

Esercizi

Settimana 4 - per il 27/10/2025

Ex.1 - Calcolare le tabelle additive e moltiplicative di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e verificare che queste strutture soddisfano gli assiomi di campo.

Ex.2 - Elencare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e, per ciascuno di essi, determinarne l'inverso.

Ex.3 - Calcolare i seguenti elementi del campo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$3 \cdot 4^{-1}, \quad 3^5 \cdot 2^{-2}, \quad (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 3^{-10}$$

Ex.4 - Sia \mathcal{A} un anello. Due elementi a, b si dicono *divisori dello zero* se $a, b \neq 0$ e $ab = 0$.
Calcolare i divisori dello zero di $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Ex.5 - Sia \mathcal{A} un anello privo di divisori dello zero. Provare che \mathcal{A} soddisfa le *leggi di cancellazione*:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \quad a \neq 0, \quad ab = ac \implies b = c;$$

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \quad a \neq 0, \quad ba = ca \implies b = c$$

Ex.6 - dimostrare che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non sono numeri razionali (usando il teorema fondamentale dell’Aritmetica).

Ex.7 - Calcolare $3^{31} \pmod{7}$ e $128^{129} \pmod{17}$ (usando il piccolo Teorema di Fermat).

Ex.8 - Risolvere l'equazione alle congruenze $x^{103} \equiv 4 \pmod{11}$.