1. 已知 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组如下, 求 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型:

(1) $1, \lambda-2, \lambda-2, \lambda-2,(\lambda-2)^{2}$.

(2) $1, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda(\lambda-1)$.

(3)$1,1,1,(\lambda-2)(\lambda-3),(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

(4)$1,1,1, \lambda+1, \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)^{2}$.

2. 已知 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组如下, 求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组和极小多项式:

(1) $\lambda+5, \lambda+5, \lambda+5, \lambda+5, \lambda+5$.

(2) $\lambda, \lambda-1, \lambda-2, \lambda-3, \lambda-4$.

(3) $(\lambda+1)^{2},(\lambda+1)^{2}, \lambda-1$.

(4) $\lambda-2, \lambda-2, \lambda+1, \lambda+1, \lambda+1$.

解: (1) 不变因子组: $\lambda+5, \lambda+5, \lambda+5, \lambda+5, \lambda+5$. 极小多项式: $\lambda+5$.

(2) 不变因子组: $1,1,1,1, \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$. 极小多项式: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$.

(3) 不变因于组: $1,1,1,(\lambda+1)^{2},(\lambda+1)^{2}(\lambda-1)$. 极小多项式: $(\lambda+1)^{2}(\lambda-1)$.

(4) 不变因子组: $1,1, \lambda+1,(\lambda+1)(\lambda-2),(\lambda+1)(\lambda-2)$. 极小多项式: $(\lambda+1)(\lambda-2)$.

3. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式是 $m_{A}(\lambda)$, 数 $a \neq 0$. 求方阵 $\boldsymbol{B}=a \boldsymbol{A}+b \boldsymbol{I}$ 的极小多项式 $m_{B}(\lambda)$.

解: 因 $A=a^{-1} B-a^{-1} b I$, 由 $m_{A}(A)=0$ 得 $m_{A}\left(a^{-1} B-a^{-1} b I\right)=0$. 即 $m_{A}\left(a^{-1} \lambda-a^{-1} b\right)$ 是 B 的零化多项式, 从甬 $m_{B}(\lambda) \mid m_{A}\left(a^{-1} \lambda-a^{-1} b\right)$. 特别地, 有 $\operatorname{deg} m_{B}(\lambda) \leqslant \operatorname{deg} m_{A}(\lambda)$. 同理, $m_{B}(a A+b I)=0$ 从而 $\operatorname{deg} m_{A}(\lambda) \leqslant \operatorname{deg} m_{B}(\lambda)$. 因此, $m_{A}\left(a^{-1} \lambda-\ a^{-1} b\right)$ 是 B 的极小多项式. 于是

$$m_{B}(\lambda)=a \cdot m_{A}\left(a^{-1} \lambda-a^{-1} b\right)$$

4. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 其中 $V=C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\alpha})$ 为循环空间, $\boldsymbol{\alpha}$ 为循环向量. 设 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}$ 是与 $\boldsymbol{\varphi}$ 乘法可交换的两个线性变换, 求证: $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\xi}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\alpha})$.

证明: 必要性是显然的, 下证充分性. 由例 7.12 可知, $\left\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \boldsymbol{\varphi}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\right\}$ 是 V 的一组基. 注意到 $\varphi \psi=\psi \varphi, \varphi \xi=\xi \varphi$ 且 $\psi(\alpha)=\xi(\alpha)$, 故对任意的 $1 \leq i \leq n-1$, 有 $\psi\left(\varphi^{i}(\boldsymbol{\alpha})\right)=\boldsymbol{\varphi}^{i}(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}))=\varphi^{i}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{\varphi}^{i}(\boldsymbol{\alpha})\right)$, 即 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}$ 在 V 的一组基上的取值都相同, 因此 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\xi}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实方阵，试求 $C(\boldsymbol{A})=\left\{\boldsymbol{B} \in M_{3}(\mathbb{R}) \mid \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B} \boldsymbol{A}\right\}$.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 的次数进行分类讨论. (1) 若 $\operatorname{deg} m(\lambda)=1$, 则 $\boldsymbol{A}=c I_{3}$ 为纯量矩阵, 因此 $C(\boldsymbol{A})=M_{3}(\mathbb{R})$. (2) 若 $\operatorname{deg} m(\lambda)=2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, d_{2}(\lambda), m(\lambda)$, 其中 $\operatorname{deg} d_{2}(\lambda)=1$ 且 $d_{2}(\lambda) \mid m(\lambda)$, 于是 $m(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可约. (2.1) 若 $m(\lambda)$ 有两个不同的实根 a, b, 不妨设 $d_{1}(\lambda)=\lambda-a$, 则存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{a, a, b\}$. 任取 $\boldsymbol{X}=\left(x_{i j}\right) \in C(\boldsymbol{A})$, 则由 $\boldsymbol{A} \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B} \boldsymbol{A}$ 计算可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\left(x_{11} \boldsymbol{E}_{11}+x_{12} \boldsymbol{E}_{12}+x_{21} \boldsymbol{E}_{21}+x_{22} \boldsymbol{E}_{22}+x_{33} \boldsymbol{E}_{33}\right) \boldsymbol{P}^{-1}$. (2.2) 若 $m(\lambda)$ 有两个相等的实根 a, 则 $d_{1}(\lambda)=\lambda-a$, 且存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left\{a, \boldsymbol{J}_{2}(a)\right\}$. 任取 $\boldsymbol{B}=\left(x_{i j}\right) \in C(\boldsymbol{A})$, 则由 $\boldsymbol{A} \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B} \boldsymbol{A}$ 计算可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\left(x_{11} \boldsymbol{E}_{11}+x_{13} \boldsymbol{E}_{13}+x_{21} \boldsymbol{E}_{21}+\right.$ $\left.x_{22}\left(\boldsymbol{E}_{22}+\boldsymbol{E}_{33}\right)+x_{23} \boldsymbol{E}_{23}\right) \boldsymbol{P}^{-1}$. (3) 若 $\operatorname{deg} m(\lambda)=3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于其特征多项式, 由例 7.26 可知 $C(\boldsymbol{A})=\mathbb{R}[\boldsymbol{A}]=\mathbb{R} \boldsymbol{I}_{3}+\mathbb{R} \boldsymbol{A}+\mathbb{R} \boldsymbol{A}^{2}$.

6. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, $f(\lambda), m(\lambda)$ 分别是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式和极小多项式. 如果存在 V 的 $\boldsymbol{\varphi}$-不变子空间 V_1, V_2, 使得

$$V=V_1\oplus V_2,\quad \dim V_1<\dim V,\quad \dim V_2<\dim V$$

则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}$-可分解的, 否则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}$-不可分解的. 证明: V 是 $\boldsymbol{\varphi}$-不可分解的充分必要条件是 $f(\lambda)=m(\lambda)=p(\lambda)^k$, 其中 $p(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式, $k\geq 1$.

证明必要性: 设 φ 在 K 上的不变因子组为

$$1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda).$$

由有理标准形理论知

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r,$$

其中 V_i 是 $\varphi-$ 不变子空间, 且 $\varphi|_{V_i}$ 对应于不变因子 $d_i(\lambda)$ 决定的 Frobenius 块 $(1\leqslant i\leqslant r)$. 因为 V 关于 φ 不可分解, 故 $r=1$, 从而

$$m(\lambda)=d_r(\lambda)=f(\lambda).$$

考虑特征多项式 $f(\lambda)$ 的标准因式分解

$$f(\lambda)=[p_1(\lambda)]^{k_1}[p_2(\lambda)]^{k_2}\cdots[p_s(\lambda)]^{k_s},$$

其中 $[p_i(\lambda)]^{k_i}\,(k_i>0, 1\leqslant i\leqslant s)$ 为 K 上互异的首一不可约多项式. 由引理知存在直和分解

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s,$$

其中 $V_i=\operatorname{Ker}[p_i(\varphi)]^{k_i}\,(1\leqslant i\leqslant s)$ 为 $\varphi-$ 不变子空间. 因为 V 关于 $\varphi-$ 不可分解, 故 $s=1$, 从而

$$f(\lambda)=[p_1(\lambda)]^{k_1}$$

充分性: 设 V 关于 φ 可分解, 我们只要证明充分条件不成立即可. 由定义知

$$V=V_1\oplus V_2,$$

其中 $V_i(i=1,2)$ 是 φ-不变子空间, 且 $\dim V_i>0$. 若某个 V_i 关于 $\varphi|_{V_i}$ 是可分解的, 那么我们可以继续分解下去, 最终可以得到 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$, 其中 $r\geqslant 2, V_i$ 是 φ-不变子空间, $\dim V_i>0$, 并且 V_i 关于 $\varphi|_{V_i}\,(1\leqslant i\leqslant r)$ 不可分解. 由必要性的证明可设 $\varphi|_{V_i}$ 的不变因子组为

$$1,\cdots,1,d_i(\lambda),$$

其中每个 $d_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant r)$ 都是某个不可约多项式的幂. 于是 φ 的极小多项式

$$m(\lambda)=\operatorname{lcm}\{d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)\}.$$

如果 $m(\lambda)=f(\lambda)=[p(\lambda)]^k$, 则由 $d_i(\lambda)\mid m(\lambda)$ 可设

$$d_i(\lambda)=[p(\lambda)]^{k_i}\quad(1\leqslant k_i\leqslant k).$$

由于 $m(\lambda)$ 是 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 的最小公倍式, 故存在某个 $1\leqslant i\leqslant r$ 使得

$$d_i(\lambda)=[p(\lambda)]^k,$$

从而

$$f(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_r(\lambda)=$$
$$[p(\lambda)]^{k_1+\cdots+k_r}\neq[p(\lambda)]^k.$$

这与假设矛盾, 故充分条件不成立

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 其特征多项式等于极小多项式, 证明: 矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}$ 的解是 $\mathbb{K}$ 上的对称阵.

证明: 设 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 也是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式, 则由有理标准型理论可知, 存在非异阵 $\boldsymbol{P}\in M_n(\mathbb{K})$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}(f(x))$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型 (由一个友阵 $\boldsymbol{C}(f(x))$ 构成). 由 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}$ 可得 $(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{XP})\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{XP})$, 再由小白书 6.87 可得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{XP}=\boldsymbol{Y}$ 为对称阵, 从而 $\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)'\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}^{-1}$ 也为对称阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 证明存在如下分解: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$, 其中 $\boldsymbol{A}_0$ 为 $\mathbb{K}$ 上的纯量矩阵, $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 均为 $\mathbb{K}$ 上的幂零矩阵.

证明. 令 $c=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})/n,\boldsymbol{A}_0=c\boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_0)=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})-nc=0$, 即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_0$ 是迹为零的矩阵. 由例 7.24 可知, 存在 $\mathbb{K}$ 上的非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 是一个主对角元全为零的矩阵. 设 B_1 为 B 的主对角线上方元素构成的主对角元全为零的上三角矩阵, B_2 为 B 的主对角线下方元素构成的主对角元全为零的下三角矩阵, 显然, $B=B_1+B_2$, 且 B_1,B_2 都是幂零矩阵. 令 $A_1=PB_1P^{-1},A_2=PB_2P^{-1}$, 则 A_1,A_2 都是 $\mathbb{K}$ 上的幂零矩阵, 且满足 $A=A_0+A_1+A_2$.

9. 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{K})$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{e_1},P_2(\lambda)^{e_2},\cdots,\ P_k(\lambda)^{e_k}$, 其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, $e_i\geq 1(1\leq i\leq k)$. 设 $\boldsymbol{C}\left(P_i(\lambda)^{e_i}\right)$ 为相伴于多项式 $P_i(\lambda)^{e_i}$ 的友阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上相似于分块对角阵

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{C}\left(P_1(\lambda)^{e_1}\right),\boldsymbol{C}\left(P_2(\lambda)^{e_2}\right),\cdots,\boldsymbol{C}\left(P_k(\lambda)^{e_k}\right)\right\}$$

试用上述结论证明第三届全国大学生数学竞赛预赛一道试题: 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的幂零阵, 即存在 $m\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{O}$.

证明：由复旦高代教材 P265 引理 7.4.1 知 $F\left(P_i(\lambda)^{e_i}\right)$ 的不变因子组为

$$1,\cdots,1,P_i(\lambda)^{e_i}$$

因此分块对角阵 $F=\operatorname{diag}\left\{F\left(P_1(\lambda)^{e_1}\right),F\left(P_2(\lambda)^{e_2}\right),\cdots,F\left(P_k(\lambda)^{e_k}\right)\right\}$ 经过 λ-矩阵的初等变换可化为如下对角 λ-矩阵:

$$\operatorname{diag}\left\{1,\cdots,1,P_1(\lambda)^{e_1};1,\cdots,1,P_2(\lambda)^{e_2};\cdots;1,\cdots,1,P_k(\lambda)^{e_k}\right\}$$

由复旦高代教材 P271 引理 7.6 .2 知 F 的初等因子组等于上述对角 λ-矩阵主对角元素的准素因子的集合. 注意到每个 $P_i(\lambda)^{e_i}$ 都是准素的, 因此 F 的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{e_1},P_2(\lambda)^{e_2},\cdots,P_k(\lambda)^{e_k}$, 即 F 与 A 在数域 $\mathbb{K}$ 上有相同的初等因子组. 因此由书本定理可知 A 与 F 在数域 $\mathbb{K}$ 上相似.

数学竞赛:

设 A 在数域 $\mathbb{K}$ 上的初等因子组为

$$P_1(\lambda)^{e_1},P_2(\lambda)^{e_2},\cdots,P_k(\lambda)^{e_k};\lambda^{t_1},\lambda^{t_2},\cdots,\lambda^{t_r}$$

其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式且 $P_i(0) \neq 0, e_i > 0, i = 1,2,\cdots,k; t_j > 0, j = 1,2,\cdots,r$. 注意到 $F\left(P_i(\lambda)^{e_i}\right)$ 为相伴于多项式 $P_i(\lambda)^{e_i}$ 的友阵, 从而它的特征多项式恰为 $P_i(\lambda)^{e_i}$. 特别地, $\det\left(F\left(P_i(\lambda)^{e_i}\right)\right) = (-1)^{n_i} P_i(0)^{e_i} \neq 0$, 其中 $n_i = \deg P_i(\lambda)^{e_i}$, 即 $F\left(P_i(\lambda)^{e_i}\right)$ 是非异阵. 令

$$B = \operatorname{diag}\left\{F\left(P_1(\lambda)^{e_1}\right), F\left(P_2(\lambda)^{e_2}\right), \cdots, F\left(P_k(\lambda)^{e_k}\right)\right\}$$

则 B 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非异阵. 由友阵的定义容易验证 $F\left(\lambda^{t_j}\right)$ 是幂零阵. 令

$$C = \operatorname{diag}\left\{F\left(\lambda^{t_1}\right), F\left(\lambda^{t_2}\right), \cdots, F\left(\lambda^{t_r}\right)\right\}$$

则 C 是数域 $\mathbb{K}$ 上的幂零阵. 由上述结果知 A 在数域 $\mathbb{K}$ 上相似于

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

故结论得证.

10. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 满足: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$. 证明: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为非异阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 的代数重数等于 1 且 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于 1 .

证明: 由于题目的条件和结论在同时相似变换: $A \mapsto P^{-1}AP, B \mapsto P^{-1}BP$ 下保持不变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}$ 为 Jordan 标准型. 因为 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$, 故 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 0 的几何重数为 1 , 从而属于特征值 0 的 Jordan 块只有一个, 记为 J_0; 将属于其他非零特征值的 Jordan 块合在一起, 记为 $\boldsymbol{J}_1$, 于是 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{J}_0, \boldsymbol{J}_1\}$. 设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$ 为相应的分块, 则由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{B}_{12}, \boldsymbol{B}_{21}, \boldsymbol{B}_{22}$ 都是零矩阵, 于是 $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{B}_{11}, \boldsymbol{O}\}$ 且 $\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{B}_{11} = \boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{J}_0$.

...