第 42 卷第 7 期 数学的实践与认识 Vol.42, No.7
2012年 4 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Apr., 2012

应 用

层次分析法权重计算方法分析及其应用研究

邓 雪[1], 李家铭[1], 曾浩健[1], 陈俊羊[1], 赵俊峰[2]

(1. 华南理工大学 理学院数学系, 广东 广州 510640)

(2. 华南理工大学 机械与汽车工程学院, 广东 广州 510640)

摘 要: 介绍层次分析法的基本概念, 同时也分析了层次分析法权重的计算方法及应用. 层次分析法的计算方法有四种方法：几何平均法、算术平均法、特征向量法、最小二乘法. 以往的文献利用层次分析法解决实际问题时, 都是采用其中的某一种方法求权重向量, 不同的方法会导致结果有些偏差. 将对一具体实例, 采用四种计算方法分别得出权重向量再进行排序和综合分析, 这样可以避免采用单一方法所产生的偏差, 得出的结论将更全面、更有效.

关键词: 层次分析法; 判断矩阵; 权重向量; 一致性检验

1 层次分析法简介

1.1 层次分析法概念

美国运筹学家 Saaty 于 20 世纪 70 年代初提出了著名的层次分析法 (Analytic Hierarchy Process 简称 AHP). 层次分析法是将与决策有关的元素分解成目标、准则、方案等层次, 在此基础之上进行定性和定量分析的决策方法. 该方法具有系统、灵活、简洁的优点 [1].

层次分析法有四种计算方法求权重. 一般而言, 利用层次分析法解决实际问题时, 都是采用其中的某一种方法求权重向量, 并得出相应的结果. 四种计算方法得出的权重向量一般比较接近, 但也有细微差别, 而这些细微的差别可能在解决实际问题时会得出不一样的结果. 所以本文尝试用四种方法求解权重向量, 互相比较, 综合考虑, 从而得出更有效、更科学的决策.

1.2 层次分析法的基本原理与步骤

运用层次分析法建模来解决实际问题, 大体上可按如下四个步骤进行：

步骤 1 建立递阶层次结构模型

应用 AHP 分析决策问题时, 首先要把问题条理化、层次化, 构造出一个有层次的结构模型. 这些层次可以分为三类：最高层 (目的层), 中间层 (准则层), 最底层 (方案层). 递阶层次结构中的层次数与问题的复杂程度及需要分析的详尽程度有关, 一般地层次数不受限制. 每一层次中各元素所支配的元素一般不要超过 9 个.

收稿日期: 2010-05-14

资助项目: 广东省大学生创新实验项目 (1056111068, 1056111069); 华南理工大学中央高校基本科研业务费项目 (2011ZM0082, 2011SM002)

步骤 2 构造出各层次中的所有判断矩阵

准则层中的各准则在目标衡量中所占的比重并不一定相同, 在决策者的心目中, 它们各占有一定的比例. 引用数字 1-9 及其倒数作为标度 [1] 来定义判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$(见表 1).

步骤 3 层次单排序及一致性检验;

1) 计算一致性指标 CI (consistency index) [1]

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{1}$$

其中, $\lambda_{\max}$ 为判断矩阵的最大特征值.

2) 查找一致性指标 RI(见表 2)[1].

表 1 判断矩阵标度定义

标度	含义
1	表示两个因素相比, 具有相同重要性
3	表示两个因素相比, 前者比后者稍重要
5	表示两个因素相比, 前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比, 前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比, 前者比后者极端重要
2, 4, 6, 8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若因素 i 与因素 j 的重要性之比为 a_{ij}, 那么因素 j 与因素 i 重要性之比为 $a_{ji}=1/a_{ij}$.

表 2 平均随机一致性指标

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.24	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58

3) 计算一致性比例 CR (consistency ratio)

$$CR=\frac{CI}{RI} \tag{2}$$

当 $CR<0.10$ 时, 认为判断矩阵的一致性是可以接受的, 否则应对判断矩阵作适当修正.

步骤 4 层次总排序及一致性检验.

最终要得到各元素, 特别是最低层中各方案对目标的排序权重, 从而进行方案选择. 对层次总排序也需作一致性检验, 计算各层要素对系统总目标的合成权重, 并对各被选方案排序.

2 层次分析法权重向量 W 计算方法

方法有几何平均法、算术平均法、特征向量法和最小二乘法 4 种 [3].

2.1 几何平均法 (方根法)

$$W_i=\frac{(\prod\limits_{j=1}^{n}a_{ij})^{\frac{1}{n}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\prod\limits_{j=1}^{n}a_{ij})^{\frac{1}{n}}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

计算步骤: ① $\boldsymbol{A}$ 的元素按行相乘得一新向量;

② 将新向量的每个分量开 n 次方;

③ 将所得向量归一化即为权重向量.

2.2 算术平均法 (求和法)

由于判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一列都近似地反映了权值的分配情形, 故可采用全部列向量的算术平均值来估计权向量. 即

$$W_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}}, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

计算步骤: ① $\boldsymbol{A}$ 的元素按列归一化, 即求 $a_{ij}/\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}$;

② 将归一化后的各列相加;

③ 将相加后的向量除以 n 即得权重向量.

2.3 特征向量法

将权重向量 $\boldsymbol{W}$ 右乘权重比矩阵 $\boldsymbol{A}$, 有

$$\boldsymbol{AW} = \lambda_{\max}\boldsymbol{W} \tag{5}$$

同上, $\lambda_{\max}$ 为判断矩阵的最大特征值, 存在且唯一, $\boldsymbol{W}$ 的分量均为正分量. 最后, 将求得的权重向量作归一化处理即为所求.

2.4 最小二乘法

用拟合方法确定权重向量, 使残差平方和为最小. 即求解如下模型:

$$\begin{aligned} &\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}w_j - w_i)^2 \\ &\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ &\quad w_i > 0, i=1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{6}$$

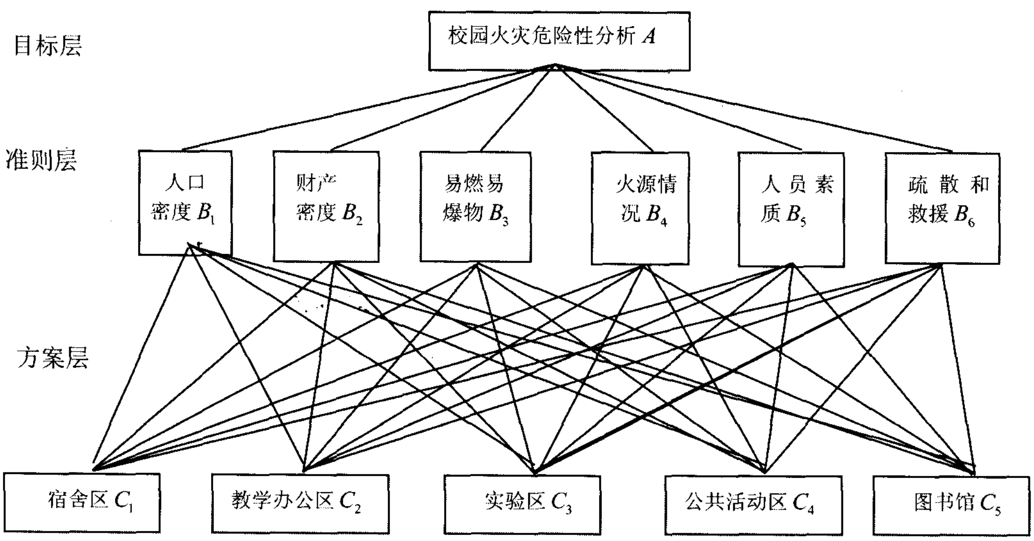

图 1　校园火灾危险性分析的递阶层次结构模型

3 层次分析法在校园火灾危险性分析中的应用

接下来, 我们引用文献 [2] 的实际应用例题的数据来说明, 在求权重向量时综合考虑四种方法的优点, 可以避免采用一种方法产生的偏差, 得出的结果更有效, 更全面.

3.1 校园火灾危险性分析

由于校园火灾发生具有随机性、发展过程的复杂性及现有资料的不完备性的特点, 因此采用层次分析法可将半定量半定性问题定量化. 为了方便分级管理, 将校园划分为如下区域: 宿舍区、教学办公区、实验区、公共活动区、图书馆. 有如下 6 个评价因子: 人口密度、财产密度、易燃易爆物、火源情况、人员素质、疏散和救援. 据火灾危险性评价因子和场所功能分区建立对应的递阶层次结构模型如图 1 所示 [2].

3.2 应用层次分析法中的四种估计权重方法计算各个指标的权重

校园火灾危险性评价因子判断矩阵 A, 不同区域人口密度, 财产密度, 易燃易爆物, 火源情况, 人员素质, 疏散和救援判断矩阵 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 分别为 [2]:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/4 & 1/5 & 1 & 1/5 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1/3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1/3 & 3 \\ 1/4 & 1/4 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/4 & 2 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 1/5 & 1 & 1/4 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 2 & 3 & 1/2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 1/4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 4 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

接下来, 根据四种不同的求权重的方法, 有如下结论:

表 3 校园火灾危险性评价因子判断矩阵 A 的权重系数

方法	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\lambda_{\max}$	CI	CR
几何平均法	0.0993	0.0553	0.2921	0.2524	0.1137	0.1873	6.3668	0.0734	0.0592
算术平均法	0.1004	0.0601	0.2875	0.2453	0.1149	0.1919	6.3744	0.0749	0.0604
特征向量法	0.0987	0.0574	0.2937	0.2420	0.1149	0.1933	6.3709	0.0742	0.0598
最小二乘法	0.0899	0.0514	0.3071	0.2629	0.1336	0.1550	6.4541	0.0908	0.0732

表 4 同区域人口密度判断矩阵 B_1 的权重系数

方法	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\lambda_{\max}$	CI	CR
几何平均法	0.2184	0.2184	0.0664	0.3985	0.0983	5.2892	0.0723	0.0646
算术平均法	0.2145	0.2145	0.0703	0.4006	0.1001	5.2918	0.0730	0.0652
特征向量法	0.2121	0.2121	0.0679	0.4114	0.0965	5.2924	0.0731	0.0653
最小二乘法	0.1893	0.1893	0.0719	0.4500	0.0995	5.3519	0.0880	0.0786

表 5 不同区域财产密度判断矩阵 B_2 的权重系数

方法	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\lambda_{\max}$	CI	CR
几何平均法	0.1304	0.0777	0.3683	0.0911	0.3326	5.0927	0.0232	0.0207
算术平均法	0.1338	0.0780	0.3662	0.0933	0.3286	5.0941	0.0235	0.0210
特征向量法	0.1318	0.0767	0.3703	0.0918	0.3293	5.0933	0.0233	0.0208
最小二乘法	0.1081	0.0775	0.3686	0.1045	0.3413	5.1503	0.0376	0.0336

表 6 同区域易燃易爆物判断矩阵 B_3 的权重系数

方法	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\lambda_{\max}$	CI	CR
几何平均法	0.1396	0.0940	0.4123	0.0940	0.2601	5.1652	0.0413	0.0369
算术平均法	0.1431	0.0953	0.4116	0.0953	0.2547	5.1665	0.0416	0.0371
特征向量法	0.1398	0.0930	0.4225	0.0930	0.2517	5.1671	0.0418	0.0373
最小二乘法	0.1043	0.1052	0.4338	0.1052	0.2515	5.2850	0.0645	0.05

表 7 不同区域火源情况判断矩阵 B_4 的权重系数

方法	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\lambda_{\max}$	CI	CR
几何平均法	0.2848	0.1561	0.3759	0.1006	0.0827	5.2857	0.0714	0.0638
算术平均法	0.2783	0.1624	0.3683	0.1073	0.0838	5.2922	0.0731	0.0653
特征向量法	0.2838	0.1602	0.3728	0.1016	0.0816	5.2866	0.0717	0.0640
最小二乘法	0.2664	0.1310	0.4075	0.0973	0.0977	5.3622	0.0906	0.0809

表 8 不同区域人员素质判断矩阵 B_5 的权重系数

方法	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\lambda_{\max}$	CI	CR
几何平均法	0.1985	0.1985	0.0752	0.3969	0.1309	5.2394	0.0599	0.0535
算术平均法	0.1940	0.1940	0.0808	0.3880	0.1432	5.2523	0.0631	0.0563
特征向量法	0.1952	0.1952	0.0733	0.3904	0.1418	5.2453	0.0613	0.0547
最小二乘法	0.2048	0.2048	0.0745	0.4048	0.1112	5.2749	0.0687	0.061

表 9 不同区域疏散和救援判断矩阵 B_6 的权重系数

方法	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\lambda_{\max}$	CI	CR
几何平均法	0.2765	0.2559	0.0999	0.2765	0.0922	5.0198	0.0050	0.0045
算术平均法	0.2758	0.2558	0.1006	0.2758	0.0919	5.0199	0.0050	0.0045
特征向量法	0.2759	0.2559	0.1004	0.2759	0.0920	5.0198	0.0050	0.0045
最小二乘法	0.2749	0.2605	0.0990	0.2749	0.0908	5.0206	0.0052	0.0046

以上判断矩阵在四种方法中都通过了一次性检验, 即是

$$CR < 0.10$$

3.3 计算各层对目标层的合成权重

计算各层元素对目标层的合成权重.

若上一层次 B 包含 n 个因素 $B_1, B_2, \cdots, B_n$, 其层次权重值分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 如果 C 层次某些因素对于 B_i 单排序的一致性指标为 CI_i, 相应的平均随即一致性指标为 RI_i, 则 C 层次的总排序随机一致性比率为:

$$CR = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i CI_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i RI_i} \tag{7}$$

当 $CR < 0.10$ 时, 则层次总排序结果满足一致性要求

① 几何平均法: $CR = 0.0413$;

② 算术平均法: $CR = 0.0418$;

③ 特征向量法: $CR = 0.0412$;

④ 最小二乘法：$CR = 0.0603$

四种方法都满足层次总排序的一致性要求, 可求得各个区域总权重 (如表 10 所示).

表 10　四种方法求得的各个区域总权重

区域方法权重	宿舍区	教学办公区	实验区	公共活动区	图书馆
几何平均法	0.2195	0.1633	0.2695	0.1944	0.1572
算术平均法	0.2142	0.1648	0.2663	0.1971	0.1577
特征向量法	0.2140	0.1633	0.2701	0.1960	0.1562
最小二乘法	0.1952	0.1561	0.2913	0.2016	0.1587

3.4 综合分析

由表 10 可以知, 用几何平均法, 算术平均法, 特征向量法这三种方法得出各个区域火灾危险严重性排序由高到低为：实验区、宿舍区、公共活动区、教学办公区、图书馆. 而用最小二乘法得出各个区域火灾危险严重性排序由高到低为：实验区、公共活动区、宿舍区、图书馆、教学办公区.

从表 10 可以看出实验区的总权重是最大的, 比其它区域的多了不少. 宿舍区和公共活动区的总权重是比较接近的 (相差不大于 0.02), 同样教学办公区和图书馆的总权重也是比较接近的 (相差不大于 0.01). 所以它们的结果可能会在不同的计算方法下得出的排序比较容易产生偏差. 最小二乘法就与其它三种方法求出的排序不一样. 但我们综合考虑四种方法的结果, 得出各个区域火灾危险严重性排序由高到低为：实验区、宿舍区、公共活动区、教学办公区、图书馆. 这样综合得出的结果比文献 [2] 采用单一方法所得出的结论更有说服力、更有效.

4 结论

层次分析法是对定性问题进行定量分析的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法. 本文在用层次分析法解决实际问题时, 是采用了四种计算方法来求权重向量, 再综合分析, 然后得出结论. 我们这样做可以避免用一种方法产生的偏差, 得出的结果更有效, 更全面. 在实际应用中, 最小二乘法求出的结果推出的结论和另外三种方法的得出的结论有细微的差别. 我们在解决这个问题时, 如果是用了最小二乘法, 结果就会有偏差. 所以综合运用四种方法更加可靠.

参考文献

[1] 汪应洛. 系统工程 [M]. 第二版. 北京: 机械工业出版社, 2003, 130-140.
[2] 任玉辉, 肖羽堂. 层次分析法在校园火灾危险性分析中的应用 [J]. 安全与环境工程, 2008, 15(1): 85-88.
[3] 李荣钧, 邝英强. 运筹学 [M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2002, 196-199.
[4] 孙广臣, 张岩志, 任国娟. 桥梁方案评价的 AHP 方法 [J]. 森林工程, 2004, 20(4): 61-62.
[5] 王振, 刘茂. 应用区间层次分析法 (IAHP) 研究高层建筑火灾安全因素 [J]. 安全与环境学报, 2006, 6(1): 12-15.

Research on Computation Methods of AHP Wight Vector and Its Applications

DENG Xue[1], LI Jia-ming[1], ZENG Hao-jian[1], CHEN Jun-yang[1], ZHAO Jun-feng[2]

(1. Department of Mathematics, School of Science, South China University of Technology, Guangzhou, 510640, China)

(2. School of Mechanical & Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: The basic concept of Analytical Hierarchy Process (AHP) is introduced, and the computation methods to AHP and its applications are analyzed in this paper. As to AHP, there are the following four computation methods: Geometric Average (GA), Arithmetic Average (AA), Eigenvector Method (EM), and Least Squares (LS). In most literatures, one of the four computation methods of AHP is used to solve weight vector in analyzing some practical problems. As a result, different methods can induce different results with warps. In this paper, four computation methods are used to solve weight vectors of a practical example, respectively, and then these corresponding results are sorted order and synthetically analyzed in order to avoid the warps produced by using one method. Furthermore, the comprehensive and effective results are obtained.

Keywords: analytical hierarchy process; decision matrix; weight vector; consistency test