**Algebra** – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

# Esercizi

**Settimana 5** - per il 3/11/2025

Ex.1 - Sia $G$ un gruppo.
(a) Verificare che $G$ ammetta esattamente un elemento neutro.
(b) Verificare che ogni elemento in $G$ ammetta esattamente un elemento inverso
(c) Verificare che $ax = ay \Longrightarrow x = y$ e $xa = ya \Longrightarrow x = y$

Ex.2 - Sia $G$ un gruppo. Un elemento $x$ di $G$ si dice *idempotente* se $x^2 = x$. Si dimostri che l'unico idempotente di $G$ é il suo elemento neutro.

Ex.3 - Sia $Z_m = \langle \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$ l'anello delle classi resto modulo $m$ e si denoti con $U_m$ l'insieme degli elementi invertibili della parte moltiplicativa di $Z_m$. Si verifichi che per $m = 14, 20$, $\langle U_m, \cdot \rangle$ é un gruppo.

Ex.4 - Si consideri l'insieme $S = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ munito dall'operazione di prodotto $(\circ)$ definita come

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d).$$

Si verifichi se $\langle S, \circ \rangle$ é un gruppo

Ex.5 - Si consideri l'insieme $S = \{a, b, c\}$ e si consideri su di esso l'operazione di prodotto $(\circ)$ definita dalla tavola seguente

| $\circ$ | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|
| **a** | $a$ | $b$ | $c$ |
| **b** | $b$ | $c$ | $a$ |
| **c** | $c$ | $a$ | $b$ |

Si verifichi se $\langle S, \circ \rangle$ é un gruppo

Ex.6 - Determinare i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ che contengono 18

Ex.7 - Siano $H, K \leq G$ sottogruppi di un gruppo $G$.
(a) Dimostrare che la loro intersezione 'e ancora un sottogruppo.
(b) Dimostrare che $H \cup K$ é sottogruppo di $G$ se e solo se $H \subseteq K$ oppure $K \subseteq H$.

Ex.8 - Sa $G$ un gruppo tale che ogni elemento diverso dall'identità ha ordine 2. Dimostrare che $G$ è commutativo.

Ex.9 - Sia $G$ un gruppo e $g \in G$ un suo elemento. Verificare che la funzione $h \mapsto ghg^{-1}$ è un isomorfismo di gruppo.

Ex.10 - Provare che se un gruppo ha un numero pari di elementi allora ha almeno un elemento di ordine 2. (*Suggerimento:* considerare le coppie $(x, x^{-1})$ al variare di $x \in G$; quante sono tali coppie? da quanti elementi sono composte?)