Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 2
9 Ottobre 2023 — Compito n. 00280

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 12x + 32}\,.$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.
1B) L'insieme E è limitato.
1C) L'insieme E non contiene l'insieme $[6, +\infty)$.
1D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

2) Sai E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \log_3(|x - 3| - 1)\,.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.
2B) L'insieme E è limitato.
2C) Il valore $x = 4$ appartiene ad E.
2D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

3) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \frac{\sin(3\,x)}{\cos(x)}\,.$$

3A) L'insieme E è un intervallo.
3B) L'insieme E è limitato.
3C) La funzione $f(x)$ è periodica.
3D) La funzione $f(x)$ è pari.

4) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \left|\frac{x+6}{x-6}\right|.$$

4A) L'insieme E è un intervallo.
4B) L'insieme $E \cap (10, 14)$ è un intervallo.
4C) La funzione $f(x)$ è pari.
4D) La funzione $f(x)$ non è limitata.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00280**

5) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \sqrt{(x-4)\,(x-8)\,(x-12)}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-8}}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \log_3(-x^2+8x-15)\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt[6]{\cos(3\,x)-\frac{1}{2}}\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00280**

6) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{\mathrm{tg}(x) - 1}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \sqrt{4^{\sqrt{x-6}} - 16}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt{36 - x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt{\log_4(x-2) - 2}\,.$$

Soluzioni del compito 00280

1) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 12x + 32}\,.$$

La funzione $f(x)$ è definita se e solo se l'argomento della radice è positivo:

$$E = \{\ \in \mathbb{R} : x^2 - 12x + 32 \geq 0\}\,.$$

Risolvendo l'equazione $x^2 - 12x + 32 = 0$ si trova $x = 4$ e $x = 8$; dovendo risolvere la disuguaglianza con il maggiore o uguale, si ha

$$x^2 - 12x + 32 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq 4 \ \text{ oppure } \ x \geq 8\,.$$

Si ha pertanto che

$$E = (-\infty, 4] \cup [8, +\infty)\,. \tag{1}$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.

Vero: Per la (1), E non è un intervallo, ed è l'unione di due intervalli disgiunti.

1B) L'insieme E è limitato.

Falso: Dalla (1) si ha che E è illimitato, sia superiormente che inferiormente.

1C) L'insieme E non contiene l'insieme $[6, +\infty)$.

Vero: Per la (1), l'insieme $[6, 8)$ non è contenuto in E, e quindi l'insieme $[6, +\infty)$ non è contenuto in E.

1D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

Vero: Se la funzione $f(x)$ fosse pari (o fosse dispari), il suo insieme di definizione E sarebbe simmetrico rispetto all'origine. Dato che per la (1) l'insieme di definizione di $f(x)$ non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione $f(x)$ non è né pari, né dispari.
Alternativamente, la funzione è definita per $x = -6$, ma non lo è per $-x = 6$ e quindi, per tale valore di x, non ha senso chiedersi se si abbia $f(-x) = f(x)$, ovvero $f(-x) = -f(x)$.

---

2) Sai E l'insieme di definizione di
$$f(x) = \log_3(|x-3|-1)\,.$$

La funzione $f(x)$ è definita se e solo se il suo argomento è positivo, e quindi
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-3|-1 > 0\}\,.$$
Risolvendo la disequazione, si ha
$$|x-3|-1>0 \quad\iff\quad |x-3|>1 \quad\iff x-3>1 \ \text{ oppure } \ x-3<-1\,.$$
Pertanto x appartiene ad E se e solo se $x > 4$, ovvero $x < 2$. Si ha quindi
$$E = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)\,. \tag{1}$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

Vero: Dalla (1) segue che E non è un intervallo, ed è l'unione di due intervalli disgiunti.

2B) L'insieme E è limitato.

Falso: Dalla (1) segue che l'insieme E è illimitato, sia superiormente che inferiormente.

2C) Il valore $x = 4$ appartiene ad E.

Falso: Dalla (1) segue che $x = 4$ non appartiene ad E.

2D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

Vero: Se la funzione $f(x)$ fosse pari (o fosse dispari), il suo insieme di definizione E sarebbe simmetrico rispetto all'origine. Dato che per la (1) l'insieme di definizione di $f(x)$ non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione $f(x)$ non è né pari, né dispari.
Alternativamente, la funzione è definita per $x = -3$, ma non lo è per $-x = 3$ e quindi, per tale valore di x, non ha senso chiedersi se si abbia $f(-x) = f(x)$, ovvero $f(-x) = -f(x)$.

---

3) Sia E l'insieme di definizione di
$$f(x) = \frac{\sin(3\,x)}{\cos(x)}\,.$$

Il denominatore della frazione che definisce $f(x)$ si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, con k in $\mathbb{Z}$. Per tali valori, si ha
$$3\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right) = \frac{3\,\pi}{2} + 3\,k\,\pi\,.$$
Per tutti questi valori (un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$ più un multiplo intero di π) la funzione $\sin(y)$ vale 1 o -1. Pertanto, se si annulla il denominatore della frazione, il numeratore non si annulla, e quindi l'insieme di definizione di $f(x)$ coincide con l'insieme dei numeri reali tali che $\cos(x) \neq 0$. Si ha quindi
$$E = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{1}$$

3A) L'insieme E è un intervallo.

Falso: Dalla (1) segue che E non è un intervallo: è pieno di buchi...

3B) L'insieme E è limitato.

Falso: Dalla (1) segue che l'insieme E non è limitato, essendo illimitato sia superiormente che inferiormente.

3C) La funzione $f(x)$ è periodica.

Vero: Si ha, ricordando che seno e coseno sono periodiche di periodo 2π, e se x è tale che $f(x)$ è definita (esercizio: per tali valori è definita anche $f(x + 2\pi)$)
$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(3\,(x + 2\pi))}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(3\,x + 6\,\pi)}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(3\,x)}{\cos(x)} = f(x)\,,$$
e quindi la funzione $f(x)$ è periodica di periodo 2π.

3D) La funzione $f(x)$ è pari.

Falso: Si ha, ricordando che la funzione seno è dispari, che la funzione coseno è pari, e se x è tale che $f(x)$ è definita (esercizio: per tali valori è definita anche $f(-x)$),
$$f(-x) = \frac{\sin(-3\,x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(3\,x)}{\cos(x)} = -f(x)\,,$$
e quindi la funzione $f(x)$ è dispari.

---

4) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \left|\frac{x+6}{x-6}\right|.$$

La funzione $f(x)$ è definita se e solo se il denominatore della frazione all'interno del modulo non si annulla, ovvero se e solo se $x - 6 \neq 0$. Si ha pertanto

$$E = (-\infty, 6) \cup (6, +\infty)\,. \tag{1}$$

Esercizio: dimostrare che

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}\,, \quad \text{per ogni } x \neq \pm 6.$$

4A) L'insieme E è un intervallo.

Falso: Per la (1), l'insieme E non è un intervallo, ed è l'unione di due intervalli disgiunti.

4B) L'insieme $E \cap (10, 14)$ è un intervallo.

Vero: Dalla (1) si ha che

$$E \cap (10, 14) = [(-\infty, 6) \cup (6, +\infty)] \cap (10, 14) = (10, 14)\,,$$

che è un intervallo.

4C) La funzione $f(x)$ è pari.

Falso: Si ha

$$f(7) = \left|\frac{7+6}{7-6}\right| = 13\,,$$

e

$$f(-7) = \left|\frac{-7+6}{-7-6}\right| = \frac{1}{13}\,.$$

Dato che $f(-7) \neq \pm f(7)$, la funzione non è né pari né dispari.

4D) La funzione $f(x)$ non è limitata.

Vero: Calcoliamo $f(6 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Si ha

$$f(6+\varepsilon) = \left|\frac{6+6+\varepsilon}{6+\varepsilon-6}\right| = \frac{12+\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{12}{\varepsilon} + 1\,.$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, con n in $\mathbb{N}$, si ha

$$f(6 + 1/n) = 12\,n + 1\,,$$

che diventa arbitrariamente grande quando n diventa grande. Ne segue che l'insieme dei valori assunti da $f(x)$ è illimitato superiormente, e quindi che la funzione non è limitata.

---

5) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \sqrt{(x-4)\,(x-8)\,(x-12)}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-8}}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \log_3(-x^2+8x-15)\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt[6]{\cos(3\,x) - \frac{1}{2}}\,.$$

Soluzione:
a) La funzione è definita se e solo se l'argomento della radice è maggiore o uguale a zero. Si tratta quindi di risolvere la disequazione

$$(x-4)\,(x-8)\,(x-12) \geq 0\,.$$

Studiamo il segno dei tre termini separatamente:

$$x-4 \geq 0 \iff x \geq 4\,, \qquad x-8 \geq 0 \iff x \geq 12\,, \qquad x-12 \geq 0 \iff x \geq 12\,,$$

il che porta al seguente schema:

		4		8		12	
$x \geq 4$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x \geq 8$	$-$		$-$		$+$		$+$
$x \geq 12$	$-$		$-$		$-$		$+$
segno	$-$		$+$		$-$		$+$

Si ha quindi $(x-4)\,(x-8)\,(x-12) \geq 0$ se e solo se $4 \leq x \leq 8$ ovvero se $x \geq 12$. Ne segue che l'insieme di definizione di $f(x)$ è l'insieme

$$F = [4,8] \cup [14,+\infty)\,,$$

che non è un intervallo.

b) La funzione $g(x)$ è definita se e solo se gli argomenti delle radici sono positivi, e il denominatore è diverso da zero:

$$x-2 \geq 0\,, \qquad x-8 \geq 0\,, \qquad \sqrt{x-2}+\sqrt{x-8} \neq 0\,.$$

Risolvendo le prime due disequazioni, abbiamo che deve essere $x \geq 2$ **e** $x \geq 8$; ovvero, che deve essere $x \geq 8$. Osserviamo ora che se $x \geq 8$ si ha

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-8} \geq \sqrt{6}+\sqrt{8-8} = \sqrt{6} > 0\,.$$

In definitiva, se le due radici quadrate sono definite, la loro somma non si annulla mai. Si ha pertanto che l'insieme di definizione di $g(x)$ è

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 8\} = [8,+\infty)\,,$$

che è un intervallo (illimitato superiormente).

c) La funzione $h(x)$ è definita se e solo se l'argomento del logaritmo è positivo, ovvero se e solo se

$$-x^2+8x-15 > 0 \qquad \iff \qquad x^2-8x+15 < 0\,.$$

Risolvendo l'equazione $x^2-8x+15=0$ si trova $x=3$ oppure $x=5$. Dato che ci interessano i valori in cui il polinomio è negativo, si deve considerare l'intervallo

$$H = (3,5)\,,$$

che è pertanto l'insieme di definizione della funzione $h(x)$.

d) Dato che la radice è pari, la funzione $k(x)$ è definita se e solo se l'argomento è positivo. Ricordiamo ora che

$$\cos(y) \geq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\,\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \right].$$

Dato che nella funzione compare $\cos(3\,x)$, definendo $y = 3\,x$ si ha che la funzione $k(x)$ è definita nell'insieme

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\,k\,\pi, \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\,k\,\pi \right],$$

che non è un intervallo.

6) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(x) - 1}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \sqrt{4^{\sqrt{x-6}} - 16}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt{36 - x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt{\log_4(x-2) - 2}\,.$$

Soluzione:

a) Il denominatore della frazione che definisce $f(x)$ si annulla quando $\operatorname{tg}(x) = 1$, ovvero per

$$x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Per tali valori si ha

$$2\,x = 2\left(\frac{\pi}{4} + k\,\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi\,,$$

e quindi $\sin(2x) = 1$ qualsiasi sia il valore di k. Si ha pertanto che l'insieme di definizione di $f(x)$ è

$$F = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

che non è un intervallo.

b) Affinché la funzione $g(x)$ sia definita deve essere, contemporaneamente, $x - 6 \geq 0$ (condizione di esistenza per la radice "interna") e $4^{\sqrt{x-6}} - 16 \geq 0$ (condizione di esistenza per la radice "interna"). La prima condizione è $x \geq 6$, mentre per la seconda si ha

$$4^{\sqrt{x-6}} - 16 \geq 0 \iff 4^{\sqrt{x-6}} \geq 16 \iff 4^{\sqrt{x-6}} \geq 4^2 \iff \iff \sqrt{x-6} \geq 2\,,$$

da cui segue che deve essere $x - 6 \geq 4$, ovvero $x \geq 10$. Delle due condizioni, la seconda è più forte della prima, e quindi l'insieme di definizione di $g(x)$ è

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10\} = [10, +\infty)\,,$$

che è un intervallo (illimitato superiormente).

c) Affinché la funzione $h(x)$ sia definita, devono essere contemporaneamente maggiori o uguali di zero gli argomenti delle radici; deve quindi essere

$$x - 6 \geq 0\,, \qquad \text{e} \qquad 36 - x^2 \geq 0\,.$$

Risolvendo la prima disequazione, si ha che deve essere $x \geq 6$; risolvendo la seconda, si ha che deve essere $-6 \leq x \leq 6$. Ne segue quindi che l'insieme di definizione della funzione $h(x)$ è

$$H = [6, +\infty) \cap [-6, 6] = \{6\}\,,$$

che non è un intervallo (o, al massimo, è un intervallo degenere).

d) Affinché la funzione $k(x)$ sia definita, deve essere positivo l'argomento del logaritmo, e maggiore o uguale a zero l'argomento della radice; deve quindi essere

$$x - 2 > 0 \qquad \text{e} \qquad \log_4(x-2) - 2 \geq 0\,.$$

La prima disequazione è equivalente a $x > 2$, mentre per la seconda si ha

$$\log_4(x-2) - 2 \geq 0 \iff \log_4(x-2) \geq 2 \iff x - 2 \geq 4^2 \iff x \geq 18\,.$$

Dato che la seconda condizione è più forte della prima, l'insieme di definizione della funzione $k(x)$ è l'intervallo (illimitato superiormente)

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 18\} = [18, +\infty)\,.$$