour résoudre le système (S), nous devons trouver l'intersection des ensembles de solutions E_1 et E_2 , c'est-à-dire les points qui satisfont à la fois (E1) et (E2). Regardons les solutions possibles : - E_1 contient les points $x = 1$ (pour tout y) et $y = 2$ (pour tout x). - E_2 contient les points $x = 2$ (pour tout y) et $y = 0$ (pour tout x).

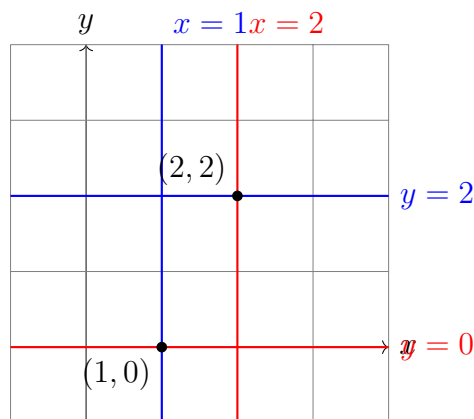
L'intersection des deux ensembles donne les points suivants :

$$S = \{(1, 0), (2, 2)\}.$$

Donc, la solution du système (S) est :

$$S = \{(1, 0), (2, 2)\}.$$

(2) Représentation graphique. Nous allons maintenant représenter graphiquement les solutions obtenues.



- L'équation (E1) représente deux lignes : - $x = 1$, qui est une ligne verticale passant par $x = 1$, - $y = 2$, qui est une ligne horizontale passant par $y = 2$.

- L'équation (E2) représente également deux lignes : - $x = 2$, une ligne verticale passant par $x = 2$, - $y = 0$, une ligne horizontale passant par $y = 0$.

Les points où ces lignes se croisent sont les solutions du système (S), c'est-à-dire les points $(1, 0)$ et $(2, 2)$.

Exercice 1.2

Soient deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définies par :

$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1$$

On va calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, puis vérifier si $f \circ g = g \circ f$.

Solution

1. Calcul de $f \circ g$. La composition $f \circ g$ signifie que nous devons appliquer g d'abord, puis appliquer f au résultat de g . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Calculons cela étape par étape :

$$g(x) = x^2 - 1$$

Appliquons maintenant f à $g(x)$, c'est-à-dire $f(x^2 - 1)$:

$$f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 1$$

Développons cette expression :

$$f(x^2 - 1) = 3x^2 - 3 + 1 = 3x^2 - 2$$

Ainsi, nous avons :

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$$

2. Calcul de $g \circ f$. De la même manière, la composition $g \circ f$ signifie que on doit appliquer f d'abord, puis appliquer g au résultat de f . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Calculons cela étape par étape :

$$f(x) = 3x + 1$$

Appliquons maintenant g à $f(x)$, c'est-à-dire $g(3x + 1)$:

$$g(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 1$$

Développons cette expression :

$$g(3x + 1) = (9x^2 + 6x + 1) - 1 = 9x^2 + 6x$$

Ainsi, nous avons :

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x$$

3. Comparaison de $f \circ g$ et $g \circ f$. Nous avons trouvé :

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$$

et

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x$$

Clairement ils sont deux expressions différentes. Donc, $f \circ g \neq g \circ f$.

Résumé

Nous avons montré que la composition des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ donne des résultats différents. Cela signifie que, en général, la composition de fonctions n'est pas commutative.

Exercice 1.3

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

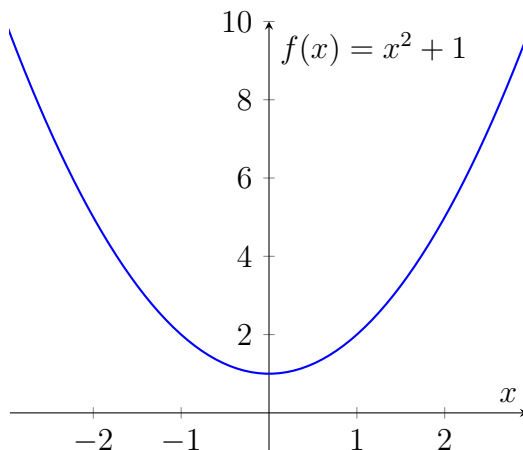
$$f(x) = x^2 + 1$$

En partant du graphe de $x \rightarrow x^2$, tracer le graphe de f et déterminer les ensembles suivants :

$$f([-3, -1]), \quad f([-3, -1] \cup [-2, 1]), \quad f([-3, -1] \cap [-2, 1]), \\ f^{-1}((-\infty, -1]), \quad f^{-1}([1, \infty)), \quad f^{-1}((-\infty, 2] \cap [1, \infty)).$$

Solution

1. Tracer le graphe de $f(x) = x^2 + 1$. Le graphe de $f(x) = x^2 + 1$ est une parabole qui est une translation de la parabole x^2 vers le haut de 1 unité. Cela signifie que le sommet de la parabole est en $(0, 1)$, et la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



2. Calcul des ensembles.

a) $f([-3, -1])$. Nous allons d'abord calculer l'image de l'intervalle $[-3, -1]$ par la fonction $f(x) = x^2 + 1$.

Pour $x = -3$, nous avons :

$$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

Pour $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Ainsi, $f([-3, -1])$ est l'intervalle :

$$f([-3, -1]) = [2, 10]$$

b) $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$. Il suffit de prendre l'image de l'union des intervalles $[-3, -1] \cup [-2, 1]$.

Pour $x = -2$, nous avons :

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Pour $x = 1$, nous avons :

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Donc, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ est l'intervalle :

$$f([-3, -1] \cup [-2, 1]) = [1, 10]$$

c) $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$. L'intersection de $[-3, -1]$ et $[-2, 1]$ est l'intervalle $[-2, -1]$.

Pour $x = -2$, nous avons :

$$f(-2) = 5$$

Pour $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = 2$$

Ainsi, $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$ est l'intervalle :

$$f([-3, -1] \cap [-2, 1]) = [2, 5]$$

d) $f^{-1}((-\infty, -1])$. La fonction $f(x) = x^2 + 1$ prend des valeurs toujours supérieures ou égales à 1. Donc, il n'existe pas de x tel que $f(x) \leq -1$. Cela signifie que :

$$f^{-1}((-\infty, -1]) = \emptyset$$

e) $f^{-1}([1, \infty))$. Nous cherchons les x pour lesquels $f(x) \geq 1$. Comme $f(x) = x^2 + 1$, et que $x^2 \geq 0$ pour tout x , nous avons :

$$f(x) \geq 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$f^{-1}([1, \infty)) = \mathbb{R}$$

$$f) f^{-1}((-\infty, 2] \cap [1, \infty)). \text{ L'ensemble } (-\infty, 2] \cap [1, \infty) = [1, 2].$$

Nous cherchons maintenant les x tels que $f(x) \in [1, 2]$. Cela correspond à résoudre l'inéquation :

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2$$

Cela équivaut à :

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

Donc :

$$-1 \leq x \leq 1$$

Ainsi, nous avons :

$$f^{-1}((-\infty, 2] \cap [1, \infty)) = [-1, 1]$$

Résumé

Nous avons calculé et interprété les différents ensembles image et antécédent de la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Le graphe de cette fonction, une parabole, permet de visualiser ces résultats.

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - x$.

- f est-elle injective ?
- f est-elle surjective ?
- Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$.
- Déterminer $f((0, +\infty))$.

Solution

Définition. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction définie entre deux ensembles A et B . On dit que f est **injective** si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Autrement dit, une fonction est injective si deux éléments distincts de l'ensemble de départ A ont des images distinctes dans l'ensemble d'arrivée B . En termes plus simples, cela signifie qu'aucun élément de B n'est l'image de plus d'un élément de A .

Exemple

Si $f(x) = 2x + 1$ est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , elle est injective car, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.

1. Injectivité de f . La fonction f est définie par $f(x) = x^3 - x$. Pour vérifier si f est injective, nous devons vérifier si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Par un raisonnement par contraposition, il est équivalent de montrer que si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nous pouvons factoriser $f(x) = x^3 - x$ de la manière suivante :

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Ainsi, il existe trois solutions à l'équation $x^3 - x = 0$, qui sont $x = -1$, $x = 0$, et $x = 1$. Cela signifie qu'il existe plusieurs valeurs de x qui ont la même image par $f(x)$. Par conséquent, $f(x)$ n'est pas injective.

2. Surjectivité de f . Pour vérifier si f est surjective, nous devons voir si, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Considérons la limite de f lorsque $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x) = -\infty$$

Comme f est continue et que ses limites à l'infini sont $+\infty$ et $-\infty$, la fonction f est surjective sur \mathbb{R} . Ainsi, f est bien surjective.

4. Détermination de $f((0, +\infty))$. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$. Calculons l'image de l'intervalle $(0, \infty)$ par f .

Commençons par étudier la dérivée de f . Nous avons :

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Cherchons les points critiques en résolvant $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nous nous intéressons à $x > 0$, donc nous prenons $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Étudions maintenant le signe de la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$: - Pour $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur cet intervalle. - Pour $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur cet intervalle.

Calculons maintenant les limites de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle $(0, \infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^3 - 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty^3 - \infty = \infty.$$

De plus, à $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ainsi, l'image de $(0, \infty)$ par f est l'intervalle $(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \infty)$.

Résumé

La fonction $f(x) = x^3 - x$ n'est pas injective mais elle est surjective. Nous avons également déterminé que :

$$f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1] \quad \text{et} \quad f((0, +\infty)) = (0, +\infty).$$

Explication des étapes :

- (1) Injectivité : On vérifie si deux valeurs de x distinctes peuvent donner la même valeur pour $f(x)$. En résolvant l'équation $f(x_1) = f(x_2)$, on montre que f n'est pas injective.
- (2) Surjectivité : On vérifie que pour toute valeur réelle, il existe un x tel que $f(x)$ atteigne cette valeur en analysant les limites à l'infini.

Exercice 1.6

Soit \mathbb{Z} l'ensemble des entiers. Définissons la fonction $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ par $f_1(n) = 2n$. Il est clair que f_1 est injective car si $2n_1 = 2n_2$ pour certains $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, alors en divisant par 2 des deux côtés, on obtient $n_1 = n_2$. Ainsi, f_1 est injective.

Cependant, f_1 n'est pas surjective car son image est constituée uniquement des entiers pairs. En effet, si nous supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = 2k + 1$ (un entier impair), alors $2n = 2k + 1$. Cela impliquerait $1 = 2(n - k)$, ce qui est une absurdité car 2 ne divise pas 1. Par conséquent, f_1 n'est pas surjective.

Considérons maintenant la fonction $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Comme $f(-1) = f(1) = 1$, on constate que f_3 n'est pas injective. De plus, f_3 n'est pas surjective car il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0$ — autrement dit, les valeurs négatives ne sont jamais atteintes par f_3 .

Cependant, si nous modifions l'ensemble d'arrivée \mathbb{R} en $[0, \infty)$, alors $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ devient surjective. En effet, toute valeur dans $[0, +\infty)$ est atteinte par f_4 , comme on peut le voir sur le graphe de $y = x^2$.

Exercice 1.7.3 et 1.7.4

Déterminons si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

- (1) $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;
- (2) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Solution

1. Étude de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La fonction f_3 est définie par $f_3(x, y) = (x + y, x - y)$. Nous devons vérifier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Injectivité. Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de \mathbb{R}^2 tels que $f_3(x_1, y_1) = f_3(x_2, y_2)$, c'est-à-dire :

$$(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2).$$

Cela nous donne deux équations :

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \quad \text{et} \quad x_1 - y_1 = x_2 - y_2.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$. En soustrayant, on obtient $2y_1 = 2y_2$, donc $y_1 = y_2$. Par conséquent, f_3 est injective.

Surjectivité. Prenons un couple arbitraire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nous devons trouver $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f_3(x, y) = (a, b) \quad \text{soit} \quad (x + y, x - y) = (a, b).$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$x + y = a \quad \text{et} \quad x - y = b.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $2x = a + b$, donc $x = \frac{a+b}{2}$. En soustrayant, on obtient $2y = a - b$, donc $y = \frac{a-b}{2}$. Ainsi, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie $f_3(x, y) = (a, b)$. Par conséquent, f_3 est surjective.

Bijectivité. Puisque f_3 est à la fois injective et surjective, elle est bijective.

2. Étude de la fonction $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f_4 est définie par $f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Nous allons également vérifier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Injectivité. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $f_4(x_1) = f_4(x_2)$, c'est-à-dire :

$$\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}.$$

En croisant les produits, on obtient :

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_2 + 1)(x_1 - 1).$$

Développons les deux côtés :

$$x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1.$$

En simplifiant, on obtient $-x_1 + x_2 = -x_2 + x_1$, ce qui donne $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$. Ainsi, f_4 est injective.

Surjectivité. Pour vérifier la surjectivité, prenons $1 \in \mathbb{R}$, et considérons l'équation suivante $f_4(x) = 1$, soit :

$$\frac{x + 1}{x - 1} = 1.$$

Cela implique que $x + 1 = x - 1$, soit $2 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, f_4 n'est pas surjective.

Bijektivité. f_4 est injective mais pas surjective, donc f_4 n'est pas bijective.

Exercice 1.8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Étudier si f est injective et/ou surjective. Montrer que la restriction de $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective.

Solution

1) Étude de l'image. Soit $y \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Cela équivaut à

$$y(1 + x^2) = 2x \iff yx^2 - 2x + y = 0.$$

C'est une équation quadratique en x . Son discriminant est

$$\Delta = (-2)^2 - 4(y)(y) = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2).$$

Il faut $\Delta \geq 0$, ce qui donne $-1 \leq y \leq 1$. Ainsi,

$$\text{Im}(f) = [-1, 1].$$

Donc f n'est pas surjective sur \mathbb{R} , mais elle est surjective comme application $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.

2) Injectivité. Supposons $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2}.$$

En multipliant, on obtient

$$x_1(1+x_2^2) = x_2(1+x_1^2).$$

Soit

$$x_1 - x_2 = x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 - x_2).$$

Donc

$$(x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0.$$

Il y a deux cas :

- $x_1 = x_2$;
- ou bien $x_1 x_2 = 1$.

Ainsi f n'est pas injective : par exemple, $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$.

3) Conclusion. La fonction f n'est pas injective et son image est l'intervalle $[-1, 1]$. Elle est donc surjective comme application $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, mais non surjective comme application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

D'abord on va montrer que la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1]$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ tels que $x_1 < x_2$. On a

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2(x_2(1+x_1^2) - x_1(1+x_2^2))}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Développons le numérateur :

$$x_2(1+x_1^2) - x_1(1+x_2^2) = x_2 + x_2 x_1^2 - x_1 - x_1 x_2^2 = (x_2 - x_1) - x_1 x_2 (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2).$$

Ainsi

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Observons maintenant les signes :

- Comme $x_1 < x_2$, on a $x_2 - x_1 > 0$.
- Pour $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ on a $|x_1 x_2| \leq 1$. L'égalité $x_1 x_2 = 1$ n'est possible que si $x_1 = x_2 = 1$, mais ceci contredit $x_1 < x_2$. Donc $x_1 x_2 < 1$, d'où $1 - x_1 x_2 > 0$.
- Les dénominateurs $1+x_1^2$ et $1+x_2^2$ sont strictement positifs.

Par conséquent le quotient ci-dessus est strictement positif, donc $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Autrement dit, pour $x_1 < x_2$ dans $[-1, 1]$ on a $f(x_1) < f(x_2)$: la fonction f est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

Une fonction strictement croissante sur un intervalle est injective. On conclut que la restriction

$$f|_{[-1,1]} : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$$

est injective (et en fait bijective, puisque son image est exactement $[-1,1]$).

□

Exercice 1.9

Soit E un ensemble non vide. Si A est une partie de E , on appelle **fonction caractéristique** de A , notée χ_A , l'application définie de E dans \mathbb{R} par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- (1) (a) Si $f = \chi_A$ avec $A \subset E$, vérifier que $A = f^{-1}(\{1\})$.
 (b) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe $A \subset E$ vérifiant $f = \chi_A$ si et seulement si $f(E) \subset \{0,1\}$, c'est-à-dire que f ne prend que des valeurs dans $\{0,1\}$.
- (2) Soient A et B deux parties de E , et notons $f = \chi_A$ et $g = \chi_B$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

$$1 - f \quad ; \quad f \cdot g \quad ; \quad f + g - f \cdot g.$$

Solution

(1) Vérification et démonstration.

(a) Vérifier que $A = f^{-1}(\{1\})$. La fonction caractéristique χ_A est définie par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

L'ensemble $f^{-1}(\{1\})$ est constitué des éléments de E pour lesquels la fonction f prend la valeur 1. Puisque $f = \chi_A$, on a :

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in E \mid \chi_A(x) = 1\} = \{x \in E \mid x \in A\} = A.$$

Donc, $A = f^{-1}(\{1\})$.

Explication : La fonction caractéristique χ_A "marque" les éléments appartenant à A avec la valeur 1, tandis que les autres éléments de E

sont associés à la valeur 0. En définissant $f^{-1}(\{1\})$, on trouve bien que cet ensemble correspond à A .

(b) *Montrer qu'il existe $A \subset E$ tel que $f = \chi_A$ si et seulement si $f(E) \subset \{0, 1\}$.* **Sens direct :** Supposons que $f = \chi_A$ pour un certain $A \subset E$. Par définition de la fonction caractéristique, on a :

$$f(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Ainsi, f ne prend que les valeurs 0 ou 1, ce qui implique que $f(E) \subset \{0, 1\}$.

Sens réciproque : Supposons que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et que $f(E) \subset \{0, 1\}$, c'est-à-dire que $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ pour tout $x \in E$. Définissons l'ensemble $A = f^{-1}(\{1\})$, c'est-à-dire :

$$A = \{x \in E \mid f(x) = 1\}.$$

Dans ce cas, f coïncide avec la fonction caractéristique χ_A , car :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Donc $f = \chi_A$.

Explication : Si une fonction f ne prend que les valeurs 0 et 1, alors elle peut être interprétée comme une fonction caractéristique d'un certain ensemble $A \subset E$.

(2) Fonction caractéristique de nouveaux ensembles.

(a) $1 - f$. Nous avons $f = \chi_A$, donc :

$$1 - f(x) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si } x \in A, \\ 1 - 0 = 1 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Cela correspond à la fonction caractéristique du complémentaire de A dans E , noté A^c . Ainsi :

$$1 - f = \chi_{A^c}.$$

(b) $f \cdot g$. La multiplication de f et g est définie par :

$$f(x) \cdot g(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$

Cela vaut 1 si $x \in A$ et $x \in B$, c'est-à-dire si $x \in A \cap B$. Sinon, cela vaut 0. Donc :

$$f \cdot g = \chi_{A \cap B}.$$

(c) $f + g - f \cdot g$. Calculons cette expression :

$$f(x) + g(x) - f(x) \cdot g(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$

Si $x \in A \cup B$, alors le résultat vaut 1. En effet : - Si $x \in A$ mais $x \notin B$, le terme vaut $1 + 0 - 0 = 1$. - Si $x \in B$ mais $x \notin A$, le terme vaut $0 + 1 - 0 = 1$. - Si $x \in A \cap B$, le terme vaut $1 + 1 - 1 = 1$. - Si $x \notin A \cup B$, le terme vaut 0.

Ainsi, cette expression est la fonction caractéristique de $A \cup B$:

$$f + g - f \cdot g = \chi_{A \cup B}.$$

Explication.

- (1) Fonction caractéristique : Expliquer que la fonction caractéristique permet de représenter un ensemble en associant la valeur 1 aux éléments appartenant à cet ensemble, et 0 aux autres éléments.
- (2) Vérification de $A = f^{-1}(\{1\})$: Montrez que l'ensemble des éléments qui sont envoyés vers 1 par χ_A est précisément l'ensemble A , en raison de la définition même de la fonction caractéristique.
- (3) Existence d'une fonction caractéristique : Expliquez que pour toute fonction qui ne prend que les valeurs 0 et 1, on peut associer un ensemble pour lequel cette fonction est la fonction caractéristique.
- (4) Opérations sur les fonctions caractéristiques : Reliez les opérations sur les fonctions caractéristiques (soustraction, produit, somme) avec les opérations correspondantes sur les ensembles (complémentaire, intersection, union).

Exercice 1.10

Soit E un ensemble et notons $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ l'ensemble des applications de E vers $\{0, 1\}$. Montrer que l'application Φ définie par :

$$\Phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\}), \quad A \longmapsto \chi_A$$

est bijective, où χ_A désigne la fonction caractéristique de A .

Solution

Rappelons que pour un sous-ensemble $A \subseteq E$ la fonction caractéristique $\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ est définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Nous allons construire une application réciproque $\Psi : \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et montrer que Ψ est l'inverse de Φ .

Définissons pour $f \in \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ le sous-ensemble

$$\Psi(f) = \{x \in E : f(x) = 1\}.$$

Autrement dit $\Psi(f)$ est l'ensemble des points où f prend la valeur 1.

Vérifions que Ψ est bien l'inverse de Φ :

- Pour tout $A \subseteq E$, on a

$$\Psi(\Phi(A)) = \Psi(\chi_A) = \{x \in E : \chi_A(x) = 1\} = \{x \in E : x \in A\} = A.$$

Ainsi $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

- Pour toute fonction $f : E \rightarrow \{0, 1\}$, on considère $\Phi(\Psi(f)) = \chi_{\Psi(f)}$. Par définition de $\Psi(f)$, pour tout $x \in E$,

$$\chi_{\Psi(f)}(x) = 1 \iff x \in \Psi(f) \iff f(x) = 1,$$

et de même $\chi_{\Psi(f)}(x) = 0 \iff f(x) = 0$. Donc $\chi_{\Psi(f)}(x) = f(x)$ pour tout x , ce qui donne $\Phi(\Psi(f)) = f$. Ainsi $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{F}(E, \{0, 1\})}$.

Comme Ψ est à la fois à gauche et à droite inverse de Φ , l'application Φ est bijective.

Remarque. Cette bijection explicite montre en particulier que $\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$ lorsque E est fini, puisque chaque fonction $E \rightarrow \{0, 1\}$ est déterminée par le choix, pour chaque élément de E , de son image 0 ou 1.

Exercice 1.11

En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{2k} \binom{n}{2k}.$$

Solution

Nous devons utiliser la **formule du binôme de Newton**, qui est donnée par :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

En particulier, lorsque $x = 1$ et $y = -1$, nous avons :

$$(1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k.$$

Or, $1 + (-1) = 0$, donc :

$$0^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Explication

Cette équation est un résultat classique qui découle directement du développement binomial. La somme alternée des coefficients binomiaux avec les signes $(-1)^k$ est égale à 0, car l'expansion de $(1+(-1))^n$ conduit à zéro pour tout $n \geq 1$. Ce résultat est souvent appelé l'identité de la somme alternée des coefficients binomiaux.

Deuxième partie : Somme des coefficients binomiaux de rang pair

On doit déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}.$$

Pour cela, considérons à nouveau la formule du binôme de Newton, mais cette fois en utilisant $x = 1$ et $y = 1$:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Cependant, cette somme peut être décomposée en deux parties. On peut écrire cette somme en deux parties, la première est lorsque k est pair, et la deuxième partie est lorsque k est impair: les termes où k est pair, et les termes où k est impair. Ainsi, on a :

$$2^n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

Mais en utilisant la première identité démontrée, on sait que la somme des termes impairs est égale à la somme des termes pairs, car la somme alternée est nulle. Par conséquent, on peut écrire :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

Conclusion : La somme des coefficients binomiaux de rang pair est :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

Explication

La deuxième partie de l'exercice repose sur l'idée que les coefficients binomiaux pairs et impairs sont distribués de manière symétrique. Cela nous permet de conclure que la somme des coefficients binomiaux de rang pair est la moitié de la somme totale des coefficients binomiaux, soit 2^{n-1} .

Explication des étapes.

(1) Première partie :

- On commence par appliquer la formule du binôme de Newton,

$$((x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k),$$

qui permet de développer un binôme élevé à une puissance.

- En prenant $(x = 1)$ et $(y = -1)$, on simplifie la formule en obtenant une somme alternée de coefficients binomiaux.
- Cela nous conduit à la somme nulle car $((1 + (-1))^n = 0)$ pour tout $(n \geq 1)$.

(2) Deuxième partie :

- En utilisant la même formule du binôme, mais cette fois-ci avec $(x = 1)$ et $(y = 1)$, on développe $((1 + 1)^n = 2^n)$.
- Cette somme totale peut être divisée en deux : les termes où l'indice (k) est pair et ceux où (k) est impair.
- Puisque la somme des coefficients binomiaux alternés est nulle, cela signifie que les sommes des termes pairs et impairs sont égales.

- On en déduit que la somme des termes pairs est égale à la moitié de la somme totale, soit 2^{n-1} .

Exercice 1.12

Soit E un ensemble à n éléments et soit m un entier strictement positif. Déterminer :

- (1) Le nombre d'éléments de E^m .
- (2) Le nombre de parties de E^m .

Solution

1. Le nombre d'éléments de E^m . L'ensemble E^m représente le **produit cartésien** de E par lui-même m fois. En d'autres termes, un élément de E^m est un m -uplet de la forme :

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{avec} \quad x_i \in E \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m.$$

Comme E a exactement n éléments, pour chaque x_i , il y a n choix possibles. Ainsi, le nombre total d'éléments dans E^m , noté $|E^m|$, est :

$$|E^m| = n^m.$$

Conclusion : Le nombre d'éléments de E^m est n^m .

2. Le nombre de parties de E^m . Le nombre de parties d'un ensemble A est donné par $2^{|A|}$, où $|A|$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble A . Ici, l'ensemble E^m contient n^m éléments, comme démontré précédemment.

Par conséquent, le nombre de parties de E^m , noté $\mathcal{P}(E^m)$, est :

$$\mathcal{P}(E^m) = 2^{|E^m|} = 2^{n^m}.$$

Conclusion : Le nombre de parties de E^m est 2^{n^m} .

Explication des étapes.

(1) Première partie :

- E^m est le produit cartésien de l'ensemble E par lui-même m fois. Cela signifie que chaque élément de E^m est une séquence de longueur m , où chaque élément de la séquence provient de E .
- Comme E a n éléments, pour chaque position dans la séquence, il y a n choix possibles. Le nombre total de séquences (ou d'éléments dans E^m) est donc n^m .

(2) Deuxième partie :

- Le nombre de parties d'un ensemble est déterminé par le nombre de sous-ensembles possibles. Pour un ensemble contenant k éléments, le nombre de sous-ensembles est 2^k (car pour chaque élément, il existe deux possibilités : l'inclure dans le sous-ensemble ou ne pas l'inclure).
- Dans notre cas, l'ensemble E^m contient n^m éléments, donc le nombre total de parties de cet ensemble est 2^{n^m} .

Exercice 1.14

Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que

- (1) $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
- (2) f est surjective $\iff \forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$.
- (3) f est injective $\iff \forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.
- (4) f est bijective $\iff \forall A \subset E, f(\mathbb{C}_E A) = \mathbb{C}_F f(A)$.

Solution

On note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ et $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

(1) Soit $B \subset F$. Montrons l'égalité par deux inclusions.

a) $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(E)$.

Si $y \in f(f^{-1}(B))$ alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Par définition de $f^{-1}(B)$ on a $f(x) \in B$, donc $y \in B$. De plus $y = f(x) \in f(E)$. D'où $y \in B \cap f(E)$.

b) $B \cap f(E) \subset f(f^{-1}(B))$.

Soit $y \in B \cap f(E)$. Alors $y \in f(E)$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$ on a $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

Les deux inclusions donnent $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

(2) Supposons d'abord f surjective. Alors $f(E) = F$ et d'après (1) on a pour tout $B \subset F$

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) = B \cap F = B,$$

d'où l'implication \Rightarrow .

Réciproquement, supposons que pour tout $B \subset F$ on a $f(f^{-1}(B)) = B$. En prenant $B = F$ on obtient $f(f^{-1}(F)) = F$. Or $f^{-1}(F) = E$, donc $f(E) = F$, autrement dit f est surjective. Cela prouve l'implication \Leftarrow .

(3) Supposons f injective. Pour tout $A \subset E$ on a toujours l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ (car si $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$). Montrons l'inclusion réciproque : soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité $x = a \in A$. Ainsi $f^{-1}(f(A)) \subset A$. On a donc $f^{-1}(f(A)) = A$.

Réciproquement, supposons que pour tout $A \subset E$ on a $f^{-1}(f(A)) = A$. Prenons $A = \{x\}$. Alors $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$. Si $f(x) = f(y)$, alors $y \in f^{-1}(f(\{x\}))$ donc $y = x$. Ainsi f est injective.

(4) Supposons f bijective. Soit $A \subset E$. Alors f admet une bijection réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$. On a

$$f(\complement_E A) = F \setminus f(A),$$

car $y \in f(\complement_E A)$ ssi il existe $x \notin A$ tel que $y = f(x)$; comme f est bijective cela équivaut à dire que $f^{-1}(y) \notin A$, i.e. $y \notin f(A)$. D'où $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

Réciproquement, supposons que pour tout $A \subset E$ on ait $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

- Prenons $A = \emptyset$. On obtient $f(E) = \complement_F f(\emptyset) = \complement_F \emptyset = F$, donc f est surjective.
- Pour l'injectivité, supposons $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$. Posons $A = \{x\}$. Alors $y \in E \setminus A$, donc $f(y) \in f(E \setminus A) = \complement_F f(A)$ par hypothèse. Mais $f(y) = f(x) \in f(A)$, contradiction. Donc f est injective.

Ainsi f est bijective.

Exercice 1.18

En utilisant la fonction $x \rightarrow (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Solution

1. Calcul de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$. Le développement binomial de $(1+x)^n$ est :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant cette expression par rapport à x :

$$\frac{d}{dx} ((1+x)^n) = n(1+x)^{n-1}$$

et

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

En multipliant les deux membres par x , on obtient :

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k.$$

Pour $x = 1$, nous avons :

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Ainsi, la somme est :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

2. Calcul de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$. En partant de $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, on intègre cette expression :

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

L'intégrale donne :

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

En évaluant pour $x = 1$, nous obtenons :

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Ainsi, la somme est :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Explication des étapes.

- (1) Première somme : Nous avons utilisé la fonction génératrice $(1+x)^n$ et dérivé l'expression pour obtenir une relation avec la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$. Ensuite, nous avons substitué $x = 1$ pour obtenir le résultat final $n2^{n-1}$.
- (2) Deuxième somme : Nous avons intégré la fonction $(1+x)^n$ et utilisé le fait que l'intégration produit une somme de la forme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$. L'évaluation de l'intégrale à $x = 1$ nous donne le résultat $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.