

Algoritmos - Actividad Guiada 2

Nombre: Alex Sanz Morant

URL: <https://colab.research.google.com/drive/16MRpl7466vSfqK9lVslqqgPrQGmOerei>

<https://github.com/sanzmalex/AlgoritmosdeOptimizacion>

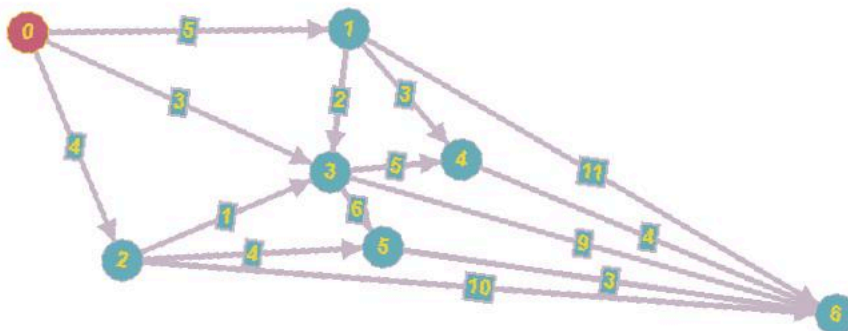
```
import math
```

Programación Dinámica. Viaje por el río

- **Definición:** Es posible dividir el problema en subproblemas más pequeños, guardando las soluciones para ser utilizadas más adelante.
- **Características** que permiten identificar problemas aplicables:
 - Es posible almacenar soluciones de los subproblemas para ser utilizados más adelante
 - Debe verificar el principio de optimalidad de Bellman: "en una secuencia optima de decisiones, toda sub-secuencia también es óptima" (*)
 - La necesidad de guardar la información acerca de las soluciones parciales unido a la recursividad provoca la necesidad de preocuparnos por la complejidad espacial (cuantos recursos de espacio usaremos)

Problema

En un río hay n embarcaderos y debemos desplazarnos río abajo desde un embarcadero a otro. Cada embarcadero tiene precios diferentes para ir de un embarcadero a otro situado más abajo. Para ir del embarcadero i al j , puede ocurrir que sea más barato hacer un trasbordo por un embarcadero intermedio k . El problema consiste en determinar la combinación más barata.



↳ 6 celdas ocultas

Problema de Asignacion de tarea

```
#Asignacion de tareas - Ramificación y Poda
#####
#   T A R E A
#   A
#   G
#   E
#   N
#   T
#   E

COSTES=[[11,12,18,40],
        [14,15,13,22],
        [11,17,19,23],
        [17,14,20,28]]
```

```
#Calculo del valor de una solucion parcial
def valor(S,COSTES):
    VALOR = 0
    for i in range(len(S)): #n operaciones
```

```

    VALOR += COSTES[S[i]][i]
return VALOR

```

```

valor((3,2, ),COSTES)

```

34

La función valor tiene orden $O(n)$.

```

#Coste inferior para soluciones parciales
# (1,3,) Se asigna la tarea 1 al agente 0 y la tarea 3 al agente 1

def CI(S,COSTES):
    VALOR = 0
    #Valores establecidos
    for i in range(len(S)): #n operaciones
        VALOR += COSTES[i][S[i]]

    #Estimacion
    for i in range( len(S), len(COSTES) ): #n operaciones
        VALOR += min( [ COSTES[j][i] for j in range(len(S), len(COSTES)) ] ) #n operaciones
    return VALOR

def CS(S,COSTES):
    VALOR = 0
    #Valores establecidos
    for i in range(len(S)): #n operaciones
        VALOR += COSTES[i][S[i]]

    #Estimacion
    for i in range( len(S), len(COSTES) ): #n operaciones
        VALOR += max( [ COSTES[j][i] for j in range(len(S), len(COSTES)) ] ) #n operaciones
    return VALOR

CI((0,1),COSTES)

```

68

CI y CS tienen orden $O(n^2)$.

```

#Genera tantos hijos como como posibilidades haya para la siguiente elemento de la tupla
#(0,) -> (0,1), (0,2), (0,3)
def crear_hijos(NODO, N):
    HIJOS = []
    for i in range(N ): #n operaciones
        if i not in NODO: #n operaciones
            HIJOS.append({'s':NODO +(i, ) })
    return HIJOS

```

La función crear_hijos tiene orden $O(n^2)$.

```

crear_hijos((0, ) , 4)

```

```

[{'s': (0, 1)}, {'s': (0, 2)}, {'s': (0, 3)}]

```

```

def ramificacion_y_poda(COSTES):
    #Construccion iterativa de soluciones(arbol). En cada etapa asignamos un agente(ramas).
    #Nodos del grafo { s:{1,2},CI:3,CS:5 }
    #print(COSTES)
    DIMENSION = len(COSTES)
    MEJOR_SOLUCION=tuple( i for i in range(len(COSTES)) ) #n operaciones
    CotaSup = valor(MEJOR_SOLUCION,COSTES) #n operaciones
    #print("Cota Superior:", CotaSup)

    NODOS=[]
    NODOS.append({'s':(), 'ci':CI((),COSTES) } ) #n^2 operaciones

    iteracion = 0

    while( len(NODOS) > 0):
        iteracion +=1

        nodo_prometedor = [ min(NODOS, key=lambda x:x['ci']) ][0]['s'] #n operaciones
        #print("Nodo prometedor:", nodo_prometedor)

    #Ramificacion

```

```

#Se generan los hijos
HIJOS = [ {'s':x['s'], 'ci':CI(x['s'], COSTES) } for x in crear_hijos(nodo_prometedor, DIMENSION) ] #n^3 operaciones

#Revisamos la cota superior y nos quedamos con la mejor solucion si llegamos a una solucion final
NODO_FINAL = [x for x in HIJOS if len(x['s']) == DIMENSION ] #n operaciones
if len(NODO_FINAL) > 0:
    #print("\n*****Soluciones:", [x for x in HIJOS if len(x['s']) == DIMENSION ] )
    if NODO_FINAL[0]['ci'] < CotaSup:
        CotaSup = NODO_FINAL[0]['ci']
        MEJOR_SOLUCION = NODO_FINAL

#Poda
HIJOS = [x for x in HIJOS if x['ci'] < CotaSup ] #n operaciones

#Añadimos los hijos
NODOS.extend(HIJOS)

#Eliminamos el nodo ramificado
NODOS = [ x for x in NODOS if x['s'] != nodo_prometedor ]

print("La solucion final es:" ,MEJOR_SOLUCION , " en " , iteracion , " iteraciones" , " para dimension: " ,DIMENSION )

ramificacion_y_poda(COSTES)

```

La solucion final es: [{'s': (1, 2, 0, 3), 'ci': 64}] en 10 iteraciones para dimension: 4

La función ramificacion_y_poda tiene orden $O(n!)$ ya que el while hace que se repitan las operaciones para tamaños sucesivamente más grandes.

▾ Descenso del gradiente

```

import math                #Funciones matematicas
import matplotlib.pyplot as plt #Generacion de gráficos (otra opcion seaborn)
import numpy as np          #Tratamiento matriz N-dimensionales y otras (fundamental!)
import scipy as sc

import random

```

Vamos a buscar el minimo de la funcion paraboloides :

$$f(x) = x^2 + y^2$$

Obviamente se encuentra en (x,y)=(0,0) pero probaremos como llegamos a él a través del descenso del gradiente.

```

#Definimos la funcion
#Paraboloide
f = lambda X: X[0]**2 + X[1]**2 #Funcion
df = lambda X: [2*X[0] , 2*X[1]] #Gradiente

df([1,2])

[2, 4]

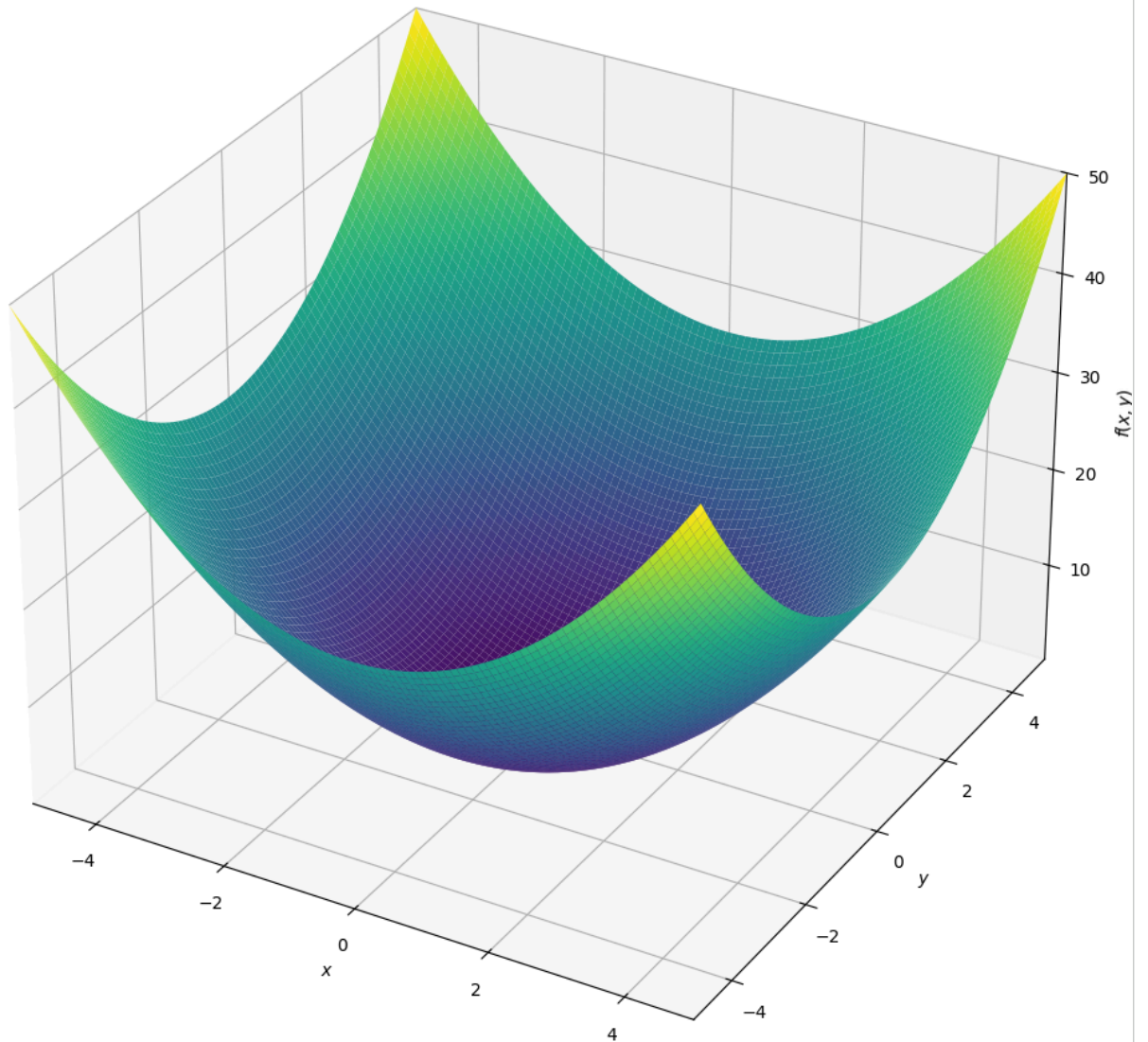
```

```

from sympy import symbols
from sympy.plotting import plot
from sympy.plotting import plot3d
x,y = symbols('x y')
plot3d(x**2 + y**2,
        (x,-5,5),(y,-5,5),
        title='x**2 + y**2',
        size=(10,10))

```

$$x^2 + y^2$$



<sympy.plotting.backends.matplotlibbackend.matplotlib.MatplotlibBackend at 0x7dc006a97290>

```
#Prepara los datos para dibujar mapa de niveles de Z
resolucion = 100
rango=5.5

X=np.linspace(-rango,rango,resolucion)
Y=np.linspace(-rango,rango,resolucion)
Z=np.zeros((resolucion,resolucion))
for ix,x in enumerate(X):
    for iy,y in enumerate(Y):
        Z[iy,ix] = f([x,y])

#Pinta el mapa de niveles de Z
plt.contourf(X,Y,Z,resolucion)
plt.colorbar()

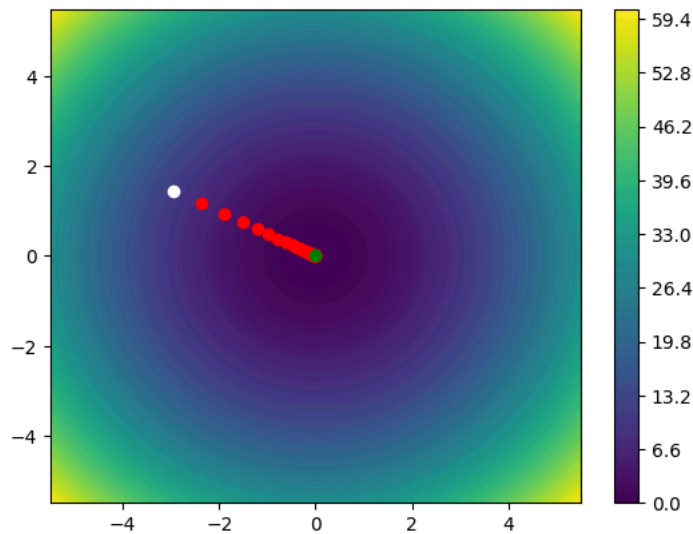
#Generamos un punto aleatorio inicial y pintamos de blanco
P=[random.uniform(-5,5 ),random.uniform(-5,5 ) ]
plt.plot(P[0],P[1],"o",c="white")

#Tasa de aprendizaje. Fija. Sería más efectivo reducirlo a medida que nos acercamos.
TA=.1

#Iteraciones:50
for _ in range(50):
    grad = df(P)
    #print(P,grad)
    P[0],P[1] = P[0] - TA*grad[0] , P[1] - TA*grad[1]
    plt.plot(P[0],P[1],"o",c="red")
```

```
plt.plot(P[0],P[1], 'o',c='red',
```

```
#Dibujamos el punto final y pintamos de verde
plt.plot(P[0],P[1],"o",c="green")
plt.show()
print("Solucion:" , P , f(P))
```

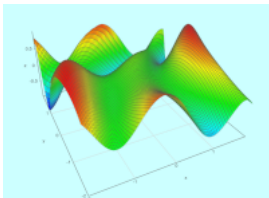


Solucion: [-4.22627725644791e-05, 2.0753265069290508e-05] 2.216839955873121e-09

¿Te atreves a optimizar la función?:

$$g(x,y) = \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) * \cos(2x + 1 - e^y)$$

$$\nabla g(x,y) = \left(x \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) * \cos(2x + 1 - e^y) - 2 \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) * \sin(2x + 1 - e^y), e^y \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) * \sin(2x + 1 - e^y) - \frac{y}{2} \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) * \cos(2x + 1 - e^y) \right)$$



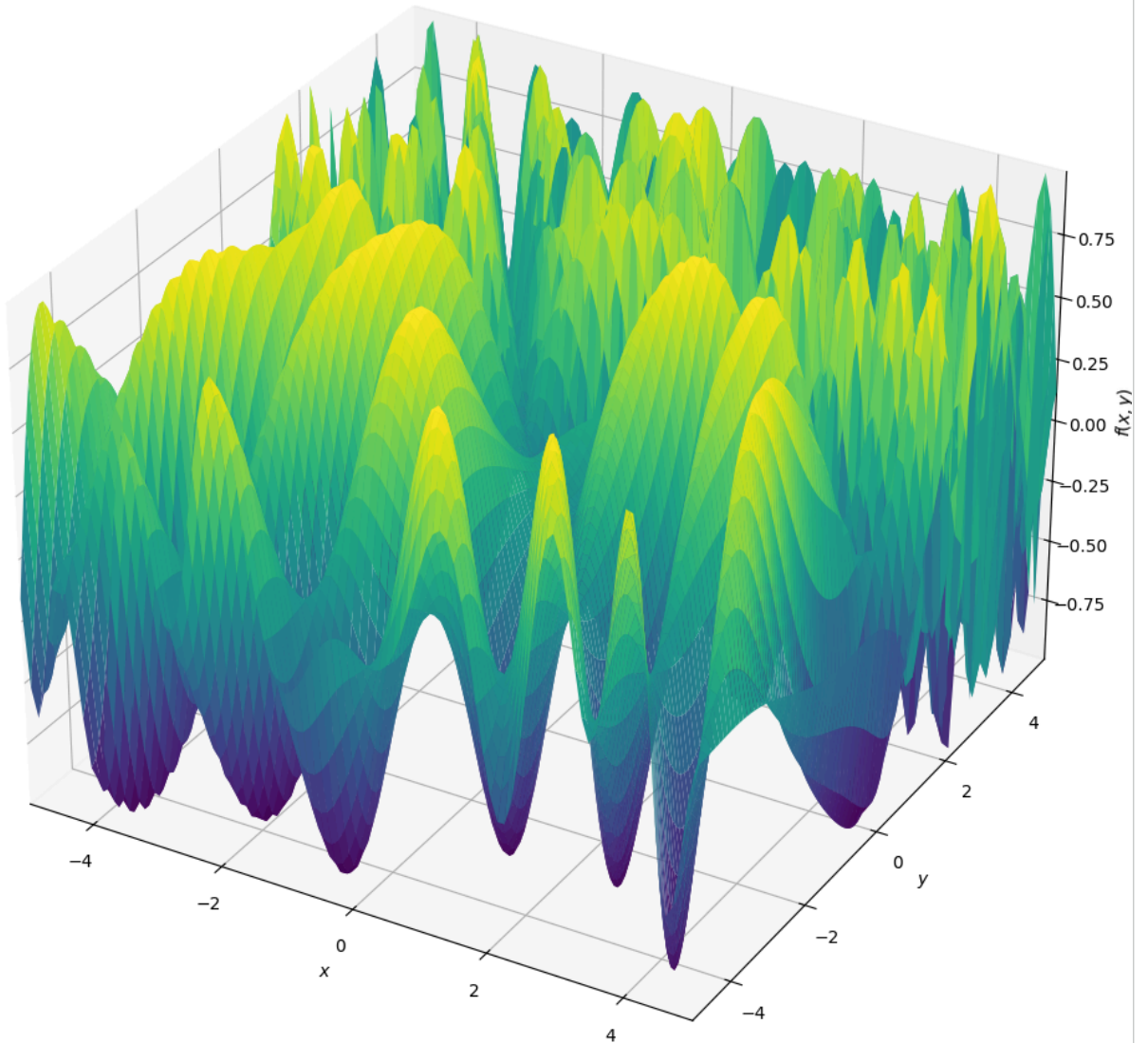
```
#Definimos la funcion
g= lambda X: math.sin(1/2 * X[0]**2 - 1/4 * X[1]**2 + 3) *math.cos(2*X[0] + 1 - math.exp(X[1]))
dg = lambda X: (X[0]*math.cos(1/2*X[0]**2 - 1/4*X[1]**2 + 3) * math.cos(2*X[0] + 1 - math.exp(X[1]))
- 2*math.sin(1/2*X[0]**2 - 1/4*X[1]**2 + 3) * math.sin(2*X[0] + 1 - math.exp(X[1])),
math.exp(X[1]) * math.sin(1/2*X[0]**2 - 1/4*X[1]**2 + 3) * math.sin(2*X[0] + 1 - math.exp(X[1]))
- 1/2*X[1] * math.cos(1/2*X[0]**2 - 1/4*X[1]**2 + 3) * math.cos(2*X[0] + 1 - math.exp(X[1]))) #gradiente

dg([1,2])
```

(-0.8803745550791662, 3.9384502467765357)

```
import sympy as sp
x,y = symbols('x y')
plot3d(sp.sin(1/2 * x**2 - 1/4 * y**2 + 3) *sp.cos(2*x + 1 - sp.exp(y)),
(x,-5,5),(y,-5,5),
title='sin(1/2 * x**2 - 1/4 * y**2 + 3) *cos(2*x + 1 - exp(y))',
size=(10,10))
```

$$\sin(1/2 * x^2 - 1/4 * y^2 + 3) * \cos(2*x + 1 - \exp(y))$$



<sympy.plotting.backends.matplotlibbackend.matplotlib.MatplotlibBackend at 0x7dbff87ffc80>

```
#Prepara los datos para dibujar mapa de niveles de Z
resolucion = 100
rango=5.5

X=np.linspace(-rango,rango,resolucion)
Y=np.linspace(-rango,rango,resolucion)
Z=np.zeros((resolucion,resolucion))
for ix,x in enumerate(X):
    for iy,y in enumerate(Y):
        Z[iy,ix] = g([x,y])

#Pinta el mapa de niveles de Z
plt.contourf(X,Y,Z,resolucion)
plt.colorbar()

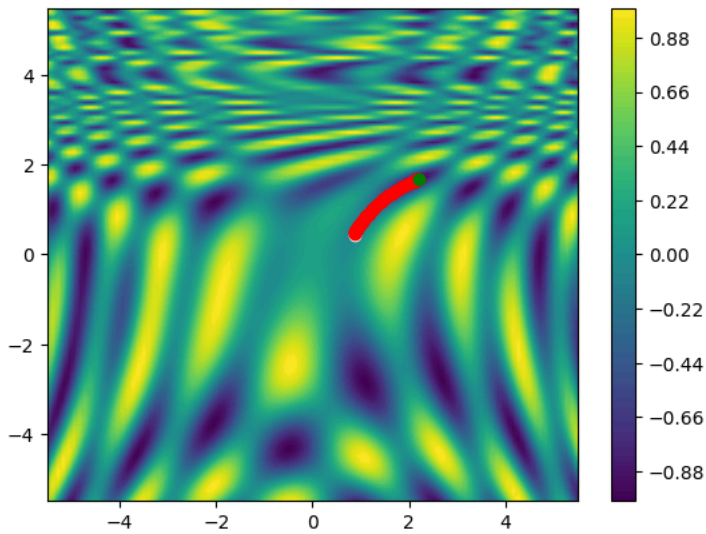
#Generamos un punto aleatorio inicial y pintamos de blanco
P=[random.uniform(-5,5 ),random.uniform(-5,5 ) ]
plt.plot(P[0],P[1],"o",c="white")

#Tasa de aprendizaje. Fija. Sería más efectivo reducirlo a medida que nos acercamos.
TA=.1

#Iteraciones:50
for _ in range(50):
    grad = dg(P)
    #print(P,grad)
    P[0],P[1] = P[0] - TA*grad[0] , P[1] - TA*grad[1]
```

```
plt.plot(P[0],P[1],"o",c="red")

#Dibujamos el punto final y pintamos de verde
plt.plot(P[0],P[1],"o",c="green")
plt.show()
print("Solucion:" , P , g(P))
```



Solucion: [2.1905114656560025, 1.6815610636551597] -0.9997722959701931

▼ Ramificación y poda - Ejercicio extra

```
import itertools
def fuerza_bruta(COSTES):
    mejor_valor = 10e10
    mejor_solucion = ()

    for s in list(itertools.permutations(range(len(COSTES)))): #n! operaciones (mirar referencia)
        valor_tmp = valor(s, COSTES) #n operaciones
        if valor_tmp < mejor_valor:
            mejor_valor = valor_tmp
            mejor_solucion = s

    print("La mejor solucion es :", mejor_solucion, " con valor:", mejor_valor)
```

La función fuerza_bruta tiene orden $O(n!)$.

Ejecutemos ambos algoritmos para matrices de distintas dimensiones:

```
mat5=np.random.randint(50,size=(5,5))
%time fuerza_bruta(mat5)
%time ramificacion_y_poda(mat6)
```

La mejor solucion es : (4, 0, 1, 2, 3) con valor: 21
 CPU times: user 894 µs, sys: 856 µs, total: 1.75 ms
 Wall time: 3.57 ms
 La solucion final es: [{'s': (1, 2, 3, 4, 0), 'ci': np.int64(21)}] en 15 iteraciones para dimension: 5
 CPU times: user 581 µs, sys: 39 µs, total: 620 µs
 Wall time: 627 µs

```
mat6=np.random.randint(50,size=(6,6))
%time fuerza_bruta(mat6)
%time ramificacion_y_poda(mat6)
```

La mejor solucion es : (3, 2, 0, 4, 1, 5) con valor: 38
 CPU times: user 4.88 ms, sys: 0 ns, total: 4.88 ms
 Wall time: 6.77 ms
 La solucion final es: [{'s': (2, 3, 1, 0, 4, 5), 'ci': np.int64(40)}] en 62 iteraciones para dimension: 6
 CPU times: user 3.22 ms, sys: 0 ns, total: 3.22 ms
 Wall time: 7.03 ms

```
mat7=np.random.randint(50,size=(7,7))
%time fuerza_bruta(mat7)
%time ramificacion_y_poda(mat7)
```

```
La mejor solucion es : (6, 5, 3, 4, 0, 2, 1) con valor: 49
CPU times: user 36.5 ms, sys: 0 ns, total: 36.5 ms
Wall time: 108 ms
La solucion final es: [{'s': (4, 6, 5, 2, 3, 1, 0), 'ci': np.int64(49)}] en 231 iteraciones para dimension: 7
CPU times: user 19.7 ms, sys: 0 ns, total: 19.7 ms
```

```
mat8=np.random.randint(50,size=(8,8))
%time fuerza_bruta(mat8)
%time ramificacion_y_poda(mat8)
```

```
La mejor solucion es : (0, 2, 5, 3, 1, 7, 4, 6) con valor: 19
CPU times: user 224 ms, sys: 2.37 ms, total: 226 ms
Wall time: 429 ms
La solucion final es: [{'s': (0, 4, 1, 3, 6, 2, 7, 5), 'ci': np.int64(19)}] en 711 iteraciones para dimension: 8
CPU times: user 106 ms, sys: 0 ns, total: 106 ms
Wall time: 123 ms
```

```
mat9=np.random.randint(50,size=(9,9))
%time fuerza_bruta(mat9)
%time ramificacion_y_poda(mat9)
```

```
La mejor solucion es : (3, 0, 7, 5, 4, 6, 1, 8, 2) con valor: 72
CPU times: user 1.23 s, sys: 29.2 ms, total: 1.26 s
Wall time: 1.26 s
La solucion final es: [{'s': (1, 6, 7, 0, 4, 3, 5, 2, 8), 'ci': np.int64(84)}] en 6528 iteraciones para dimension: 9
CPU times: user 4.22 s, sys: 7.4 ms, total: 4.23 s
Wall time: 4.33 s
```

```
mat10=np.random.randint(50,size=(10,10))
%time fuerza_bruta(mat10)
%time ramificacion_y_poda(mat10)
```

```
La mejor solucion es : (1, 2, 9, 5, 7, 8, 0, 6, 4, 3) con valor: 47
CPU times: user 23.4 s, sys: 424 ms, total: 23.9 s
Wall time: 31.1 s
La solucion final es: [{'s': (6, 0, 1, 9, 4, 8, 7, 3, 5, 2), 'ci': np.int64(49)}] en 41843 iteraciones para dimension:
CPU times: user 4min 57s, sys: 258 ms, total: 4min 58s
Wall time: 5min 26s
```

```
mat11=np.random.randint(50,size=(11,11))
%time fuerza_bruta(mat11)
```

```
La mejor solucion es : (5, 6, 3, 10, 4, 2, 1, 0, 7, 9, 8) con valor: 40
CPU times: user 2min 51s, sys: 3.67 s, total: 2min 54s
Wall time: 3min 2s
```

Podemos ver como a partir de matrices 9x9 el algoritmo de ramificación y poda se vuelve más lento que el de fuerza bruta, además, a partir de este tamaño ambos algoritmos se vuelven bastante lentos.

Por otro lado, es a partir de tamaño 10x10 cuando el algoritmo de ramificación y poda deja de ser una opción, mientras que el de fuerza bruta deja de serlo a partir de tamaño 11x11. Esto es debido al orden de los algoritmos, siendo ambos de $O(n!)$ pero habiendo una mayor cantidad de operaciones dentro de el de ramificación y poda que hacen que escalen más rápido el número de operaciones

Referencias

<https://www.datacamp.com/es/tutorial/big-o-notation-time-complexity>