



Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero  
25 Dicembre 2023 — Compito n. 00194

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☐ o ☑).

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos(4x)} = \frac{9}{32}.$$

1B)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(x-4)}{\tan(4(x-5))} = \frac{1}{4}.$$

1C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{6x^3 + 2x} = +\infty.$$

1D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-4x})^{e^{7x}} = +\infty.$$

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x(e^{6x} - 1) & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(5x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione  $f(x)$  non è continua in  $x = 0$ .

2B) La funzione  $f(x)$  non è derivabile in  $x = 0$ .

2C) Non esiste  $\xi < 0$  tale che  $f'(\xi) = 0$ .

2D) Esiste  $0 < \xi < 1$  tale che  $f'(\xi) = e^6 + 4$ .

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 6 - 3x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

3A) La funzione  $f(x)$  è decrescente su  $(0, +\infty)$ .

3B) La funzione  $f(x)$  è decrescente su  $(-\infty, 0)$ .

3C) La funzione  $f(x)$  è crescente su  $\mathbb{R}$ .

3D) Si ha  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$T_3(\sin(3x); 0) = 3x + \frac{9}{2}x^3.$$

4B)

$$T_3(x^2(e^{2x} - 1); 0) = 2x^3.$$

4C)

$$\frac{1 - \cos(6x^2)}{x^2} = -18x^2 + o(x^2).$$

4D)

$$e^{6x} - 1 - \sin(6x) = 18x^2 + o(x^2).$$

Docente

- ☐ Garroni [A, F]  
☐ Orsina [G, Z]

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00194

5) Sia

$$f(x) = \frac{(x^2 + 7)(x + 3)}{x - 3}.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$$

c) Dimostrare che esiste il minimo di  $f(x)$  su  $(3, +\infty)$ .

d) Dimostrare che  $f((-\infty, 3)) = \mathbb{R}$ .

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00194

---

6) Sia

$$f(x) = (x^2 - 2x - 14)e^x.$$

- a) Calcolare i limiti di  $f(x)$  a più infinito e meno infinito.
  - b) Calcolare  $T_2(x; 0)$ .
  - c) Determinare i punti stazionari di  $f(x)$  su  $\mathbb{R}$ , studiandone la natura.
  - d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di  $f(x)$  sull'intervallo  $[3, 5]$ .
-

## Soluzioni del compito 00194

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

1A)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos(4x)} = \frac{9}{32}.$$

**Falso:** Ricordando che quando  $t$  tende a zero si ha  $\sin(t) \approx t$ , e  $1 - \cos(t) \approx t^2/2$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{(4x)^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3^2}{4^2} = \frac{9}{8} \neq \frac{9}{32}.$$

---

1B)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(x-4)}{\tan(4(x-5))} = \frac{1}{4}.$$

**Vero:** Scriviamo  $\log(x-4) = \log(1 + (x-5))$ . Pertanto, ricordando che quando  $t$  tende a zero si ha  $\log(1+t) \approx t$  e  $\tan(t) \approx t$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(x-4)}{\tan(4(x-5))} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{4(x-5)} = \frac{1}{4}.$$

---

1C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{6x^3 + 2^x} = +\infty.$$

**Falso:** Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0,$$

e che  $x^3 \asymp x^2$  quando  $x$  tende a  $-\infty$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{6x^3 + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{x^2}{x^3} \frac{1}{6 + \frac{2^x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{1}{x} \frac{1}{6 + \frac{2^x}{x^3}} = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6+0} = 0 \neq +\infty.$$

---

1D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-4x})^{e^{7x}} = +\infty.$$

**Vero:** Ricordando che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e,$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{e^{4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-4x})^{e^{7x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^{4x}}\right)^{e^{7x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{e^{4x}}\right)^{e^{4x}}\right]^{\frac{e^{7x}}{e^{4x}}} = [e]^{+\infty} = +\infty.$$

---

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x(e^{6x} - 1) & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(5x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

---

**2A)** La funzione  $f(x)$  non è continua in  $x = 0$ .

**Falso:** Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [5x^2 + x(e^{6x} - 1)] = 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(5x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \frac{\sin(5x^3)}{x^3} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Dato che i due limiti sono uguali, esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0),$$

e quindi la funzione è continua in  $x = 0$ .

---

**2B)** La funzione  $f(x)$  non è derivabile in  $x = 0$ .

**Falso:** Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{5h^2 + h(e^{6h} - 1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} [5h + e^{6h} - 1] = 0 + 0 = 0,$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin(5h^3)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(5h^3)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \frac{\sin(5h^3)}{h^3} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Dato che i due limiti sono uguali (e finiti) la funzione  $f(x)$  è derivabile in  $x = 0$ , e si ha  $f'(0) = 0$ .

---

**2C)** Non esiste  $\xi < 0$  tale che  $f'(\xi) = 0$ .

**Falso:** Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione  $f(x)$  è continua e derivabile su  $(-\infty, 0]$ . Inoltre,  $f(0) = 0$  e (ad esempio)

$$f(-\sqrt[3]{\pi}) = \frac{\sin(-5\pi)}{-\sqrt[3]{\pi}} = 0.$$

Per il teorema di Rolle, applicato all'intervallo  $[-\sqrt[3]{\pi}, 0]$ , esiste  $\xi$  in tale intervallo tale che  $f'(\xi) = 0$ .

---

**2D)** Esiste  $0 < \xi < 1$  tale che  $f'(\xi) = e^6 + 4$ .

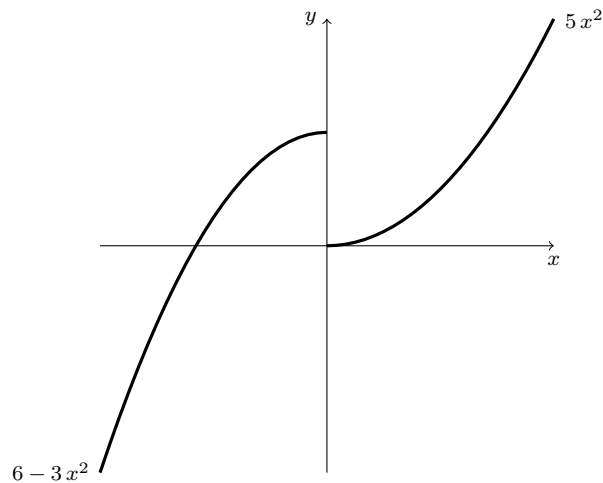
**Vero:** Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione  $f(x)$  è continua e derivabile in  $[0, 1]$ , ed è tale che  $f(0) = 0$  e  $f(1) = e^6 + 4$ . Per il teorema di Lagrange, esiste  $\xi$  in  $(0, 1)$  tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = e^6 + 4.$$

---

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 6 - 3x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Disegno non in scala

**3A)** La funzione  $f(x)$  è decrescente su  $(0, +\infty)$ .

**Falso:** Dato che per  $x \geq 0$  si ha  $f(x) = 5x^2$ , si ha

$$f'(x) = 10x, \quad \forall x > 0.$$

Dato che  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x > 0$ , la funzione  $f(x)$  è crescente su  $(0, +\infty)$ .

**3B)** La funzione  $f(x)$  è decrescente su  $(-\infty, 0)$ .

**Falso:** Dato che  $f(x) = 6 - 3x^2$  per  $x < 0$ , si ha

$$f'(x) = -6x, \quad \forall x < 0.$$

Dato che  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x < 0$ , la funzione  $f(x)$  è crescente su  $(-\infty, 0)$ .

**3C)** La funzione  $f(x)$  è crescente su  $\mathbb{R}$ .

**Falso:** Per dimostrare che  $f(x)$  non è crescente è sufficiente osservare che

$$f(-1) = 6 - 3 = 3 > 0 = f(0).$$

**3D)** Si ha  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

**Vero:** Dato che  $f(x)$  è monotona crescente su  $(0, +\infty)$ , e che  $f(0) = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$(1) \quad f([0, +\infty)) = [0, +\infty).$$

Dato che  $f(x)$  è crescente anche su  $(-\infty, 0)$ , e che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [6 - 3x^2] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [6 - 3x^2] = 6,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$(2) \quad f((-\infty, 0)) = (-\infty, 6).$$

Da (1) e da (2) si ha quindi

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-\infty, 6) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

4A)

$$T_3(\sin(3x); 0) = 3x + \frac{9}{2}x^3.$$

**Falso:** Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si ha, ponendo  $t = 3x$ ,

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

da cui segue che

$$T_3(\sin(3x); 0) = 3x - \frac{9}{2}x^3 \neq 3x + \frac{9}{2}x^3.$$

---

4B)

$$T_3(x^2(e^{2x} - 1); 0) = 2x^3.$$

**Vero:** Ricordando che

$$e^t = 1 + t + o(t),$$

si ha, ponendo  $t = 2x$ ,

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x),$$

da cui segue che

$$x^2(e^{2x} - 1) = x^2(1 + 2x + o(x) - 1) = x^2(2x + o(x)) = 2x^3 + o(x^3),$$

da cui segue che

$$T_3(x^2(e^{2x} - 1); 0) = 2x^3.$$

---

4C)

$$\frac{1 - \cos(6x^2)}{x^2} = -18x^2 + o(x^2).$$

**Falso:** Ricordando che si ha

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

si ha, ponendo  $t = 6x^2$ ,

$$\cos(6x^2) = 1 - \frac{(6x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 - 18x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\frac{1 - \cos(6x^2)}{x^2} = \frac{1 - 1 + 18x^4 + o(x^4)}{x^2} = \frac{18x^4 + o(x^4)}{x^2} = 18x^2 + o(x^2) \neq -18x^2 + o(x^2).$$

---

4D)

$$e^{6x} - 1 - \sin(6x) = 18x^2 + o(x^2).$$

**Vero:** Ricordando che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = t + o(t^2),$$

si ha, ponendo  $t = 6x$ ,

$$e^{6x} = 1 + 6x + 18x^2 + o(x^2), \quad \sin(6x) = 6x + o(x^2).$$



Pertanto,

$$e^{6x} - 1 - \sin(6x) = 1 + 6x + 18x^2 + o(x^2) - 1 - 6x + o(x^2) = 18x^2 + o(x^2).$$

---

5) Sia

$$f(x) = \frac{(x^2 + 7)(x + 3)}{x - 3}.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$$

c) Dimostrare che esiste il minimo di  $f(x)$  su  $(3, +\infty)$ .

d) Dimostrare che  $f((-\infty, 3)) = \mathbb{R}$ .

---

**Soluzione:**

a) Si ha

$$f(x) = \frac{(x^2 + 7)(x + 3)}{x - 3} = \frac{x^3}{x} \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{1 - \frac{3}{x}} = x^2 \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{1 - \frac{3}{x}}.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{1 - \frac{3}{x}} = (+\infty) \cdot \frac{(1 + 0)(1 + 0)}{1 - 0} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{1 - \frac{3}{x}} = (+\infty) \cdot \frac{(1 + 0)(1 + 0)}{1 - 0} = +\infty.$$

b) Osserviamo che quando  $x$  tende a 3 da destra il binomio  $x - 3$  è positivo, mentre è negativo quando  $x$  tende a 3 da sinistra. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} = -\infty.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7)(x + 3) = 16 \cdot 6 = 96 > 0,$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 96 \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 96 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

c) Dal punto a) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre dal punto b) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema di Weierstrass, esiste il minimo di  $f(x)$  sulla semiretta  $(3, +\infty)$ .

d) Dal punto a) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre dal punto b) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha  $f((-\infty, 3)) = \mathbb{R}$ .

6) Sia

$$f(x) = (x^2 - 2x - 14)e^x.$$

a) Calcolare i limiti di  $f(x)$  a più infinito e meno infinito.

b) Calcolare  $T_2(x; 0)$ .

c) Determinare i punti stazionari di  $f(x)$  su  $\mathbb{R}$ , studiandone la natura.

d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di  $f(x)$  sull'intervallo  $[3, 5]$ .

---

**Soluzione:**

a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 14)e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Per il limite a meno infinito, poniamo  $y = -x$ ; allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} ((-y)^2 - 2(-y) - 14)e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 + 2y - 14}{e^y} = 0,$$

dato che  $e^y \gg y^k$  per ogni  $k$ .

b) Derivando, si ha

$$(1) \quad f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x - 14)e^x = (x^2 - 16)e^x,$$

e, derivando ancora,

$$f''(x) = 2xe^x + (x^2 - 16)e^x = (x^2 + 2x - 16)e^x.$$

Dato che  $f(0) = -14$ , che  $f'(0) = -16$  e che  $f''(0) = -16$ , si ha

$$T_2(x; 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -14 - 16x - 8x^2.$$

c) Dalla (1) si ha  $f'(x) = (x^2 - 16)e^x$ , che si annulla se e solo se  $x^2 - 16 = 0$ , ovvero se e solo se  $x = \pm 4$ . Studiando il segno di  $f'(x)$  si ha il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & -4 & & - & & 4 & & + \\ \hline & \nearrow & & & & \searrow & & & & \nearrow \end{array}$$

da cui si deduce che  $x = -4$  è un punto di massimo relativo, mentre  $x = 4$  è di minimo relativo.

d) Dallo studio del segno della derivata prima, si ha che  $x = 3$  è di massimo relativo (dato che  $f'(3) < 0$ ); che  $x = 4$  è di minimo relativo (come già sapevamo); che  $x = 5$  è di massimo relativo (dato che  $f'(5) > 0$ ).

Si ha poi

$$f(3) = -11e^3, \quad f(4) = -6e^4, \quad f(5) = e^5.$$

Osservando che la funzione  $f(x)$  è decrescente in  $[3, 4]$ , si ha  $f(3) > f(4)$ , e quindi

$$\max(\{f(x), x \in [3, 5]\}) = f(5) = e^5, \quad \min(\{f(x), x \in [3, 5]\}) = f(4) = -6e^4.$$