

## Esercizi

**Settimana 0 - 29/09/2025**

Ex.1 - Determinare tutti gli elementi del gruppo  $S_3$  e scrivere la tabella moltiplicativa.

Ex.2 - Determinare la composizione  $\sigma \circ \tau$  delle seguenti permutazioni in  $S_6$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ex.3 - Supponiamo che in un gruppo valga l’equazione  $xyz = 1$ . È vero che  $yzx = 1$ ? È vero che  $yxz = 1$ ?

Ex.4 - Sia  $G$  un gruppo con prodotto  $\cdot$ . Definiamo il *gruppo opposto*  $G^\circ$  come l’insieme  $G$  dotato del prodotto opposto  $a \circ b = b \cdot a$ . Dimostrare che  $G^\circ$  è un gruppo.

Ex.5 - Siano  $a, b$  elementi di un gruppo. Assumendo che  $a$  ha ordine 5 e  $a^3b = ba^3$ , mostrare che  $ab = ba$ .

Ex.6 - Quali dei seguenti sono sottogruppi?

- (a)  $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ;
- (b)  $\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^\times$ ;
- (c)  $\{n > 0\} \subset \mathbb{Z}$ ;
- (d)  $\{a > 0\} \subset \mathbb{R}^\times$ ;
- (e)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \neq 0 \right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$ .

(Ricordiamo la definizione del gruppo  $GL_n(\mathbb{K})$  come l’insieme delle matrici  $n \times n$  invertibili a coefficienti nel campo  $\mathbb{K}$ .)

Ex.7 - Mostrare che le  $n$  radici  $n$ -sime di 1 in  $\mathbb{C}$  formano un gruppo ciclico di ordine  $n$ .

Ex.8 - Mostrare che l’insieme  $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$  delle matrici  $m \times n$  a coefficienti reali è un anello commutativo con unità rispetto alla somma di matrici.

Ex.9 - Mostrare che un dominio d’integrità finito è necessariamente un campo. (Ricordiamo che un dominio di integrità è un anello commutativo unitario con la proprietà che se  $ab = 0$  allora necessariamente  $a = 0$  o  $b = 0$ .)

Ex.10 - Esiste un campo con esattamente 15 elementi?

Ex.11 - Sia  $A$  un insieme che soddisfa tutti gli assiomi di anello con l’eccezione della commutatività della somma. Mostrare allora che la somma è commutativa calcolando  $(1+1)(x+y)$  in due modi diversi.