Définitions et propriétés fondamentales des inégalités

Nous définissons les inégalités à partir de la notion de réel positif :

Définition 0.1 (Inégalités)**.** *Soient* $a, b, c \in \mathbb{R}$*.*

1. *On dit que* 0 *est inférieur ou égal à* a *(on notera* $0 \leq a$*) si* a *est positif ou nul.*
2. *Plus généralement, on dit que* b *est inférieur ou égal à* c *(ce qui se note* $b \leq c$*) si le nombre* $c - b$ *est positif ou nul (*$0 \leq c - b$*).*
3. *La relation* $b \leq c$ *peut s'écrire aussi* $c \geq b$ *(qui se lit « c est supérieur ou égal à b »).*
4. *Enfin, si* $b \leq c$ *et* $b \neq c$*, on dit que* b *est inférieur strictement à* c*, ce qui se note* $b < c$ *ou encore* $c > b$*.*

Nous allons énoncer et démontrer les règles fondamentales qui nous permettront de travailler avec les inégalités. Les démonstrations utiliseront les propriétés P.1 ... P.3 et leurs conséquences C.1 ... C.6 énoncées ci-dessus.

Proposition 0.1 (Relations d'ordre fondamentales)**.** *Quels que soient les réels* a, b, c*, on a :*

1. ***Propriété réflexive :*** $a \leq a$*.*
2. ***Propriété antisymétrique :*** *si* $a \leq b$ *et* $b \leq a$*, alors* $a = b$*.*
3. ***Propriété transitive :*** *si* $a \leq b$ *et* $b \leq c$*, alors* $a \leq c$*.*
4. ***L'ordre est total :*** *on a* $a \leq b$ *ou* $b \leq a$*.*

Démonstration : Montrons les deux dernières propriétés.

Transitivité : par hypothèse, $b - a$ et $c - b$ sont positifs ou nuls, donc

$$c - a = (c - b) + (b - a)$$

l'est aussi, comme somme de deux réels positifs ou nuls, et par conséquent $a \leq c$.

Ordre total : si $0 \leq b - a$, alors $a \leq b$. Si le réel $b - a$ n'est pas positif ou nul, alors

$$0 \leq -(b-a) = a - b$$

et donc $b \leq a$.

Remarque. On écrira $a \leq b \leq c$ pour signifier que $a \leq b$ et $b \leq c$ (ce qui implique $a \leq c$).

Définition 0.2 (Encadrement)**.** *Toute inégalité de la forme $a \leq b \leq c$ est appelée un* encadrement *de b. On dira alors que a est un* minorant *de b et que c est un* majorant *de b.*

Proposition 0.2 (Inégalités et addition)**.** *Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

A.1 Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.

A.2 Si $a + b \leq c$, alors $a \leq c - b$.

A.3 Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Démonstration : **A.1 :** Il suffit de remarquer que

$$(b + c) - (a + c) = b - a$$

et que, par hypothèse, $b - a$ est positif ou nul.

A.2 : D'après la propriété précédente, en ajoutant le réel $-b$ aux deux membres de l'inégalité $a + b \leq c$, on obtient

$$a + b - b \leq c - b,$$

d'où le résultat.

A.3 : Puisque $a \leq b$, il vient $a + c \leq b + c$. De même, $c \leq d$ implique $c + b \leq d + b$. La propriété transitive permet de conclure.

Remarque. La propriété A.3 nous dit qu'on peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.

Remarquons qu'on ne peut, au contraire, **soustraire** membre à membre des inégalités :

$$a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d \quad \not\Rightarrow \quad a - c \leq b - d.$$

En effet :

$$2 \leq 5,\ 1 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 2 - 1 \leq 5 - 2,$$

mais

$$2 \leq 3,\ 1 \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 2 - 1 \geq 3 - 5.$$

Proposition 0.3 (Inégalités et multiplication)**.** *Soient* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

M.1 *Si* $a \leq b$ *et* $c \geq 0$*, alors* $ac \leq bc$.

M.2 *Si* $a \leq b$ *et* $c \leq 0$*, alors* $ac \geq bc$. *En particulier, pour* $c = -1$*,* $a \leq b$ *implique* $-a \geq -b$.

M.3 *Si* $0 \leq a \leq b$ *et* $0 \leq c \leq d$*, alors* $ac \leq bd$.

M.4 *Si* $a \leq b \leq 0$ *et* $c \leq d \leq 0$*, alors* $ac \geq bd$.

Démonstration : **M.1 :** Par hypothèse, $b - a$ et c sont positifs ou nuls, donc leur produit

$$(b - a)c = bc - ac$$

l'est aussi. La preuve de M.2 est analogue.

M.3 : D'après M.1, en multipliant les membres de l'inégalité $a \leq b$ par le réel positif c, on obtient $ac \leq bc$. De même, $c \leq d$ et $b \geq 0$ impliquent $cb \leq db$. La propriété transitive permet de conclure.

M.4 : Multiplier les membres des inégalités $a \leq b \leq 0$ et $c \leq d \leq 0$ par -1 et appliquer M.3.

Remarque. Attention aux hypothèses sur le signe : les conditions $a \leq b$ et $c \leq d$ ne permettent pas en général de comparer les réels ac et bd.

Proposition 0.4 (Inégalités et division)**.** *Quels que soient les réels* a, b*, on a :*

D.1 *Si* $0 < a \leq b$*, alors* $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

D.2 *Si* $a \leq b < 0$*, alors* $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Démonstration : **D.1 :** Le réel $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ est positif ou nul car, d'après les hypothèses, $b - a \geq 0$ et $ab > 0$.

D.2 : La preuve est analogue (on peut aussi multiplier l'inégalité $a \leq b < 0$ par -1 et appliquer D.1).

Remarque. Éviter la division membre à membre des inégalités : $a \leq b$ et $c \leq d$ ne permettent pas de comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, même pour des réels positifs.

Par exemple :

$$1 \leq 2,\ 3 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{2}{4},$$

mais

$$1 \leq 2,\ 3 \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \geq \frac{2}{10}.$$

Proposition 0.5 (Propriétés de la racine carrée). *1. Si* $0 \leq a < b$*, alors* $a^2 < b^2$.

2. Si $0 \leq a < b$*, alors* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

3. Si $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$*, on a l'équivalence :* $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Démonstration : 1 : Il suffit de multiplier membre à membre les inégalités $0 \leq a < b$ et $0 \leq a < b$ (propriété M.3).

2 : Par l'absurde. Supposons que $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$. On a $0 \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{a}$ et la propriété 1 implique

$$(\sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a})^2,$$

d'où $b \leq a$, ce qui contredit l'hypothèse.

3 : L'implication $\Rightarrow$ est la propriété 1. Pour $\Leftarrow$, utiliser 2 :

$$0 \leq a^2 < b^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2} < \sqrt{b^2},$$

or $\sqrt{a^2} = a$ car $a \geq 0$, et de même $\sqrt{b^2} = b$.

Remarque (Exemple). Soient x et y deux réels tels que :

$$1 \leq x \leq 2 \quad (1) \qquad -6 \leq y \leq -3 \quad (2)$$

Encadrons $x + y$, $x - y$, xy et $\dfrac{x}{y}$:

Somme $x + y$ **:** L'addition membre à membre (propriété A.3) des inégalités (1) et (2) donne :

$$-5 \leq x + y \leq -1.$$

Différence $x - y$ **:** En multipliant les membres de l'inégalité (2) par -1, on obtient (propriété M.2) :

$$3 \leq -y \leq 6 \quad (3)$$

et l'addition membre à membre (encore A.3) de (1) et (3) implique :

$$4 \leq x - y \leq 8.$$

Produit xy **:** Le produit membre à membre de (1) et (3) donne (propriété M.3 : réels positifs !) :

$$3 \leq -xy \leq 12.$$

En multipliant par -1 cet encadrement (d'après M.2) :

$$-12 \leq xy \leq -3.$$

Quotient $\frac{x}{y}$: Prenons l'inverse dans les membres de (3) (propriété D.1 : réels positifs !) :

$$\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{3} \quad (4)$$

En multipliant membre à membre (1) et (4) (M.3 : réels positifs !) :

$$\frac{1}{6} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}.$$

Enfin, en multipliant par -1 (M.2) :

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{6}.$$

Définition 0.3 (Intervalles)**.** *Rappelons les définitions des différents types d'intervalles :*

1. ***Intervalles dégénérés et semi-infinis :*** *pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{[a, a] = \{a\}}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \qquad]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}.$$

2. ***Intervalles bornés :*** *si $a < b$, on définit*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

3. ***Autres cas :***

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcl}]a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\ ]-\infty, a[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \\ ]a, b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ ]a, b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \end{array}$$