Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero
25 Dicembre 2023 — Compito n. 00094

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5\,x)}{1-\cos(3\,x)} = \frac{25}{18}\,.$$

1B)
$$\lim_{x\to 3} \frac{\log(x-2)}{\tan(6\,(x-3))} = \frac{1}{6}\,.$$

1C)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x\,x^2}{6\,x^3+2^x} = +\infty\,.$$

1D)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+e^{-6\,x}\right)^{e^{12\,x}} = 1\,.$$

2) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 7\,x^2 + x\,(e^{5\,x}-1) & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{\sin(7\,x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ è continua in $x=0$.
2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x=0$.
2C) Esiste $\xi < 0$ tale che $f'(\xi) = 0$.
2D) Non esiste $0 < \xi < 1$ tale che $f'(\xi) = e^5 + 6$.

3) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 2\,x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 9 - 5\,x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

3A) La funzione $f(x)$ è crescente su $(0,+\infty)$.
3B) La funzione $f(x)$ è decrescente su $(-\infty,0)$.
3C) La funzione $f(x)$ non è crescente su $\mathbb{R}$.
3D) Si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$T_3(\sin(4\,x);0) = 4\,x + \frac{32}{3}\,x^3\,.$$

4B)
$$T_3(x^2\,(e^{5\,x}-1);0) = 5\,x^3\,.$$

4C)
$$\frac{1-\cos(4\,x^2)}{x^2} = -8\,x^2 + o(x^2)\,.$$

4D)
$$e^{8\,x} - 1 - \sin(8\,x) = 8\,x + o(x)\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00094**

5) Sia

$$f(x) = \frac{(x^2+2)\,(x+6)}{x-6}\,.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$

b) Calcolare

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 6^-} f(x)\,.$$

c) Dimostrare che esiste il minimo di $f(x)$ su $(6,+\infty)$.

d) Dimostrare che $f((-\infty,6)) = \mathbb{R}$.

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00094**

6) Sia

$$f(x) = (x^2 - 2x - 23)\, \mathrm{e}^x .$$

a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.
b) Calcolare $T_2(x; 0)$.
c) Determinare i punti stazionari di $f(x)$ su $\mathbb{R}$, studiandone la natura.
d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ sull'intervallo $[4, 6]$.

Soluzioni del compito 00094

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5\,x)}{1-\cos(3\,x)} = \frac{25}{18}\,.$$

Falso: Ricordando che quando t tende a zero si ha $\sin(t) \approx t$, e $1-\cos(t) \approx t^2/2$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5\,x)}{1-\cos(3\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(5\,x)^2}{(3\,x)^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 5^2}{3^2} = \frac{50}{9} \neq \frac{25}{18}\,.$$

1B)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\log(x-2)}{\tan(6\,(x-3))} = \frac{1}{6}\,.$$

Vero: Scriviamo $\log(x-2) = \log(1+(x-3))$. Pertanto, ricordando che quando t tende a zero si ha $\log(1+t) \approx t$ e $\tan(t) \approx t$, si ha

$$\lim_{x\to 3} \frac{\log(x-2)}{\tan(6\,(x-3))} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{6\,(x-3)} = \frac{1}{6}\,.$$

1C)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x\,x^2}{6\,x^3+2^x} = +\infty\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -\infty} 2^x = 0\,,$$

e che $x^3 \gg x^2$ quando x tende a $-\infty$, si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x\,x^2}{6\,x^3+2^x} = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x\,\frac{x^2}{x^3}\,\frac{1}{6+\frac{2^x}{x^3}} = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{6+\frac{2^x}{x^3}} = 0\cdot 0\cdot \frac{1}{6+0} = 0 \neq +\infty\,.$$

1D)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\mathrm{e}^{-6\,x}\right)^{\mathrm{e}^{12\,x}} = 1\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\lim_{t\to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e}\,,$$

e che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{12\,x}}{\mathrm{e}^{6\,x}} = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{6\,x} = +\infty\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to +\infty} (1+\mathrm{e}^{-6\,x})^{\mathrm{e}^{12\,x}} = \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{6\,x}}\right)^{\mathrm{e}^{12\,x}} = \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{6\,x}}\right)^{\mathrm{e}^{6\,x}}\right]^{\frac{\mathrm{e}^{12\,x}}{\mathrm{e}^{6\,x}}} = [\mathrm{e}]^{+\infty} = +\infty \neq 1\,.$$

---

2) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 7\,x^2 + x\,(\mathrm{e}^{5\,x} - 1) & \text{se } x \ge 0, \\ \dfrac{\sin(7\,x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ è continua in $x = 0$.

Vero: Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [7\,x^2 + x\,(\mathrm{e}^{5\,x} - 1)] = 0 + 0\cdot 0 = 0\,,$$
e
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(7\,x^3)}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^2\,\frac{\sin(7\,x^3)}{x^3} = 0\cdot 7 = 0\,.$$
Dato che i due limiti sono uguali, esiste
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)\,,$$
e quindi la funzione è continua in $x = 0$.

2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$.

Falso: Si ha
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{7\,h^2 + h\,(\mathrm{e}^{5\,h} - 1) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} [7\,h + \mathrm{e}^{5\,h} - 1] = 0 + 0 = 0\,,$$
e
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\sin(7\,h^3)}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(7\,h^3)}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} h\,\frac{\sin(7\,h^3)}{h^3} = 0\cdot 7 = 0\,.$$
Dato che i due limiti sono uguali (e finiti) la funzione $f(x)$ è derivabile in $x = 0$, e si ha $f'(0) = 0$.

2C) Esiste $\xi < 0$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Vero: Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione $f(x)$ è continua e derivabile su $(-\infty, 0]$. Inoltre, $f(0) = 0$ e (ad esempio)
$$f(-\sqrt[3]{\pi}) = \frac{\sin(-7\,\pi)}{-\sqrt[3]{\pi}} = 0\,.$$
Per il teorema di Rolle, applicato all'intervallo $[-\sqrt[3]{\pi}, 0]$, esiste ξ in tale intervallo tale che $f'(\xi) = 0$.

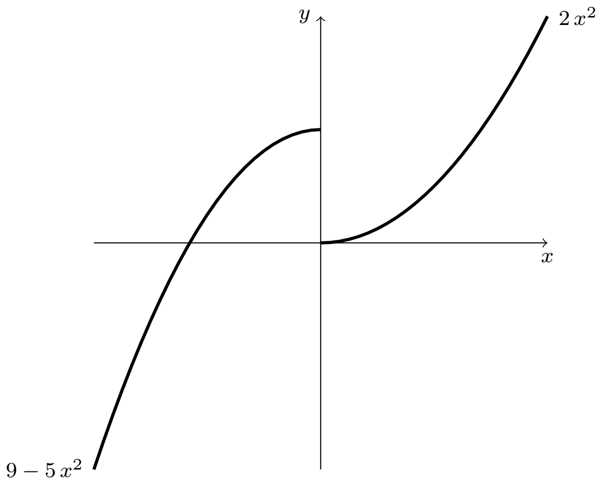
2D) Non esiste $0 < \xi < 1$ tale che $f'(\xi) = \mathrm{e}^5 + 6$.

Falso: Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $[0, 1]$, ed è tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = \mathrm{e}^5 + 6$. Per il teorema di Lagrange, esiste ξ in $(0, 1)$ tale che
$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \mathrm{e}^5 + 6\,.$$

---

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 9 - 5\,x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Disegno non in scala

3A) La funzione $f(x)$ è crescente su $(0, +\infty)$.

Vero: Dato che per $x \geq 0$ si ha $f(x) = 2\,x^2$, si ha

$$f'(x) = 4\,x\,, \qquad \forall x > 0\,.$$

Dato che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$, la funzione $f(x)$ è crescente su $(0, +\infty)$.

3B) La funzione $f(x)$ è decrescente su $(-\infty, 0)$.

Falso: Dato che $f(x) = 9 - 5\,x^2$ per $x < 0$, si ha

$$f'(x) = -10\,x\,, \qquad \forall x < 0\,.$$

Dato che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x < 0$, la funzione $f(x)$ è crescente su $(-\infty, 0)$.

3C) La funzione $f(x)$ non è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Per dimostrare che $f(x)$ non è crescente è sufficiente osservare che

$$f(-1) = 9 - 5 = 4 > 0 = f(0)\,.$$

3D) Si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Vero: Dato che $f(x)$ è monotona crescente su $(0, +\infty)$, e che $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2\,x^2 = +\infty\,,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$f([0, +\infty)) = [0, +\infty)\,. \tag{1}$$

Dato che $f(x)$ è crescente anche su $(-\infty, 0)$, e che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [9 - 5\,x^2] = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [9 - 5\,x^2] = 9\,,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$f((-\infty, 0)) = (-\infty, 9)\,. \tag{2}$$

Da (1) e da (2) si ha quindi

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-\infty, 9) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$T_3(\sin(4\,x);0) = 4\,x + \frac{32}{3}\,x^3\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, ponendo $t = 4\,x$,

$$\sin(4\,x) = 4\,x - \frac{(4\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) = 4\,x - \frac{32}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$T_3(\sin(4\,x);0) = 4\,x - \frac{32}{3}\,x^3 \neq 4\,x + \frac{32}{3}\,x^3\,.$$

4B)

$$T_3(x^2\,(\mathrm{e}^{5\,x} - 1);0) = 5\,x^3\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,,$$

si ha, ponendo $t = 5\,x$,

$$\mathrm{e}^{5\,t} = 1 + 5\,x + \mathrm{o}(x)\,,$$

da cui segue che

$$x^2\,(\mathrm{e}^{5\,x} - 1) = x^2\,(1 + 5\,x + \mathrm{o}(x) - 1) = x^2\,(5\,x + \mathrm{o}(x)) = 5\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$T_3(x^2\,(\mathrm{e}^{5\,x} - 1);0) = 5\,x^3\,.$$

4C)

$$\frac{1 - \cos(4\,x^2)}{x^2} = -8\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Falso: Ricordando che si ha

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, ponendo $t = 4\,x^2$,

$$\cos(4\,x^2) = 1 - \frac{(4\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 - 8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto

$$\frac{1 - \cos(4\,x^2)}{x^2} = \frac{1 - 1 + 8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{x^2} = \frac{8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{x^2} = 8\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) \neq -8\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

4D)

$$\mathrm{e}^{8\,x} - 1 - \sin(8\,x) = 8\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,, \qquad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3) = t + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, ponendo $t = 8\,x$,

$$\mathrm{e}^{8\,x} = 1 + 8\,x + 16\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,, \qquad \sin(8\,x) = 8\,x + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Pertanto,

$$e^{8x} - 1 - \sin(8x) = 1 + 8x + 16x^2 + o(x^2) - 1 - 8x + o(x^2) = 16x^2 + o(x^2) \neq 8x + o(x) \,.$$

5) Sia

$$f(x) = \frac{(x^2+2)\,(x+6)}{x-6}\,.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$

b) Calcolare

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 6^-} f(x)\,.$$

c) Dimostrare che esiste il minimo di $f(x)$ su $(6,+\infty)$.

d) Dimostrare che $f((-\infty,6)) = \mathbb{R}$.

Soluzione:

a) Si ha

$$f(x) = \frac{(x^2+2)\,(x+6)}{x-6} = \frac{x^3}{x}\,\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{6}{x}\right)}{1-\frac{6}{x}} = x^2\,\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{6}{x}\right)}{1-\frac{6}{x}}\,.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\,\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{6}{x}\right)}{1-\frac{6}{x}} = (+\infty)\cdot\frac{(1+0)\,(1+0)}{1-0} = +\infty\,,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\,\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{6}{x}\right)}{1-\frac{6}{x}} = (+\infty)\cdot\frac{(1+0)\,(1+0)}{1-0} = +\infty\,.$$

b) Osserviamo che quando x tende a 6 da destra il binomio $x-6$ è positivo, mentre è negativo quando x tende a 6 da sinistra. Pertanto,

$$\lim_{x\to 6^+} \frac{1}{x-6} = +\infty\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 6^-} \frac{1}{x-6} = -\infty\,.$$

Dato che

$$\lim_{x\to 6} (x^2+2)\,(x+6) = 38\cdot 12 = 456 > 0\,,$$

Si ha

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = 456\cdot(+\infty) = +\infty\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 6^-} f(x) = 456\cdot(-\infty) = -\infty\,.$$

c) Dal punto **a)** si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

mentre dal punto **b)** si ha che

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = +\infty\,.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema di Weierstrass, esiste il minimo di $f(x)$ sulla semiretta $(6,+\infty)$.

d) Dal punto **a)** si ha che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,,$$

mentre dal punto **b)** si ha che

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = -\infty\,.$$

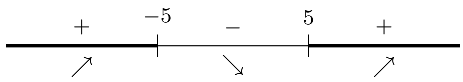
Pertanto, per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha $f((-\infty,6)) = \mathbb{R}$.

6) Sia
$$f(x) = (x^2 - 2x - 23)\,\mathrm{e}^x\,.$$
a) Calcolare i limiti di $f(x)$ a più infinito e meno infinito.
b) Calcolare $T_2(x;0)$.
c) Determinare i punti stazionari di $f(x)$ su $\mathbb{R}$, studiandone la natura.
d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ sull'intervallo $[4,6]$.

Soluzione:
a) Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2x - 23)\,\mathrm{e}^x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,.$$
Per il limite a meno infinito, poniamo $y = -x$; allora
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} ((-y)^2 - 2(-y) - 23)\,\mathrm{e}^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2 + 2y - 23}{\mathrm{e}^y} = 0\,,$$
dato che $\mathrm{e}^y \gg y^k$ per ogni k.

b) Derivando, si ha
$$f'(x) = (2x - 2)\,\mathrm{e}^x + (x^2 - 2x - 23)\,\mathrm{e}^x = (x^2 - 25)\,\mathrm{e}^x\,, \tag{1}$$
e, derivando ancora,
$$f''(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (x^2 - 25)\,\mathrm{e}^x = (x^2 + 2x - 25)\,\mathrm{e}^x\,.$$
Dato che $f(0) = -23$, che $f'(0) = -25$ e che $f''(0) = -25$, si ha
$$T_2(x;0) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = -23 - 25\,x - \frac{25}{2}\,x^2\,.$$

c) Dalla (1) si ha $f'(x) = (x^2 - 25)\,\mathrm{e}^x$, che si annulla se e solo se $x^2 - 25 = 0$, ovvero se e solo se $x = \pm 5$. Studiando il segno di $f'(x)$ si ha il seguente schema:



da cui si deduce che $x = -5$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 5$ è di minimo relativo.

d) Dallo studio del segno della derivata prima, si ha che $x = 4$ è di massimo relativo (dato che $f'(4) < 0$); che $x = 5$ è di minimo relativo (come già sapevamo); che $x = 6$ è di massimo relativo (dato che $f'(6) > 0$).
Si ha poi
$$f(4) = -15\,\mathrm{e}^4\,, \qquad f(5) = -8\,\mathrm{e}^5\,, \qquad f(6) = \mathrm{e}^6\,.$$
Osservando che la funzione $f(x)$ è decrescente in $[4,5]$, si ha $f(4) > f(5)$, e quindi
$$\max(\{f(x)\,,\ x \in [4,6]\}) = f(6) = \mathrm{e}^6\,, \qquad \min(\{f(x)\,,\ x \in [4,6]\}) = f(5) = -8\,\mathrm{e}^5\,.$$