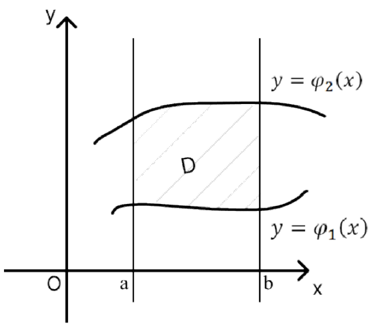
Лекція 2

1. *Повторні інтеграли. Зв'язок з подвіним інтегралом.*
2. *Заміна змінних у подвійному інтегралі*
   а) подвійний інтеграл в полярних координатах,
   б) подвійний інтеграл в узагальненій ПСК(УПСК).
3. *Застосування подвійного інтегралу в геометрії (об'єм циліндричного тіла, площа плоскої фігури, площі поверхні).*
4. *Застосування подвійного інтегралу в механіці.*

1. Нехай обл. D обмежена прямими $x = a, x = b, a < b$ і двома неперервними кривими $y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x)$, де $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x), x \in [a, b]$.
D – правильна в напрямі осі *Oy*.



Нехай $f(x, y)$ - неперервна функція в обл. D,

$$D: \begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases} \qquad (10)$$

Означення 3. Вираз

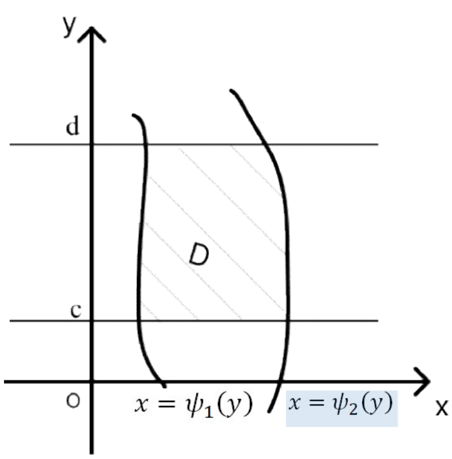
$$\boxed{I = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy\right) dx} \qquad (11)$$

називається **двократним (повторним) інтегралом** від ф-ії $f(x, y)$ по обл. D.

У формулі (11) інтеграл $\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ називається внутрішнім інтегралом повторного інтегралу (11) (y – змінна, x = const).
$I = \int_a^b \Phi(x) dx$ – зовнішній інтеграл повторного інтегралу (11) .

! *При інтегруванні повторного інтегралу спочатку обчислюється внутрішній інтеграл, лише потім – зовнішній.*

2. Нехай обл. D обмежена прямими $y = c, y = d, c < d$ і неперервними



кривими $x =,\ x = \psi_2(y)$, де $\psi_1(y) \le \psi_2(y),\ y \in [c; d]$. *D* – правильна в напрямі осі *Ox*.

$$D = \begin{cases} c \le y \le d, \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \end{cases} \qquad (12)$$

то $I = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ (13)

$\Psi(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ – внутрішній інтеграл (x – змінна, y = const).
(11,13) – інтеграли з різним порядком інтегрування.

Зауваження:

1. Зовнішній інтеграл у повторному інтегралі $\forall$ області завжди має сталі межі інтегрування.
2. Властивості визначеного інтегралу розповсюджуються і на повторний інтеграл.
3. Якщо $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, то

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_1(x)f_2(y)\,dy = \int\limits_a^b f_1(x)dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_2(y)dy.$$

Теорема 1. *Якщо функція $z = f(x,y)$ є неперервною в обл. D_1*

$$D_1 = \begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x). \end{cases}$$

D_1 – правильна в напрямі осі Oy, тоді існує повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

і справедлива рівність

$$\boxed{\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.} \qquad (14)$$

Теорема 2. *Якщо функція $z = f(x,y)$ є неперервною в обл. D_2*

$$D_2 = \begin{cases} c \le y \le d, \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y). \end{cases}$$

D_2 – правильна в напрямі осі Ox, тоді існує повторний інтеграл

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

і справедлива рівність

$$\boxed{\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx} \qquad (15)$$

Зауваження:

1. Якщо обл. D – правильна, тоді можна використовувати як формулу (14) так і формулу (15).
2. Якщо обл. D не є правильною ні в напрямі осі *Ox*, ні в напрямі осі *Oy*, тоді обл. D розбивають на частини, кожна з яких є правильною або в напрямі *Ox* або *Oy*.

§4. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій обл. D, тоді існує

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy.$$

*<u>Постановка задачі</u>. Перейти в інтегралі **I** від змінних x, y до нових змінних u, v за допомогою формул перетворення координат:*

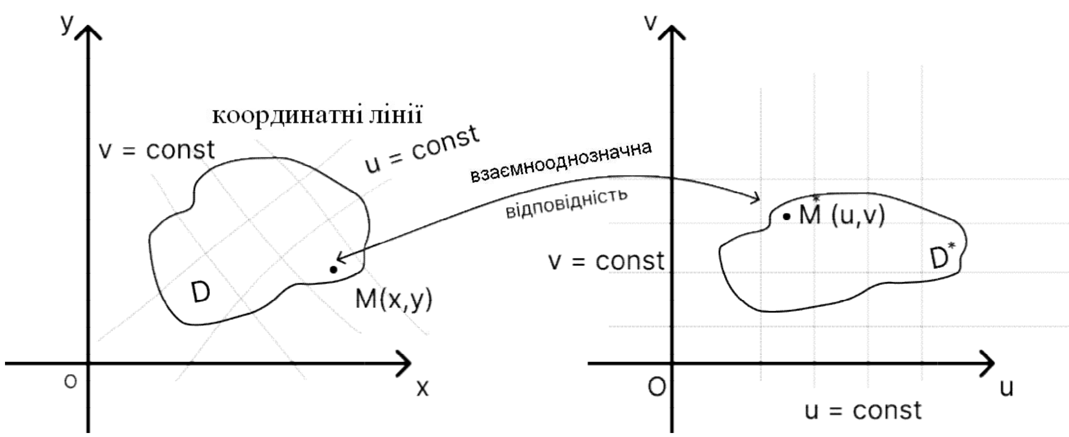
$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases} \qquad (16)$$

- Нехай функції $x(u, v), y(u, v)$ є неперервними і мають неперервні частинні похідні 1-го порядку в деякій обл. D^*, де $D^* \subset O^*_{uv}$.
- Вважатимемо, що (16) можна однозначно виразити

  $$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \qquad (17)$$

  тобто кожній точці $M(x, y) \in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u, v) \in D^*$ і навпаки.

Отже, функції в (16) встановлюють взаємно однозначну відповідність між областями D та D^*.



для цього необхідно і достатньо, щоб визначник Якобі (Якобіан) $\neq 0$.

$$J = J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

у всіх точках обл. D^*.

Отже, можна довести, що має місце формула заміни змінних:

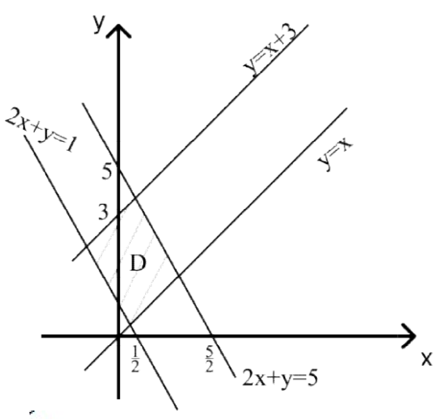
$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\,|J|dudv.} \qquad (18)$$

Формулу (18) вперше отримав видатний український математик М.В.Остроградський.

$$dxdy = |J|dudv \text{ – елемент площі.}$$

Щоб перейти до криволінійних координат необхідно:

1. *обл. інтегрування D замінити на відповідну їй обл. D^*;*
2. *в підінтегральній функції $f(x, y)$ перейти до змінних u, v;*
3. *замінити $dxdy = |J|dudv$.*



Приклад: $I = \iint\limits_{D} (y - x)dxdy$, де

$$D: \begin{matrix} y - x = 0, & 2x + y = 1, \\ y - x = 3, & 2x + y = 5. \end{matrix}$$

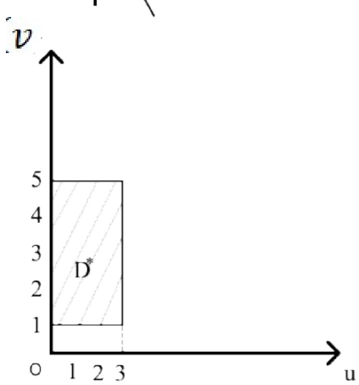
Зробимо заміну:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = 2x + y \end{cases} \Rightarrow D^*: \begin{matrix} u = 0, & v = 1, \\ u = 3, & v = 5. \end{matrix}$$

$$D \leftrightarrow D^* \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}(v - u), \\ y = \frac{1}{3}(2u + v), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{9},$$

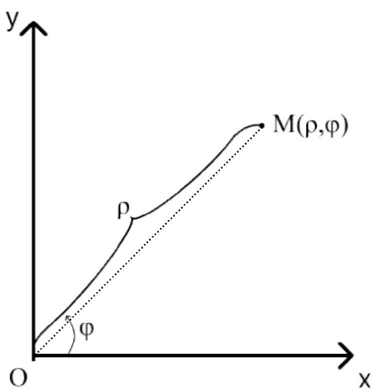
$$|J| = \frac{1}{9}.$$



Тоді

$$I = \iint\limits_{D^*} u\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_0^3 udu \int_1^5 dv = \frac{4}{3}\frac{u^2}{2}\Big|_0^3 = 6.$$

Подвійний інтеграл в полярних координатах



Формули переходу від ПДСК до ПСК:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \text{ де } \rho \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi)$$

Роль u виконує φ, а роль v – виконує ρ.

$u = \varphi;\ \ v = \rho$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\rho \\ y'_\varphi & y'_\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho$$

$$\Rightarrow |J| = \rho$$

$$\Rightarrow dxdy = |J|d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi.$$

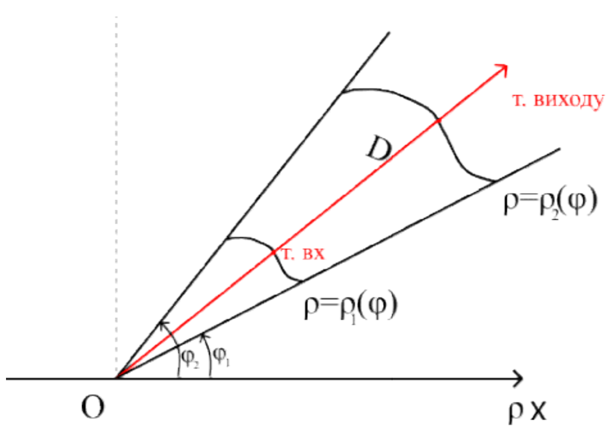
Отже,

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D^*} F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi, \qquad (19)$$

$$\text{де } \begin{cases} x=\rho\ co\quad , \\ y=\rho\ si\quad , \quad \rho\geq 0, \\ x^2+y^2=\rho^2, \quad \varphi\in[0;2\pi), \\ dxdy=\rho d\rho d\quad , \quad D\leftrightarrow D^*. \\ |J| = \rho \end{cases}$$

Зауваження:

1) Нехай обл. D – обмежена променями, що утворює з полярною віссю кути φ_1, φ_2 $(\varphi_1 < \varphi_2)$ і неперервними кривими



$$\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi),$$
$$\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$$

і область D – правильна, тобто промені, що виходять із полюса перетинають границю обл. D не більше ніж двічі.

Тоді (19) можна продовжити так:

$$\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)d\rho.$$

2) Перехід до ПСК при обчисленні подвійного інтегралу доцільно здійснювати, якщо обл. D – круг або його частина (сектор), кругове кільце або його частина.

Подвійний інтеграл в узагальненій ПСК(УПСК)

Перехід до УПСК здійснюють, якщо обл. D обмежена еліпсом або його частиною. Формули переходу від ПДСК до УПСК:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, & \varphi \in [0; 2\pi), \quad a > 0 \\ y = b\rho\sin\varphi, & \rho \geq 0, \quad b > 0 \end{cases} const$$

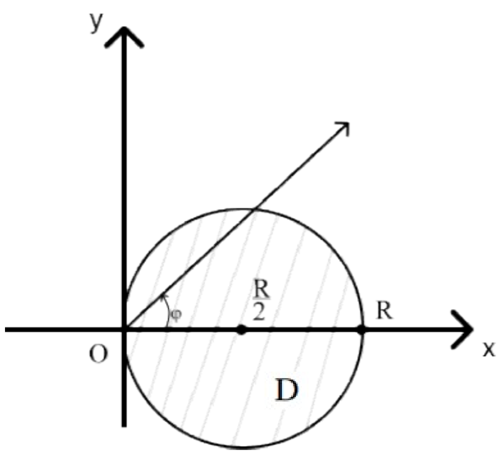
Якобіан:

$$J = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\rho \\ y'_\varphi & y'_\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\rho\sin\varphi & a\cos\varphi \\ b\rho\cos\varphi & b\sin\varphi \end{vmatrix} = -ab\rho,$$

$$|J| = ab\rho.$$

Формула (18) набуде вигляду:

$$\boxed{\begin{gathered}\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{D^*} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \\ \text{де } \begin{array}{l} x=a\rho\cos\varphi, \\ y=b\rho\sin\varphi, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2, \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi. \end{array}\end{gathered}} \quad (20)$$



Приклад: Обчислити подвійний інтеграл

$$I = \iint\limits_{\mathrm{D}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy, \text{ де } D: x^2 + y^2 \leq Rx.$$

Перетворимо обл. D:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4},$$

$$C\left(\frac{R}{2}; 0\right), \quad r = \frac{R}{2}.$$

Використаємо формулу (19).

D: $\begin{array}{l}\rho^2 \leq R\rho\cos\varphi, \\ \rho \leq R\cos\varphi.\end{array}$

ОДЗ: $\rho \geq 0, => \cos\varphi \geq 0, \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$I = \iint \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho d\rho =$$

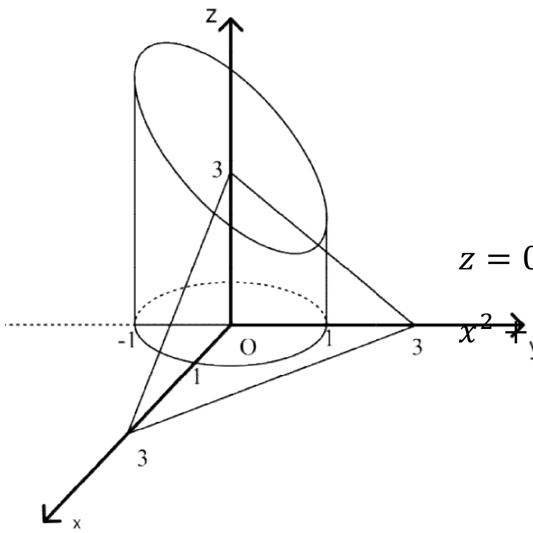
$$\underline{\mathrm{D}}\ -\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{R\cos\varphi}\ d\varphi = -\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[R^3(\sin\varphi)^3-R^2]d\varphi == \frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

§5. Застосування подвійного інтегралу в геометрії

1. Обчислити *<u>об'єм циліндричного тіла</u>*, якщо $f(x,y)\geq 0$, то з §2 =>

$$\boxed{V=\iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy.}$$

<u>Приклад</u>: Знайти V, якщо



$z=0;$

$x^2+y^2=1;$

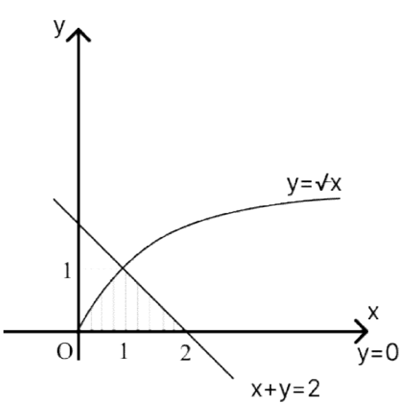
$x+y+z=3.$

$$V=\iint\limits_{\mathrm{D}}(3-x-y)dxdy \overset{(18)}{=} \iint\limits_{\mathrm{D}}(3-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(3-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\rho d\rho = 3\pi.$$

2. Обчислити *<u>площу плоскої фігури</u>*, обмеженою обл. D

$$\boxed{S=\iint\limits_{\mathrm{D}} dxdy.}$$



<u>Приклад.</u> $y=\sqrt{x};\ y=0;\ x+y=2;\ S-?$

$$S=\iint\limits_{\mathrm{D}} dxdy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{2-y}dx =$$

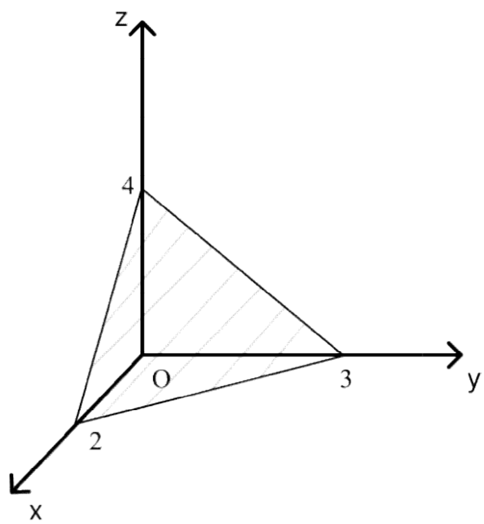
$$=\int\limits_0^1(2-y-y^2)dy = \left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1\frac{1}{6}.$$

3. Обчислення *площі поверхні*.

Якщо поверхня $\sigma: z = f(x,y)$ проектується на пл. Оху в обл. D, функції $f(x,y), f'_x, f'_y$ неперервні в обл. D, тоді площу поверхні σ знаходимо за формулою:

$$\boxed{P = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy.}$$

Приклад: Знайти площу частини поверхні площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, що відтинається координатними площинами.

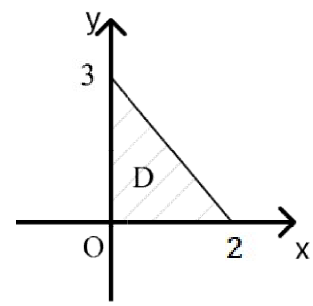


Виразимо z: $z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$,

знайдемо частинні похідні:

$z'_x = -2$,

$z'_y = -\frac{4}{3}$.



$$P = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}}\, dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} \iint\limits_{D} dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} S_D = \frac{\sqrt{61}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = \sqrt{61} \text{(кв.од.)}$$

Самостійна робота №1. Зробити продовження конспекту лекції 2 §6 Застосування подвійного інтегралу в механіці.

Підручник: Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Навчальний посібник-К.: А.С.К., 1993, 2001, ст.581-582.

§6. Застосування подвійного інтегралу в механіці

1. *Маса (**m**) пластини* D з густиною $\gamma = \gamma(x, y)$:

$$m = \iint\limits_{D} \gamma(x, y)dxdy$$

2. *Статичні моменти плоскої пластини.*

Нехай плоска пластина має форму обл. $D \subset Oxy$, в якій розподілено деяку речовину з густиною $\gamma = \gamma(x, y)$ – неперервна функція в обл. D (якщо пластина однорідна $\gamma = 1$).

Означення 1. *Статичним моментом* $\boldsymbol{S_{ox}}$ *системи* $\boldsymbol{n}$ *матеріальних точок* $M_i(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$ *відносно осі Ox* називається сума добутків мас цих точок на їх ординати:

$$\boxed{S_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i}$$

аналогічно

$$\boxed{S_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i}$$

Якщо ж маси розповсюджені неперервним чином, вздовж деякої кривої, то для обчислення стичних моментів потрібно проінтегрувати:

$$\boxed{M_{oy} = \iint\limits_{D} x\gamma(x, y)dxdy, \quad M_{ox} = \iint\limits_{D} y\gamma(x, y)dxdy}$$

3. *Координати центра маси пластини* $C(x_c, y_c)$:

$$\boxed{x_c = \frac{M_{oy}}{m} = \frac{\iint\limits_{D} x\gamma(x, y)dxdy}{\iint\limits_{D} \gamma(x, y)dxdy}, \qquad y_c = \frac{M_{ox}}{m} = \frac{\iint\limits_{D} y\gamma(x, y)dxdy}{\iint\limits_{D} \gamma(x, y)dxdy},}$$

Означення 2. *Центром маси матеріальної плоскої пластини* D називається така т. $C(x_c, y_c)$, для якої виконується властивість, якщо в цій точці зосередити всю масу

m цієї пластини, то статичний момент цієї т. відносно ∀ координатної осі буде = стичному моменту всієї пластини відносно тієї ж осі:

$S_{ox} = M_{oy}$ і $S_{oy} = M_{ox}$,

де $S_{ox} = x_c m$, $S_{oy} = y_c m$.

4. *Момент інерції пластини.*

*Момент інерції матеріальної точки маси **m** відносно деякої осі l* дорівнює добутку, маси точки ***m*** на квадрат її відстані ***d*** від цієї осі $I_l = md^2$.

Момент інерції системи матеріальних точок відносно осі l дорівнює сумі моментів інерції всіх точок:

$$I_{0x} = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)dxdy,$$

$$I_{0y} = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)dxdy,$$

$$I_0 = I_{0x} + I_{0y} = \iint\limits_D (x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy$$

I_0 – момент інерції відносно початку координат.