



Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero
6 Novembre 2023 — Compito n. 00146

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 6\}.$$

1A) L'insieme E è un intervallo.

1B) L'insieme E è limitato.

1C) Non esiste il minimo di E .

1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, non esiste il massimo di F .

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x - 3|)$ è $\{x \neq 3\}$.

2B) Il dominio di $g(x) = \frac{x - 6}{x^2 - 16}$ è $\{x \neq \pm 4\}$.

2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\frac{81}{x^2} - 1}$ è $[-9, 9]$.

2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[5]{x^2 - 16}$ è $\{|x| \geq 4\}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{9^n} = 0.$$

3B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n + n^9}{7^n + n!} = 0.$$

3C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{7^n + 11^n} = 0.$$

3D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^6} = e^9.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^9 \sin\left(\frac{6}{n^9}\right) = 1.$$

4B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{50}{81}.$$

4C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^3) \sin\left(\frac{9}{n^3}\right) = 0.$$

4D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{5^n} \left[\arctan\left(\frac{7^n}{n!}\right) \right]^2 = 0.$$

Docente

☐ Garroni [A, F]

☐ Orsina [G, Z]

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00146

5) Siano

$$a_n = \frac{7n+8}{7n+4}, \quad E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad f(x) = \log(-x^2 + 17x - 66).$$

- a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.
 - b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E , specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
 - c) Determinare il dominio $\text{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
 - d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\text{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
-

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00146

6) Si calcolino i seguenti limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7}]$, b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 2^n}{8^n + n^4}$,

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^4 + 6}\right)^{n^4}$, d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{6}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)}$.

Soluzioni del compito 00146

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 6\}.$$

Risolvendo la disequazione, si ha

$$|x - 4| \leq 6 \iff -6 \leq x - 4 \leq 6 \iff -2 \leq x \leq 10,$$

e quindi

$$(1) \quad E = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 10\} = [-2, 10].$$

1A) L'insieme E è un intervallo.

Vero: Dalla (1) segue che E è un intervallo.

1B) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che E è limitato.

1C) Non esiste il minimo di E .

Falso: Dalla (1) segue che l'estremo inferiore di E è $I = -2$. Dato che I appartiene ad E , I è il minimo di E .

1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, non esiste il massimo di F .

Vero: Dalla (1) segue che

$$F = E \cap (-\infty, 0) = [-2, 10] \cap (-\infty, 0) = [-2, 0).$$

Si ha pertanto che l'estremo superiore di F è $S = 0$. Dato che S non appartiene ad F , non esiste il massimo di F .

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x - 3|)$ è $\{x \neq 3\}$.

Vero: Ricordando che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi, la funzione $f(x)$ è definita per ogni x reale tale che $|x - 3| > 0$; dato che tale disuguaglianza è verificata per ogni $x \neq 3$, il dominio di $f(x)$ è

$$\text{dom}(f) = \{x \neq 3\}.$$

2B) Il dominio di $g(x) = \frac{x - 6}{x^2 - 16}$ è $\{x \neq \pm 4\}$.

Vero: La funzione è definita per ogni x che non annulla il denominatore della frazione. Dato che $x^2 - 16 = 0$ se e solo se $x = \pm 4$, si ha

$$\text{dom}(g) = \{x \neq \pm 4\}.$$

2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\frac{81}{x^2} - 1}$ è $[-9, 9]$.

Falso: Affinché la funzione sia definita, deve essere definito, e positivo, l'argomento della radice quadrata, che è la funzione

$$h_1(x) = \frac{81}{x^2} - 1.$$

Chiaramente $h_1(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, mentre si ha (dato che $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$)

$$h_1(x) \geq 0 \iff \frac{81}{x^2} \geq 1 \iff 81 \geq x^2 \iff -9 \leq x \leq 9.$$

Pertanto, $h_1(x)$ è definita e positiva nell'insieme $[-9, 9] \setminus \{0\}$, e quindi

$$\text{dom}(h) = [-9, 9] \setminus \{0\} \neq [-9, 9].$$

2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[5]{x^2 - 16}$ è $\{|x| \geq 4\}$.

Falso: Dato che le radici di ordine dispari sono definite su tutto \mathbb{R} , e dato che la funzione $k_1(x) = x^2 - 16$ è definita per ogni x reale, si ha

$$\text{dom}(k) = \mathbb{R} \neq \{|x| \geq 4\}.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{9^n} = 0.$$

Vero: Per la gerarchia degli infiniti (per la quale gli esponenziali “battono” le potenze di n all’infinito) si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{9^n} = 0.$$

3B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n + n^9}{7^n + n!} = 0.$$

Vero: Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore i termini che divergono più velocemente, si ha

$$\frac{10^n + n^9}{7^n + n!} = \frac{10^n}{n!} \frac{1 + \frac{n^9}{10^n}}{1 + \frac{7^n}{n!}}.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^9}{10^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n}{n!} = 0,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n + n^9}{7^n + n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n}{n!} \frac{1 + \frac{n^9}{10^n}}{1 + \frac{7^n}{n!}} = 0 \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = 0.$$

3C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{7^n + 11^n} = 0.$$

Falso: Si ha

$$\frac{n!}{7^n + 11^n} = \frac{n!}{11^n} \frac{1}{1 + \frac{7^n}{11^n}} = \frac{n!}{11^n} \frac{1}{1 + \left(\frac{7}{11}\right)^n}.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{11^n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{11}\right)^n = 0,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{7^n + 11^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{11^n} \frac{1}{1 + \left(\frac{7}{11}\right)^n} = (+\infty) \cdot \frac{1}{1 + 0} = +\infty \neq 0.$$

3D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^6} = e^9.$$

Falso: Si ha

$$\left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^6} = \left[\left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{n^6}{n^9}} = \left[\left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{1}{n^3}}.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^9} = e^9,$$

e che $\frac{1}{n^3}$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{9}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{1}{n^3}} = [e^9]^0 = 1 \neq e^9.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^9 \sin\left(\frac{6}{n^9}\right) = 1.$$

Falso: Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1,$$

si ha, ponendo $a_n = 6/n^9$,

$$n^9 \sin\left(\frac{6}{n^9}\right) = 6 \frac{n^9}{6} \sin\left(\frac{6}{n^9}\right) = 6 \frac{\sin\left(\frac{6}{n^9}\right)}{\frac{6}{n^9}},$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^9 \sin\left(\frac{6}{n^9}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \frac{\sin\left(\frac{6}{n^9}\right)}{\frac{6}{n^9}} = 6 \cdot 1 = 6 \neq 1.$$

4B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{50}{81}.$$

Vero: Ricordando che se a_n tende a zero allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2},$$

si ha

$$\frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2} \frac{\left(\frac{10}{n}\right)^2}{\left(\frac{9}{n}\right)^2} \frac{\left(\frac{9}{n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{100}{81} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2} \left(\frac{\frac{9}{n}}{\sin\left(\frac{9}{n}\right)}\right)^2,$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{81} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2} \left(\frac{\frac{9}{n}}{\sin\left(\frac{9}{n}\right)}\right)^2 = \frac{100}{81} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{50}{81}.$$

4C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^3) \sin\left(\frac{9}{n^3}\right) = 0.$$

Vero: La successione $\sin(n^3)$ è limitata, mentre, dato che $9/n^3$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{9}{n^3}\right) = 0.$$

Pertanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^3) \sin\left(\frac{9}{n^3}\right) = 0,$$

dato che si tratta del prodotto tra una successione limitata ed una che tende a zero.

4D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{5^n} \left[\arctan\left(\frac{7^n}{n!}\right) \right]^2 = 0.$$

Vero: Dato che $7^n/n!$ tende a zero, si ha

$$\arctan\left(\frac{7^n}{n!}\right) \approx \frac{7^n}{n!}.$$

Pertanto

$$\frac{n!}{5^n} \left[\arctan \left(\frac{7^n}{n!} \right) \right]^2 \approx \frac{n!}{5^n} \left[\frac{7^n}{n!} \right]^2 = \frac{n!}{5^n} \frac{49^n}{(n!)^2} = \frac{\left(\frac{49}{5} \right)^n}{n!}.$$

Ricordando la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{5^n} \left[\arctan \left(\frac{7^n}{n!} \right) \right]^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{49}{5} \right)^n}{n!} = 0.$$

5) Siano

$$a_n = \frac{7n+8}{7n+4}, \quad E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad f(x) = \log(-x^2 + 17x - 66).$$

a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.

b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E , specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

c) Determinare il dominio $\text{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.

d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\text{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

Soluzione:

a) Si ha

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{7(n+1)+8}{7(n+1)+4} \leq \frac{7n+8}{7n+4}$$

che è equivalente a

$$(7(n+1)+8)(7n+4) \leq (7n+8)(7(n+1)+4).$$

Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere

$$49n(n+1) + 28(n+1) + 56n + 32 \leq 49n(n+1) + 28n + 56(n+1) + 32,$$

e quindi, semplificando i termini uguali ed espandendo i rimanenti,

$$28n + 28 + 56n \leq 28n + 56n + 56 \iff 28 \leq 56,$$

che è vero. La successione a_n è quindi monotona decrescente.

Analogamente, si poteva osservare che

$$\begin{aligned} a_n = \frac{7n+8}{7n+4} &= \frac{7n+4+8-4}{7n+4} = 1 + \frac{4}{7n+4} \\ &\geq 1 + \frac{4}{7(n+1)+4} = \frac{7(n+1)+4+8-4}{7(n+1)+4} \\ &= \frac{7(n+1)+8}{7(n+1)+4} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

b) Dato che la successione a_n è monotona decrescente, si ha

$$\sup(E) = \max(E) = a_0 = 2, \quad \inf(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{7}{7} = 1,$$

dato che a_n è definita dal rapporto di due polinomi di primo grado. L'estremo inferiore non è un minimo dato che non esiste n in \mathbb{N} tale che $a_n = 1$. Infatti

$$a_n = 1 \iff \frac{7n+8}{7n+4} = 1 \iff 7n+8 = 7n+4 \iff 8 = 4,$$

che è falso.

c) Il logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; dato che

$$-x^2 + 17x - 66 > 0 \iff x^2 - 17x + 66 < 0,$$

si tratta di risolvere quest'ultima disequazione. Si ha $x^2 - 17x + 66 = 0$ per $x = 6$ e per $x = 11$, e quindi

$$x^2 - 17x + 66 < 0 \iff 6 < x < 11,$$

da cui segue che

$$\text{dom}(f) = (6, 11).$$

d) Dato che $\text{dom}(f) = (6, 11)$, si ha

$$\sup(\text{dom}(f)) = 11, \quad \inf(\text{dom}(f)) = 6,$$

che non sono, rispettivamente, né massimo (dato che 11 non appartiene all'insieme), né minimo (dato che 6 non appartiene all'insieme).

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7}], & \text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 2^n}{8^n + n^4}, \\ \text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^4 + 6}\right)^{n^4}, & \text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{6}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)}. \end{array}$$

Soluzione:

a) Si ha, razionalizzando,

$$\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7} = \frac{(\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7})(\sqrt{n+7} + \sqrt{n-7})}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n-7}} = \frac{n+7 - (n-7)}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n-7}},$$

cosicché (semplificando)

$$\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7} = \frac{14}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n-7}}.$$

Pertanto (dato che il denominatore diverge)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{14}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n-7}} = 0.$$

b) Ricordando la gerarchia degli infiniti, mettiamo in evidenza $n!$ al numeratore e 8^n al denominatore. Si ha

$$\frac{n! + 2^n}{8^n + n^4} = \frac{n!}{8^n} \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{1 + \frac{n^4}{8^n}}.$$

Dato che (sempre per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{8^n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{8^n} = 0,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 2^n}{8^n + n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{8^n} \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{1 + \frac{n^4}{8^n}} = (+\infty) \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty.$$

c) Ricordando che se a_n è una successione divergente a più infinito, e se A è un numero reale, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{A}{a_n}\right)^{a_n} = e^A,$$

riscriviamo la successione come segue:

$$\left(1 + \frac{2}{n^4 + 6}\right)^{n^4} = \left[\left(1 + \frac{2}{n^4 + 6}\right)^{n^4 + 6}\right]^{\frac{n^4}{n^4 + 6}}.$$

Dato che, trattandosi del rapporto tra due polinomi dello stesso grado, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n^4 + 6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot n^4}{1 \cdot n^4 + 6} = \frac{1}{1} = 1,$$

ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^4 + 6}\right)^{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n^4 + 6}\right)^{n^4 + 6}\right]^{\frac{n^4}{n^4 + 6}} = [e^2]^1 = e^2.$$

d) Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1,$$

scriviamo

$$\frac{e^{\frac{6}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{6}{n^2}} - 1}{\frac{6}{n^2}} \frac{\left(\frac{5}{n}\right)^2}{\left(\frac{5}{n}\right)^2 \tan^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{6}{25} \frac{e^{\frac{6}{n^2}} - 1}{\frac{6}{n^2}} \left(\frac{\frac{5}{n}}{\tan\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^2.$$

Pertanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{6}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{25} \frac{e^{\frac{6}{n^2}} - 1}{\frac{6}{n^2}} \left(\frac{\frac{5}{n}}{\tan\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^2 = \frac{6}{25} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{6}{25}.$$