Contents

CHAPTER 1

Ensembles et Applications

Exercice 1.1

We know that if a and b are two real numbers, and their product $ab = 0$, then either $a = 0$ or $b = 0$.

Nous avons le système (S) d'inconnues réelles x et y suivant :

$$(S) : \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 & \text{(E1)} \\ (x-2)y = 0 & \text{(E2)} \end{cases}$$

Solution

(1) Détermination des solutions des équations $(E1)$, $(E2)$ et du système (S). On dois trouver x et y qui satisferont les deux équations simultanément.

Solution de l'équation $(E1)$: $(x-1)(y-2) = 0$. L'équation $(E1)$ est un produit de deux termes qui est égal à zéro. Nous avons deux possibilités :

$$(x-1)(y-2) = 0 \implies (x-1) = 0 \quad \text{ou} \quad (y-2) = 0.$$

Cela signifie que soit $x = 1$, soit $y = 2$. Les solutions sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 & \text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \\ y = 2 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E1)$ est :

$$E_1 = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Solution de l'équation $(E2)$: $(x-2)y = 0$. De la même manière, $(E2)$ est aussi un produit de deux termes égal à zéro. Nous avons :

$$(x-2)y = 0 \implies (x-2) = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Cela signifie que soit $x = 2$, soit $y = 0$. Les solutions sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x = 2 & \text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \\ y = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E2)$ est :

$$E_2 = \{(2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Solution du système (S). Pour résoudre le système (S), nous devons trouver l'intersubsection des ensembles de solutions E_1 et E_2, c'est-à-dire les points qui satisfont à la fois $(E1)$ et $(E2)$. Regardons les solutions possibles : - E_1 contient les points $x = 1$ (pour tout y) et $y = 2$ (pour tout x). - E_2 contient les points $x = 2$ (pour tout y) et $y = 0$ (pour tout x).

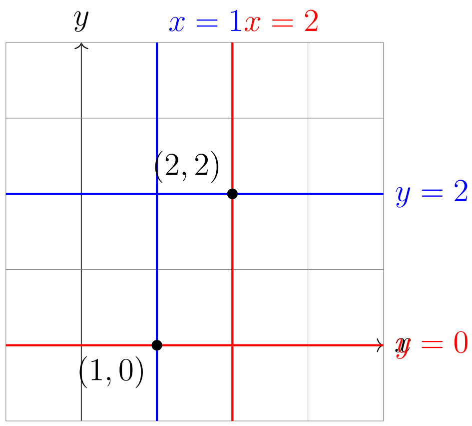
L'intersubsection des deux ensembles donne les points suivants :

$$S = \{(1, 0), (2, 2)\}.$$

Donc, la solution du système (S) est :

$$S = \{(1, 0), (2, 2)\}.$$

(2) Représentation graphique. Nous allons maintenant représenter graphiquement les solutions obtenues.



- L'équation $(E1)$ représente deux lignes : - $x = 1$, qui est une ligne verticale passant par $x = 1$, - $y = 2$, qui est une ligne horizontale passant par $y = 2$.

- L'équation $(E2)$ représente également deux lignes : - $x = 2$, une ligne verticale passant par $x = 2$, - $y = 0$, une ligne horizontale passant par $y = 0$.

Les points où ces lignes se croisent sont les solutions du système (S), c'est-à-dire les points $(1, 0)$ et $(2, 2)$.

Exercice 1.2

Soient deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par :

$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1$$

On vas calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, puis vérifier si $f \circ g = g \circ f$.

Solution

1. Calcul de $f \circ g$. La composition $f \circ g$ signifie que nous devons appliquer g d'abord, puis appliquer f au résultat de g. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Calculons cela étape par étape :

$$g(x) = x^2 - 1$$

Appliquons maintenant f à $g(x)$, c'est-à-dire $f(x^2 - 1)$:

$$f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 1$$

Développons cette expression :

$$f(x^2 - 1) = 3x^2 - 3 + 1 = 3x^2 - 2$$

Ainsi, nous avons :

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$$

2. Calcul de $g \circ f$. De la même manière, la composition $g \circ f$ signifie que on dois appliquer f d'abord, puis appliquer g au résultat de f. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Calculons cela étape par étape :

$$f(x) = 3x + 1$$

Appliquons maintenant g à $f(x)$, c'est-à-dire $g(3x + 1)$:

$$g(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 1$$

Développons cette expression :

$$g(3x + 1) = (9x^2 + 6x + 1) - 1 = 9x^2 + 6x$$

Ainsi, nous avons :

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x$$

3. Comparaison de $f \circ g$ et $g \circ f$. Nous avons trouvé :

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$$

et

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x$$

Clairement ils osnt deux expression different. Donc, $f \circ g \neq g \circ f$.

Résumé

Nous avons montré que la composition des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ donne des résultats différents. Cela signifie que, en général, la composition de fonctions n'est pas commutative.

Exercice 1.3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

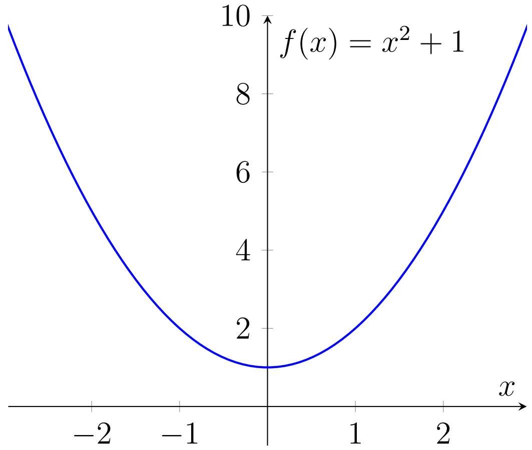
$$f(x) = x^2 + 1$$

En partant du graphe de $x \to x^2$, tracer le graphe de f et déterminer les ensembles suivants :

$$f([-3,-1]), \quad f([-3,-1] \cup [-2,1]), \quad f([-3,-1] \cap [-2,1]),$$
$$f^{-1}((-\infty,-1]), \quad f^{-1}([1,\infty)), \quad f^{-1}((-\infty,2] \cap [1,\infty)).$$

Solution

1. Tracer le graphe de $f(x) = x^2+1$. Le graphe de $f(x) = x^2+1$ est une parabole qui est une translation de la parabole x^2 vers le haut de 1 unité. Cela signifie que le sommet de la parabole est en $(0,1)$, et la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



2. Calcul des ensembles.

a) $f([-3,-1])$. Nous allons d'abord calculer l'image de l'intervalle $[-3,-1]$ par la fonction $f(x) = x^2 + 1$.

Pour $x = -3$, nous avons :

$$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

Pour $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Ainsi, $f([-3,-1])$ est l'intervalle :

$$f([-3,-1]) = [2,10]$$

b) $f([-3,-1] \cup [-2,1])$. Il suffit de prendre l'image de l'union des intervalles $[-3,-1] \cup [-2,1]$.

Pour $x = -2$, nous avons :

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Pour $x = 1$, nous avons :

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Donc, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ est l'intervalle :

$$f([-3,-1] \cup [-2,1]) = [1,10]$$

c) $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. L'intersection de $[-3,-1]$ et $[-2,1]$ est l'intervalle $[-2,-1]$.

Pour $x = -2$, nous avons :

$$f(-2) = 5$$

Pour $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = 2$$

Ainsi, $f([-3,-1] \cap [-2,1])$ est l'intervalle :

$$f([-3,-1] \cap [-2,-1]) = [2,5]$$

d) $f^{-1}((-\infty,-1])$. La fonction $f(x) = x^2 + 1$ prend des valeurs toujours supérieures ou égales à 1. Donc, il n'existe pas de x tel que $f(x) \leq -1$. Cela signifie que :

$$f^{-1}((-\infty,-1]) = \emptyset$$

e) $f^{-1}([1,\infty))$. Nous cherchons les x pour lesquels $f(x) \geq 1$. Comme $f(x) = x^2 + 1$, et que $x^2 \geq 0$ pour tout x, nous avons :

$$f(x) \geq 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$f^{-1}([1,\infty)) = \mathbb{R}$$

f) $f^{-1}((-\infty, 2] \cap [1, \infty))$. L'ensemble $(-\infty, 2] \cap [1, \infty) = [1, 2]$.

Nous cherchons maintenant les x tels que $f(x) \in [1, 2]$. Cela correspond à résoudre l'inéquation :

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2$$

Cela équivaut à :

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

Donc :

$$-1 \leq x \leq 1$$

Ainsi, nous avons :

$$f^{-1}((-\infty, 2] \cap [1, \infty)) = [-1, 1]$$

Résumé

Nous avons calculé et interprété les différents ensembles image et antécédent de la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Le graphe de cette fonction, une parabole, permet de visualiser ces résultats.

1. Exercice 1.11

En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

En deduire la valuer de

$$\sum_{k=0}^{2k} \binom{n}{2k}.$$

Solution

Nous devons utiliser la **formule du binôme de Newton**, qui est donnée par :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

En particulier, lorsque $x = 1$ et $y = -1$, nous avons :

$$(1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k.$$

Or, $1 + (-1) = 0$, donc :

$$0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Explication

Cette équation est un résultat classique qui découle directement du développement binomial. La somme alternée des coefficients binomiaux avec les signes $(-1)^k$ est égale à 0, car l'expansion de $(1+(-1))^n$ conduit à zéro pour tout $n \geq 1$. Ce résultat est souvent appelé l'identité de la somme alternée des coefficients binomiaux.

Deuxième partie : Somme des coefficients binomiaux de rang pair

On nous demande ensuite de déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}.$$

Pour cela, considérons à nouveau la formule du binôme de Newton, mais cette fois en utilisant $x = 1$ et $y = 1$:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Cependant, cette somme peut être décomposée en deux parties. On peut écrire cette somme en deux parties, la première est lorsque k est pair, et la deuxième partie est lorsque k est impair: les termes où k est pair, et les termes où k est impair. Ainsi, on a :

$$2^n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

Mais en utilisant la première identité démontrée, on sait que la somme des termes impairs est égale à la somme des termes pairs, car la somme alternée est nulle. Par conséquent, on peut écrire :

$$\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}.$$

Conclusion : La somme des coefficients binomiaux de rang pair est :

$$\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}=2^{n-1}.$$

Explication

La deuxième partie de l'exercice repose sur l'idée que les coefficients binomiaux pairs et impairs sont distribués de manière symétrique. Cela nous permet de conclure que la somme des coefficients binomiaux de rang pair est la moitié de la somme totale des coefficients binomiaux, soit 2^{n-1}.

Explication des étapes pour les étudiants.

(1) Première partie :
- On commence par appliquer la formule du binôme de Newton,
$$((x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k),$$
qui permet de développer un binôme élevé à une puissance.
- En prenant $(x=1)$ et $(y=-1)$, on simplifie la formule en obtenant une somme alternée de coefficients binomiaux.
- Cela nous conduit à la somme nulle car $((1+(-1))^n=0)$ pour tout $(n\geq 1)$.

(2) Deuxième partie :
- En utilisant la même formule du binôme, mais cette fois-ci avec $(x=1)$ et $(y=1)$, on développe $((1+1)^n=2^n)$.
- Cette somme totale peut être divisée en deux : les termes où l'indice (k) est pair et ceux où (k) est impair.
- Puisque la somme des coefficients binomiaux alternés est nulle, cela signifie que les sommes des termes pairs et impairs sont égales.
- On en déduit que la somme des termes pairs est égale à la moitié de la somme totale, soit 2^{n-1}.