Лекція 1

1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ. Подвійний інтеграл та його застосування.
   Задачі, які приводять до поняття подвійного інтегралу.
   Геометричний та фізичний зміст:
   a) задача про об’єм циліндричного тіла,
   b) задача про масу плоскої пластини.
2. Основні поняття і означення подвійного інтегралу. Властивості подвійного інтегралу. Теорема про оцінку подвійного інтегралу. Теорема про середнє значення функції.
3. Двократні (повторні) інтеграли в прямокутній декартовій системі координат (ПДСК).

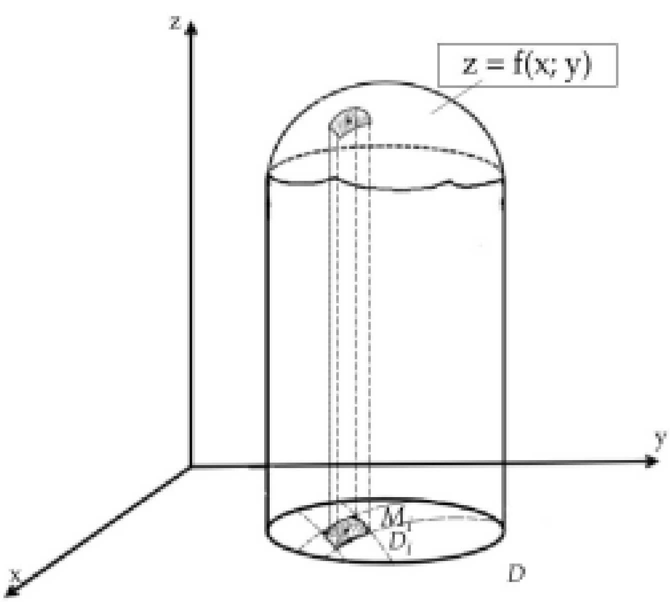
Розділ 7. Кратні інтеграли

Тема 7.1 Подвійний інтеграл та його застосування

§1. Задачі, які приводять до поняття подвійного інтегралу.

Геометричний та фізичний зміст

I. Задача про об’єм циліндричного тіла.



🎬 Розглянемо функцію �� = ��(��, ��), яка визначена і неперервна в замкнутій області �� ⊂ ������ і нехай ��(��, ��) ≥ 0, ∀(��, ��) ∈ �� .

🎬 Розглянемо тіло, обмежене зверху поверхнею �� = ��(��, ��), знизу – замкненою обл. �� , з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні ����.

Таке тіло називається циліндричним.

🎬 Знайдемо його об’єм ��.

1) Розіб’ємо обл. �� ∀ чином на n областей ��□, �� = 1, ꩠꩠꩠ ꩠ n, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ����i, �� = 1, ꩠꩠꩠꩠ ꩠ ��.

2) Виберемо ∀ точку ��□(��□, ��□) ∈ ��□.

Знаходемо ��□ = ��(��□) = ��(��□, ��□) => ��(��□, ��□) · ����□ = ��□, де ��□ − Об’єм циліндра з основую ��□ і висотою ℎ = ��(��□) = ��(��□, ��□), ��осн. = �� □ □ = ����□ (��циліндра = ��осн.ℎ).

3) Всього таких циліндрів ��, тоді сума їх об’ємів:

□

□��(��□, ��□) □꩜1□ (1)

����□ = ��□ ≈ ��.

Нехай �� = max□꩜1□ ꩠꩠꩠ ꩠ , □ꩠ ��□, де ��□ – діаметр обл. ��□ (тобто найбільша відстань між двома точками цієї області) чим > n, тим < обл. ��□ => тим менші їх площі ����□ (=> чим менше ��) �� → ∞ =>�� → 0.

Означення. Об’ємом циліндричного тіла називається границя суми (1) при �� → ∞ і �� → 0. Якщо ця границя існує і не залежить від способу розбиття обл. �� на частини та від вибору довільних точок ��□(��□, ��□) ∈ ��□.

□

�� = lim □→∞ ��□ = lim □→∞ ඞ→□ □꩜1□ □��(��□; ��□)Δ��□ (2)

II. Задача про масу плоскої пластини

🎬 Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є замкнена область �� ⊂ ������.

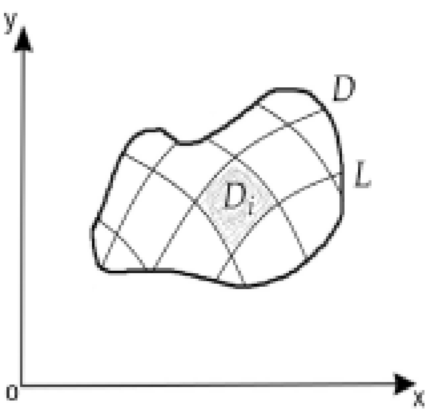
- Ця область суцільно заповнена деякою речовиною з густиною γ= γ(��, ��) - неперервна функція в області ��.
- Знайдемо масу �� пластини, розмірковуючи аналогічно, отримаємо:

�� = lim γ(��, ��) ���� (3)

Слід відмітити, що масу однорідної плоскої пластини з густиною γ = γ = ���������� обчислюють за формулою: �� = γ��, де �� – площа області ��.

§2. Основні поняття і означення подвійного інтегралу

Нехай в замкненій області �� ⊂ ������ визначена неперервна ф-ія �� = ��(��, ��).



Розіб'ємо область �� ∀ лініями на �� елементарних облстей ��, які не мають спільних внутрішніх точок.

- Площі кожної області позначимо ����, �� = 1, ��.

�� = ��� = �� ∪ �� ∪ … . ∪ ��

- Позначимо

�� = max ��,

де �� – діаметр замкнутої обмеженої області �� (тобто найбільша відстань між двома точками цієї області)

- У кожній області �� виберемо ∀ ��. ��(��, ��) ∈ �� і побудуємо суму:

�� = ��(��, ��)���� (4)

Означення 1. Сума (4) називається інтегральною сумою функції

��(��, ��) в області ��.

Означення 2. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (4) при �� → 0 і �� → ∞, яка не залежить ні від способу розбиття області �� на частини (��□), ні від вибору точок ��□ ∈ ��□, то ця границя називається подвійним інтегралом від функції ��(��, ��) по області �� і позначається:

ꙺ��(��, ��)����

□

Отже, за означенням 2

□

ꙺ��(��, ��)���� = lim □→∞ □��(��□, ��□) ����□ (5)

□ꙹ1□

□

ꙸ→□

Означення 3. Якщо подвійний інтеграл (5) функції ��(��, ��) по області �� існує, то функція ��(��, ��) називається інтегровною в області ��.

�� - область інтегрування;

��(��, ��) – підінтегральна функція;

��(��, ��)���� = ��(��)���� – підінтегральний вираз.

���� – елемент площі.

Зауваження.

1. Із означення 2 => границя інтегральної суми не залежить від способу поділу області �� на елементарні частини, то виберемо лінії поділу прямі, які паралельні осям координат, отже,

∆�� = ∆�� · ∆�� => ���� = ���� · ���� => ꙺ ��(��; ��)���� = ꙺ��(��;

��)��������

2. Із задач §1 випливає:

1) Об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею �� = ��(��, ��) ≥ 0, знизу – областю ��, з боків – циліндричною поверхнею, дорівнює подвійному інтегралу від цієї функції по області ��.

�� = ඵ��(��, ��)�������� (6)

Зокрема, якщо ��(��, ��) = 1, ∀(��, ��) ∈ �� отримаємо формулу для обчислення площі �� області ��.

�� = ඵ�������� = ඵ���� (7)

(6), (7) – геометричний зміст подвійного інтегралу.

2) Маса плоскої пластини �� з поверхневою густиною �� = ��(��, ��):

�� = ඵ��(��, ��) �������� (8)

(8) – фізичний (механічний) зміст подвійного інтегралу.

Властивості подвійного інтегралу

Властивості подвійного інтегралу аналогічні відповідним властивостям визначеного інтегралу. Надалі вважатимемо, що підінтегральні функції інтегровні.

1. Якщо �� = ���������� ∈ ��

ඵ����(��, ��)������ = �� ඵ��(��, ��)��������

Тобто сталий множник можна винести за знак подвійного інтегралу. 2. Лінійність. Якщо функції ��(��, ��) та ��(��, ��) інтегровані в ��, то їх сума також інтегрована в області �� і

ඵ(��(��, ��) + ��(��, ��))�������� = ඵ��(��, ��)�������� + ඵ��(��, ��)��������

Зауваження. Властивості 1 і 2 можна об’єднати у властивості лінійності подвійного інтеграла.

Якщо ��(��, ��)інтегровні в області ��, �� = 1, ��; �� = ���������� ∈ ��, �� = 1, �� =>

��)����

����

��������(��, ��)����

����

= ����1

��(��, ��)����

����

3. Аддитивність. Якщо D = �� ∪ ��, де області ��, �� не мають спільних точок та функція ��(��, ��) інтегровна в області ��, то

��(��, ��)���� ���� = ��(��, ��)���� ���� + ��(��, ��)���� ����

4. Монотонність. (Інтегрування нерівностей). Якщо ��(��, ��), ��(��, ��) – інтегровні в області �� та ��(��, ��) ≥ ��(��, ��), ∀(��, ��) ∈ ��, тоді

≥ ��(��, ��)���������

��(��, ��)���������

��. Зокрема, якщо ��(��, ��) ≥ 0, ∀(��, ��) ∈ �� => ∬ ��(��, ��)��������� ≥ 0.

Властивості 1-4, 4 доводяться безпосередньо з означення подвійного інтегралу, як границі інтегральної суми.

5. Якщо функція ��(��, ��) інтегровна в області ��, то функція |��(��, ��)| також буде інтегровною в області �� і

≤ |��(��, ��)|���������

��(��, ��)���������

Доведення.

−| ��(��, ��)| ≤ ��(��,

��) ≤ | ��(��, ��)| ≤

ථ��(��, ��)����

−ථ|��(��, ��)|���� ≤ ථ|��(��, ��)|���� ≤ ථ|��(��, ��)|����

ධ ��

ථ��(��, ��)��

де ���� = �������� для короткого запису. Доведено.

6. Теорема про оцінку подвійного інтегралу

Якщо ��(��, ��) неперервна в області ��, то функція і ��, �� – найбільше і найменше значення функції ��(��, ��) в області ��, то

���� ≤ ථ��(��, ��)�������� ≤ ����, (9)

де S – площа області D.

Доведення. Оскільки ∀ (��, ��) ∈ �� ∶ �� ≤ ��(��, ��) ≤ �� (за теоремою Вейєрштрасса неперервна у замкнутій області функція приймає своє найбільше і найменше значення в цій області)

вл. 4 => ථ������

≤ ථ��(��, ��)����

≤ ථ��(��, ��)�� ≤ ථ���� => �� ��

=> ��ථ���� де ∬ ���� = ≤ ��ථ���� �� (7).

���� ≤ ථ��(��, ��)���� ≤ ����

Доведено.

Геометричний зміст. Якщо $f(x, y) \ge 0$, $(x, y) \in D$ => об'єм циліндричного тіла знаходиться між об'ємами двох циліндрів, які мають ту ж основу – область D і висоти m і M.

7. Теорема про середнє значення функції

Якщо $f(x, y)$ неперервна в замкнутій області D, то в цій області існує така точка $(x_0, y_0) \in D$, що

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0)S,$$

де S – площа області D. Величина

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

називається середнім значенням функції $f(x, y)$ в області D. Доведення. З властивості 7 випливає, що

$$m \le \frac{1}{S}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \le M$$

Число $\frac{1}{S}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ знаходиться між найбільшим і найменшим значенням функції $f(x, y)$ в області D. Оскільки $f(x, y)$ неперервна в області D, тоді існує точка $P(x_0, y_0) \in D$, в якій функція буде приймати значення рівне $\frac{1}{S}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$. Отже, $f(P) = f(x_0, y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$. Доведено.

Геометричний зміст. Якщо $f(x, y) \ge 0$, то об'єм циліндричного тіла дорівнює об'єму циліндра з основою D і висотою $h = f(x_0, y_0)$.

екартовій системі

§3. Двократні (повторні) інтеграли в прямокутній

Двократні (повторні) інтеграли в прямокутній декартовій системі координат (ПДСК)

в напрямку осі

Означення 1. Область

Область �� називається правильноюв напрямку осі

(����) перетинає

����), якщо ∀ пряма паралельна осі ����(����

����(����

границю області ох точках.

границю області �� не більше ніж в 2-ох точках.

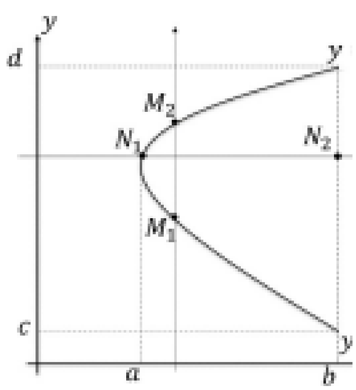
, якщо вона

Означення 2. Область

Область �� називається правильною, якщо вона

правильна в напрямі осі

правильна в напрямі осі ���� і осі ����.

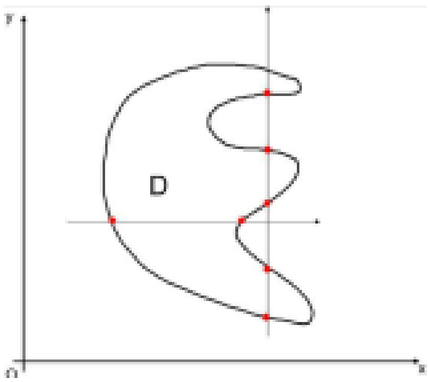
Приклад. 

області ��. �� = �� ≤ ��≤ ��(��) ≤ ��≤або �� = {(��, ��)|��

≤ �� ≤ ��, ��□(��) ≤≤��ഠ(��)≤�� ≤ ��ഠ(��)}.

1. Область �� – правильна область в напрямі правильна область в напрямі ���� і ����.

неправильна в напрямі ����



2. Область �� – правильна правильна

точками входу в

$y_2(x)$

т. ��□ і ��□ називаються точками входу ����.

$y_1(x)$

область �� в напрямі осі ���� і ����

точками виходу з

т. ��ഠ і ��ഠназиваються точками виходу

≤��