

Esercizi

Settimana 0 - 29/09/2025

Ex.1 - Determinare tutti gli elementi del gruppo S_3 e scrivere la tabella moltiplicativa.

Ex.2 - Determinare la composizione $\sigma \circ \tau$ delle seguenti permutazioni in S_6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ex.3 - Supponiamo che in un gruppo valga l'equazione $xyz = 1$. È vero che $yxz = 1$? È vero che $yxz = 1$?

Ex.4 - Sia G un gruppo con prodotto \cdot . Definiamo il *gruppo opposto* G° come l'insieme G dotato del prodotto opposto $a \circ b = b \cdot a$. Dimostrare che G° è un gruppo.

Ex.5 - Siano a, b elementi di un gruppo. Assumendo che a ha ordine 5 e $a^3b = ba^3$, mostrare che $ab = ba$.

Ex.6 - Quali dei seguenti sono sottogruppi?

(a) $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$;

(b) $\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^\times$;

(c) $\{n > 0\} \subset \mathbb{Z}$;

(d) $\{a > 0\} \subset \mathbb{R}^\times$;

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \neq 0 \right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$.

(Ricordiamo la definizione del gruppo $GL_n(\mathbb{K})$ come l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti nel campo \mathbb{K} .)

Ex.7 - Mostrare che le n radici n -sime di 1 in \mathbb{C} formano un gruppo ciclico di ordine n .

Ex.8 - Mostrare che l'insieme $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali è un anello commutativo con unità rispetto alla somma di matrici.

Ex.9 - Mostrare che un dominio d'integrità finito è necessariamente un campo. (Ricordiamo che un dominio di integrità è un anello commutativo unitario con la proprietà che se $ab = 0$ allora necessariamente $a = 0$ o $b = 0$.)

Ex.10 - Esiste un campo con esattamente 15 elementi?

Ex.11 - Sia A un insieme che soddisfa tutti gli assiomi di anello con l'eccezione della commutatività della somma. Mostrare allora che la somma è commutativa calcolando $(1+1)(x+y)$ in due modi diversi.