Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 3
16 Ottobre 2023 — Compito n. 00290

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ☐☐☐☐☐☐☐

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia

$$E = \left\{ \frac{8}{n}\,,\ n \geq 1 \right\}.$$

1A) L'insieme E è un intervallo.
1B) L'insieme E non è limitato.
1C) Esiste il massimo di E.
1D) Non esiste il minimo di E.

2) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(10\,x) > 0\} \cap [0, \pi]\,.$$

2A) L'insieme E è un intervallo.
2B) L'insieme E non è limitato.
2C) Si ha $\sup(E) = \pi$.
2D) Si ha $\inf(E) > 0$.

3) Si consideri la successione

$$a_n = \frac{6\,n + 1}{3\,n + 1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

3A)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0\,.$$

3B)

$$\lim_{n \to +\infty} [a_{n+1} - a_n] = 2\,.$$

3C)

$$\lim_{n \to \infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = +\infty\,.$$

3D)

$$\lim_{n \to +\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = 1/3\,.$$

4) Siano $A > 0$, $B > 0$ e

$$a_n = \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

4A) La successione a_n diverge positivamente.
4B) Se $A = 14$ e $B = 9$, la successione a_n è monotona decrescente.
4C) Se $A = 8$ e $B = 11$, la successione a_n è monotona decrescente.
4D) Se $A = 9$ e $B = 2$, esiste il massimo dell'insieme

$$E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00290**

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+6n+11}{6n^2+3n+2}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^8-7}{3-5\,n^4}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n+n^{11}}{7\cdot 7^n+8}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{14}\,7^n}{9^n+n^9}\,,$$

Cognome **Nome** **Matricola** **Compito 00290**

6) Sia

$$a_n = \frac{3 \cdot 6^n + 14}{6^n + 5}\,.$$

a) Si dimostri che la successione $\{a_n\}$ è limitata.

b) Si dimostri che la successione $\{n^3\, a_n\}$ è illimitata superiormente.

c) Si dimostri che si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$

d) Si calcoli il minimo della successione $\{a_n\}$.

Soluzioni del compito 00290

1) Sia
$$E = \left\{ \frac{8}{n} \,,\ n \geq 1 \right\}.$$

1A) L'insieme E è un intervallo.

Falso: Per definizione, $b = \frac{8}{1} = 8$ e $a = \frac{8}{2} = 4$ appartengono ad E. Se consideriamo il numero
$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{4+8}{2} = 6 \,,$$
si vede facilmente che non appartiene ad E. Infatti, risolvendo l'equazione
$$\frac{8}{n} = 6 \,,$$
si trova
$$n = \frac{3}{4} \,,$$
che non è un numero intero. Abbiamo quindi trovato a e b in E tali che $[a,b]$ non è tutto contenuto in E, e quindi E non è un intervallo.

1B) L'insieme E non è limitato.

Falso: Dato che
$$0 < \frac{8}{n} \leq \frac{8}{1} = 8 \,, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,,$$
l'insieme E è contenuto nell'intervallo $(0,8]$, ed è quindi limitato.

1C) Esiste il massimo di E.

Vero: Dato che
$$\frac{8}{n} \leq \frac{8}{1} = 8 \,, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,,$$
il numero $x = 8$ è più grande di tutti gli elementi di E. Dato che appartiene ad E, si ha che il massimo di E esiste, e vale 8.

1D) Non esiste il minimo di E.

Vero: Supponiamo che esista il minimo di E, ovvero un numero reale m della forma $\frac{8}{\overline{n}}$, per qualche intero $\overline{n} \geq 1$, con la proprietà che $m \leq y$ per ogni y in E. Se, però, scegliamo
$$y = \frac{8}{\overline{n}+1} \,,$$
abbiamo che y appartiene ad E (per definizione), e che
$$y = \frac{8}{\overline{n}+1} < \frac{8}{\overline{n}} = m \,,$$
contraddicendo la minimalità di m.

---

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(10\,x) > 0\} \cap [0,\pi]\,.$$

Ricordando che $\sin(y) > 0$ se e solo se
$$2k\,\pi < y < (2k+1)\,\pi\,, \qquad \text{per qualche } k \text{ in } \mathbb{Z}\,,$$
si ha $\sin(10\,x) > 0$ se e solo se
$$2k\,\pi < 10\,x < (2k+1)\,\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2k}{10}\,\pi < x < \frac{2k+1}{10}\,\pi\,, \qquad \text{per qualche } k \text{ in } \mathbb{Z}\,.$$
Se chiediamo, inoltre, che x appartenga a $[0,\pi]$, allora k varia tra 0 e 4. Infatti, se $k < 0$ e
$$\frac{2k}{10}\,\pi < x < \frac{2k+1}{10}\,\pi\,,$$
allora $x < 0$ e quindi non appartiene a $[0,\pi]$, mentre se $k \geq 5$ e
$$\frac{2k}{10}\,\pi < x < \frac{2k+1}{10}\,\pi\,,$$
allora $x > \pi$ (e quindi non è in $[0,\pi]$. In definitiva, si ha
$$E = \bigcup_{k=0}^{4} \left(\frac{2k\,\pi}{10}, \frac{(2k+1)\,\pi}{10}\right) = \bigcup_{k=0}^{4} I_k\,. \tag{1}$$

2A) L'insieme E è un intervallo.

Falso: Come si vede dalla (1), E è l'unione di 5 intervalli disgiunti, e quindi non è un intervallo. Per vederlo meglio,
$$E = \left(0, \frac{\pi}{10}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{10}, \frac{3\,\pi}{10}\right) \cup \left[\bigcup_{k=2}^{4} \left(\frac{2k\,\pi}{10}, \frac{(2k+1)\,\pi}{10}\right)\right],$$
e quindi in E non c'è alcun numero reale x tale che
$$0 < a = \frac{\pi}{20} < \frac{\pi}{10} \leq x \leq \frac{2\pi}{10} < \frac{5\pi}{20} = b < \frac{3\pi}{10}\,,$$
con a e b appartenenti ad E.

2B) L'insieme E non è limitato.

Falso: Dalla definizione, si ha $E \subseteq [0,\pi]$, e quindi E è un insieme limitato.

2C) Si ha $\sup(E) = \pi$.

Falso: Dalla (1), si ha che l'intervallo "più a destra" che forma E è l'intervallo corrispondente a $k = 4$, ovvero l'intervallo
$$I_4 = \left(\frac{8\,\pi}{10}, \frac{9\,\pi}{10}\right).$$
Dato che $\sup(I_4) = \frac{9\,\pi}{10} < \pi$, si ha $\sup(E) = \sup(I_4) < \pi$.

2D) Si ha $\inf(E) > 0$.

Falso: Dalla (1), si ha che l'intervallo "più a sinistra" che forma E è l'intervallo corrispondente a $k = 0$, ovvero l'intervallo
$$I_0 = \left(0, \frac{\pi}{10}\right).$$
Dato che $\inf(I_0) = 0$, si ha $\inf(E) = \inf(I_0) = 0$.

---

3) Si consideri la successione
$$a_n = \frac{6\,n+1}{3\,n+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Si ha
$$a_{n+1} - a_n = \frac{6\,(n+1)+1}{3\,(n+1)+1} - \frac{6\,n+1}{3\,n+1} = \frac{[6\,(n+1)+1]\,[3\,n+1] - [6\,n+1]\,[3\,(n+1)+1]}{(3\,(n+1)+1)\,(3\,n+1)}\,.$$
Sviluppando il numeratore, si ha
$$\begin{aligned}&[6\,(n+1)+1]\,[3\,n+1] - [6\,n+1]\,[3\,(n+1)+1]\\ &\quad = 6\cdot 3\,n\,(n+1) + 6\,(n+1) + 3\,n + 1\\ &\qquad -[6\cdot 3\,n\,(n+1) + 6\,n + 3\,(n+1) + 1]\\ &\quad = 6 - 3 = 3\,.\end{aligned}$$
Sviluppando il denominatore, invece, si ha
$$(3\,(n+1)+1)\,(3\,n+1) = 9\,n\,(n+1) + 3\,(n+1) + 3\,n + 1 = 9n^2 + 15n + 4\,.$$
Pertanto,
$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{9n^2 + 15n + 4}\,. \tag{1}$$

3A)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

Falso: Si ha
$$a_n = \frac{6\,n+1}{3\,n+1} = \frac{n}{n}\,\frac{6+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{6+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\,.$$
Dato che $\frac{1}{n}$ tende a zero, si ha, per i teoremi sui limiti,
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{6+0}{3+0} = 2 \neq 0\,.$$

3B)
$$\lim_{n\to+\infty} [a_{n+1} - a_n] = 2\,.$$

Falso: Dato che (si veda l'esercizio precedente) si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 2\,,$$
si ha anche
$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 2\,.$$
Per i teoremi sui limiti, si ha allora
$$\lim_{n\to+\infty} [a_{n+1} - a_n] = 2 - 2 = 0 \neq 2\,.$$

3C)
$$\lim_{n\to\infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = +\infty\,.$$

Falso: Dalla (1) si ha
$$\lim_{n\to+\infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\,n}{9n^2 + 15n + 4} = 0\,,$$
dato che è il limite del rapporto di due polinomi, con il grado del denominatore (2) maggiore del grado del numeratore (1).

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = 1/3\,.$$

Vero: Dalla (1) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\,n^2}{9n^2 + 15n + 4}\,.$$

Dato che si tratta del rapporto di due polinomi di secondo grado, il limite è il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo, che sono 3 e 9. Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = \frac{1}{3}\,.$$

---

4) Siano $A > 0$, $B > 0$ e

$$a_n = \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Per studiare la monotonia di a_n, calcoliamo $a_{n+1} - a_n$. Si ha

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{A\,(n+1)^2 + 1}{B\,(n+1)^2 + 1} - \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1} \\ &= \frac{[A\,(n+1)^2 + 1]\,[B\,n^2 + 1] - [B\,(n+1)^2 + 1]\,[A\,n^2 + 1]}{[B\,(n+1)^2 + 1]\,[B\,n^2 + 1]}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che il denominatore è sempre positivo (perché $B > 0$), e quindi si ha $a_{n+1} > a_n$ se e solo se

$$[A\,(n+1)^2 + 1]\,[B\,n^2 + 1] - [B\,(n+1)^2 + 1]\,[A\,n^2 + 1] > 0\,.$$

Sviluppando i prodotti si ha

$$A\,B\,(n+1)^2\,n^2 + A\,(n+1)^2 + B\,n^2 + 1 - [A\,B\,(n+1)^2\,n^2 + B\,(n+1)^2 + A\,n^2 + 1] > 0\,,$$

che diventa, dopo aver semplificato i termini uguali

$$A\,(n+1)^2 + B\,n^2 > B\,(n+1)^2 + A\,n^2\,.$$

Sviluppando i quadrati, si ha che deve essere

$$A\,n^2 + 2A\,n + A + B\,n^2 > B\,n^2 + 2B\,n + B + A\,n^2\,,$$

che è equivalente a

$$2A\,n + A > 2B\,n + B \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2(A - B)\,n + A - B > 0\,,$$

e questa disuguaglianza è vera per ogni n in $\mathbb{N}$ se e solo se $A > B$. In definitiva,

(1) la successione a_n è monotona crescente se e solo se $A > B$.

4A) La successione a_n diverge positivamente.

Falso: Si ha

$$a_n = \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{A + \frac{1}{n^2}}{B + \frac{1}{n^2}} = \frac{A + \frac{1}{n^2}}{B + \frac{1}{n^2}}\,.$$

Dato che $\frac{1}{n^2}$ tende a zero, per i teoremi sui limiti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{A + \frac{1}{n^2}}{B + \frac{1}{n^2}} = \frac{A + 0}{B + 0} = \frac{A}{B}\,,$$

che non è $+\infty$ perché $B \neq 0$ per ipotesi.

4B) Se $A = 14$ e $B = 9$, la successione a_n è monotona decrescente.

Falso: Dato che $A > B$, per la (1) la successione è monotona crescente.

4C) Se $A = 8$ e $B = 11$, la successione a_n è monotona decrescente.

Vero: Dato che $A < B$, per la (1) la successione è monotona decrescente.

4D) Se $A = 9$ e $B = 2$, esiste il massimo dell'insieme

$$E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Falso: Dato che $A > B$, per la (1) la successione a_n è monotona crescente. Si ha quindi (si veda l'eserczio **4A**) che

$$\sup(E) = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{9}{2}\,.$$

Per dimostrare che l'estremo superiore non è un massimo, è sufficiente verificare che non esiste alcun valore di n tale che $a_n = \frac{9}{2}$. Risolvendo l'equazione, si ha

$$\frac{9\,n^2+1}{2\,n^2+1} = \frac{9}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,[9\,n^2+1] = 9\,[2\,n^2+1] \quad \Longleftrightarrow \quad 18\,n^2+2 = 18\,n^2+9 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = 9\,,$$

che è falsa. Si ha quindi che il numero 2 non appartiene ad E, che quindi non ha massimo.

---

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2+6n+11}{6n^2+3n+2}\,,\qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^8-7}{3-5\,n^4}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{7^n+n^{11}}{7\cdot 7^n+8}\,,\qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{14}\,7^n}{9^n+n^9}\,,$$

Soluzione:

a) Si tratta del limite del rapporto di polinomi dello stesso grado. Mettendo in evidenza n^2 al numeratore ed al denominatore, si ha

$$\frac{7n^2+6n+11}{6n^2+3n+2}=\frac{n^2}{n^2}\,\frac{7+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}}{6+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{7+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}}{6+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2+6n+11}{6n^2+3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}}{6+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{7+0+0}{6+0+0}=\frac{7}{6}\,.$$

b) Si tratta del limite del rapporto di polinomi, con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore. Mettendo in evidenza n^8 al numeratore e n^4 al denominatore, si ha

$$\frac{n^8-7}{3-5\,n^4}=\frac{n^8}{n^4}\,\frac{1-\frac{7}{n^8}}{\frac{3}{n^4}-5}=n^4\,\frac{1-\frac{7}{n^8}}{\frac{3}{n^4}-5}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^8-7}{3-5\,n^4}=\lim_{n\to+\infty}n^4\,\frac{1-\frac{7}{n^8}}{\frac{3}{n^4}-5}=(+\infty)\cdot\left(\frac{1-0}{0-5}\right)=(+\infty)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-\infty\,.$$

c) Ricordando che 7^n diverge più velocemente di n^{11}, si ha

$$\frac{7^n+n^{11}}{7\cdot 7^n+8}=\frac{7^n}{7^n}\,\frac{1+\frac{n^{11}}{7^n}}{7+\frac{8}{7^n}}=\frac{1+\frac{n^{11}}{7^n}}{7+\frac{8}{7^n}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n+n^{11}}{7\cdot 7^n+8}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{n^{11}}{7^n}}{7+\frac{8}{7^n}}=\frac{1+0}{7+0}=\frac{1}{7}\,.$$

d) Scriviamo la successione come segue:

$$\frac{n^{14}\,7^n}{9^n+n^9}=\frac{(\frac{9}{7})^n}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{n^{14}\,7^n}{9^n+n^9}=\frac{n^{14}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{(\frac{9}{7})^n\cdot 7^n}{9^n+n^9}=\frac{n^{14}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{9^n}{9^n+n^9}\,.$$

Pertanto,

$$0\le\frac{n^{14}\,7^n}{9^n+n^9}=\frac{n^{14}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{9^n}{9^n+n^9}\le\frac{n^{14}}{(\frac{9}{7})^n}\cdot 1=\frac{n^{14}}{(\frac{9}{7})^n}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{14}}{(\frac{9}{7})^n}=0\,,$$

per il teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{14}\,7^n}{9^n+n^9}=0\,.$$

6) Sia
$$a_n = \frac{3 \cdot 6^n + 14}{6^n + 5}\,.$$
a) Si dimostri che la successione $\{a_n\}$ è limitata.
b) Si dimostri che la successione $\{n^3\, a_n\}$ è illimitata superiormente.
c) Si dimostri che si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$
d) Si calcoli il minimo della successione $\{a_n\}$.

Soluzione:
a) Si ha
$$0 \le a_n = \frac{3 \cdot 6^n + 14}{6^n + 5} = \frac{3 \cdot 6^n + 15 - 1}{6^n + 5} = \frac{3\,(6^n + 5) - 1}{6^n + 5} = 3 - \frac{1}{6^n + 5} \le 3\,,$$
e quindi la successione $\{a_n\}$ è limitata.
In alternativa, si ha
$$a_n = \frac{3 \cdot 6^n + 14}{6^n + 5} = \frac{6^n}{6^n}\,\frac{3 + \frac{14}{6^n}}{1 + \frac{5}{6^n}} = \frac{3 + \frac{14}{6^n}}{1 + \frac{5}{6^n}}\,.$$
Pertanto, dato che sia $\frac{14}{6^n}$ che $\frac{5}{6^n}$ tendono a zero, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3 + \frac{14}{6^n}}{1 + \frac{5}{6^n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3\,.$$
Dato che la successione a_n tende ad un limite finito, è limitata.

b) Dato che la successione a_n converge ad 3 per l'esercizio **a)**, la successione $n^3\, a_n$ diverge a più infinito, ed è dunque illimitata superiormente.

c) Dimostriamo che la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente. Si ha
$$a_{n+1} \ge a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3 \cdot 6^{n+1} + 14}{6^{n+1} + 5} \ge \frac{3 \cdot 6^n + 14}{6^n + 5}\,,$$
e l'ultima disuguaglianza è equivalente a
$$(3 \cdot 6^{n+1} + 14)\,(6^n + 5) \ge (3 \cdot 6^n + 14)\,(6^{n+1} + 5)\,.$$
Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere
$$3 \cdot 6^{2n+1} + 15 \cdot 6^{n+1} + 14 \cdot 6^n + 70 \ge 3 \cdot 6^{2n+1} + 15 \cdot 6^n + 14 \cdot 6^{n+1} + 70\,,$$
che, semplificando, è equivalente a
$$(15 - 14) \cdot 6^{n+1} \ge (15 - 14) \cdot 6^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6^{n+1} \ge 6^n\,,$$
che è vera. Pertanto, la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$

d) Dato che per l'esercizio **c)** la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente, si ha
$$a_n \ge a_0 = \frac{3 \cdot 6^0 + 14}{6^0 + 5} = \frac{3 + 14}{1 + 5} = \frac{17}{6}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
e quindi
$$\min(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}) = a_0 = \frac{17}{6}\,.$$