Algebra – corso di laurea in Informatica – A.A. 2025-26, primo semestre
DOCENTI: FLAVIO D'ALESSANDRO E ALBERTO DE SOLE

Esercizi

Settimana 6 - per il 17/11/2025

Ex.1 - Sia $f : G_1 \to G_2$ un omomorfismo di gruppi i cui elementi neutri siano denotati e_1 ed e_2, rispettivamente. Si considerino i seguenti insiemi definiti come:

$\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G_1 \mid f(g) = e_1\}$ (nucleo di f)

$\mathrm{Im}(f) = \{g_2 \in G_2 \mid \exists\, g_1 \in G_1 \mid f(g_1) = g_2\}$ (immagine di f).

Mostrare che $\mathrm{Ker}(f) \leq G_1$ e $\mathrm{Im}(f) \leq G_2$. Mostrare inoltre che f è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$ e che f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(f) = G_2$.

Ex.2 - Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. Verificare che, per $a \in G$, si abbia

$$aH = H \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \in H$$

(analogamente per le classi laterali destre).

Ex.3 - Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo. Dato $a \in G$, sin consideri la funzione $\varphi :\ Ha \to aH$ data da $\varphi(ha) = ah$. Verificare che φ é una funzione biunivoca.

Ex.4 - Sia G un gruppo abeliano ed H un suo sottogruppo. Verificare che $\rho_d = \rho_s$, dove ρ_d e ρ_s denotano, rispettivamente, la congruenza destra e sinistra di H. (Ricordiamo che ρ_s e ρ_d sono definite da $a\,\rho_s\,b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ e $a\,\rho_d\,b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$.)

Ex.5 - Sia $G = (\mathbb{Z}, +)$ il gruppo additivo dei numeri interi, sia $m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ un intero positivo fissato e sia ρ_d la congruenza destra relativa al sottogruppo $m\mathbb{Z}$. Verificare che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, si abbia:

$$a \;\; \rho_d \;\; b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \mod m.$$

Ex.6 - Verificare che il gruppo additivo $(\mathbb{Z}_4, +)$ delle classi resto mod 4, é isomorfo al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot)$ delle classi resto mod 5 non nulle.

Ex.7 - Determinare i sottogruppi generati dagli elementi di $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Ex.8 - Sia G il gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}_{20})^\times$ delle classi resto mod 20 invertibili. Determinare:
- (a) per ogni elemento di G il suo ordine;
- (b) i sottogruppi di G;
- (c) il diagramma di Hasse dei sottogruppi di G, rispetto alla relazione d'ordine $H \leq K$, con $H, K \leq G$.

Ex.9 - Sia G un gruppo di ordine p con p primo. Verificare che G é ciclico e non possiede sottogruppi non banali.

Ex.10 - Classificare i gruppi di ordine ≤ 5, a meno di isomorfismo.