Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 7 - per il 24/11/2025

Ex.1 - Si verifichi che i seguenti insiemi, con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalari, sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$:
(a) l'insieme delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$;
(b) l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali in una variabile x;
(c) l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{R}$:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots,).$$

Per ognuno di essi, si determinino (se esistono) una base e la dimensione.

Ex.2 - Si consideri il sottoinsieme di matrici dello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$ definito come:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \middle| \ a+b+c=0 \right\}.$$

Si verifichi che U é un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Si determini una sua base e la sua dimensione.

Ex.3 - Sia $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ siano suoi sottospazi vettoriali:
(a) $H_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$,
(b) $H_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$,
(c) $H_3 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 0\}$,
(d) $H_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$.
Nel caso siano sottospazi, si determini una loro base e la loro dimensione.

Ex.4 - Sia $n \in \mathbb{N}$ e si consideri l'insieme $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dei polinomi a coefficienti reali in una variabile x di grado non superiore ad n. Si verifichi che $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Si determini una sua base e la sua dimensione.

Ex.5 - Verificare quali dei seguenti sono insiemi di vettori linearmente indipendenti, insiemi di generatori e/o basi di $\mathbb{R}^3$:
(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$
(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Ex.6 - Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ex.7 - Sia $p(x)$ un polinomio fissato e sia $\Gamma = \{(x, p(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ il grafico di $p(x)$. Determinare per quali polinomi $p(x)$, Γ risulta essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Ex.8 - Si considerino i polinomi $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + 2x + x^2$, $p_3(x) = x - x^2$. Verificare che formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2) e determinare le coordinate di $q(x) = 2 - x + x^2$ in questa base.

Ex.9 - Trovare un sottoinsieme non vuoto $S_+ \subset \mathbb{R}^2$ che sia chiuso rispetto alla somma ed a prendere gli elementi opposti, ma che non sia un sottospazio vettoriale. Trovare un sottoinsieme non vuoto $S_. \subset \mathbb{R}^2$ che sia chiuso rispetto al prodotto per gli scalari, ma che non sia un sottospazio vettoriale.

Ex.10 - Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in x, dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

(a) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 0\}$,
(b) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 1\}$,
(c) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(1) = 0\}$,
(d) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = p(1) = 0\}$,
(e) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0)p(1) = 0\}$.