Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 7
11 Dicembre 2023 — Compito n. 00017

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A)
$$x^8 = \mathrm{o}(x^8)\,.$$

1B)
$$\sin^2(x-8) = \mathrm{o}(x-8)\,.$$

1C)
$$3\,x^4 + 6\,x^3 = \mathrm{o}(x^3)\,.$$

1D)
$$\left[\mathrm{e}^{x-6} - 1\right]^3 = \mathrm{o}((x-6)^2)\,.$$

2) Sia
$$f(x) = 8x^2 - 3x + 3\,.$$

2A)
$$T_1(f(x);0) = -3x\,.$$

2B)
$$T_2(f(x);0) = 8x^2 - 3x + 3\,.$$

2C)
$$T_1(f(x);2) = 29\,(x-2) + 29\,.$$

2D)
$$T_3(f(x);8) \neq T_2(f(x);8)\,.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)
$$T_2(\mathrm{e}^{6\,x};0) = 1 + 6\,x + 18\,x^2\,.$$

3B)
$$T_3(x\,\sin(2\,x);0) = 4\,x^2\,.$$

3C)
$$T_2\Big(\frac{\sin(2\,x)}{x};0\Big) = 2 - \frac{4}{3}\,x^2\,.$$

3D)
$$T_2\Big(\frac{x}{1+6\,x};0\Big) = x + 6\,x^2\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)
$$\cos(3\,x^2) = 1 - \frac{9}{2}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

4B)
$$x\,(\mathrm{e}^{6\,x} - 3) = -2\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

4C)
$$\frac{\sin(6\,x^2)}{x^2} = 6 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

4D)
$$\frac{\log(1+4\,x^2)}{x} = 4\,x + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00017**

5) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\textbf{a)}\ f(x) = \mathrm{e}^{5\,x^2}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x\,(\cos(4\,x) - 1)\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \frac{1}{1 - 5\,x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = x^2\,(\mathrm{e}^{12\,x} - \sin(12\,x))\,,$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00017**

6) Calcolare, usando Taylor, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5\,x)-5\,x}{25\,x^3}\,,\qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\,(\mathrm{e}^{8\,x^2}-1)}{1-\cos(8\,x^2)}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(3\,x)-3\,x)^2}{27\,x^6}\,,\qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{4\,x}-1)\,\sin(6\,x)}{\log(1+24\,x^2)}\,.$$

Soluzioni del compito 00017

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A)

$$x^8 = \mathrm{o}(x^8)\,.$$

Falso: Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0\,,$$

non è ha vero che $x^8 = \mathrm{o}(x^8)$. Dividendo per x^7, si vede facilmente che $x^8 = \mathrm{o}(x^7)$.

1B)

$$\sin^2(x-8) = \mathrm{o}(x-8)\,.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = x - 8$,

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sin^2(x-8)}{x-8} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} \sin(y) = 1 \cdot 0 = 0\,,$$

e quindi $\sin^2(x-8) = \mathrm{o}(x-8)$.

1C)

$$3\,x^4 + 6\,x^3 = \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Falso: Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,x^4 + 6\,x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} [3\,x + 6] = 6 \neq 0\,,$$

non è vero che $3\,x^4 + 6\,x^3 = \mathrm{o}(x^3)$. Dividendo per x^2, si vede facilmente che $3\,x^4 + 6\,x^3 = \mathrm{o}(x^2)$.

1D)

$$\left[\mathrm{e}^{x-6} - 1\right]^3 = \mathrm{o}((x-6)^2)\,.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = x - 6$,

$$\lim_{x\to 6} \frac{\left[\mathrm{e}^{x-6} - 1\right]^3}{(x-6)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\left[\mathrm{e}^{y} - 1\right]^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^y - 1}{y}\right)^2 [\mathrm{e}^y - 1] = 1^2 \cdot 0 = 0\,,$$

e quindi $\left[\mathrm{e}^{x-6} - 1\right]^3 = \mathrm{o}((x-6)^2)$.

---

2) Sia
$$f(x) = 8x^2 - 3x + 3\,.$$

2A)
$$T_1(f(x); 0) = -3x\,.$$

Falso: Si ha $f(0) = 3$; inoltre, dato che $f'(x) = 16x - 3$, si ha $f'(0) = -3$. Pertanto,
$$T_1(f(x); 0) = f(0) + f'(0)\,x = -3x + 3 \neq -3x\,.$$
Analogamente, dato che
$$f(x) = 3 - 3\,x + 8\,x^2 = -3x + 3 + \mathrm{o}(x)\,,$$
si ha $T_1(f(x); 0) = -3x + 3 \neq -3x$.

2B)
$$T_2(f(x); 0) = 8x^2 - 3x + 3\,.$$

Vero: Ci sono due modi per rispondere a questa domanda: calcolare $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$ e scrivere il polinomio di Taylor usando la formula, oppure ricordare che il polinomio di Taylor di ordine n di un polinomio di grado n è il polinomio stesso.
Seguendo la prima strada, dato che $f(0) = 3$, che $f'(0) = -3$ e che $f''(0) = 16$ dato che $f''(x) = 16$ per ogni x, si ha
$$T_2(f(x); 0) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 8x^2 - 3x + 3 = f(x)\,,$$
che è lo stesso risultato che si ottiene con il secondo metodo.

2C)
$$T_1(f(x); 2) = 29\,(x - 2) + 29\,.$$

Vero: Dato che $f(2) = 29$ e che $f'(2) = 29$ essendo $f'(x) = 16x - 3$ per ogni x, si ha
$$T_1(f(x); 2) = f(2) + f'(2)\,(x - 2) = 29\,(x - 2) + 29\,.$$

2D)
$$T_3(f(x); 8) \neq T_2(f(x); 8)\,.$$

Falso: Dato che la derivata terza di un polinomio di grado 2 è identicamente nulla (così come le derivate successive), si ha
$$T_3(f(x); 8) = T_2(f(x); 8) + \frac{f^{(3)}(8)}{6}\,x^3 = T_2(f(x); 8)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$T_2(\mathrm{e}^{6\,x};0) = 1 + 6\,x + 18\,x^2\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 6\,x$,

$$\mathrm{e}^{6\,x} = 1 + 6\,x + \frac{(6\,x)^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) = 1 + 6\,x + 18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,,$$

da cui segue che

$$T_2(\mathrm{e}^{6\,x};0) = 1 + 6\,x + 18\,x^2\,.$$

3B)

$$T_3(x\,\sin(2\,x);0) = 4\,x^2\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 2\,x$,

$$\sin(2\,x) = 2\,x - \frac{(2\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$x\,\sin(2\,x) = x\left(2\,x - \frac{(2\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right) = 2\,x^2 - \frac{2^3}{6}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) = 2\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Pertanto,

$$T_3(x\,\sin(2\,x);0) = 2\,x^2 \neq 4\,x^2\,.$$

3C)

$$T_2\Big(\frac{\sin(2\,x)}{x};0\Big) = 2 - \frac{4}{3}\,x^2\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 2\,x$,

$$\sin(2\,x) = 2\,x - \frac{(2\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) = 2\,x - \frac{4}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{\sin(2\,x)}{x} = \frac{2\,x - \frac{4}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{x} = 2 - \frac{4}{3}\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Si ha pertanto

$$T_2\Big(\frac{\sin(2\,x)}{x};0\Big) = 2 - \frac{4}{3}\,x^2\,.$$

3D)

$$T_2\Big(\frac{x}{1 + 6\,x};0\Big) = x + 6\,x^2\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = -6\,x$,

$$\frac{1}{1+6\,x} = 1 - 6\,x + \mathrm{o}(x)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{x}{1+6\,x} = x\,(1 - 6\,x + \mathrm{o}(x)) = x - 6\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Pertanto,

$$T_2\Big(\frac{x}{1+6\,x};0\Big) = x - 6\,x^2 \neq x + 6\,x^2\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\cos(3\,x^2) = 1 - \frac{9}{2}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 3\,x^2$,

$$\cos(3\,x^2) = 1 - \frac{(3\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 - \frac{9}{2}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

4B)

$$x\,(\mathrm{e}^{6\,x} - 3) = -2\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 6\,x$,

$$\mathrm{e}^{6\,x} = 1 + 6\,x + \mathrm{o}(x)\,,$$

da cui segue che

$$x\,(\mathrm{e}^{6\,x} - 3) = x\,(1 + 6\,x + \mathrm{o}(x) - 3) = -2\,x + 6\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) = -2\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

4C)

$$\frac{\sin(6\,x^2)}{x^2} = 6 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 6\,x^2$,

$$\sin(6\,x^2) = 6\,x^2 - \frac{(6\,x^2)^3}{6} + \mathrm{o}((x^2)^3) = 6\,x^2 - \frac{6^3}{6}\,x^6 + \mathrm{o}(x^6) = 6\,x^2 + \mathrm{o}(x^5)\,.$$

Pertanto,

$$\frac{\sin(6\,x^2)}{x^2} = \frac{6\,x^2 + \mathrm{o}(x^5)}{x^2} = 6 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

4D)

$$\frac{\log(1 + 4\,x^2)}{x} = 4\,x + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 4\,x^2$,

$$\log(1 + 4\,x^2) = 4\,x^2 - \frac{(4\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 4\,x^2 - 8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) = 4\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Pertanto,

$$\frac{\log(1 + 4\,x^2)}{x} = \frac{4\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)}{x} = 4\,x + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

---

5) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\textbf{a)}\ f(x) = e^{5\,x^2}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x\,(\cos(4\,x) - 1)\,,$$
$$\textbf{c)}\ h(x) = \frac{1}{1 - 5\,x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = x^2\,(e^{12\,x} - \sin(12\,x))\,,$$

Soluzione:

a) Ricordando che
$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\,,$$
si ha, con la sostituzione $t = 5\,x^2$,
$$e^{5\,x^2} = 1 + 5\,x^2 + \frac{(5\,x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 + 5\,x^2 + \frac{25}{2}\,x^4 + o(x^4)\,,$$
da cui segue che
$$T_4(f(x); 0) = 1 + 5\,x^2 + \frac{25}{2}\,x^4 + o(x^4)\,.$$

b) Ricordando che
$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\,,$$
si ha, con la sostituzione $t = 4\,x$,
$$\cos(4\,x) = 1 - \frac{(4\,x)^2}{2} + o(x^3) = 1 - 8\,x^2 + o(x^3)\,,$$
da cui segue che
$$x\,(\cos(4\,x) - 1) = x\,(1 - 8\,x^2 + o(x^3) - 1) = -8\,x^3 + o(x^4)\,.$$
Pertanto,
$$T_4(g(x); 0) = -8\,x^3\,.$$

c) Ricordando che
$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)\,,$$
si ha, con la sostituzione $t = 5\,x^2$,
$$\frac{1}{1 - 5\,x^2} = 1 + 5\,x^2 + (5\,x^2)^2 + o((x^2)^2) = 1 + 5\,x^2 + 25\,x^4 + o(x^4)\,.$$
Pertanto,
$$T_4(h(x); 0) = 1 + 5\,x^2 + 25\,x^4\,.$$

d) Ricordando che
$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\,, \qquad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\,,$$
si ha, con la sostituzione $t = 12\,x$,
$$e^{12\,x} = 1 + 12\,x + \frac{(12\,x)^2}{2} + o(x^2)\,, \qquad \sin(12\,x) = 12\,x - \frac{(12\,x)^3}{6} + o(x^3) = 12\,x + o(x^2)\,.$$
Pertanto,
$$e^{12\,x} - \sin(12\,x) = 1 + 12\,x + 72\,x^2 + o(x^2) - 12\,x + o(x^2) = 1 + 72\,x^2 + o(x^2)\,,$$
da cui segue che
$$x^2\,(e^{12\,x} - \sin(12\,x)) = x^2\,(1 + 72\,x^2 + o(x^2)) = x^2 + 72\,x^4 + o(x^4)\,.$$
In definitiva,
$$T_4(k(x); 0) = x^2 + 72\,x^4\,.$$

6) Calcolare, usando Taylor, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\,x) - 5\,x}{25\,x^3}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(\mathrm{e}^{8\,x^2} - 1)}{1 - \cos(8\,x^2)}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(3\,x) - 3\,x)^2}{27\,x^6}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{4\,x} - 1)\,\sin(6\,x)}{\log(1 + 24\,x^2)}\,.$$

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 5\,x$,

$$\sin(5\,x) = 5\,x - \frac{(5\,x)^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\,x) - 5\,x}{25\,x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5\,x - \frac{5^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) - 5\,x}{25\,x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{5^2\,x^3}\,.$$

Semplificando, si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\,x) - 5\,x}{25\,x^3} = \lim_{x\to 0} \left[-\frac{5}{6} + \frac{\mathrm{o}(x^3)}{x^3}\right] = -\frac{5}{6} + 0 = -\frac{5}{6}\,.$$

b) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,, \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 8\,x^2$,

$$\mathrm{e}^{8\,x^2} = 1 + 8\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,, \qquad \cos(8\,x^2) = 1 - \frac{(8\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 - 32\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$x^2\,(\mathrm{e}^{8\,x^2} - 1) = x^2\,(1 + 8\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 1) = 8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,,$$

e

$$1 - \cos(8\,x^2) = 1 - (1 - 32\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)) = 32\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(\mathrm{e}^{8\,x^2} - 1)}{1 - \cos(8\,x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{32\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4}\,\frac{8 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}}{32 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{8 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}}{32 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}} = \frac{8 + 0}{32 + 0} = \frac{1}{4}\,.$$

c) Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 3\,x$,

$$\sin(3\,x) = 3\,x - \frac{(3\,x)^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) = 3\,x - \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Si ha quindi

$$\sin(3\,x) - 3\,x = 3\,x - \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) - 3\,x = -\frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Elevando al quadrato, si ha

$$(\sin(3\,x) - 3\,x)^2 = \left(-\frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 x^6 - 2\,\frac{9}{2}\,x^3\,\mathrm{o}(x^3) + \mathrm{o}(x^6) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 x^6 + \mathrm{o}(x^6)\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(3\,x) - 3\,x)^2}{27\,x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2 x^6 + \mathrm{o}(x^6)}{27\,x^6} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{3}{4} + \frac{\mathrm{o}(x^6)}{x^6}\right] = \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}\,.$$

d) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,, \qquad \sin(s) = s - \frac{s^3}{6} + \mathrm{o}(s^3)\,,$$

si ha, con le sostituzioni $t = 4\,x$ e $s = 6\,x$,

$$\mathrm{e}^{4\,x} = 1 + 4\,x + \frac{(4\,x)^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) = 1 + 4\,x + \mathrm{o}(x)\,,$$

e

$$\sin(6\,x) = 6\,x - \frac{(6\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) = 6\,x + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{4\,x} - 1)\,\sin(6\,x) &= (1 + 4\,x + \mathrm{o}(x) - 1)\,(6\,x + \mathrm{o}(x^2)) \\ &= (4\,x + \mathrm{o}(x))\,(6\,x + \mathrm{o}(x^2)) \\ &= 24\,x^2 + 4\,x\,\mathrm{o}(x^2) + 6\,x\,\mathrm{o}(x) + \mathrm{o}(x)\,\mathrm{o}(x^2) \\ &= 24\,x^2 + \mathrm{o}(x^3) + \mathrm{o}(x^2) + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 24\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Ricordando poi che

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 24\,x^2$,

$$\log(1 + 24\,x^2) = 24\,x^2 - \frac{(24\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 24\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,. \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue allora che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{4\,x} - 1)\,\sin(6\,x)}{\log(1 + 24\,x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{24\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{24\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\,\frac{24 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}}{24 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}}\,, \tag{3}$$

e, semplificando,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{4\,x} - 1)\,\sin(6\,x)}{\log(1 + 24\,x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{24 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}}{24 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}} = \frac{24 + 0}{24 + 0} = 1\,.$$

Osservazione: nella formula (3) compare la frazione

$$\frac{24\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{24\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)}\,;$$

osserviamo che la frazione **tende** a 1, ma non è **uguale** a 1, dato che non conosciamo quanto valgono le quantità $\mathrm{o}(x^2)$ al numeratore e al denominatore.