



Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero
25 Dicembre 2023 — Compito n. 00168

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(3x)} = \frac{8}{9}.$$

1B)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log(x-2)}{\tan(5(x-3))} = \frac{1}{5}.$$

1C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{4x^3 + 2x} = 0.$$

1D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-5x})^{e^{9x}} = +\infty.$$

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x(e^{4x} - 1) & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(5x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ non è continua in $x = 0$.

2B) La funzione $f(x)$ è derivabile in $x = 0$.

2C) Esiste $\xi < 0$ tale che $f'(\xi) = 0$.

2D) Non esiste $0 < \xi < 1$ tale che $f'(\xi) = e^4 + 4$.

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 10 - 6x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

3A) La funzione $f(x)$ è crescente su $(0, +\infty)$.

3B) La funzione $f(x)$ è crescente su $(-\infty, 0)$.

3C) La funzione $f(x)$ è crescente su \mathbb{R} .

3D) Si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$T_3(\sin(2x); 0) = 2x + \frac{4}{3}x^3.$$

4B)

$$T_3(x^2(e^{7x} - 1); 0) = 7x^3.$$

4C)

$$\frac{1 - \cos(4x^2)}{x^2} = 8x^2 + o(x^2).$$

4D)

$$e^{7x} - 1 - \sin(7x) = 14x^2 + o(x^2).$$

Docente

- ☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome**Nome****Matricola****Compito 00168**

5) Sia

$$f(x) = \frac{(x^2 + 6)(x + 5)}{x - 5}.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x).$$

c) Dimostrare che esiste il minimo di $f(x)$ su $(5, +\infty)$.**d)** Dimostrare che $f((-\infty, 5)) = \mathbb{R}$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00168

6) Sia

$$f(x) = (x^2 - 2x - 23)e^x.$$

- a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.
 - b) Calcolare $T_2(x; 0)$.
 - c) Determinare i punti stazionari di $f(x)$ su \mathbb{R} , studiandone la natura.
 - d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ sull'intervallo $[4, 6]$.
-

Soluzioni del compito 00168

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(3x)} = \frac{8}{9}.$$

Vero: Ricordando che quando t tende a zero si ha $\sin(t) \approx t$, e $1 - \cos(t) \approx t^2/2$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{(3x)^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2^2}{3^2} = \frac{8}{9}.$$

1B)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log(x-2)}{\tan(5(x-3))} = \frac{1}{5}.$$

Vero: Scriviamo $\log(x-2) = \log(1 + (x-3))$. Pertanto, ricordando che quando t tende a zero si ha $\log(1+t) \approx t$ e $\tan(t) \approx t$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log(x-2)}{\tan(5(x-3))} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{5(x-3)} = \frac{1}{5}.$$

1C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{4x^3 + 2^x} = 0.$$

Vero: Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0,$$

e che $x^3 \asymp x^2$ quando x tende a $-\infty$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{4x^3 + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{x^2}{x^3} \frac{1}{4 + \frac{2^x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{1}{x} \frac{1}{4 + \frac{2^x}{x^3}} = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4+0} = 0.$$

1D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-5x})^{e^{9x}} = +\infty.$$

Vero: Ricordando che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e,$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{9x}}{e^{5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x} = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-5x})^{e^{9x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^{5x}}\right)^{e^{9x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{e^{5x}}\right)^{e^{5x}}\right]^{\frac{e^{9x}}{e^{5x}}} = [e]^{+\infty} = +\infty.$$

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x(e^{4x} - 1) & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(5x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ non è continua in $x = 0$.

Falso: Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [5x^2 + x(e^{4x} - 1)] = 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(5x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \frac{\sin(5x^3)}{x^3} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Dato che i due limiti sono uguali, esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0),$$

e quindi la funzione è continua in $x = 0$.

2B) La funzione $f(x)$ è derivabile in $x = 0$.

Vero: Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{5h^2 + h(e^{4h} - 1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} [5h + e^{4h} - 1] = 0 + 0 = 0,$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin(5h^3)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(5h^3)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \frac{\sin(5h^3)}{h^3} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Dato che i due limiti sono uguali (e finiti) la funzione $f(x)$ è derivabile in $x = 0$, e si ha $f'(0) = 0$.

2C) Esiste $\xi < 0$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Vero: Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione $f(x)$ è continua e derivabile su $(-\infty, 0]$. Inoltre, $f(0) = 0$ e (ad esempio)

$$f(-\sqrt[3]{\pi}) = \frac{\sin(-5\pi)}{-\sqrt[3]{\pi}} = 0.$$

Per il teorema di Rolle, applicato all'intervallo $[-\sqrt[3]{\pi}, 0]$, esiste ξ in tale intervallo tale che $f'(\xi) = 0$.

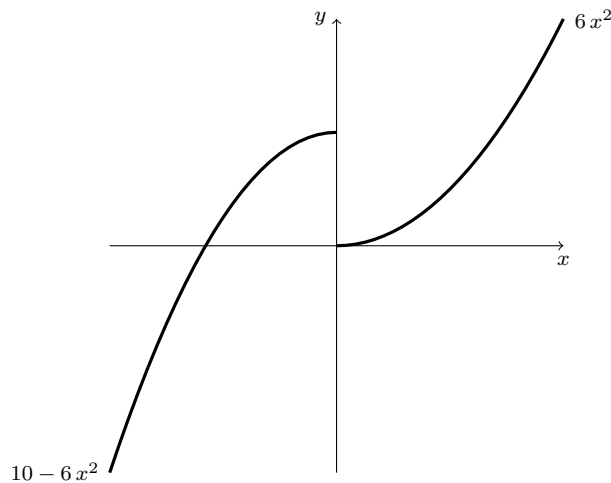
2D) Non esiste $0 < \xi < 1$ tale che $f'(\xi) = e^4 + 4$.

Falso: Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $[0, 1]$, ed è tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = e^4 + 4$. Per il teorema di Lagrange, esiste ξ in $(0, 1)$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = e^4 + 4.$$

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 10 - 6x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Disegno non in scala

3A) La funzione $f(x)$ è crescente su $(0, +\infty)$.

Vero: Dato che per $x \geq 0$ si ha $f(x) = 6x^2$, si ha

$$f'(x) = 12x, \quad \forall x > 0.$$

Dato che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$, la funzione $f(x)$ è crescente su $(0, +\infty)$.

3B) La funzione $f(x)$ è crescente su $(-\infty, 0)$.

Vero: Dato che $f(x) = 10 - 6x^2$ per $x < 0$, si ha

$$f'(x) = -12x, \quad \forall x < 0.$$

Dato che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x < 0$, la funzione $f(x)$ è crescente su $(-\infty, 0)$.

3C) La funzione $f(x)$ è crescente su \mathbb{R} .

Falso: Per dimostrare che $f(x)$ non è crescente è sufficiente osservare che

$$f(-1) = 10 - 6 = 4 > 0 = f(0).$$

3D) Si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Vero: Dato che $f(x)$ è monotona crescente su $(0, +\infty)$, e che $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^2 = +\infty,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$(1) \quad f([0, +\infty)) = [0, +\infty).$$

Dato che $f(x)$ è crescente anche su $(-\infty, 0)$, e che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [10 - 6x^2] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [10 - 6x^2] = 10,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$(2) \quad f((-\infty, 0)) = (-\infty, 10).$$

Da (1) e da (2) si ha quindi

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-\infty, 10) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$T_3(\sin(2x); 0) = 2x + \frac{4}{3}x^3.$$

Falso: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si ha, ponendo $t = 2x$,

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

da cui segue che

$$T_3(\sin(2x); 0) = 2x - \frac{4}{3}x^3 \neq 2x + \frac{4}{3}x^3.$$

4B)

$$T_3(x^2(e^{7x} - 1); 0) = 7x^3.$$

Vero: Ricordando che

$$e^t = 1 + t + o(t),$$

si ha, ponendo $t = 7x$,

$$e^{7x} = 1 + 7x + o(x),$$

da cui segue che

$$x^2(e^{7x} - 1) = x^2(1 + 7x + o(x) - 1) = x^2(7x + o(x)) = 7x^3 + o(x^3),$$

da cui segue che

$$T_3(x^2(e^{7x} - 1); 0) = 7x^3.$$

4C)

$$\frac{1 - \cos(4x^2)}{x^2} = 8x^2 + o(x^2).$$

Vero: Ricordando che si ha

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

si ha, ponendo $t = 4x^2$,

$$\cos(4x^2) = 1 - \frac{(4x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 - 8x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\frac{1 - \cos(4x^2)}{x^2} = \frac{1 - 1 + 8x^4 + o(x^4)}{x^2} = \frac{8x^4 + o(x^4)}{x^2} = 8x^2 + o(x^2).$$

4D)

$$e^{7x} - 1 - \sin(7x) = 14x^2 + o(x^2).$$

Vero: Ricordando che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = t + o(t^2),$$

si ha, ponendo $t = 7x$,

$$e^{7x} = 1 + 7x + 14x^2 + o(x^2), \quad \sin(7x) = 7x + o(x^2).$$

Pertanto,

$$e^{7x} - 1 - \sin(7x) = 1 + 7x + 14x^2 + o(x^2) - 1 - 7x + o(x^2) = 14x^2 + o(x^2).$$

5) Sia

$$f(x) = \frac{(x^2 + 6)(x + 5)}{x - 5}.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x).$$

c) Dimostrare che esiste il minimo di $f(x)$ su $(5, +\infty)$.

d) Dimostrare che $f((-\infty, 5)) = \mathbb{R}$.

Soluzione:

a) Si ha

$$f(x) = \frac{(x^2 + 6)(x + 5)}{x - 5} = \frac{x^3}{x} \frac{\left(1 + \frac{6}{x^2}\right) \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{1 - \frac{5}{x}} = x^2 \frac{\left(1 + \frac{6}{x^2}\right) \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{1 - \frac{5}{x}}.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\left(1 + \frac{6}{x^2}\right) \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{1 - \frac{5}{x}} = (+\infty) \cdot \frac{(1 + 0)(1 + 0)}{1 - 0} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \frac{\left(1 + \frac{6}{x^2}\right) \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{1 - \frac{5}{x}} = (+\infty) \cdot \frac{(1 + 0)(1 + 0)}{1 - 0} = +\infty.$$

b) Osserviamo che quando x tende a 5 da destra il binomio $x - 5$ è positivo, mentre è negativo quando x tende a 5 da sinistra. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5} = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x - 5} = -\infty.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 6)(x + 5) = 31 \cdot 10 = 310 > 0,$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 310 \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 310 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

c) Dal punto a) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre dal punto b) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema di Weierstrass, esiste il minimo di $f(x)$ sulla semiretta $(5, +\infty)$.

d) Dal punto a) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre dal punto b) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha $f((-\infty, 5)) = \mathbb{R}$.

6) Sia

$$f(x) = (x^2 - 2x - 23) e^x.$$

a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.

b) Calcolare $T_2(x; 0)$.

c) Determinare i punti stazionari di $f(x)$ su \mathbb{R} , studiandone la natura.

d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ sull'intervallo $[4, 6]$.

Soluzione:

a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 23) e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Per il limite a meno infinito, poniamo $y = -x$; allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} ((-y)^2 - 2(-y) - 23) e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 + 2y - 23}{e^y} = 0,$$

dato che $e^y \gg y^k$ per ogni k .

b) Derivando, si ha

$$(1) \quad f'(x) = (2x - 2) e^x + (x^2 - 2x - 23) e^x = (x^2 - 25) e^x,$$

e, derivando ancora,

$$f''(x) = 2x e^x + (x^2 - 25) e^x = (x^2 + 2x - 25) e^x.$$

Dato che $f(0) = -23$, che $f'(0) = -25$ e che $f''(0) = -25$, si ha

$$T_2(x; 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 = -23 - 25x - \frac{25}{2} x^2.$$

c) Dalla (1) si ha $f'(x) = (x^2 - 25) e^x$, che si annulla se e solo se $x^2 - 25 = 0$, ovvero se e solo se $x = \pm 5$. Studiando il segno di $f'(x)$ si ha il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & -5 & & - & & 5 & & + \\ \hline & \nearrow & & & & \searrow & & & & \nearrow \end{array}$$

da cui si deduce che $x = -5$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 5$ è di minimo relativo.

d) Dallo studio del segno della derivata prima, si ha che $x = 4$ è di massimo relativo (dato che $f'(4) < 0$); che $x = 5$ è di minimo relativo (come già sapevamo); che $x = 6$ è di massimo relativo (dato che $f'(6) > 0$).

Si ha poi

$$f(4) = -15e^4, \quad f(5) = -8e^5, \quad f(6) = e^6.$$

Osservando che la funzione $f(x)$ è decrescente in $[4, 5]$, si ha $f(4) > f(5)$, e quindi

$$\max(\{f(x), x \in [4, 6]\}) = f(6) = e^6, \quad \min(\{f(x), x \in [4, 6]\}) = f(5) = -8e^5.$$