整数右移与除2的差别

之前参加微软实习生笔试时有道题考到了整数右移与除2的差别，回来从理论上做了个证明，放在这里分享一下。因为证明是用Latex写的，里面的公式不好在网页上显示，只好转成图片格式，贴在下面。
估计很多人都不想看这个证明过程，先把结果说下，除了负整数除以2等于其右移1位加1外，所有的整数除以2与右移1位等价。

整数右移与除 2 关系

xkh

设 x 为整数，其二进制原码表示为

$$x = x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_2 x_1 x_0 \tag{1}$$

其中 $x_k \in \{0,1\}, 0 \le k \le n$. 最高位 x_n 表示符号.
当 $x_n = 0$ 时, $x \ge 0$, 式(1) 展开成十进制值为

$$x = x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}2^{n-2} + \dots + x_3 2^3 + x_2 2^2 + x_1 2 + x_0$$

两边同除以 2 得到

$$\frac{x}{2} = x_{n-1}2^{n-2} + x_{n-2}2^{n-3} + \dots + x_3 2^2 + x_2 2 + x_1 + \frac{x_0}{2}$$

在 C 语言中, 整数除法含义如下

$$\mathtt{x/2} = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{2} \rfloor & x \ge 0 \\ \lceil \frac{x}{2} \rceil & x < 0 \end{cases}$$

因此,$x \ge 0$ 时有

$$\begin{aligned} \mathtt{x/2} &= \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \\ &= \lfloor x_{n-1}2^{n-2} + x_{n-2}2^{n-3} + \dots + x_3 2^2 + x_2 2 + x_1 + \frac{x_0}{2} \rfloor \\ &= x_{n-1}2^{n-2} + x_{n-2}2^{n-3} + \dots + x_3 2^2 + x_2 2 + x_1 \\ &= 0 x_{n-1} x_{n-2} \dots x_3 x_2 x_1 \\ &= \mathtt{x >> 1} \\ &= \mathtt{x}_{补} \mathtt{>> 1}(\text{因为此时}x_{补}\text{与}x\text{原码二进制表示相同}) \end{aligned}$$

当 $x_n = 1$ 时, $x < 0$, 式(1) 展开成十进制值为

$$x = -(x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}2^{n-2} + \dots + x_3 2^3 + x_2 2^2 + x_1 2 + x_0)$$

有

$$\begin{aligned} \mathtt{x/2} &= \lceil \frac{x}{2} \rceil \\ &= \lceil -(x_{n-1}2^{n-2} + x_{n-2}2^{n-3} + \dots + x_3 2^2 + x_2 2 + x_1 + \frac{x_0}{2}) \rceil \\ &= -(x_{n-1}2^{n-2} + x_{n-2}2^{n-3} + \dots + x_3 2^2 + x_2 2 + x_1) \\ &= -(0 x_{n-1} x_{n-2} \dots x_3 x_2 x_1) \end{aligned}$$

但此时,x 的补码与原码不同, 移位操作作用在补码上, 需要考虑补码右移情况. 假设 x 的二进制表示中，最右边的 1 为 x_k，即 $x_i = 0 (i < k), x_k = 1$.

若 $k>0$，注意到 $x_0=1$, 此时 x 为负偶数，则有

$$
\begin{aligned}
\mathtt{x}_{补}>>1 &= (1\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_3x_2x_1}(\overline{x_0}+1))>>1\\
&= (1\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_{k+1}}\overline{1}\overbrace{\overline{0}\ldots(\overline{0}+1)}^{k位})>>1\\
&= (1\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_{k+1}}0\overbrace{1\ldots(1+1)}^{k位})>>1\\
&= (1\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_{k+1}}1\overbrace{0\ldots0}^{k位})>>1\\
&= 11\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_{k+1}}1\overbrace{0\ldots0}^{k-1位}\\
&= 10x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_{k+1}1\overbrace{0\ldots0}^{k-1位}(将补码变为原码)\\
&= 10x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_{k+1}x_kx_{k-1}\ldots x_2x_1\\
&= -(0x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_2x_1)\\
&= \mathtt{x}/2
\end{aligned}
$$

若 $k=0$，注意到 $x_0=1$，此时 x 为负奇数，则

$$
\begin{aligned}
\mathtt{x}_{补}>>1 &= (1\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_3x_2x_1}(\overline{x_0}+1))>>1\\
&= (1\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_3x_2x_1}(\overline{1}+1))>>1\\
&= (1\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_2x_1}1)>>1\\
&= 11\overline{x_{n-1}x_{n-2}}\ldots\overline{x_2x_1}\\
&= 10x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_{k+1}x_kx_{k-1}\ldots x_2(x_1+1)(将补码变为原码)\\
&= -(0x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_2(x_1+1))\\
&= -(x_{n-1}2^{n-2}+x_{n-2}2^{n-3}+\ldots+x_22+(x_1+1))\\
&= -(x_{n-1}2^{n-2}+x_{n-2}2^{n-3}+\ldots+x_22+x_1)-1\\
&= \mathtt{x}/2-1
\end{aligned}
$$

总结下，

$$
\mathtt{x}/2=\begin{cases}\mathtt{x}_{补}>>1 & x\geq 0或x为负偶数\\ \mathtt{x}_{补}>>1+1 & x为负奇数\end{cases}
$$