Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 5
20 Novembre 2023 — Compito n. 00016

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(9\,x)}{6\,x} = \frac{3}{2}\,.$$

1B)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{x+6} = -\infty\,.$$

1C)
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\tan(4\,x)}{5\,x} = \lim_{x\to0^-} \frac{5\,x}{\log(1+4\,x)}$$

1D)
$$\lim_{x\to0} x^7 \sin\left(\frac{9}{x}\right) = 0\,.$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)
$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}} - 7\,\sqrt{x}] = \frac{3}{7}\,.$$

2B)
$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^x = \mathrm{e}^7\,.$$

2C)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17\,x)}{x-\frac{\pi}{2}} = -17\,.$$

2D)
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{-9/x}}{x^8} = 0\,.$$

3) Sia
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+8\,x^2)}{x} & \text{se } x>0, \\ \cos(8\,x) & \text{se } x\le 0. \end{cases}$$

3A) Il dominio della funzione $f(x)$ non è tutto $\mathbb{R}$.
3B) La funzione $f(x)$ non è continua in 7.
3C) La funzione $f(x)$ è continua in -3.
3D) La funzione $f(x)$ non è continua in 0.

4) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 7\,x+3 & \text{se } x\ge0, \\ \frac{\sin(3\,x)}{x} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

4A) La funzione $f(x)$ non è continua in 3.
4B) La funzione $f(x)$ non è continua in -9.
4C) La funzione $f(x)$ è continua in 0.
4D) La funzione $f(x)$ non ha massimo e minimo su $[-9,3]$.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00016**

---

5) Sia

$$f(x) = x^{12}\,\mathrm{e}^{x} - 4\,.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$

b) Dimostrare che esiste $0 < x_0 < 4$ tale che $f(x_0) = 0$.

c) Dimostrare che $f(-12) > 0$.

d) Dimostrare che esiste $x_1 < -12$ tale che $f(x_1) = 0$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00016**

---

6) Sia
$$f(x) = \mathrm{e}^{4\,x} - (x^2 - 14x + 45)\,.$$
a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$
b) Dimostrare che $f(x)$ ha massimo e minimo su $[5, 9]$.

c) Dimostrare che esiste x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

d) Dimostrare che per ogni t in $\mathbb{R}$ esiste x_t in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_t) = t$.

Soluzioni del compito 00016

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(9\,x)}{6\,x} = \frac{3}{2}\,.$$

Falso: Si tratta del prodotto di una funzione limitata ($\sin(9\,x)$) e di una infinitesima ($\frac{1}{6\,x}$). Il limite vale, pertanto, zero.

1B)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{x+6} = -\infty\,.$$

Vero: Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} [x^2+2x] = +\infty\,,$$

perché è un polinomio di secondo grado (pari), e

$$\lim_{x\to-\infty} [x+6] = -\infty\,.$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore, e che la frazione è negativa (per x sufficientemente negativo) si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{x+6} = -\infty\,.$$

Alternativamente, si poteva mettere in evidenza x^2 al numeratore e x al denominatore, e semplificare:

$$\frac{x^2+2x}{x+6} = \frac{x^2}{x}\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{6}{x}} = x\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{6}{x}}\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{x+6} = \lim_{x\to-\infty} x\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{6}{x}} = (-\infty)\cdot\frac{1+0}{1+0} = -\infty\,.$$

1C)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\tan(4\,x)}{5\,x} = \lim_{x\to0^-} \frac{5\,x}{\log(1+4\,x)}$$

Falso: Dato che $\tan(4\,x) \approx 4\,x$ e che $\log(1+4\,x) \approx 4\,x$ per x tendente a zero, si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\tan(4\,x)}{5\,x} = \lim_{x\to0^+} \frac{4\,x}{5\,x} = \frac{4}{5}\,,$$

e

$$\lim_{x\to0^-} \frac{5\,x}{\log(1+4\,x)} = \lim_{x\to0^-} \frac{5\,x}{4\,x} = \frac{5}{4}\,,$$

e quindi i due limiti sono diversi.

1D)

$$\lim_{x\to0} x^7\,\sin\left(\frac{9}{x}\right) = 0\,.$$

Vero: Si tratta del prodotto tra una funzione limitata ed una infinitesima. Il limite, pertanto, vale zero.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}-7\,\sqrt{x}] = \frac{3}{7}\,.$$

Vero: Razionalizzando "al contrario" si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}-7\,\sqrt{x} &= \frac{[\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}-7\,\sqrt{x}]\,[\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}+7\,\sqrt{x}]}{\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}+7\,\sqrt{x}} \\ &= \frac{49\,x+6\,\sqrt{x}-49\,x}{\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}+7\,\sqrt{x}} = \frac{6\,\sqrt{x}}{\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}+7\,\sqrt{x}}\,.\end{aligned}$$

Pertanto, mettendo in evidenza $7\,\sqrt{x}$ al denominatore, si ha

$$\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}-7\,\sqrt{x} = \frac{6\,\sqrt{x}}{7\,\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{6/49}{\sqrt{x}}}+1\right]} = \frac{6}{7}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{6/49}{\sqrt{x}}}+1}\,.$$

Dato che $\frac{6/49}{\sqrt{x}}$ tende a zero quando x tende a più infinito, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{49\,x+6\,\sqrt{x}}-7\,\sqrt{x}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{7}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{6/49}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{6}{7}\,\frac{1}{1+1} = \frac{3}{7}\,.$$

2B)

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}^{7}\,.$$

Vero: Si ha, con il cambio di variabile $y=-x$,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{7}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{(1-\frac{7}{y})^{y}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-7}} = \mathrm{e}^{7}\,.$$

2C)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17\,x)}{x-\frac{\pi}{2}} = -17\,.$$

Vero: Si ha, con il cambio di variabile $y = x-\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17\,x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to0} \frac{\cos(17\,y+17\,\pi/2)}{y}\,.$$

Ricordando le formule di addizione degli archi, si ha

$$\cos(17\,y+17\,\pi/2) = \cos(17\,y)\,\cos(17\,\pi/2)-\sin(17\,y)\,\sin(17\,\pi/2) = -\sin(17\,y)\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17\,x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to0} -\frac{\sin(17\,y)}{y} = -17\,.$$

2D)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{-9/x}}{x^8} = 0\,.$$

Vero: Si ha, con il cambio di variabile $y=\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{-9/x}}{x^8} = \lim_{y\to+\infty} y^8\,\mathrm{e}^{-9\,y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^8}{\mathrm{e}^{9\,y}} = 0\,,$$

dato che $\mathrm{e}^{9\,y} \gg y^9$.

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+8\,x^2)}{x} & \text{se } x > 0, \\ \cos(8\,x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

3A) Il dominio della funzione $f(x)$ non è tutto $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che $1 + 8\,x^2 > 1$ per ogni $x > 0$, l'argomento della funzione logaritmo è sempre positivo (e quindi il logaritmo può essere calcolato); inoltre, se $x > 0$ si ha $x \neq 0$, e quindi è possibile dividere per x. Se $x \leq 0$, invece, $\cos(8\,x)$ è definita.

3B) La funzione $f(x)$ non è continua in 7.

Falso: In un intorno di $7 > 0$ si ha $f(x) = \frac{\log(1+8\,x^2)}{x}$, che è una funzione continua essendo il rapporto di funzioni continue (con il denominatore diverso da zero).

3C) La funzione $f(x)$ è continua in -3.

Vero: In un intorno di $-3 < 0$ si ha $f(x) = \cos(8\,x)$, che è una funzione continua.

3D) La funzione $f(x)$ non è continua in 0.

Vero: Si ha, ricordando che $\log(1 + 8\,x^2) \approx 8\,x^2$ quando x tende a zero,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+8\,x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{8\,x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} 8\,x = 0\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(8\,x) = 1\,.$$

Dato che i due limiti sono diversi, non esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a zero (e quindi $f(x)$ non è continua in 0.

---

4) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 7\,x + 3 & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(3\,x)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

4A) La funzione $f(x)$ non è continua in 3.

Falso: In un intorno di $3 > 0$ si ha $f(x) = 7\,x + 3$, che è una funzione continua essendo un polinomio di primo grado.

4B) La funzione $f(x)$ non è continua in -9.

Falso: In un intorno di $-9 < 0$ si ha $f(x) = \frac{\sin(3\,x)}{x}$, che è una funzione continua essendo il rapporto di funzioni continue (con il denominatore diverso da zero).

4C) La funzione $f(x)$ è continua in 0.

Vero: Si ha, ricordando che $\sin(3\,x) \approx 3\,x$ quando x tende a zero,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(3\,x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3\,x}{x} = 3\,,$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [7\,x + 3] = 3 = f(0)\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali, esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a zero, e vale 3. Dato che tale limite è uguale a $f(0)$, la funzione è continua in 0.

4D) La funzione $f(x)$ non ha massimo e minimo su $[-9, 3]$.

Falso: La funzione $f(x)$ è continua su $[-9, 0)$ (come rapporto di funzioni continue con il denominatore diverso da zero), è continua in $(0, 3]$ (essendo un polinomio di primo grado), ed è continua in 0 (per l'esercizio **4C)**. Pertanto è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[-9, 3]$ e quindi ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

---

5) Sia
$$f(x) = x^{12}\,\mathrm{e}^x - 4\,.$$
a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$
b) Dimostrare che esiste $0 < x_0 < 4$ tale che $f(x_0) = 0$.
c) Dimostrare che $f(-12) > 0$.
d) Dimostrare che esiste $x_1 < -12$ tale che $f(x_1) = 0$.

Soluzione:
a) Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [x^{12}\,\mathrm{e}^x - 4] = (+\infty)\cdot(+\infty) - 4 = +\infty\,.$$
Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x^{12}\,\mathrm{e}^x - 4] = [\lim_{x\to-\infty} x^{12}\,\mathrm{e}^x] - 4\,,$$
e quindi si tratta di calcolare
$$\lim_{x\to-\infty} x^{12}\,\mathrm{e}^x\,.$$
Ponendo $y = -x$ si ha
$$\lim_{x\to-\infty} x^{12}\,\mathrm{e}^x = \lim_{y\to+\infty} (-y)^{12}\,\mathrm{e}^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{12}}{\mathrm{e}^y} = 0\,,$$
dato che e^y ᗧ y^{12}. Pertanto,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -4\,.$$
b) Si ha $f(0) = -4 > 0$ e
$$f(4) = 4^{12}\,\mathrm{e}^4 - 4 > 4^{12} - 4 > 4 - 4 = 0\,.$$
Dato che la funzione $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$, applicando il teorema di esistenza degli zeri all'intervallo $[0,4]$, si ha che esiste x_0 in $(0,4)$ tale che $f(x_0) = 0$.

c) Si ha
$$f(-12) = (-12)^{12}\,\mathrm{e}^{-12} - 4 = 12^{12}\,\mathrm{e}^{12} - 4 = \left(\frac{12}{\mathrm{e}}\right)^{12} - 4\,.$$
Ricordando che $\mathrm{e} < 3$ si ha
$$\left(\frac{12}{\mathrm{e}}\right)^{12} > \left(\frac{12}{3}\right)^{12} = 4^{12} > 4\,,$$
e quindi $f(-12) > 0$.

d) Già sappiamo, dall'esercizio precedente, che $f(-12) > 0$. Dall'esercizio **a)** sappiamo che $f(x)$ tende a -4 quando x tende a meno infinito. Quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste $x_- < 0$ tale che $f(x) \le -2 < 0$ per ogni $x \le x_-$. Scegliendo $x_- < -12$, abbiamo così costruito l'intervallo $[x_-, -12]$ sul quale la funzione è continua ed è tale che $f(x_-) < 0 < f(-12)$. Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste x_1 in $[x_-, -12]$ tale che $f(x_1) = 0$.

6) Sia
$$f(x) = \mathrm{e}^{4\,x} - (x^2 - 14x + 45)\,.$$
a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$
b) Dimostrare che $f(x)$ ha massimo e minimo su $[5,9]$.
c) Dimostrare che esiste x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
d) Dimostrare che per ogni t in $\mathbb{R}$ esiste x_t in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_t) = t$.

Soluzione:
a) Si ha, ricordando che $\mathrm{e}^{4\,x} \gg x^k$ per ogni $k > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [\mathrm{e}^{4\,x} - (x^2 - 14x + 45)] = +\infty\,.$$
Ricordando poi che $\mathrm{e}^{4\,x}$ tende a zero per x tendente a meno infinito, mentre $x^2 - 14x + 45$ tende a più infinito, si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [\mathrm{e}^{4\,x} - (x^2 - 14x + 45)] = 0 - (+\infty) = -\infty\,.$$

b) La funzione $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto lo è sull'intervallo chiuso e limitato $[5,9]$. Per il teorema di Weierstrass, esistono massimo e minimo di $f(x)$ su tale intervallo.

c) Dai risultati del punto **a)** sappiamo che $f(x)$ diverge positivamente a più infinito, e quindi esiste $x_+ > 0$ tale che $f(x_+) > 0$. Dato che $f(x)$ diverge negativamente a meno infinito, esiste $x_- < 0$ tale che $f(x_-) < 0$. Ma allora la funzione continua $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri sull'intervallo chiuso e limitato $[x_-, x_+]$, e quindi esiste x_0 in tale intervallo per il quale si ha $f(x_0) = 0$.

d) Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - t$; la funzione $g(x)$ è continua (come differenza tra una funzione continua ed una costante), ed è tale che
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty\,,$$
dato che la sottrazione di t non cambia i limiti. In poche parole, la funzione $g(x)$ ha le stesse proprietà della funzione $f(x)$. Ripetendo lo stesso ragionamento del punto **c)**, si dimostra che esiste x_t in $\mathbb{R}$ tale che $g(x_t) = 0$. Ma allora
$$0 = g(x_t) = f(x_t) - t \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_t) = t\,,$$
come volevasi dimostrare.