Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre

DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 0 - 29/09/2025

Ex.1 - Determinare tutti gli elementi del gruppo S_3 e scrivere la tabella moltiplicativa.

Ex.2 - Determinare la composizione $\sigma \circ \tau$ delle seguenti permutazioni in S_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \ , \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} .$$

Ex.3 - Supponiamo che in un gruppo valga l'equazione $xyz = 1$. È vero che $yzx = 1$? È vero che $yxz = 1$?

Ex.4 - Sia G un gruppo con prodotto $\cdot$. Definiamo il *gruppo opposto* G° come l'insieme G dotato del prodotto opposto $a \circ b = b \cdot a$. Dimostrare che G° è un gruppo.

Ex.5 - Siano a, b elementi di un gruppo. Assumendo che a ha ordine 5 e $a^3 b = ba^3$, mostrare che $ab = ba$.

Ex.6 - Quali dei seguenti sono sottogruppi?

(a) $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$;

(b) $\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^\times$;

(c) $\{n > 0\} \subset \mathbb{Z}$;

(d) $\{a > 0\} \subset \mathbb{R}^\times$;

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \neq 0 \right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$.

(Ricordiamo la definizione del gruppo $GL_n(\mathbb{K})$ come l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$.)

Ex.7 - Mostrare che le n radici n-sime di 1 in $\mathbb{C}$ formano un gruppo ciclico di ordine n.

Ex.8 - Mostrare che l'insieme $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali è un anello commutativo con unità rispetto alla somma di matrici.

Ex.9 - Mostrare che un dominio d'integrità finito è necessariamente un campo. (Ricordiamo che un dominio di integrità è un anello commutativo unitario con la proprietà che se $ab = 0$ allora necessariamente $a = 0$ o $b = 0$.)

Ex.10 - Esiste un campo con esattamente 15 elementi?

Ex.11 - Sia A un insieme che soddisfa tutti gli assiomi di anello con l'eccezione della commutatività della somma. Mostrare allora che la somma è commutativa calcolando $(1+1)(x+y)$ in due modi diversi.

Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre

DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 0 - per il 6/102025

Ex.1 - Nel gruppo simmetrico S_7 risolvere l'equazione $\alpha x = \beta$, dove

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex.2 - Dimostrare per induzione che $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Ex.3 - Dimostrare per induzione che $5^n - 1$ è divisibile per 4, qualunque sia $n \geq 1$.

Ex.4 - Sia F_n la successione di Fibonacci, definita per ricorrenza da $F_1 = F_2 = 1$, $f_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

Ex.5 - Si diano esempi di relazioni:

(a) riflessiva, simmetrica, non transitiva,
(b) riflessiva, non simmetrica, transitiva,
(c) non riflessiva, simmetrica, transitiva.

Ex.6 - Siano I, J ideali di un anello A che soddisfano $I + J = A$.

- Mostrare che $IJ = I \cap J$.
- Dimostrare il Teorema cinese dei resti: per ogni scelta di $a, b \in A$ esiste $x \in A$ tale che $x \equiv a \mod I$ e $x \equiv b \mod J$. (Per $x \equiv a \mod I$ si intende che $x - a \in I$).

Ex.7 - Trovare tutti gli x interi tali che

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{15} \\ 3x \equiv 5 \pmod{8} \\ 4x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Ex.8 - Trovare tutti gli y interi tali che

$$\begin{cases} 7y \equiv 4 \pmod{12} \\ 5y \equiv 6 \pmod{26} \end{cases}$$

Ex.9 - (Artin 11.1.6) Calcolare il massimo comun divisore dei seguenti polinomi p, q a coefficienti razionali $p := x^3 - 6x^2 + x + 4$, $q := x^5 - 6x + 1$.

Ex.10 - Usare l'algoritmo Euclideo per il calcolo del $MCD(3522, 321)$ e del $MCD(413, 173)$. Esprimere in entrambi i casi il $MCD(a, b)$ nella forma $pa + qb$.

Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
Docenti: Flavio D'Alessandro e Alberto De Sole

Esercizi

Settimana 3 - per il 20/10/2025

Ex.1 - Calcolare il MCD e l'identità di Bezout per le seguenti coppie di numeri:

$$14743 \text{ e } 8915\,, \quad 10000 \text{ e } 642\,, \quad 5785 \text{ e } 546$$

Ex.2 - Determinare gli elementi invertibili (e per ciascuno di tali elementi il suo inverso) negli anelli $\mathbb{Z}/7$, $\mathbb{Z}/14$, $\mathbb{Z}/20$.

Ex.3 - Trovare tutte le soluzioni (se esistono) delle seguenti congruenze:
(a) $3x \equiv 5 \mod 4$,
(b) $3x \equiv 9 \mod 6$,
(c) $4x \equiv 7 \mod 9$,
(d) $6x \equiv 8 \mod 9$.

Ex.4 - Risolvere i seguenti sistemi alle congruenze

(a) $\begin{cases} x \equiv 2 & \mod 5 \\ x \equiv 1 & \mod 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x \equiv 2 & \mod 5 \\ x \equiv 1 & \mod 3 \\ x \equiv 6 & \mod 14 \end{cases}$

Ex.5 - Risolvere il sistema alle congruenze $\begin{cases} 2x \equiv 8 & \mod 9 \\ 2x \equiv 6 & \mod 15 \end{cases}$

Ex.6 - Determinare le ultime tre cifre di 46^14.

Ex.7 - Determinare, se esiste, il minimo intero positivo n tale che 7123^n abbia come ultima cifra 1.

Ex.8 - Determinare un criterio di divisibilità per 11.

Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 4 - per il 27/10/2025

Ex.1 - Calcolare le tabelle additive e moltiplicative di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e verificare che queste strutture soddisfano gli assiomi di campo.

Ex.2 - Elencare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e, per ciascuno di essi, determinarne l'inverso.

Ex.3 - Calcolare i seguenti elementi del campo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$3 \cdot 4^{-1}, \quad 3^5 \cdot 2^{-2}, \quad (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 3^{-10}$$

Ex.4 - Sia $\mathcal{A}$ un anello. Due elementi a, b si dicono *divisori dello zero* se $a, b \neq 0$ e $ab = 0$. Calcolare i divisori dello zero di $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Ex.5 - Sia $\mathcal{A}$ un anello privo di divisori dello zero. Provare che $\mathcal{A}$ soddisfa le *leggi di cancellazione*:

$$\forall\ a, b, c \in \mathcal{A},\ a \neq 0, \quad ab = ac \quad \Longrightarrow \quad b = c;$$

$$\forall\ a, b, c \in \mathcal{A},\ a \neq 0, \quad ba = ca \quad \Longrightarrow \quad b = c$$

Ex.6 - dimostrare che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non sono numeri razionali (usando il teorema fondamentale dell'Aritmetica).

Ex.7 - Calcolare $3^{31} \mod 7$ e $128^{129} \mod 17$ (usando il piccolo Teorema di Fermat).

Ex.8 - Risolvere l'equazione alle congruenze $x^{103} \equiv 4 \mod 11$.

Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 5 - per il 3/11/2025

Ex.1 - Sia G un gruppo.
(a) Verificare che G ammetta esattamente un elemento neutro.
(b) Verificare che ogni elemento in G ammetta esattamente un elemento inverso
(c) Verificare che $ax = ay \Longrightarrow x = y$ e $xa = ya \Longrightarrow x = y$

Ex.2 - Sia G un gruppo. Un elemento x di G si dice *idempotente* se $x^2 = x$. Si dimostri che l'unico idempotente di G é il suo elemento neutro.

Ex.3 - Sia $Z_m = \langle \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$ l'anello delle classi resto modulo m e si denoti con U_m l'insieme degli elementi invertibili della parte moltiplicativa di Z_m. Si verifichi che per $m = 14, 20$, $\langle U_m, \cdot \rangle$ é un gruppo.

Ex.4 - Si consideri l'insieme $S = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ munito dall'operazione di prodotto $(\circ)$ definita come

$$(a,b) \ \circ \ (c,d) \ = \ (ac, bc + d).$$

Si verifichi se $\langle S, \circ \rangle$ é un gruppo

Ex.5 - Si consideri l'insieme $S = \{a, b, c\}$ e si consideri su di esso l'operazione di prodotto $(\circ)$ definita dalla tavola seguente

$\circ$	**a**	**b**	**c**
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Si verifichi se $\langle S, \circ \rangle$ é un gruppo

Ex.6 - Determinare i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ che contengono 18

Ex.7 - Siano $H, K \leq G$ sottogruppi di un gruppo G.
(a) Dimostrare che la loro intersezione 'e ancora un sottogruppo.
(b) Dimostrare che $H \cup K$ é sottogruppo di G se e solo se $H \subseteq K$ oppure $K \subseteq H$.

Ex.8 - Sa G un gruppo tale che ogni elemento diverso dall'identità ha ordine 2. Dimostrare che G è commutativo.

Ex.9 - Sia G un gruppo e $g \in G$ un suo elemento. Verificare che la funzione $h \mapsto ghg^{-1}$ è un isomorfismo di gruppo.

Ex.10 - Provare che se un gruppo ha un numero pari di elementi allora ha almeno un elemento di ordine 2. (*Suggerimento:* considerare le coppie (x, x^{-1}) al variare di $x \in G$; quante sono tali coppie? da quanti elementi sono composte?)

Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 6 - per il 17/11/2025

Ex.1 - Sia $f : G_1 \to G_2$ un omomorfismo di gruppi i cui elementi neutri siano denotati e_1 ed e_2, rispettivamente. Si considerino i seguenti insiemi definiti come:

$\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G_1 \ | \ f(g) = e_1\}$ (nucleo di f)

$\mathrm{Im}(f) = \{g_2 \in G_2 \ | \ \exists\, g_1 \in G_1 \ | \ f(g_1) = g_2\}$ (immagine di f).

Mostrare che $\mathrm{Ker}(f) \leq G_1$ e $\mathrm{Im}(f) \leq G_2$. Mostrare inoltre che f è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$ e che f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(f) = G_2$.

Ex.2 - Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. Verificare che, per $a \in G$, si abbia

$$aH = H \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \in H$$

(analogamente per le classi laterali destre).

Ex.3 - Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. Dato $a \in G$, sin consideri la funzione $\varphi : Ha \to aH$ data da $\varphi(ha) = ah$. Verificare che φ é una funzione biunivoca.

Ex.4 - Sia G un gruppo abeliano ed H un suo sottogruppo. Verificare che $\rho_d = \rho_s$, dove ρ_d e ρ_s denotano, rispettivamente, la congruenza destra e sinistra di H. (Ricordiamo che ρ_s e ρ_d sono definite da $a\,\rho_s\,b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ e $a\,\rho_d\,b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$.)

Ex.5 - Sia $G = (\mathbb{Z}, +)$ il gruppo additivo dei numeri interi, sia $m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ un intero positivo fissato e sia ρ_d la congruenza destra relativa al sottogruppo $m\mathbb{Z}$. Verificare che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, si abbia:

$$a \ \ \rho_d \ \ b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \mod m.$$

Ex.6 - Verificare che il gruppo additivo $(\mathbb{Z}_4, +)$ delle classi resto mod 4, é isomorfo al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot)$ delle classi resto mod 5 non nulle.

Ex.7 - Determinare i sottogruppi generati dagli elementi di $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Ex.8 - Sia G il gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}_{20})^\times$ delle classi resto mod 20 invertibili. Determinare:
(a) per ogni elemento di G il suo ordine;
(b) i sottogruppi di G;
(c) il diagramma di Hasse dei sottogruppi di G, rispetto alla relazione d'ordine $H \leq K$, con $H, K \leq G$.

Ex.9 - Sia G un gruppo di ordine p con p primo. Verificare che G é ciclico e non possiede sottogruppi non banali.

Ex.10 - Classificare i gruppi di ordine ≤ 5, a meno di isomorfismo.

Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 7 - per il 24/11/2025

Ex.1 - Si verifichi che i seguenti insiemi, con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalari, sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$:
(a) l'insieme delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$;
(b) l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali in una variabile x;
(c) l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{R}$:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots,).$$

Per ognuno di essi, si determinino (se esistono) una base e la dimensione.

Ex.2 - Si consideri il sottoinsieme di matrici dello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$ definito come:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a+b+c=0 \right\}.$$

Si verifichi che U é un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Si determini una sua base e la sua dimensione.

Ex.3 - Sia $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ siano suoi sottospazi vettoriali:
(a) $H_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$,
(b) $H_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$,
(c) $H_3 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 0\}$,
(d) $H_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$.
Nel caso siano sottospazi, si determini una loro base e la loro dimensione.

Ex.4 - Sia $n \in \mathbb{N}$ e si consideri l'insieme $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dei polinomi a coefficienti reali in una variabile x di grado non superiore ad n. Si verifichi che $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Si determini una sua base e la sua dimensione.

Ex.5 - Verificare quali dei seguenti sono insiemi di vettori linearmente indipendenti, insiemi di generatori e/o basi di $\mathbb{R}^3$:
(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$
(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Ex.6 - Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ex.7 - Sia $p(x)$ un polinomio fissato e sia $\Gamma = \{(x, p(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ il grafico di $p(x)$. Determinare per quali polinomi $p(x)$, Γ risulta essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Ex.8 - Si considerino i polinomi $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + 2x + x^2$, $p_3(x) = x - x^2$. Verificare che formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2) e determinare le coordinate di $q(x) = 2 - x + x^2$ in questa base.

Ex.9 - Trovare un sottoinsieme non vuoto $S_+ \subset \mathbb{R}^2$ che sia chiuso rispetto alla somma ed a prendere gli elementi opposti, ma che non sia un sottospazio vettoriale. Trovare un sottoinsieme non vuoto $S_\cdot \subset \mathbb{R}^2$ che sia chiuso rispetto al prodotto per gli scalari, ma che non sia un sottospazio vettoriale.

Ex.10 - Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in x, dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

(a) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 0\}$,
(b) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 1\}$,
(c) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(1) = 0\}$,
(d) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = p(1) = 0\}$,
(e) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0)p(1) = 0\}$.

Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 8 - per il 1/12/2025

1) Si consideri il sottoinsieme di matrici dello spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$ definito come:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si verifichi che U é un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ e si determini una sua base.

2) Indichiamo con $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio vettoriale delle successioni $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{R}$. Una successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si dice *definitivamente nulla* se esiste $m \in \mathbb{N}$ (dipendente da $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$) tale che, per ogni $\ell \geq m$, $a_\ell = 0$. Si verifichi che:

1) W é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

2) W non é finitamente generato

3) Si provi l'esistenza di una base per W.

3) Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$. Si considerino i vettori di V $\mathbf{u} = (1,0,0), \mathbf{v} = (1,1,0), \mathbf{u}' = (4,4,0), \mathbf{v}' = (2,-1,0), \mathbf{u}'' = (0,4,0), \mathbf{v}'' = (3,2,0)$ Mostrare che

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}' \rangle \;=\; \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v}'' \rangle.$$

4) Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ sul campo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e si denotino con $0, 1, 2$ gli elementi di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Si determinino tutti i vettori del sottospazio $\langle (1,2,1),\, (2,2,1) \rangle$.

5) Sia V uno spazio vettoriale. Si verifichi che se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é una base di V allora anche $\mathcal{C} = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$ é una base di V.

6) Dati i polinomi

$$p_1(x) = x^2 + 1, \quad p_2(x) = x + 1, \quad p_3(x) = x^2 + x,$$

si verifichi che $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Si calcolino poi le coordinate rispetto a tale base dei polinomi:

$$q_1(x) = 2x - 3, \quad q_2(x) = 2x^2 - 1.$$

7) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$

8) Si verifichi che l'insieme $\mathcal{B}$ sia una base di $\mathbb{C}^2$ dove:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Scrivere poi le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ dove:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

9) Calcolare il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

10) Risolvere, usando il *metodo di eliminazione di Gauss*, i seguenti sistemi lineari nelle incognite $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} z_1 - z_2 + 2z_3 = 2 \\ -z_1 + 2z_2 + z_3 = 7 \\ 2z_1 + z_2 - z_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z_1 - z_2 + 4z_3 + x_4 = -2 \\ -2z_1 + z_2 - 7z_3 + z_4 = -1 \\ 4z_1 - 2z_2 + 5z_3 + 4z_4 = 7 \end{cases}$$