1. 试求 $\lambda I - A$ 的法式, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

答: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-4)-3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-4)(\lambda^2-3\lambda+1) \end{pmatrix}$.

2. 判断下列矩阵是否相似:

(1) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

答: (1) 否不变因子: $\lambda-i, \lambda-i$ 及 $\lambda-1, \lambda-1$.

(2) 否不变因子: $1, 1, (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda-23)$ 及 $1, 1, \lambda^3-11\lambda^2+36\lambda-16$.

(3) 否不变因子: $1, 1, (\lambda-1)^2(\lambda+1)$ 及 $1, \lambda-1, (\lambda-1)(\lambda+1)$.

(4) 是不变因子: $1, (\lambda-1)\ (\lambda-1)^2$。

3. 求下列矩阵的行列式因子与不变因子:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

答 (1) 行列式因子 $1, 1, \lambda(\lambda-1)^2$; 不变因子 $1, 1, \lambda(\lambda-1)^2$;

(2) 行列式因子 $1, 1, \lambda^4-8\lambda^3-16\lambda^2+88\lambda-304$; 不变因子 $1, 1, \lambda^4-8\lambda^3-16\lambda^2+88\lambda-304$;

(3) 行列式因子 $1, 1, (\lambda-1)^2(\lambda-2)$; 不变因子 $1, 1, (\lambda-1)^2(\lambda-2)$;

(4) 行列式因子 $1, 1, (\lambda-1)^3$; 不变因子 $1, 1, (\lambda-1)^3$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 可对角化.

证明: 本题的必要性类似小白书例 6.56, 下证充分性. 容易验证 $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & -I_n \end{pmatrix}$ 的逆阵为 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n \\ I_n & -\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$, 考虑如下相似变换:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & -\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix}$$

故由 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 可对角化得到 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix}$ 也可对角化, 再由高代白皮书例 6.71 可知 $\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})$ 都可对角化. 又 $\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})$ 乘法可交换, 故由高代白皮书例 6.41 可知这两个矩阵可同时对角化, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_2$ 都是对角阵. 上述等式相加可得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda}_1+\boldsymbol{\Lambda}_2)$ 也是对角阵, 即 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

5. 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶行列式因子是一个 $n-2$ 次多项式, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组及其有理标准型.

解: 设 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$, 其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)(1 \leq i \leq n-1)$, 则由条件可知, $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)=d_n(\lambda)$ 是一个二次实系数多项式. 下面分情况进行讨论: (1) 若 $m(\lambda)=(\lambda-a)^2+b^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约, 其中 $a, b \neq 0$ 为实数, 则由整除关系可知 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \cdots, 1, m(\lambda), \cdots, m(\lambda)$. (2) 若 $m(\lambda)=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)$, 其中 a_1, a_2 为实数, 则由整除关系可知 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \cdots, 1, \lambda-a_i, \cdots, \lambda-a_i, m(\lambda), \cdots, m(\lambda), i=1$ 或 2 .

6. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换. 证明: 若 φ 有 r 维不变子空间, 则 φ 必有 $n-r$ 维不变子空间.

证明: 设 U 是 r 维 φ-不变子空间, 选取 U 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_r\}$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$, 则 φ 在这组基下的表示矩阵为分块上三角阵 $M=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $r, n-r$ 阶方阵. 由高代白皮书例 7.3 可知, M 与 M' 相似, 即存在 n 阶非异阵 P, 使得 $P^{-1}MP=M'$. 令 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)=(e_1, e_2, \cdots, e_n)\boldsymbol{P}$, 则由 $\boldsymbol{P}$ 的非异性可知 $f_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 是 V 的一组基, 并且 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为 $P^{-1}MP=M'=\begin{pmatrix} A' & O \\ C' & B' \end{pmatrix}$. 令 $W=L(f_{r+1}, \cdots, f_n)$, 则容易验证 W 是 $n-r$ 维 φ-不变子空间.

7. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的三阶矩阵 A, B, C, D 具有相同的特征多项式, 证明: 其中必有两个矩阵在 $\mathbb{K}$ 上相似.

证明:设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 相同的特征多项式为 $f(\lambda)$, 我们只要证明: 特征多项式为 $f(\lambda)$ 的数域 $\mathbb{K}$ 上的三阶矩阵, 其不变因子组 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda)$ 只有三种可能性, 那么 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 中至少有两个矩阵有相同的不变因子组, 从而它们在 $\mathbb{K}$ 上相似. (1) 若 $\deg d_3(\lambda)=3$, 则 $d_3(\lambda)=f(\lambda)$, 从而 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, 此时不变因子组为 $1, 1, f(\lambda)$. (2) 若 $\deg d_3(\lambda)=2$, 则 $\deg d_2(\lambda)=1, d_1(\lambda)=1$. 设 $d_2(\lambda)=\lambda-a$, 其中 $a \in \mathbb{K}$, 则由 $d_2(\lambda) \mid d_3(\lambda)$ 可设 $d_3(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)$, 其中 $b \in \mathbb{K}$, 于是 $f(\lambda)=(\lambda-a)^2(\lambda-b)$, 其中 a 是 $f(\lambda)$ 唯一的重数大于等于 2 的根, 此时不变因子组为 $1, \lambda-a, (\lambda-a)(\lambda-b)$. (3) 若 $\deg d_3(\lambda)=1$, 则可设 $d_3(\lambda)=\lambda-a$, 其中 $a \in \mathbb{K}$. 由于 $d_i(\lambda) \mid d_3(\lambda)$, $d_1(\lambda)d_2(\lambda)d_3(\lambda)=f(\lambda)$ 且 $\deg f(\lambda)=3$, 故 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=\lambda-a$, 此时不变因子组为 $\lambda-a, \lambda-a, \lambda-a$.

8. 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}'$, 其中 $\boldsymbol{A} \in V$. 请用矩阵的 Kronecker 积证明：若 A 可对角化，则 φ 也可对角化.

证明: 由于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵. 由例 6.105 可知, φ 在基础矩阵这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{A}$, 于是

$$\left(\boldsymbol{P} \otimes (\boldsymbol{P})^{-1}\right)^{-1}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{P} \otimes (\boldsymbol{P})^{-1}\right)=\boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\Lambda}$$

为对角矩阵, 即 $A \otimes I_n-I_n \otimes A$ 可对角化, 从而 φ 可对角化.