1. 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角阵:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-4&4\\1&-2&2\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解: (1) $A=PJP^{-1}$,

$$P=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\1&-2&3\\2&-3&4\end{pmatrix}$$

(2) $A=PJP^{-1}$,

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=j\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)',\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,1)'$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)'$, 试求 $\boldsymbol{A}$. 解

$$A=\begin{pmatrix}5&0&-6\\6&4&-3\\-4&2&12\end{pmatrix}$$

3. 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&a&0\\a-2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化, 求 a 的值.

解: 经计算特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_4-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-a)(\lambda-1)^2$. 分以下三种情况讨论.

(1) 若 $a=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (2 重), 1 (2 重). 经计算可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 于是特征值 0 的几何重数等于 $4-3=1$, 小于其代数重数, 从而 A 不可对角化. 另外, 特征值 1 的几何重数等于 1 , 也小于其代数重数.

(2) 若 $a=1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (1 重), 1 (3 重). 经计算可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)=3$, 于是特征值 1 的几何重数等于 $4-3=1$, 小于其代数重数, 从而 A 不可对角化.

(3) 若 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (1 重), a (1 重), 1 (2 重). 对 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4$ 实施如下初等变换 (第三列乘以 -1 加到第二列, 第四列加到第二列, 第二列乘以 a 加到第三列) 变为:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&a-1&a&0\\a-2&0&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\a-2&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则特征值 1 的几何重数也等于 2 , 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)=2$, 从而可得 $a=2$. 本题也有更简洁的解法. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行和第四行对换, 再将第一列和第四列对换, 得到的矩阵 $\boldsymbol{B}$

和 $\boldsymbol{A}$ 相似 (参考高代教材习题 4.3.10):

$$\boldsymbol{P}_{14}AP_{14}=B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&a&a&0\\0&0&1&a-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

然后再利用高代白皮书例 7.56 , 经过简单讨论后即得 $a=2$.

4. 问 a,a_1,a_2,b,b_1,c 满足什么条件时下述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\a_1&b&2&0\\a_2&b_1&c&2\end{pmatrix}$$

解: 显然 A 的特征值匙 $\lambda_1=1$ 代数重数 $2, \lambda_2=2$ 代数重数 2 . 先看 $\lambda_1=1$, 它的几何而数为 2 的充要条件是线性方程组 $(\lambda_1 I-A)\,X=0$ 的解空间为 2 维, 即系数矩阵的秩

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&&&\\-a&0&&\\-a_1&-b&-1&\\-a_2&-b_1&-c&-1\end{pmatrix}=4-2=2.$$

由于该矩阵中有一个 2 阶子式非零, 显然此式成立的充要条件是 $a=0$.

再看 $\lambda_2=2$, 它的几何重数为 2 的充要条件是线性方程组 $(\lambda_2 I-A)\,X=0$ 的解空间为 2 维, 即系数矩阵的秩

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&&&\\-a&1&&\\-a_1&-b&0&\\-a_2&-b_1&-c&0\end{pmatrix}=4-2=2.$$

同上推理, 此式成立的充要条件是 $c=0$. 所以, 矩阵 A 相似于对角矩阵的充要条件是 $a=0=c$.

5. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\c&a&&\\\vdots&&\ddots&\\c&&&a\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件.

解: 由高代白皮书第 6 章解答题 2 可知, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda I_n-A|=(\lambda-a)^{n-2}\left((\lambda-a)^2-(n-1)bc\right).$$

下分三种情况进行讨论.

(1) 若 $b=c=0$, 则 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}_n$ 可对角化.

(2) 若 $b\neq 0$ 且 $c=0$, 或者 $b=0$ 且 $c\neq 0$, 则 A 是主对角元全为 a 的上三角阵或者下三角阵, 此时 A 不可对角化, 否则 $\boldsymbol{A}$ 将是纯量阵, 矛盾!

(3) 若 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $a(n-2$ 重), $a \pm \sqrt{(n-1)bc}$ (各 1 重). 经计算可知特征值 a 的几何重数等于 $n - r\left(\boldsymbol{A} - a\boldsymbol{I}_n\right) = n-2$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 有完全的特征向量系, 从而 A 可对角化.

6. 设 $n(n>1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1 , 求证: $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

证明: 由 $r(A)=1$ 可知, 存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$, 于是由迹的交换性可得 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right) = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}\right) = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$.

证法 1 由小白书例 6.21 及其可对角化的讨论可知本题结论成立.

证法 2 注意到 $\boldsymbol{A}^2 = \left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right) = \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}' = \left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $x^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})x$. 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 则由小白书例 6.66 可知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化; 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵, 又 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 故由小白书例 6.73 (1) 可知 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶复方阵. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{B}$ 也可对角化.

解: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i (1 \leq i \leq n)$. 注意到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix} = \left(\lambda_i - \mathrm{i}\lambda_i^2\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix} = \left(\lambda_i + \mathrm{i}\lambda_i^2\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix}.$$

通过定义不难验证 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix} (1 \leq i \leq n)$ 是线性无关的, 因此 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 有 $2n$ 个线性无关的特征向量, 从而可对角化.

8. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, 证明下列矩阵可对角化:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ -a_2 & \cdots & -a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

证明: 作多项式 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$, 令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 -1 的所有 n 次方根. $\omega_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} (0 \leq k \leq n-1)$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix} = f\left(\omega_k\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}.$$

这表明 $\left(1, \omega_k, \cdots, \omega_k^{n-1}\right)'$ 是 A 的属于特征值 $f\left(\omega_k\right)$ 的特征向量. 令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

由 Vandermonde 行列式可知 $|\boldsymbol{P}| \neq 0$, 从而这 n 个特征向量线性无关, 因此 A 可对角化, 且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}\left\{f(1), f\left(\omega_1\right), \cdots, f\left(\omega_{n-1}\right)\right\}.$$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $f(x), g(x)$ 为 $\mathbb{K}$ 上互素的多项式, 且它们在 $\mathbb{C}$ 中均无重根. 证明: 若 $r(f(\boldsymbol{A})) + r(g(\boldsymbol{A})) = n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 复可对角化.

证明: 由小白书例 5.77 可知 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $f(x)g(x)$. 注意到 $f(x), g(x)$ 在复数域中均无重根且 $(f(x), g(x)) = 1$, 故 $f(x)g(x)$ 在复数域中也无重根, 再由小白书例 6.66 可知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

10. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩等于 2 , 请用 $\boldsymbol{M}$ 的特征值的相关条件给出 $\boldsymbol{M}$ 可对角化的充分必要条件.

解: 由高代白皮书例 3.92 , 考虑 M 的满秩分解 $M = AB$, 其中 A 是 $n \times 2$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $2 \times n$ 矩阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 2$. 设 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 为二阶复方阵, 则由特征值的降阶公式可得 $|\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{M}| = \lambda^{n-2}\left|\lambda \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{N}\right|$. 下面分两种情况讨论. (1) 若 $\boldsymbol{N}$ 为奇异阵, 则 M 的特征值 0 的代数重数大于 $n-2$, 其几何重数等于 $n-$ $\mathrm{r}(M) = n-2$, 此时 M 没有完全的特征向量系, 故不可对角化. (2) 若 $\boldsymbol{N}$ 为非异阵, 则由高代白皮书例 6.72 可知, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{N} = BA$ 可对角化. 容易验证二阶非异阵 $\boldsymbol{N}$ 可对角化的充要条件是, 或者 $\boldsymbol{N}$ 有两个不同的特征值, 或者 $\boldsymbol{N} = c\boldsymbol{I}_2$ 为纯量阵. 设 $|\lambda \boldsymbol{I}_n - M| = \lambda^{n-2}(\lambda - a)(\lambda - b)$, 则由上面的讨论可知, $\boldsymbol{M}$ 可对角化的充要条件是, 或者 a, b 是互异的非零复数, 或者 $a = b = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{M}) \neq 0$, 且 $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{M} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_n\right) = n-2$.