Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 6
4 Dicembre 2023 — Compito n. 00009

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Sia

$$f(x) = x^3 - 8\,x^2 - 4\,x + 32\,.$$

Senza risolvere equazioni (o derivare $f(x)\ldots$) dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.
1B) Esiste $x_0 \leq 0$ tale che $f(x_0) = 0$.
1C) Non esiste x_1 in $[0, 5]$ tale che $f(x_1) = 0$.
1D) Non esiste x_2 in $[5, +\infty)$ tale che $f(x_2) = 0$.

---

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 4 & \text{se } x \geq 0, \\ -5\,x^2 + x + 5 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ non è continua in $x_0 = 0$.
2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$.
2C) Esiste $f''(0)$.
2D) Esiste ξ in $[-1, 1]$ tale che $f'(\xi) = \frac{e+5}{2}$.

---

3) Sia

$$f(x) = (x^2 - 12)\, e^{2x}\,.$$

3A) La funzione $f(x)$ è decrescente su $(-\infty, -5]$.
3B) La funzione $f(x)$ è crescente su $[-3, 2]$.
3C) La funzione $f(x)$ è decrescente su $[4, +\infty)$.
3D) Non esiste x_0 in $[3, +\infty)$ tale che $f(x_0) = 0$.

---

4) Sia

$$f(x) = (x - 10)\, e^x\,.$$

4A) L'equazione della retta tangente in $x_0 = 0$ è

$$y = -10 - 9\,x\,.$$

4B) L'equazione della retta tangente in $x_0 = 9$ è

$$y = -e^9\,.$$

4C) L'equazione della retta tangente in $x_0 = 10$ è

$$y = e^{10}\,(x - 10)\,.$$

4D) Se $g(x) = f(x^2)$, si ha

$$g'(x) = (x^2 - 9)\, e^{x^2}\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00009**

5) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sin(A\,x) + B & \text{se } x > 0, \\ 5\,x + 6 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Determinare A e B tali che $f(x)$ sia continua in $x = 0$.
b) Determinare A e B tali che $f(x)$ sia derivabile in $x = 0$.
c) Dimostrare che, per i valori di A e B trovati al punto **b)**, esiste $f''(0)$.
d) Dimostrare che, per i valori di A e B trovati al punto **b)**, si ha $f(x) \leq 7$ per ogni x in $\mathbb{R}$.

Cognome	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00009**

6) Sia per k in $\{0,1,2,3\}$,

$$f(x) = \begin{cases} (2k+1)\,(x-2k) & \text{su } [2k, 2k+1], \\ (2k+1)\,(2(k+1)-x) & \text{su } (2k+1, 2\,(k+1)). \end{cases}$$

a) Dimostrare che $f(x)$ è continua su $[0,8)$.
b) La funzione $f(x)$ è crescente su $[2,3]$? E su $[2,4)$?
c) Dimostrare che $0 \leq f(x) \leq x$ per ogni x in $[0,8)$.
d) Determinare tutti i punti di $[0,8)$ in cui $f(x)$ non è derivabile.
[Si consiglia di provare a disegnare la funzione prima di rispondere alle domande. . .]

Soluzioni del compito 00009

1) Sia

$$f(x) = x^3 - 8\,x^2 - 4\,x + 32\,.$$

Senza risolvere equazioni (o derivare $f(x)\ldots$) dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Si ha

$$f(x) = x^3 - 8\,x^2 - 4\,x + 32 = x^2\,(x-8) - 4\,(x-8) = (x^2-4)\,(x-8)\,,$$

da cui si ha $f(-2) = f(2) = f(8) = 0$. Negli esercizi più sotto **non** useremo questo fatto.

1A) Si ha $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

Falso: Dato che la funzione $f(x)$ è continua su tutta la retta reale, ed è tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,,$$

la funzione è suriettiva su $\mathbb{R}$ per una generalizzazione del teorema sui valori intermedi.

1B) Esiste $x_0 \leq 0$ tale che $f(x_0) = 0$.

Vero: Osserviamo che si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \text{e} \quad f(0) = 32 > 0\,,$$

Pertanto, dato che la funzione è continua, per una generalizzazione del teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto x_0 in $(-\infty, 0)$ tale che $f(x_0) = 0$.

1C) Non esiste x_1 in $[0,5]$ tale che $f(x_1) = 0$.

Falso: Osserviamo che si ha

$$f(0) = 32 > 0\,, \quad \text{e} \quad f(5) = -63 < 0\,.$$

Pertanto, dato che la funzione è continua, per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto x_0 in $[0,5]$ tale che $f(x_1) = 0$.

1D) Non esiste x_2 in $[5,+\infty)$ tale che $f(x_2) = 0$.

Falso: Osserviamo che si ha

$$f(5) = -63 < 0\,, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Pertanto, dato che la funzione è continua, per una generalizzazione del teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto x_2 in $[5,+\infty)$ tale che $f(x_2) = 0$.

---

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 4 & \text{se } x \geq 0, \\ -5\,x^2 + x + 5 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ non è continua in $x_0 = 0$.

Falso: Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [e^x + 4] = 1 + 4 = 5\,,$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [-5\,x^2 + x + 5] = 5\,.$$

Dato che il limite destro e sinistro sono uguali, si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 5 = f(0)\,,$$

e quindi la funzione $f(x)$ è continua in $x_0 = 0$.

2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

Falso: Derivando fuori da $x_0 = 0$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0, \\ -10\,x + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dato che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1\,,$$

e che

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} [-10\,x + 1] = 1\,,$$

per un corollario del Teorema di Lagrange si ha che $f(x)$ è derivabile in $x_0 = 0$ e si ha $f'(0) = 1$. Analogamente, considerando il limite destro e sinistro del rapporto incrementale, si ha

$$\lim_{x \to h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^h + 4 - 5}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,,$$

e

$$\lim_{x \to h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-5\,h^2 + h + 5 - 5}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-5\,x^2 + h}{h} = 1\,,$$

e quindi la funzione è derivabile in $x_0 = 0$ perché i due limiti sono uguali e finiti.

2C) Esiste $f''(0)$.

Falso: Dall'esercizio **2B)** si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0, \\ -10\,x + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si ha, considerando il rapporto incrementale da destra e da sinistra,

$$\lim_{x \to h \to 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,,$$

e

$$\lim_{x \to h \to 0^-} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-10\,h + 1 - 1}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-10\,h}{h} = -10\,,$$

Dato che i due limiti sono diversi (pur essendo finiti), non esiste $f''(0)$.
Si noti che in questo caso, dato che

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 1 \neq -10 = \lim_{x \to 0^-} f''(x)\,,$$

dato che il limite di $f''(x)$ in $x_0 = 0$ non esiste, non si poteva concludere che $f''(0)$ non esisteva (il corollario del Teorema di Lagrange funziona in una sola direzione...).

2D) Esiste ξ in $[-1, 1]$ tale che $f'(\xi) = \frac{e+5}{2}$.

Vero: Per gli esercizi **2A)** e **2B**) la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $[-1, 1]$. Inoltre

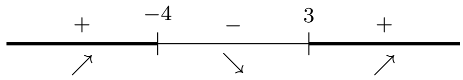
$$f(1) = e + 4\,, \qquad f(-1) = -5 - 1 + 5 = -1\,.$$

Per il teorema di Lagrange, quindi, esiste ξ in $(-1, 1)$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{e + 4 + 1}{2} = \frac{e - 5}{2}\,.$$

3) Sia
$$f(x) = (x^2 - 12)\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Derivando, si ha
$$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,(x^2 - 12)\,\mathrm{e}^{2x} = 2\,(x^2 + x - 12)\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$
Dato che $\mathrm{e}^{2x} > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$, si ha
$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + x - 12 \geq 0\,.$$
Risolvendo la disequazione si ha il seguente schema:



3A) La funzione $f(x)$ è decrescente su $(-\infty, -5]$.

Falso: Dallo schema riportato sopra, si ha che la derivata di $f(x)$ è positiva sull'intervallo $(-\infty, -5]$, e quindi la funzione è crescente su tale intervallo.

3B) La funzione $f(x)$ è crescente su $[-3, 2]$.

Falso: Dallo schema riportato sopra, si ha che la derivata di $f(x)$ è negativa sull'intervallo $[-3, 2]$, e quindi la funzione è decrescente su tale intervallo.

3C) La funzione $f(x)$ è decrescente su $[4, +\infty)$.

Falso: Dallo schema riportato sopra, si ha che la derivata di $f(x)$ è positiva sull'intervallo $[4, +\infty)$, e quindi la funzione è crescente su tale intervallo.

3D) Non esiste x_0 in $[3, +\infty)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Falso: Si ha
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \text{e} \qquad f(3) = -3\,\mathrm{e}^6 < 0\,.$$
Dato che la funzione $f(x)$ è continua, per una generalizzazione del teorema di esistenza degli zeri si ha che esiste x_0 in $[3, +\infty)$ tale che $f(x_0) = 0$.

---

4) Sia

$$f(x) = (x - 10)\,e^x\,.$$

Derivando, si ha

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 10)\,e^x = (x - 9)\,e^x\,. \tag{1}$$

4A) L'equazione della retta tangente in $x_0 = 0$ è

$$y = -10 - 9\,x\,.$$

Vero: Ricordando che l'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Dato che $f(0) = -10$, e che dalla (1) segue che $f'(0) = -9$, l'equazione della retta tangente in $x_0 = 0$ è

$$y = -10 - 9\,(x - 0) = -10 - 9\,x\,.$$

4B) L'equazione della retta tangente in $x_0 = 9$ è

$$y = -e^9\,.$$

Vero: Ricordando che l'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Dato che $f(9) = -e^9$, e che dalla (1) segue che $f'(9) = 0$, l'equazione della retta tangente in $x_0 = 9$ è

$$y = -e^9\,.$$

4C) L'equazione della retta tangente in $x_0 = 10$ è

$$y = e^{10}\,(x - 10)\,.$$

Vero: Ricordando che l'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Dato che $f(10) = 0$, e che dalla (1) segue che $f'(10) = e^{10}$, l'equazione della retta tangente in $x_0 = 10$ è

$$y = e^{10}\,(x - 10)\,.$$

4D) Se $g(x) = f(x^2)$, si ha

$$g'(x) = (x^2 - 9)\,e^{x^2}\,.$$

Falso: Dalla formula di derivazione delle funzioni composte si ha

$$g'(x) = f'(x^2)\,(x^2)' = 2x\,f'(x^2)\,.$$

Dato che dalla (1) si ha $f'(x) = (x - 9)\,e^x$, si ha $f'(x^2) = (x^2 - 9)\,e^{x^2}$ e quindi

$$g'(x) = 2x\,(x^2 - 9)\,e^{x^2} \neq (x^2 - 9)\,e^{x^2}\,.$$

---

5) Sia
$$f(x) = \begin{cases} \sin(A\,x) + B & \text{se } x > 0, \\ 5\,x + 6 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$
a) Determinare A e B tali che $f(x)$ sia continua in $x = 0$.
b) Determinare A e B tali che $f(x)$ sia derivabile in $x = 0$.
c) Dimostrare che, per i valori di A e B trovati al punto **b)**, esiste $f''(0)$.
d) Dimostrare che, per i valori di A e B trovati al punto **b)**, si ha $f(x) \le 7$ per ogni x in $\mathbb{R}$.

Soluzione:
a) Affinché la funzione sia continua in $x = 0$ deve essere
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)\,.$$
Dato che la funzione è definita in un modo a destra di 0 e a sinistra di 0, per calcolare il limite in $x = 0$ è necessario calcolare il limite destro ed il limite sinistro, e imporre che siano uguali. Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [\sin(A\,x) + B] = B\,,$$
e
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [5\,x + 6] = 6\,.$$
Ne segue che scegliendo $B = 6$ si ha
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 6 = f(0)\,.$$
Ne segue che è continua in $x = 0$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \sin(A\,x) + 6 & \text{se } x > 0, \\ 5\,x + 6 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$
Si noti che non abbiamo dovuto imporre condizioni su A.

b) Affinché la funzione sia derivabile in $x = 0$ è necessario che sia continua (e quindi $B = 6$). Inoltre, sempre a causa del fatto che $f(x)$ ha due definizioni diverse a destra e a sinistra di 0, è necessario calcolare il limite del rapporto incrementale da destra e da sinistra (imponendo che siano uguali e finiti). Si ha
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(A\,h) + 6 - 6}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(A\,h)}{h} = A\,.$$
Inoltre,
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5\,h + 6 - 6}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5\,h}{h} = 5\,.$$
Si ha dunque che scegliendo $A = 5$ esiste (ed è finito) il limite del rapporto incrementale nell'origine. Si ha dunque che è derivabile nell'origine la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \sin(5\,x) + 6 & \text{se } x > 0, \\ 5\,x + 6 & \text{se } x \le 0, \end{cases}$$
per la quale si ha

(1)
$$f'(x) = \begin{cases} 5\,\cos(5\,x) & \text{se } x > 0, \\ 5 & \text{se } x \le 0, \end{cases}$$

c) Per dimostrare che esiste $f''(0)$ dobbiamo dimostrare che esiste finito il limite del rapporto incrementale di $f'(x)$ nell'origine (e, come prima, dovremo calcolare il limite da destra e il limite da sinistra). Usando la (1) si ha (per uno dei limiti notevoli)
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{5\,\cos(5\,h) - 5}{h} = \lim_{h\to 0^+} 5\,\frac{\cos(5\,h) - 1}{h} = 0\,,$$
e
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5 - 5}{h} = 0\,.$$
Dato che i due limiti sono uguali, esiste $f''(0)$ e si ha $f''(0) = 0$.

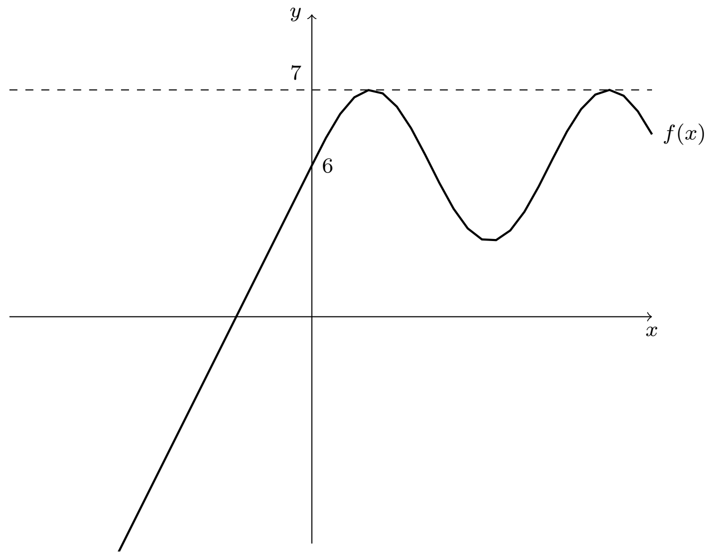
d) Su $(-\infty, 0]$ si ha $f'(x) = 5 > 0$, da cui segue che la funzione è strettamente crescente su tale intervallo. Pertanto, se $x \leq 0$, si ha

$$x \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(0) = 6 \leq 7\,.$$

Se $x > 0$ si ha invece $f(x) = \sin(5\,x) + 6$; dato che $\sin(5\,x) \leq 1$ per ogni x, si ha

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq 1 + 6 = 7\,.$$

Dalle precedenti disuguaglianze si ricava che $f(x) \leq 7$ per ogni x in $\mathbb{R}$.



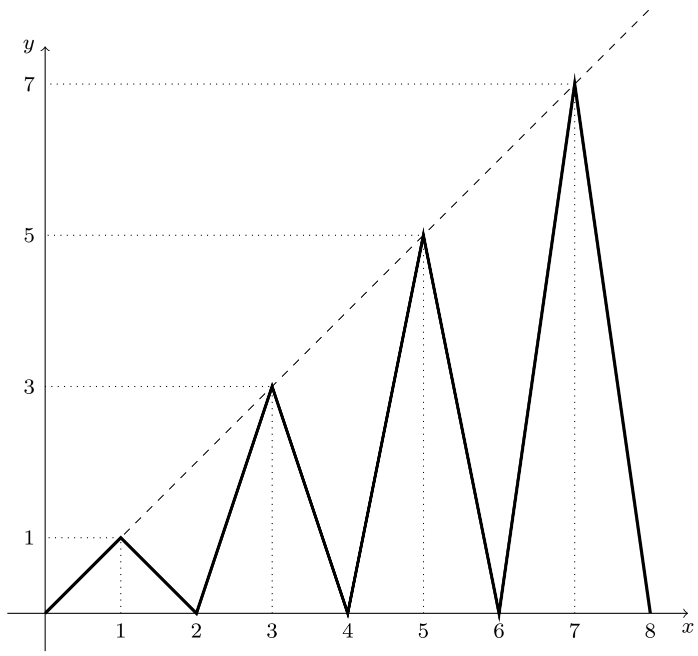
Disegno non in scala

6) Sia per k in $\{0,1,2,3\}$,

$$f(x) = \begin{cases} (2k+1)\,(x-2k) & \text{su } [2k, 2k+1], \\ (2k+1)\,(2(k+1)-x) & \text{su } (2k+1, 2\,(k+1)). \end{cases}$$

a) Dimostrare che $f(x)$ è continua su $[0,8)$.
b) La funzione $f(x)$ è crescente su $[2,3]$? E su $[2,4)$?
c) Dimostrare che $0 \le f(x) \le x$ per ogni x in $[0,8)$.
d) Determinare tutti i punti di $[0,8)$ in cui $f(x)$ non è derivabile.
[Si consiglia di provare a disegnare la funzione prima di rispondere alle domande. . .]

Soluzione:
Il grafico della funzione $f(x)$ è il seguente:



Dal grafico si deducono rapidamente le risposte a tutte e quattro le domande, alle quali — però — risponderemo più sotto usando l'espressione "esplicita" della funzione.

a) Gli unici punti in cui $f(x)$ può essere discontinua sono gli estremi degli intervalli: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 (8 no, perché la funzione non è definita in 8). Iniziamo con i valori dispari: 1, 3, 5 e 7, che sono della forma $x = 2k+1$. Per tali valori si ha

$$\lim_{x\to(2k+1)^-} f(x) = \lim_{x\to(2k+1)^-} [(2k+1)\,(x-2k)] = 2k+1\,,$$

e

$$\lim_{x\to(2k+1)^+} f(x) = \lim_{x\to(2k+1)^+} [(2k+1)\,(2(k+1)-x)] = 2k+1\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali, si ha

$$\lim_{x\to\ \text{dispari}} f(x) = \text{dispari} = f(\text{dispari})\,,$$

e quindi la funzione è continua in questi punti. Nei punti pari (2, 4 e 6) si ha, scrivendo tali punti come $x = 2(k+1)$,

$$\lim_{x\to(2(k+1))^-} f(x) = \lim_{x\to(2(k+1))^-} [(2k+1)\,(2(k+1)-x)] = 0\,,$$

e, scrivendo tali punti come $2k$,

$$\lim_{x\to(2k)^+} f(x) = \lim_{x\to(2k)^+} [(2k+1)\,(x-2k)] = 0\,.$$

Pertanto si ha
$$\lim_{x\to \text{ pari}} f(x) = 0 = f(\text{pari})\,,$$
e quindi la funzione è continua anche in questi punti.

b) Sull'intervallo $[2,3]$ la funzione vale $f(x) = 3\,(x-2)$ ed è quindi crescente. Sull'intervallo $[2,4]$, invece, la funzione non è né crescente né decrescente, dato che cresce sulla prima metà dell'intervallo (per quanto detto prima) e decresce nella seconda metà, essendo uguale a $3\,(4-x)$.

c) Dalla definizione di $f(x)$ segue facilmente che $f(x) \geq 0$ per ogni x in $[0,8)$ dato che $x \mapsto (2k+1)\,(x-2k)$ è positiva se x è in $[2k, 2k+1]$, così come è positiva $x \mapsto (2k+1)\,(2(k+1)-x)$ se x appartiene a $(2k+1, 2(k+1))$. Per l'altra disuguaglianza, osserviamo che se x appartiene a $[2k, 2k+1]$ si ha
$$x - f(x) = x - (2k+1)\,(x-2k) = 2k\,(2k+1) - 2k\,x = 2k\,(2k+1-x) \geq 0\,,$$
mentre se x appartiene a $(2k+1, 2(k+1))$ si ha
$$x - f(x) = x - (2k+1)\,(2(k+1)-x) = (2k+2)\,x - (2k+1)\,(2k+2) = (2k+2)\,(x-(2k+1)) \geq 0\,.$$
In definitiva, si ha sempre $x - f(x) \geq 0$, e quindi $f(x) \leq x$.

d) Gli unici punti in cui $f(x)$ può essere non derivabile sono gli estremi degli intervalli: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 (non 0, dove esiste la derivata destra, non 8, perché la funzione non è definita). Si vede abbastanza facilmente che i rapporti incrementali di $f(x)$ negli estremi degli intervalli sono costanti e diversi da sinistra e da destra; ad esempio,
$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \begin{cases} \frac{3\,(1-h)-3}{h} = -3 & \text{se } h > 0, \\ \frac{3\,(h+1)-3}{h} = 3 & \text{se } h < 0\,, \end{cases}$$
e
$$\frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \begin{cases} \frac{7\,h-0}{h} = 7 & \text{se } h > 0, \\ \frac{5\,(-h)-0}{h} = -5 & \text{se } h < 0\,, \end{cases}$$
cosicché il limite del rapporto incrementale non esiste in tali punti, e quindi la funzione non è derivabile.