Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero
6 Novembre 2023 — Compito n. 00034

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-4| \leq 7\}\,.$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.
1B) L'insieme E è limitato.
1C) Esiste il massimo di E.
1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di F.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x-6|)$ è $\{x \neq 6\}$.
2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-5}{x^2-4}$ è $\{x \neq 2\}$.
2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{9}{x^2} - 1}$ è $[-3,3] \setminus \{0\}$.
2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[3]{x^2-9}$ è $\{|x| \geq 3\}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^9}{8^n} = 0\,.$$
3B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n + n^2}{6^n + n!} = +\infty\,.$$
3C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n + 7^n} = +\infty\,.$$
3D)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^7} = \mathrm{e}^6\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$\lim_{n\to+\infty} n^9 \sin\left(\frac{7}{n^9}\right) = 7\,.$$
4B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{4}{81}\,.$$
4C)
$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^5)\,\sin\left(\frac{2}{n^5}\right) = 0\,.$$
4D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{5^n}\left[\arctan\left(\frac{11^n}{n!}\right)\right]^2 = +\infty\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00034**

5) Siano

$$a_n = \frac{3\,n+8}{3\,n+2}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2 + 16x - 60)\,.$$

a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

□□□□□□□□	**Cognome**	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00034**

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}[\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}]\,,\qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+2^n}{5^n+n^3}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^6+5}\right)^{n^6}\,,\qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{4}{n}\right)}\,.$$

Soluzioni del compito 00034

1) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \le 7\}\,.$$

Risolvendo la disequazione, si ha
$$|x-4| \le 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -7 \le x - 4 \le 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3 \le x \le 11\,,$$
e quindi

(1) $$E = \{x \in \mathbb{R} : -3 \le x \le 11\} = [-3, 11]\,.$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Dalla (1) segue che E è un intervallo.

1B) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che E è limitato.

1C) Esiste il massimo di E.

Vero: Dalla (1) segue che l'estremo superiore di E è $S = 11$. Dato che S appartiene ad E, S è il massimo di E.

1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di F.

Falso: Dalla (1) segue che
$$F = E \cap (-\infty, 0) = [-3, 11] \cap (-\infty, 0) = [-3, 0)\,.$$
Si ha pertanto che l'estremo superiore di F è $S = 0$. Dato che S non appartiene ad F, non esiste il massimo di F.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x-6|)$ è $\{x \neq 6\}$.

Vero: Ricordando che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi, la funzione $f(x)$ è definita per ogni x reale tale che $|x-6| > 0$; dato che tale disuguaglianza è verificata per ogni $x \neq 6$, il dominio di $f(x)$ è

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \neq 6\}\,.$$

2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-5}{x^2-4}$ è $\{x \neq 2\}$.

Falso: La funzione è definita per ogni x che non annulla il denominatore della frazione. Dato che $x^2 - 4 = 0$ se e solo se $x = \pm 2$, si ha

$$\mathrm{dom}(g) = \{x \neq \pm 2\} \neq \{x \neq 2\}\,.$$

2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{9}{x^2} - 1}$ è $[-3, 3] \setminus \{0\}$.

Vero: Affinché la funzione sia definita, deve essere definito, e positivo, l'argomento della radice quadrata, che è la funzione

$$h_1(x) = \frac{9}{x^2} - 1\,.$$

Chiaramente $h_1(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, mentre si ha (dato che $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$)

$$h_1(x) \geq 0 \quad \iff \quad \frac{9}{x^2} \geq 1 \quad \iff \quad 9 \geq x^2 \quad \iff \quad -3 \leq x \leq 3\,.$$

Pertanto, $h_1(x)$ è definita e positiva nell'insieme $[-3, 3] \setminus \{0\}$, e quindi

$$\mathrm{dom}(h) = [-3, 3] \setminus \{0\}\,.$$

2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ è $\{|x| \geq 3\}$.

Falso: Dato che le radici è di ordine dispari sono definite su tutto $\mathbb{R}$, e dato che la funzione $k_1(x) = x^2 - 9$ è definita per ogni x reale, si ha

$$\mathrm{dom}(k) = \mathbb{R} \neq \{|x| \geq 3\}\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^9}{8^n} = 0\,.$$

Vero: Per la gerarchia degli infiniti (per la quale gli esponenziali “battono” le potenze di n all'infinito) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^9}{8^n} = 0\,.$$

3B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n + n^2}{6^n + n!} = +\infty\,.$$

Falso: Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore i termini che divergono più velocemente, si ha

$$\frac{10^n + n^2}{6^n + n!} = \frac{10^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^2}{10^n}}{1 + \frac{6^n}{n!}}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{10^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{n!} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n + n^2}{6^n + n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^2}{10^n}}{1 + \frac{6^n}{n!}} = 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0 \neq +\infty\,.$$

3C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n + 7^n} = +\infty\,.$$

Vero: Si ha

$$\frac{n!}{2^n + 7^n} = \frac{n!}{7^n}\,\frac{1}{1 + \frac{2^n}{7^n}} = \frac{n!}{7^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{2}{7}\right)^n}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{7^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n + 7^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{7^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{2}{7}\right)^n} = (+\infty) \cdot \frac{1}{1+0} = +\infty\,.$$

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^7} = \mathrm{e}^6\,.$$

Falso: Si ha

$$\left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^7} = \left[\left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^{12}}\right]^{\frac{n^7}{n^{12}}} = \left[\left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^{12}}\right]^{\frac{1}{n^5}}\,.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^{12}} = \mathrm{e}^6\,,$$

e che $\frac{1}{n^5}$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^7} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{6}{n^{12}}\right)^{n^{12}}\right]^{\frac{1}{n^5}} = [\mathrm{e}^6]^0 = 1 \neq \mathrm{e}^6\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\lim_{n\to+\infty} n^9 \sin\left(\frac{7}{n^9}\right) = 7\,.$$

Vero: Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

si ha, ponendo $a_n = 7/n^9$,

$$n^9 \sin\left(\frac{7}{n^9}\right) = 7\,\frac{n^9}{7}\,\sin\left(\frac{7}{n^9}\right) = 7\,\frac{\sin\left(\frac{7}{n^9}\right)}{\frac{7}{n^9}}\,,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^9 \sin\left(\frac{7}{n^9}\right) = \lim_{n\to+\infty} 7\,\frac{\sin\left(\frac{7}{n^9}\right)}{\frac{7}{n^9}} = 7\cdot 1 = 7\,.$$

4B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{4}{81}\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n tende a zero allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}\,,$$

si ha

$$\frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{\left(\frac{9}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{9}{n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{4}{81}\,\frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{9}{n}}{\sin\left(\frac{9}{n}\right)}\right)^2,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{81}\,\frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{9}{n}}{\sin\left(\frac{9}{n}\right)}\right)^2 = \frac{4}{81}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{2}{81} \neq \frac{4}{81}\,.$$

4C)

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^5)\,\sin\left(\frac{2}{n^5}\right) = 0\,.$$

Vero: La successione $\sin(n^5)$ è limitata, mentre, dato che $2/n^5$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{2}{n^5}\right) = 0\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^5)\,\sin\left(\frac{2}{n^5}\right) = 0\,,$$

dato che si tratta del prodotto tra una successione limitata ed una che tende a zero.

4D)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{5^n}\left[\arctan\left(\frac{11^n}{n!}\right)\right]^2 = +\infty\,.$$

Falso: Dato che $11^n/n!$ tende a zero, si ha

$$\arctan\left(\frac{11^n}{n!}\right) \approx \frac{11^n}{n!}\,.$$

Pertanto

$$\frac{n!}{5^n}\left[\arctan\left(\frac{11^n}{n!}\right)\right]^2 \approx \frac{n!}{5^n}\left[\frac{11^n}{n!}\right]^2 = \frac{n!}{5^n}\,\frac{121^n}{(n!)^2} = \frac{\left(\frac{121}{5}\right)^n}{n!}\,.$$

Ricordando la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{5^n}\left[\arctan\left(\frac{11^n}{n!}\right)\right]^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{121}{5}\right)^n}{n!} = 0 \neq +\infty\,.$$

5) Siano

$$a_n = \frac{3\,n+8}{3\,n+2}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2+16x-60)\,.$$

a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

Soluzione:
a) Si ha

$$a_{n+1} \le a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3\,(n+1)+8}{3\,(n+1)+2} \le \frac{3\,n+8}{3\,n+2}$$

che è equivalente a

$$(3\,(n+1)+8)\,(3\,n+2) \le (3\,n+8)\,(3\,(n+1)+2)\,.$$

Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere

$$9\,n\,(n+1)+6\,(n+1)+24\,n+16 \le 9\,n\,(n+1)+6\,n+24\,(n+1)+16\,,$$

e quindi, semplificando i termini uguali ed espandendo i rimanenti,

$$6\,n+6+24\,n \le 6\,n+24\,n+24 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6 \le 24\,,$$

che è vero. La successione a_n è quindi monotona decrescente.
Analogamente, si poteva osservare che

$$\begin{aligned} a_n = \frac{3\,n+8}{3\,n+2} &= \frac{3\,n+2+8-2}{3\,n+2} = 1 + \frac{6}{3\,n+2} \\ &\ge 1 + \frac{6}{3\,(n+1)+2} = \frac{3\,(n+1)+2+8-2}{3\,(n+1)+2} \\ &= \frac{3\,(n+1)+8}{3\,(n+1)+2} = a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

b) Dato che la successione a_n è monotona decrescente, si ha

$$\sup(E) = \max(E) = a_0 = 4\,, \qquad \inf(E) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{3} = 1\,,$$

dato che a_n è definita dal rapporto di due polinomi di primo grado. L'estremo inferiore non è un minimo dato che non esiste n in $\mathbb{N}$ tale che $a_n = 1$. Infatti

$$a_n = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3\,n+8}{3\,n+2} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3\,n+8 = 3\,n+2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 8 = 2\,,$$

che è falso.

c) Il logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; dato che

$$-x^2+16x-60 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-16x+60 < 0\,,$$

si tratta di risolvere quest'ultima disequazione. Si ha $x^2-16x+60 = 0$ per $x = 6$ e per $x = 10$, e quindi

$$x^2-16x+60 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6 < x < 10\,,$$

da cui segue che

$$\mathrm{dom}(f) = (6, 10)\,.$$

d) Dato che $\mathrm{dom}(f) = (6, 10)$, si ha

$$\sup(\mathrm{dom}(f)) = 10\,, \qquad \inf(\mathrm{dom}(f)) = 6\,,$$

che non sono, rispettivamente, né massimo (dato che 10 non appartiene all'insieme), né minimo (dato che 6 non appartiene all'insieme).

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}[\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}]\,,\qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+2^n}{5^n+n^3}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^6+5}\right)^{n^6},\qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{3}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{4}{n}\right)}\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, razionalizzando,

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})\,(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=\frac{n+2-(n-2)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}\,,$$

cosicché (semplificando)

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}=\frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}\,.$$

Pertanto (dato che il denominatore diverge)

$$\lim_{n\to+\infty}[\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}]=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=0\,.$$

b) Ricordando la gerarchia degli infiniti, mettiamo in evidenza $n!$ al numeratore e 5^n al denominatore. Si ha

$$\frac{n!+2^n}{5^n+n^3}=\frac{n!}{5^n}\,\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{n^3}{5^n}}\,.$$

Dato che (sempre per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{5^n}=+\infty\,,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0\,,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{5^n}=0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+2^n}{5^n+n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{5^n}\,\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{n^3}{5^n}}=(+\infty)\cdot\frac{1+0}{1+0}=+\infty\,.$$

c) Ricordando che se a_n è una successione divergente a più infinito, e se A è un numero reale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{A}{a_n}\right)^{a_n}=e^A\,,$$

riscriviamo la successione come segue:

$$\left(1+\frac{2}{n^6+5}\right)^{n^6}=\left[\left(1+\frac{2}{n^6+5}\right)^{n^6+5}\right]^{\frac{n^6}{n^6+5}}\,.$$

Dato che, trattandosi del rapporto tra due polinomi dello stesso grado, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^6}{n^6+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot n^6}{1\cdot n^6+5}=\frac{1}{1}=1\,,$$

ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^6+5}\right)^{n^6}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n^6+5}\right)^{n^6+5}\right]^{\frac{n^6}{n^6+5}}=[e^2]^1=e^2\,.$$

d) Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=1\,,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\tan(a_n)}{a_n}=1\,,$$

scriviamo

$$\frac{e^{\frac{3}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{4}{n}\right)}=\frac{e^{\frac{3}{n^2}}-1}{\frac{3}{n^2}}\,\frac{\frac{3}{n^2}}{\left(\frac{4}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{4}{n}\right)^2}{\tan^2\left(\frac{4}{n}\right)}=\frac{3}{16}\,\frac{e^{\frac{3}{n^2}}-1}{\frac{3}{n^2}}\left(\frac{\frac{4}{n}}{\tan\left(\frac{4}{n}\right)}\right)^2\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{4}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{16}\, \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{n^2}}-1}{\frac{3}{n^2}} \left(\frac{\frac{4}{n}}{\tan\left(\frac{4}{n}\right)}\right)^2 = \frac{3}{16}\cdot 1\cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{3}{16}\,.$$