Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 8 - per il 1/12/2025

1) Si consideri il sottoinsieme di matrici dello spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$ definito come:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si verifichi che U é un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ e si determini una sua base.

2) Indichiamo con $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio vettoriale delle successioni $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{R}$. Una successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si dice *definitivamente nulla* se esiste $m \in \mathbb{N}$ (dipendente da $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$) tale che, per ogni $\ell \geq m$, $a_\ell = 0$. Si verifichi che:

1) W é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

2) W non é finitamente generato

3) Si provi l'esistenza di una base per W.

3) Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$. Si considerino i vettori di V $\mathbf{u} = (1,0,0), \mathbf{v} = (1,1,0), \mathbf{u}' = (4,4,0), \mathbf{v}' = (2,-1,0), \mathbf{u}'' = (0,4,0), \mathbf{v}'' = (3,2,0)$ Mostrare che

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}' \rangle \;=\; \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v}'' \rangle.$$

4) Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ sul campo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e si denotino con $0, 1, 2$ gli elementi di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Si determinino tutti i vettori del sottospazio $\langle (1,2,1),\ (2,2,1) \rangle$.

5) Sia V uno spazio vettoriale. Si verifichi che se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é una base di V allora anche $\mathcal{C} = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$ é una base di V.

6) Dati i polinomi

$$p_1(x) = x^2 + 1, \quad p_2(x) = x + 1, \quad p_3(x) = x^2 + x,$$

si verifichi che $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Si calcolino poi le coordinate rispetto a tale base dei polinomi:

$$q_1(x) = 2x - 3, \quad q_2(x) = 2x^2 - 1.$$

7) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$

8) Si verifichi che l'insieme $\mathcal{B}$ sia una base di $\mathbb{C}^2$ dove:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Scrivere poi le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ dove:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

9) Calcolare il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

10) Risolvere, usando il *metodo di eliminazione di Gauss*, i seguenti sistemi lineari nelle incognite $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} z_1 - z_2 + 2z_3 = 2 \\ -z_1 + 2z_2 + z_3 = 7 \\ 2z_1 + z_2 - z_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z_1 - z_2 + 4z_3 + x_4 = -2 \\ -2z_1 + z_2 - 7z_3 + z_4 = -1 \\ 4z_1 - 2z_2 + 5z_3 + 4z_4 = 7 \end{cases}$$