CH 4: POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 4.2

(1) Soit $P \in K[X]$ et $(a,b) \in K^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ (on distinguera les cas $a=b$ et $a \neq b$).

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de

$$P = X^n + X^{n-1} + X + 1$$

par

$$Q = (X-1)^2.$$

(3) Sans effectuer la division euclidienne, prouver que le polynôme A divise le polynôme B dans les cas suivants :
 (a) $A = X - i$ et $B = X^3 - 2iX^2 - i$,
 (b) $A = X^2 - 1$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

(4) Déterminer les réels a et b de sorte que X^2+2 divise

$$X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$$

dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution

(1) Soit $P \in K[X]$ et $(a,b) \in K^2$. On cherche le reste R de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Le degré de R est au plus 1, donc on peut écrire $R(X) = \alpha X + \beta$.

Cas $a \neq b$.
Le polynôme $P - R$ est divisible par $(X-a)(X-b)$, donc en évaluant en $X=a$ et $X=b$ on obtient

$$R(a) = P(a), \qquad R(b) = P(b).$$

Les deux équations déterminent α, β. Une forme explicite de R est

$$R(X) = \frac{P(a)\,(X-b) - P(b)\,(X-a)}{a-b}.$$

On vérifie immédiatement que cette expression est bien de degré ≤ 1 et satisfait $R(a) = P(a), R(b) = P(b)$.

Cas $a = b$.
Alors le diviseur est $(X-a)^2$. Le reste R a encore degré ≤ 1. L'annulation de $P - R$ modulo $(X-a)^2$ équivaut à l'égalité des valeurs et des dérivées en a :

$$R(a) = P(a), \qquad R'(a) = P'(a).$$

Si on pose $R(X) = \alpha X + \beta$, ces deux conditions donnent directement

$$R(X) = P(a) + P'(a)\,(X-a).$$

(On peut aussi écrire $R(X) = P'(a)X + (P(a) - aP'(a))$.)

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$P(X) = X^n + X^{n-1} + X + 1, \qquad Q(X) = (X-1)^2.$$

Le reste R de la division de P par Q est de degré ≤ 1. Comme précédemment, pour un diviseur $(X-1)^2$ on a les conditions

$$R(1) = P(1), \qquad R'(1) = P'(1).$$

Calculons :

$$P(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

et

$$P'(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 1 \quad \Rightarrow \quad P'(1) = n + (n-1) + 1 = 2n.$$

Donc

$$R(X) = P(1) + P'(1)\,(X-1) = 4 + 2n(X-1) = 2nX + (4-2n).$$

Ainsi le reste est $R(X) = 2nX + 4 - 2n$.

(3) Sans effectuer la division, prouver que A divise B.

a) $A = X - i$ et $B = X^3 - 2iX^2 - i$.
Un polynôme $X - \alpha$ divise B si et seulement si $B(\alpha) = 0$. Évaluons en $\alpha = i$:

$$B(i) = i^3 - 2i \cdot i^2 - i.$$

Or $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$, donc

$$B(i) = -i - 2i(-1) - i = -i + 2i - i = 0.$$

Donc $X - i$ divise B.

b) $A = X^2 - 1$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
On remarque que $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Il suffit de montrer que $B(1) = 0$ et $B(-1) = 0$.

$$B(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0, \qquad B(-1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0.$$

Donc $X - 1$ et $X + 1$ divisent B, d'où $X^2 - 1$ divise B. (On peut aussi factoriser : $B = X^2(X+1) - 1(X+1) = (X^2-1)(X+1)$.)

(4) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 + 2$ divise

$$S(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$$

dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $X^2 + 2$ divise S, il existe des réels c, d tels que

$$S(X) = (X^2 + 2)(X^2 + cX + d).$$

Développons :

$$(X^2 + 2)(X^2 + cX + d) = X^4 + cX^3 + (d+2)X^2 + 2cX + 2d.$$

En comparant les coefficients avec $S(X) = X^4 + 1 \cdot X^3 + aX^2 + bX + 2$, on obtient le système

$$\begin{cases} c = 1, \\ d + 2 = a, \\ 2c = b, \\ 2d = 2. \end{cases}$$

De $2d = 2$ on obtient $d = 1$. Alors $a = d + 2 = 3$. De $c = 1$ on obtient $b = 2c = 2$. Donc

$$(a, b) = (3, 2).$$

On vérifie que pour ces valeurs

$$S(X) = (X^2 + 2)(X^2 + X + 1).$$

Résumé des réponses :

- (1) Si $a \neq b$, le reste est $R(X) = \dfrac{P(a)(X-b) - P(b)(X-a)}{a-b}$. Si $a = b$, le reste est $R(X) = P(a) + P'(a)(X-a)$.

- (2) Le reste est $R(X) = 2nX + 4 - 2n$.
- (3a) $X - i$ divise $X^3 - 2iX^2 - i$. (3b) $X^2 - 1$ divise $X^3 + X^2 - X - 1$.
- (4) $a = 3,\ b = 2$.

Exercice 4.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $1 - X$ divise $1 - X^{n+1}$ dans $K[X]$ et donner le quotient de la division euclidienne.

Solution

Considérons la somme

$$S(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n = \sum_{k=0}^{n} X^k.$$

Multiplions $S(X)$ par $1 - X$ et regardons ce que l'on obtient :

$$(1 - X)S(X) = S(X) - X\,S(X).$$

Écrivons explicitement $S(X)$ et $X\,S(X)$:

$$S(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n,$$
$$X\,S(X) = X + X^2 + \cdots + X^n + X^{n+1}.$$

Si l'on soustrait ces deux expressions, tous les termes intermédiaires se simplifient (ils s'annulent par paires) et il reste :

$$S(X) - X\,S(X) = 1 - X^{n+1}.$$

Autrement dit,

$$1 - X^{n+1} = (1 - X)\,S(X).$$

Donc $1 - X$ divise $1 - X^{n+1}$ et le quotient est

$$Q(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n.$$

Remarque. Pour vérifier, on peut développer $(1 - X)Q(X)$ et constater qu'on retrouve bien $1 - X^{n+1}$. Pour $n = 0$ la formule donne $1 - X = (1 - X) \cdot 1$, ce qui est cohérent.

Exercice 4.5

Soient $A, B \in K[X]$ non nuls. Montrer que si $A \mid B$ et $B \mid A$, alors il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $B = \lambda A$.

Solution

Comme $A \mid B$, il existe $C \in K[X]$ tel que $B = AC$. De même, comme $B \mid A$, il existe $D \in K[X]$ tel que $A = BD$.
En passant aux degrés (en notant deg le degré d'un polynôme), on obtient

$$\deg B = \deg A + \deg C \quad \text{et} \quad \deg A = \deg B + \deg D.$$

En substituant la première égalité dans la seconde on a

$$\deg A = (\deg A + \deg C) + \deg D,$$

donc $\deg C + \deg D = 0$. Comme les degrés sont des entiers $\geq -\infty$ (ici les polynômes sont non nuls, donc degrés ≥ 0), il suit que $\deg C = \deg D = 0$.

Ainsi C et D sont des polynômes de degré 0, donc des constantes non nulles : il existe $\lambda, \mu \in K^\times$ avec $C = \lambda$ et $D = \mu$. Alors

$$B = AC = \lambda A.$$

On peut aussi vérifier $\lambda\mu = 1$ à partir de $A = BD = A(CD)$, donc $\mu = \lambda^{-1}$, mais l'information principale est que B est un multiple scalaire (non nul) de A.
Ceci achève la preuve. $\square$

Exercice 4.6

Soit $P \in K[X]$.

(1) Supposons dans cette question que $\deg(P) \geq 1$. Montrer alors que

$$\deg(P') = \deg(P) - 1.$$

(2) Montrer que P est constant si et seulement si $P' = 0$.

Solution

Écrivons

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \qquad a_n \neq 0,$$

de sorte que $\deg(P) = n$. Le polynôme dérivé est

$$P'(X) = \sum_{i=1}^{n} i\, a_i X^{i-1}.$$

(1) Le terme de plus haut degré de P' est a priori na_nX^{n-1}. Si l'entier n est non nul dans K (autrement dit si la caractéristique de K ne divise pas n), alors $na_n \neq 0$ et le coefficient de X^{n-1} dans P' est non nul. On a donc $\deg(P') = n - 1 = \deg(P) - 1$.

(2) On examine l'équivalence « P est constant $\iff P' = 0$.

- Si P est constant, alors $P' = 0$ trivialement.
- Réciproquement, supposons $P' = 0$. Écrivons de nouveau $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 1$. Alors

$$P'(X) = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} = 0.$$

Cela signifie que pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a $ia_i = 0$ dans K. Or aucun entier $i \geq 1$ n'est nul dans K, donc $ia_i = 0$ entraîne $a_i = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi $P = a_0$ est constant. Donc sur un corps de caractéristique 0 l'équivalence est vraie.

Exercice 4.8

Déterminer tous les polynômes non constants $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

Solution

(1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' \mid P$. Notons $n = \deg(P)$. On suppose d'abord $n > 1$.

(i) Comme P' est non nul et $\deg(P') = n - 1$, l'hypothèse $P' \mid P$ implique qu'il existe un polynôme $H \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$P(X) = H(X)\, P'(X).$$

En passant aux degrés on obtient $\deg H = \deg P - \deg P' = n - (n-1) = 1$. Donc H est de degré 1, on l'écrit

$$H(X) = \alpha X + \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$

En comparant les coefficients dominants : si $P(X) = a_n X^n + \cdots$ alors $P'(X) = n a_n X^{n-1} + \cdots$, d'où

$$a_n = \alpha \cdot n a_n,$$

et donc $\alpha = \dfrac{1}{n}$. On pose $b = \dfrac{\beta}{\alpha} = \beta n$, autrement dit on réécrit

$$H(X) = \frac{1}{n}\big(X + nb\big).$$

On obtient ainsi

$$\boxed{P(X) = \frac{1}{n}\big(X + nb\big)P'(X)\ .}$$

(ii) Différencions l'égalité précédente. À droite :

$$P'(X) = \frac{1}{n}P'(X) + \frac{1}{n}\big(X + nb\big)P''(X).$$

En multipliant par n et en regroupant les termes on obtient

$$(n-1)P'(X) = \big(X + nb\big)P''(X),$$

d'où

$$\boxed{P'(X) = \frac{1}{n-1}\big(X + nb\big)P''(X)\ .}$$

(iii) Montrons que $-nb$ est racine de P d'ordre n. D'abord, d'après (i) on a

$$P(-nb) = \frac{1}{n}\big(-nb + nb\big)P'(-nb) = 0,$$

donc $-nb$ est racine de P. Ensuite, d'après (ii) on a $P'(-nb) = 0$. En remplaçant P par P' dans la relation de (ii) (remarquant que $\deg P' = n - 1 > 1$ si $n > 2$), on obtient par le même raisonnement que $P''(-nb) = 0$. En procédant de façon itérative (ou par récurrence) on montre que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$P^{(k)}(-nb) = 0.$$

Ainsi la multiplicité de la racine $-nb$ est au moins n. Mais $\deg P = n$, donc la multiplicité est exactement n. On a donc

$$P(X) = a\big(X + nb\big)^n$$

pour un certain $a \in \mathbb{R}^\times$.

(iv) En posant $c = nb$ et en renommant la constante a, on retrouve la forme annoncée : il existe $a, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ tels que

$$\boxed{P(X) = a\,(X + c)^n\ .}$$

(On peut bien sûr écrire $c = b$ en changeant la notation — l'important est que P est une puissance entière d'un polynôme affine.)

(2) Réciproquement, prenons

$$P(X) = a(X + b)^n, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \geq 1.$$

Alors

$$P'(X) = an(X + b)^{n-1},$$

donc $P(X) = \dfrac{1}{n}(X + b)P'(X)$. En particulier P' divise P. De plus P est non constant puisque $n \geq 1$ et $a \neq 0$.

Conclusion. Les polynômes non constants $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P sont exactement les polynômes de la forme

$$P(X) = a(X+b)^n,$$

avec $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice Extra

Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $\deg P \geq 1$, se factorise sous la forme

$$P(X) = c\prod_{j=1}^{r}(X-\alpha_j)^{m_j},$$

où $c \in \mathbb{C}^\times$, les α_j sont des racines distinctes de P dans $\mathbb{C}$ et les m_j sont des entiers strictement positifs dont la somme vaut $\deg P$.

Solution

Preuve (en admettant le Théorème Fondamental de l'Algèbre)

Rappelons le *Théorème Fondamental de l'Algèbre (TFAdA)* : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Nous montrons la factorisation par récurrence sur n.
Initialisation. Si $n = 1$, alors $P(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$ et on peut écrire

$$P(X) = a\big(X - (-b/a)\big),$$

d'où la propriété.
Hérédité. Supposons la propriété vraie pour tout polynôme de degré strictement inférieur à n. Par le TFAdA, P admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Par le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$ il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X) = (X-\alpha)Q(X).$$

La degree de Q est $n-1$. Par hypothèse de récurrence, Q se factorise en produit de facteurs linéaires

$$Q(X) = c\prod_{j=1}^{r}(X-\alpha_j)^{m_j},$$

d'où

$$P(X) = c(X-\alpha)\prod_{j=1}^{r}(X-\alpha_j)^{m_j},$$

ce qui donne la factorisation souhaitée. En répétant l'argument jusqu'à degré 1 on obtient finalement

$$P(X) = c\prod_{j=1}^{s}(X-\beta_j)^{n_j},$$

avec $\sum_j n_j = n$.
Multiplicités et unicité. Si l'on groupe les facteurs correspondant à la même racine on obtient la forme annoncée avec racines distinctes α_j et exposants m_j. L'unicité (à l'ordre des facteurs près) du produit découle de l'unicité de la factorisation dans l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X]$: si

$$c\prod_{j=1}^{r}(X-\alpha_j)^{m_j} = d\prod_{k=1}^{t}(X-\beta_k)^{n_k},$$

alors nécessairement $r = t$, les ensembles $\{\alpha_j\}$ et $\{\beta_k\}$ coïncident et $m_j = n_k$ pour la correspondance appropriée; de plus $c = d$.

Cela achève la preuve (en admettant le TFAdA).

Exercice 4.12

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = |Q(z)|.$$

(1) Montrer que P et Q one même racines.
(2) Montrer que si z_0 est une racine de P (et donc de Q), alors la multiplicité est la même.
(3) En déduire alors qu'il exsite $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ tel que $P = \lambda Q$.

Solution

Nous prouvons successivement les trois assertions demandées.

Exercice 4.13

Factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Solution

On factorise les polynômes demandés.

1) $P_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
Posons $y = x^2$. On a $y^2 - 5y + 4 = (y-1)(y-4)$, d'où

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

En factorisant encore en facteurs linéaires sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{C}$) :

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Ainsi la décomposition est la même dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2) $P_2(x) = x^4 + x^2 + 1$. On a

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Mais $x^2 + x + 1$ et $x^2 + x - 1$ sont irr. dans $\mathbb{R}[X]$. Sur $\mathbb{C}$ chacun des quadratiques ci-dessous se décompose en facteurs linéaires ; leurs racines sont

$$x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \qquad x^2 - x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

donc

$$x^4 + x^2 + 1 = \prod_{\zeta^3=1,\ \zeta\neq 1} (x - \sqrt{\zeta})\,(x + \sqrt{\zeta})$$

(une écriture explicite en factors linéaires donne les quatre racines ci-dessus).

3) $P_3(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$.
Posons $y = x^2$. On a

$$y^3 + 2y^2 + 2y + 1 = (y+1)(y^2 + y + 1).$$

En revenant en x,

$$x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)(x^4+x^2+1).$$

En utilisant la factorisation de la question 2),

$$x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Sur $\mathbb{C}$ chacune de ces trois quadratiques se décompose en facteurs linéaires.

4) $P_4(x) = x^3 + 1$.
Ceci est une somme de cubes. On utilise la formule $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Sur $\mathbb{C}$ on peut encore factoriser $x^2 - x + 1 = (x-\omega)(x-\overline{\omega})$ où $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ (et $\overline{\omega} = \omega^2$), donc

$$x^3 + 1 = (x+1)(x-\omega)(x-\omega^2).$$

5) $P_5(x) = x^4 + 1$.
Plusieurs méthodes existent. Une factorisation usuelle sur $\mathbb{R}$ est obtenue en complétant le carré :

$$x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2.$$

Ceci donne une différence de carrés :

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1).$$

Les deux facteurs sont des quadratiques irréductibles sur $\mathbb{R}$ (leur discriminant vaut $2-4 = -2 < 0$).
Sur $\mathbb{C}$ on peut encore factoriser en facteurs linéaires ; les racines sont les 8-ièmes racines de l'unité impaires:

$$x^4 + 1 = \prod_{k=0}^{3}\left(x - e^{i\pi/4(2k+1)}\right) = (x - e^{i\pi/4})(x - e^{3i\pi/4})(x - e^{5i\pi/4})(x - e^{7i\pi/4}).$$

Récapitulatif (formes finales) :

$$\begin{aligned}
&1)\quad x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X],\ \mathbb{C}[X].\\
&2)\quad x^4 + x^2 + 1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X],\\
&\qquad\qquad = \prod_{r\in\left\{\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}} (x-r) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X].\\
&3)\quad x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X],\ \mathbb{C}[X].\\
&4)\quad x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X],\\
&\qquad\qquad = (x+1)(x-\omega)(x-\omega^2) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X].\\
&5)\quad x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X],\\
&\qquad\qquad = \prod_{j=0}^{3}\left(x - e^{i\pi/4(2j+1)}\right) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X].
\end{aligned}$$

Exercice 4.14

(1) Décomposer
$$P(X) = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$$
en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il admet une racine triple.

(2) (2) Décomposer
$$P(X) = 2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$$
en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine réelle.

Solution

(1) Décomposition de $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ dans $\mathbb{R}[X]$

Si un polynôme P admet une racine r de multiplicité $m \geq 1$, alors r est racine de $P, P', \dots, P^{(m-1)}$. Ici on nous dit qu'il existe une racine triple, donc un r tel que
$$P(r) = P'(r) = P''(r) = 0.$$
Calculons les dérivées :
$$P'(X) = 4X^3 - 27X^2 + 60X - 44, \qquad P''(X) = 12X^2 - 54X + 60.$$
Résolvons $P''(X) = 0$. On peut diviser par 6 :
$$2X^2 - 9X + 10 = 0.$$
Le discriminant vaut $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 81 - 80 = 1$. Les solutions sont
$$X = \frac{9 \pm 1}{4} \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{10}{4} = \tfrac{5}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{8}{4} = 2.$$
Ce sont les seuls candidats pour une racine de multiplicité au moins 3. Vérifions lesquels annulent P.
Calculons $P(2)$:
$$P(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2^2 - 44 \cdot 2 + 24 = 16 - 72 + 120 - 88 + 24 = 0.$$
De même $P'(2) = 0$ et $P''(2) = 0$ (par construction), et $P^{(3)}(X) = 24X - 54$; on a $P^{(3)}(2) = 48 - 54 = -6 \neq 0$, donc la multiplicité de 2 est exactement 3.
Ainsi $X = 2$ est la racine triple recherchée. Comme le degré est 4, on a nécessairement
$$P(X) = (X-2)^3(X-s)$$
pour un certain $s \in \mathbb{C}$. Comme tous les coefficients de P sont réels et 2 est réel, s est réel aussi. On détermine s par le terme constant :
$$\text{constante}(P) = 24 = (-2)^3(-s) = 8 \cdot s \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{24}{8} = 3.$$
Donc
$$\boxed{P(X) = (X-2)^3(X-3)}$$
qui est la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (tous les facteurs sont linéaires).

(2) Décomposition de $2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i$ dans $\mathbb{C}[X]$

On nous dit que ce polynôme admet une racine réelle. Testons des valeurs simples : pour $X=\frac{1}{2}$ on obtient

$$P\Big(\tfrac{1}{2}\Big)=2\Big(\tfrac{1}{2}\Big)^3-(5+6i)\Big(\tfrac{1}{2}\Big)^2+9i\Big(\tfrac{1}{2}\Big)+1-3i.$$

Calculons terme à terme :

$$2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4},\qquad -(5+6i)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}-\frac{6}{4}i=-\frac{5}{4}-\tfrac{3}{2}i,$$
$$9i\cdot\frac{1}{2}=\tfrac{9}{2}i,\qquad 1-3i.$$

La somme des parties réelles : $\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+1=0$. La somme des parties imaginaires : $-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}-3=0$. Donc $P(\frac{1}{2})=0$. Ainsi $x=\frac{1}{2}$ est bien une racine réelle.
Comme le coefficient dominant est 2, on peut mettre $2X-1$ en facteur. Écrivons

$$P(X)=(2X-1)Q(X),$$

où Q est un polynôme de degré 2. Pour trouver Q il est commode d'écrire aussi

$$P(X)=2(X-\tfrac{1}{2})(X^2+pX+q),$$

puis d'identifier les coefficients. En développant on obtient

$$2(X-\tfrac{1}{2})(X^2+pX+q)=2X^3+(2p-1)X^2+(2q-p)X-q.$$

En identifiant avec les coefficients de P on a le système

$$2p-1=-(5+6i),\qquad 2q-p=9i,\qquad -q=1-3i.$$

De la dernière égalité $q=-1+3i$. Alors

$$2p-1=-(5+6i)\Longrightarrow 2p=-(4+6i)\Longrightarrow p=-(2+3i).$$

On vérifie $2q-p=2(-1+3i)-(-(2+3i))=-2+6i+2+3i=9i$, cohérent.
Ainsi

$$P(X)=(2X-1)\big(X^2-(2+3i)X+(-1+3i)\big).$$

Le discriminant de la quadratique $X^2-(2+3i)X+(-1+3i)$ vaut

$$\Delta=(2+3i)^2-4(-1+3i).$$

Calculons :

$$(2+3i)^2=4+12i-9=-5+12i,\qquad -4(-1+3i)=4-12i,$$

donc $\Delta=(-5+12i)+(4-12i)=-1$. La racine carrée de Δ est $\sqrt{-1}=i$ (au choix des signes). Les racines de la quadratique sont donc

$$\frac{2+3i\pm i}{2},$$

c'est-à-dire

$$1+i\quad\text{et}\quad 1+2i.$$

On obtient donc la factorisation complète sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{P(X)=(2X-1)(X-(1+i))(X-(1+2i))}.$$

Remarque : le facteur linéaire réel $2X-1$ correspond à la racine réelle $X=\frac{1}{2}$, et les deux autres facteurs linéaires sont conjugués entre eux ? ici $1+i$ et $1+2i$ ne sont pas conjugués ; cela est normal car les coefficients de départ étaient complexes. La décomposition ci-dessus est la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (tous linéaires).

Résumé des résultats.

- (1) $X^4-9X^3+30X^2-44X+24=(X-2)^3(X-3)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

- (2) $2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i=(2X-1)(X-(1+i))(X-(1+2i))$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4.15

Soit
$$P(X)=X^8-4X^6+6X^4-4X^2+1.$$
(1) Montrer que X^2-1 divise P.
(2) En déduire que 1 et -1 sont des racines de P et déterminer leur multiplicité.
(3) Déterminer la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution

(1)
On reconnaît le développement binomial :
$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4.$$
En prenant $a=X^2$ et $b=1$ on obtient
$$(X^2-1)^4=X^8-4X^6+6X^4-4X^2+1=P(X).$$
Ainsi $P(X)=(X^2-1)^4$, d'où X^2-1 divise P.

(2)
Comme $X^2-1=(X-1)(X+1)$, on a
$$P(X)=(X^2-1)^4=\big((X-1)(X+1)\big)^4=(X-1)^4(X+1)^4.$$
On voit donc que $X=1$ et $X=-1$ sont des racines de P. La multiplicité de 1 est 4 (exposant de $X-1$) et la multiplicité de -1 est également 4.

(3)
Sur $\mathbb{R}$ les facteurs linéaires $X-1$ et $X+1$ sont irréductibles. La décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est donc
$$\boxed{P(X)=(X-1)^4(X+1)^4}.$$
(On peut naturellement écrire la même décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, où les facteurs restent linéaires.)

Exercice 4.16

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

(1) $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x+1)^2}$
(2) $\dfrac{X^4+1}{X(X^2-1)}$
(3) $\dfrac{3X^2-9X-3}{(X^2-X-2)^2}$.

Solution

On décompose successivement les fractions rationnelles données en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

1) $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x+1)^2}$.

On effectue une division euclidienne par $(x+1)^2 = x^2+2x+1$:

$$x^3+x^2+1 = (x-1)(x^2+2x+1)+(x+2),$$

donc

$$\frac{x^3+x^2+1}{(x+1)^2} = x-1+\frac{x+2}{(x+1)^2}.$$

On écrit ensuite $\dfrac{x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}$. On a

$$x+2 = A(x+1)+B,$$

d'où $A=1$ et $B=1$. Ainsi

$$\boxed{\frac{x^3+x^2+1}{(x+1)^2} = x-1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}.}$$

2) $\dfrac{X^4+1}{X(X^2-1)}$.

On écrit d'abord $X(X^2-1) = X^3-X$ et on effectue la division

$$X^4+1 = X(X^3-X)+(X^2+1),$$

d'où

$$\frac{X^4+1}{X(X^2-1)} = X+\frac{X^2+1}{X(X^2-1)}.$$

On pose maintenant la décomposition

$$\frac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{A}{X}+\frac{B}{X-1}+\frac{C}{X+1}.$$

En multipliant par $X(X-1)(X+1)$ on obtient

$$X^2+1 = A(X-1)(X+1)+BX(X+1)+CX(X-1).$$

En identifiant les coefficients (ou en évaluant en $X=0,1,-1$) on trouve

$$A=-1, \quad B=1, \quad C=1.$$

D'où

$$\boxed{\frac{X^4+1}{X(X^2-1)} = X-\frac{1}{X}+\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}.}$$

3) $\dfrac{3X^2-9X-3}{(X^2-X-2)^2}$.

Factorisons le dénominateur : $X^2-X-2 = (X-2)(X+1)$. Le dénominateur est donc $(X-2)^2(X+1)^2$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$\frac{3X^2-9X-3}{(X-2)^2(X+1)^2} = \frac{A}{X-2}+\frac{B}{(X-2)^2}+\frac{C}{X+1}+\frac{D}{(X+1)^2}.$$

En multipliant par $(X-2)^2(X+1)^2$ on obtient l'identité

$$3X^2-9X-3 = A(X-2)(X+1)^2+B(X+1)^2+C(X+1)(X-2)^2+D(X-2)^2.$$

Évaluons aux points $X=2$ et $X=-1$ pour déterminer B et D :

$$X=2: \quad -9 = B\cdot 3^2 \Rightarrow B=-1,$$

$$X=-1: \quad 9 = D\cdot(-3)^2 \Rightarrow D=1.$$

Pour déterminer A et C on peut évaluer en $X=0$ et $X=1$ (ou développer et identifier les coefficients). En faisant par exemple $X=0$ et $X=1$ on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} -3 = -2A - 1 + 4C + 4, \\ -9 = -4A - 4 + 2C + 1, \end{cases}$$

qui se ramène à

$$\begin{cases} -2A + 4C = -6, \\ -4A + 2C = -6. \end{cases}$$

La résolution donne $A=1$ et $C=-1$. Donc

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-1, \quad D=1.$$

La décomposition finale est

$$\boxed{\frac{3X^2-9X-3}{(X^2-X-2)^2} = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{(X-2)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}.}$$

Exercice 4.17

Décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Solution

On décompose les fractions rationnelles demandées en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

1) $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$.

Comme deg num $= 5 \geq 4 =$ deg dénom, on commence par la division euclidienne :

$$X^5+X+1 = X\,(X^4-1) + (2X+1),$$

donc

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{2X+1}{X^4-1} = X + \frac{2X+1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}.$$

On cherche une décomposition

$$\frac{2X+1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1}.$$

En multipliant par le dénominateur et en évaluant en $X=1$ et $X=-1$, on obtient

$$3 = 4A \Rightarrow A = \tfrac{3}{4}, \qquad -1 = -4B \Rightarrow B = \tfrac{1}{4}.$$

En identifiant ensuite les coefficients (ou en évaluant en $X=0$ et comparant les coefficients) on trouve

$$C=-1, \qquad D=-\tfrac{1}{2}.$$

Ainsi la décomposition finale est

$$\boxed{\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-X-\frac{1}{2}}{X^2+1}.}$$

(On peut réécrire le dernier terme sous la forme $-\dfrac{X}{X^2+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X^2+1}$.)

3) $\dfrac{4X}{(X+1)(X^2+1)^2}$.

La décomposition cherchée sur $\mathbb{R}$ a la forme

$$\frac{4X}{(X+1)(X^2+1)^2} = \frac{A}{X+1} + \frac{BX+C}{X^2+1} + \frac{DX+E}{(X^2+1)^2}.$$

En multipliant par le dénominateur on obtient l'identité polynomiale

$$4X = A(X^2+1)^2 + (BX+C)(X+1)(X^2+1) + (DX+E)(X+1).$$

Évaluant en $X = -1$ donne $A = -1$. En identifiant ensuite les coefficients (ou en résolvant le système linéaire obtenu) on trouve

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 2, \quad E = 2.$$

D'où la décomposition

$$\boxed{\frac{4X}{(X+1)(X^2+1)^2} = -\frac{1}{X+1} + \frac{X-1}{X^2+1} + \frac{2X+2}{(X^2+1)^2}.}$$

5) $\dfrac{4}{(X+1)^2(X^2+1)^2}.$

Pour cette fraction la décomposition générale (sur $\mathbb{R}$) s'écrit

$$\frac{4}{(X+1)^2(X^2+1)^2} = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{(X+1)^2} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2}.$$

En multipliant par $(X+1)^2(X^2+1)^2$ et en identifiant les coefficients on obtient le système linéaire suivant (on peut d'abord évaluer en $X = -1$ pour obtenir B) :

$$\begin{cases} 0 = A + C, \\ 0 = A + 1 + 2C + D, \\ 0 = 2A + 2C + 2D + E, \\ 0 = 2A + 2 + 2C + 2D + 2E + F, \\ 0 = A + C + 2D + E + 2F, \\ 4 = A + 1 + D + F, \end{cases}$$

dont la résolution donne

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = -2, \quad D = 1, \quad E = -2, \quad F = 0.$$

Ainsi on a

$$\boxed{\frac{4}{(X+1)^2(X^2+1)^2} = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-2X+1}{X^2+1} - \frac{2X}{(X^2+1)^2}.}$$

Remarque. Dans chaque cas on peut vérifier la décomposition obtenue en ramenant les éléments simples à un dénominateur commun et en vérifiant que le numérateur obtenu coïncide avec l'original.