Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 1
2 Ottobre 2023 — Compito n. 00149

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 9\}\,.$$
1A) Il numero $x = 64$ appartiene ad E.
1B) Se x appartiene ad E, allora $x+36$ appartiene ad E.
1C) Esiste il minimo di E.
1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ è limitato superiormente.

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-6| \le 6\} \setminus \{0\}.$$
2A) L'insieme E non è un intervallo.
2B) Il numero reale $x = 7$ non appartiene ad E.
2C) L'insieme E non è limitato superiormente.
2D) L'insieme E non ha massimo.

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16x + 55 \le 0\}\,.$$
3A) L'insieme E è vuoto.
3B) L'insieme E non è un intervallo.
3C) L'insieme $E \setminus \{8\}$ non è un intervallo.
3D) L'insieme E ha massimo.

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \le \sqrt{13}\}\,.$$
4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ non appartiene ad E.
4B) Il numero $x = -1$ appartiene ad E.
4C) L'insieme E è limitato.
4D) Esiste il massimo di E.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐	**Cognome**	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00149**

5) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x \leq 4\} \setminus \{0\}\,.$$

a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 2]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme

$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

6) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-3)\,(x-4)\,(x-5) \leq 0\}\,.$$

a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzioni del compito 00149

1) Sia

$$E = \{\text{multipli interi di } 9\}\,.$$

1A) Il numero $x = 64$ appartiene ad E.

Falso: Il numero $x = 64$ non appartiene ad E dato che non è un multiplo di 9; infatti, dividendo x per 9 si ottiene come resto 1 (e non 0).

1B) Se x appartiene ad E, allora $x + 36$ appartiene ad E.

Vero: Se x appartiene ad E, x è un multiplo intero di 9; esiste quindi un intero k tale che $x = 9\,k$. Dato che $36 = 4 \cdot 9$, si ha quindi

$$x + 36 = 9\,k + 4 \cdot 9 = (k + 4) \cdot 9\,,$$

e quindi $x + 36$ appartiene ad E perché è un multiplo intero di 9.

1C) Esiste il minimo di E.

Vero: Dato che E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, E ammette minimo per il principio di buon ordinamento. Un altro modo per dimostrare che E ha minimo è osservare che

$$E = \{0,\ 9,\ 18,\ 27,\ 36,\ \ldots\}\,,$$

e quindi il minimo di E esiste ed è 0.

1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ è limitato superiormente.

Falso: Se $\mathbb{N} \setminus E$ fosse limitato superiormente, esisterebbe N in $\mathbb{N}$ tale che se x appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$, allora $x < N$. Pertanto, $x = N$ appartiene ad E. Ma se N appartiene ad E, allora $N + 1$ non vi appartiene (perché dividendo N per 9 si ottiene come resto 1, e quindi $N + 1$ non è divisibile per 9). Abbiamo dunque un assurdo: tutti i numeri di $\mathbb{N} \setminus E$ sono strettamente minori di N, ma $N + 1 > N$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$. Ne segue quindi che $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato.

---

2) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \leq 6\} \setminus \{0\}.$$

Si ha

$$|x - 6| \leq 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -6 \leq x - 6 \leq 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq x \leq 12\,,$$

cosicché

(1) $$E = [0, 12] \setminus \{0\} = (0, 12]\,.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Per la (1), si ha che $E = (0, 12]$ è un intervallo.

2B) Il numero reale $x = 7$ non appartiene ad E.

Falso: Dalla (1) segue che $x = 7$ appartiene ad E.

2C) L'insieme E non è limitato superiormente.

Falso: Per la (1), l'insieme E è limitato superiormente.

2D) L'insieme E non ha massimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E ha $M = 12$ come massimo.

---

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16x + 55 \leq 0\}\,.$$

Si ha
$$x^2 - 16x + 55 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 5, 11\,.$$
Pertanto,
$$x^2 - 16x + 55 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5 \leq x \leq 11 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [5, 11]\,.$$
Si ha quindi
$$E = [5, 11]\,. \tag{1}$$

3A) L'insieme E è vuoto.

Falso: Per la (1), l'insieme E non è vuoto.

3B) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Per la (1), l'insieme E è un intervallo.

3C) L'insieme $E \setminus \{8\}$ non è un intervallo.

Vero: Per la (1) si ha
$$E \setminus \{8\} = [5, 8) \cup (8, 11]\,,$$
che non è un intervallo.

3D) L'insieme E ha massimo.

Vero: Per la (1), l'insieme E ha $M = 11$ come massimo.

---

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \le \sqrt{13}\}\,.$$

Sia ha
$$|x| \le \sqrt{13} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\sqrt{13} \le x \le \sqrt{13} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
da cui segue che
$$E = [-\sqrt{13}, \sqrt{13}] \cap \mathbb{Q}\,. \tag{1}$$

4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ non appartiene ad E.

Vero: Dato che $x = \sqrt{13}$ non è un numero razionale, x non appartiene ad E.

4B) Il numero $x = -1$ appartiene ad E.

Vero: Dato che $x = -1$ è un numero razionale, e che si ha
$$-\sqrt{13} \le -1 \le \sqrt{13}\,,$$
il numero $x = 1$ appartiene ad E.

4C) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che
$$E \subset [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
e quindi E è un insieme limitato dato che è contenuto in un insieme limitato.

4D) Esiste il massimo di E.

Falso: Il "candidato massimo" di E è $x = \sqrt{13}$, che però non appartiene ad E dato che non è un numero razionale. Ne segue che non esiste il massimo di E.

---

5) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -7 \le x \le 4\} \setminus \{0\}\,.$$
a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0,2]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme
$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

Soluzione:
a) Si ha
$$E = [-7,4] \setminus \{0\} = [-7,0) \cup (0,4]\,, \tag{1}$$
che non è un intervallo.

b) Dalla (1) segue che (ad esempio) $x = 4$ è un maggiorante di E, e che (ad esempio) $x = -7$ è un minorante di E. Si ha infatti che
$$\overline{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 4\} = [4, +\infty)\,, \qquad \underline{m}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \le -7\} = (-\infty, -7]\,.$$

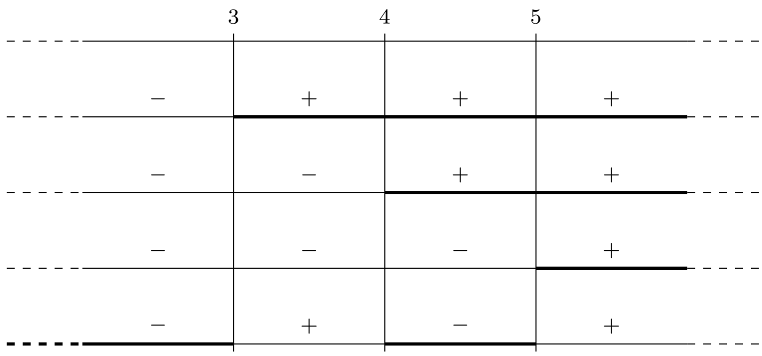
c) Si ha, per la (1),
$$E \cap [0,2] = ([-7,0) \cup (0,4]) \cap [0,2] = (0,2]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

d) Se x appartiene ad E, allora
$$-7 \le x \le 4\,, \qquad x \ne 0\,.$$
Se $x > 0$, si ha
$$0 < x \le 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \le 16\,,$$
mentre se $x < 0$, si ha
$$-7 \le x < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \le 49\,.$$
Si ha quindi che se x appartiene ad E, allora
$$0 < x \le \max(49, 16) = 49\,,$$
e quindi
$$F = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \le 49\} = (0, 49]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

6) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-3)\,(x-4)\,(x-5) \leq 0\}\,.$$
a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzione:
a) Se $x = 0$, si ha
$$(x-3)\,(x-4)\,(x-5) = (0-3)\,(0-4)\,(0-5) = -60 \leq 0\,,$$
e quindi (per definizione) $x = 0$ appartiene ad E.

b) Consideriamo i segni dei tre fattori che determinano la disequazione che definisce E; si ha
$$x-3 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 3\,, \qquad x-4 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 4\,,$$
e
$$x-5 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 5\,.$$
Graficamente, quindi, si ha



e quindi

(1) $$E = (-\infty, 3] \cup [4, 5]\,.$$

c) Dalla (1) si ha che
$$E \cap [0, +\infty) = [0, 3] \cup [4, 5]\,,$$
che è un insieme limitato (superiormente da 5 e inferiormente da 0).

d) Dato che dalla (1) segue che il massimo di E è $M = 5$, che è anche un numero razionale, allora il massimo di $E \cap \mathbb{Q}$ è $M = 5$. Sempre dalla (1) segue che
$$E \cap \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, 3, 4, 5\}\,,$$
che ha come minimo $m = 0$.