

Esercizi

Settimana 0 - per il 6/10/2025

Ex.1 - Nel gruppo simmetrico S_7 risolvere l'equazione $\alpha x = \beta$, dove

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex.2 - Dimostrare per induzione che $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Ex.3 - Dimostrare per induzione che $5^n - 1$ è divisibile per 4, qualunque sia $n \geq 1$.

Ex.4 - Sia F_n la successione di Fibonacci, definita per ricorrenza da $F_1 = F_2 = 1$, $f_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

Ex.5 - Si diano esempi di relazioni:

- (a) riflessiva, simmetrica, non transitiva,
- (b) riflessiva, non simmetrica, transitiva,
- (c) non riflessiva, simmetrica, transitiva.

Ex.6 - Siano I, J ideali di un anello A che soddisfano $I + J = A$.

- Mostrare che $IJ = I \cap J$.
- Dimostrare il Teorema cinese dei resti: per ogni scelta di $a, b \in A$ esiste $x \in A$ tale che $x \equiv a \pmod{I}$ e $x \equiv b \pmod{J}$. (Per $x \equiv a \pmod{I}$ si intende che $x - a \in I$).

Ex.7 - Trovare tutti gli x interi tali che

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 & (\text{mod } 15) \\ 3x \equiv 5 & (\text{mod } 8) \\ 4x \equiv 2 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

Ex.8 - Trovare tutti gli y interi tali che

$$\begin{cases} 7y \equiv 4 & (\text{mod } 12) \\ 5y \equiv 6 & (\text{mod } 26) \end{cases}$$

Ex.9 - (Artin 11.1.6) Calcolare il massimo comun divisore dei seguenti polinomi p, q a coefficienti razionali $p := x^3 - 6x^2 + x + 4$, $q := x^5 - 6x + 1$.

Ex.10 - Usare l'algoritmo Euclideo per il calcolo del $MCD(3522, 321)$ e del $MCD(413, 173)$. Esprimere in entrambi i casi il $MCD(a, b)$ nella forma $pa + qb$.