## Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 3
## 16 Ottobre 2023 — Compito n. 00131

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** ____________________

**Cognome:** ____________________

**Matricola:** | | | | | | | |

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **F** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **C** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**1)** Sia

$$E = \left\{ \frac{10}{n}\,,\ n \geq 1 \right\}.$$

**1A)** L'insieme $E$ è un intervallo.
**1B)** L'insieme $E$ è limitato.
**1C)** Non esiste il massimo di $E$.
**1D)** Non esiste il minimo di $E$.

**2)** Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(16\,x) > 0\} \cap [0, \pi]\,.$$

**2A)** L'insieme $E$ è un intervallo.
**2B)** L'insieme $E$ è limitato.
**2C)** Si ha $\sup(E) < \pi$.
**2D)** Si ha $\inf(E) = 0$.

**3)** Si consideri la successione

$$a_n = \frac{8\,n+1}{2\,n+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

**3A)**
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

**3B)**
$$\lim_{n\to+\infty} [a_{n+1} - a_n] = 0\,.$$

**3C)**
$$\lim_{n\to\infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = +\infty\,.$$

**3D)**
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = 3/2\,.$$

**4)** Siano $A > 0$, $B > 0$ e

$$a_n = \frac{A\,n^2+1}{B\,n^2+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

**4A)** La successione $a_n$ tende a zero.
**4B)** Se $A = 8$ e $B = 5$, la successione $a_n$ è monotona decrescente.
**4C)** Se $A = 8$ e $B = 11$, la successione $a_n$ è monotona decrescente.
**4D)** Se $A = 7$ e $B = 2$, non esiste il massimo dell'insieme

$$E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

**Docente**
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

**Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00131**

**5)** Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{9n^2+4n+9}{6n^2+7n+8}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^7-4}{9-4\,n^4}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n+n^{15}}{7\cdot 5^n+10}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^6}\,,$$

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00131**

---

**6)** Sia

$$a_n = \frac{3 \cdot 3^n + 5}{3^n + 2}.$$

**a)** Si dimostri che la successione $\{a_n\}$ è limitata.
**b)** Si dimostri che la successione $\{n^4\, a_n\}$ è illimitata superiormente.
**c)** Si dimostri che si ha

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}).$$

**d)** Si calcoli il minimo della successione $\{a_n\}$.

---

# Soluzioni del compito 00131

**1)** Sia
$$E = \left\{ \frac{10}{n}\,,\ n \geq 1 \right\}.$$

---

**1A)** L'insieme $E$ è un intervallo.

**Falso:** Per definizione, $b = \frac{10}{1} = 10$ e $a = \frac{10}{2} = 5$ appartengono ad $E$. Se consideriamo il numero
$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{5+10}{2} = \frac{15}{2}\,,$$
si vede facilmente che non appartiene ad $E$. Infatti, risolvendo l'equazione
$$\frac{10}{n} = \frac{15}{2}\,,$$
si trova
$$n = \frac{3}{4}\,,$$
che non è un numero intero. Abbiamo quindi trovato $a$ e $b$ in $E$ tali che $[a, b]$ non è tutto contenuto in $E$, e quindi $E$ non è un intervallo.

---

**1B)** L'insieme $E$ è limitato.

**Vero:** Dato che
$$0 < \frac{10}{n} \leq \frac{10}{1} = 10\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
l'insieme $E$ è contenuto nell'intervallo $(0, 10]$, ed è quindi limitato.

---

**1C)** Non esiste il massimo di $E$.

**Falso:** Dato che
$$\frac{10}{n} \leq \frac{10}{1} = 10\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
il numero $x = 10$ è più grande di tutti gli elementi di $E$. Dato che appartiene ad $E$, si ha che il massimo di $E$ esiste, e vale 10.

---

**1D)** Non esiste il minimo di $E$.

**Vero:** Supponiamo che esista il minimo di $E$, ovvero un numero reale $m$ della forma $\frac{10}{\overline{n}}$, per qualche intero $\overline{n} \geq 1$, con la proprietà che $m \leq y$ per ogni $y$ in $E$. Se, però, scegliamo
$$y = \frac{10}{\overline{n}+1}\,,$$
abbiamo che $y$ appartiene ad $E$ (per definizione), e che
$$y = \frac{10}{\overline{n}+1} < \frac{10}{\overline{n}} = m\,,$$
contraddicendo la minimalità di $m$.

---

**2)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(16\,x) > 0\} \cap [0, \pi]\,.$$

---

Ricordando che $\sin(y) > 0$ se e solo se
$$2k\,\pi < y < (2k+1)\,\pi\,, \qquad \text{per qualche } k \text{ in } \mathbb{Z}\,,$$
si ha $\sin(16\,x) > 0$ se e solo se
$$2k\,\pi < 16\,x < (2k+1)\,\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2k}{16}\,\pi < x < \frac{2k+1}{16}\,\pi\,, \qquad \text{per qualche } k \text{ in } \mathbb{Z}\,.$$
Se chiediamo, inoltre, che $x$ appartenga a $[0, \pi]$, allora $k$ varia tra 0 e 7. Infatti, se $k < 0$ e
$$\frac{2k}{16}\,\pi < x < \frac{2k+1}{16}\,\pi\,,$$
allora $x < 0$ e quindi non appartiene a $[0, \pi]$, mentre se $k \geq 8$ e
$$\frac{2k}{16}\,\pi < x < \frac{2k+1}{16}\,\pi\,,$$
allora $x > \pi$ (e quindi non è in $[0, \pi]$. In definitiva, si ha

(1)
$$E = \bigcup_{k=0}^{7} \left(\frac{2k\,\pi}{16}, \frac{(2k+1)\,\pi}{16}\right) = \bigcup_{k=0}^{7} I_k\,.$$

---

**2A)** L'insieme $E$ è un intervallo.

**Falso:** Come si vede dalla (1), $E$ è l'unione di 8 intervalli disgiunti, e quindi non è un intervallo. Per vederlo meglio,
$$E = \left(0, \frac{\pi}{16}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{16}, \frac{3\,\pi}{16}\right) \cup \left[\bigcup_{k=2}^{7} \left(\frac{2k\,\pi}{16}, \frac{(2k+1)\,\pi}{16}\right)\right],$$
e quindi in $E$ non c'è alcun numero reale $x$ tale che
$$0 < a = \frac{\pi}{32} < \frac{\pi}{16} \leq x \leq \frac{2\pi}{16} < \frac{5\pi}{32} = b < \frac{3\pi}{16}\,,$$
con $a$ e $b$ appartenenti ad $E$.

---

**2B)** L'insieme $E$ è limitato.

**Vero:** Dalla definizione, si ha $E \subseteq [0, \pi]$, e quindi $E$ è un insieme limitato.

---

**2C)** Si ha $\sup(E) < \pi$.

**Vero:** Dalla (1), si ha che l'intervallo "più a destra" che forma $E$ è l'intervallo corrispondente a $k = 7$, ovvero l'intervallo
$$I_7 = \left(\frac{14\,\pi}{16}, \frac{15\,\pi}{16}\right).$$
Dato che $\sup(I_7) = \frac{15\,\pi}{16} < \pi$, si ha $\sup(E) = \sup(I_7) < \pi$.

---

**2D)** Si ha $\inf(E) = 0$.

**Vero:** Dalla (1), si ha che l'intervallo "più a sinistra" che forma $E$ è l'intervallo corrispondente a $k = 0$, ovvero l'intervallo
$$I_0 = \left(0, \frac{\pi}{16}\right).$$
Dato che $\inf(I_0) = 0$, si ha $\inf(E) = \inf(I_0) = 0$.

---

**3)** Si consideri la successione

$$a_n = \frac{8\,n+1}{2\,n+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

---

Si ha

$$a_{n+1} - a_n = \frac{8\,(n+1)+1}{2\,(n+1)+1} - \frac{8\,n+1}{2\,n+1} = \frac{[8\,(n+1)+1]\,[2\,n+1] - [8\,n+1]\,[2\,(n+1)+1]}{(2\,(n+1)+1)\,(2\,n+1)}\,.$$

Sviluppando il numeratore, si ha

$$\begin{aligned}&[8\,(n+1)+1]\,[2\,n+1] - [8\,n+1]\,[2\,(n+1)+1]\\ &\quad = 8\cdot 2\,n\,(n+1) + 8\,(n+1) + 2\,n + 1\\ &\qquad - [8\cdot 2\,n\,(n+1) + 8\,n + 2\,(n+1) + 1]\\ &\quad = 8 - 2 = 6\,.\end{aligned}$$

Sviluppando il denominatore, invece, si ha

$$(2\,(n+1)+1)\,(2\,n+1) = 4\,n\,(n+1) + 2\,(n+1) + 2\,n + 1 = 4n^2 + 8n + 3\,.$$

Pertanto,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6}{4n^2 + 8n + 3}\,. \tag{1}$$

---

**3A)**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

**Falso:** Si ha

$$a_n = \frac{8\,n+1}{2\,n+1} = \frac{n}{n}\,\frac{8+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{8+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\,.$$

Dato che $\frac{1}{n}$ tende a zero, si ha, per i teoremi sui limiti,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{8+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{8+0}{2+0} = 4 \neq 0\,.$$

---

**3B)**

$$\lim_{n\to+\infty} [a_{n+1} - a_n] = 0\,.$$

**Vero:** Dato che (si veda l'esercizio precedente) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 4\,,$$

si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 4\,.$$

Per i teoremi sui limiti, si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} [a_{n+1} - a_n] = 4 - 4 = 0\,.$$

---

**3C)**

$$\lim_{n\to\infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = +\infty\,.$$

**Falso:** Dalla (1) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{6\,n}{4n^2 + 8n + 3} = 0\,,$$

dato che è il limite del rapporto di due polinomi, con il grado del denominatore (2) maggiore del grado del numeratore (1).

---

**3D)**

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = 3/2\,.$$

**Vero:** Dalla (1) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{6\,n^2}{4n^2 + 8n + 3}\,.$$

Dato che si tratta del rapporto di due polinomi di secondo grado, il limite è il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo, che sono 6 e 4. Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = \frac{3}{2}\,.$$

**4)** Siano $A > 0$, $B > 0$ e
$$a_n = \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

---

Per studiare la monotonia di $a_n$, calcoliamo $a_{n+1} - a_n$. Si ha
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{A\,(n+1)^2 + 1}{B\,(n+1)^2 + 1} - \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1} \\ &= \frac{[A\,(n+1)^2 + 1]\,[B\,n^2 + 1] - [B\,(n+1)^2 + 1]\,[A\,n^2 + 1]}{[B\,(n+1)^2 + 1]\,[B\,n^2 + 1]}\,. \end{aligned}$$
Osserviamo che il denominatore è sempre positivo (perché $B > 0$), e quindi si ha $a_{n+1} > a_n$ se e solo se
$$[A\,(n+1)^2 + 1]\,[B\,n^2 + 1] - [B\,(n+1)^2 + 1]\,[A\,n^2 + 1] > 0\,.$$
Sviluppando i prodotti si ha
$$A\,B\,(n+1)^2\,n^2 + A\,(n+1)^2 + B\,n^2 + 1 - [A\,B\,(n+1)^2\,n^2 + B\,(n+1)^2 + A\,n^2 + 1] > 0\,,$$
che diventa, dopo aver semplificato i termini uguali
$$A\,(n+1)^2 + B\,n^2 > B\,(n+1)^2 + A\,n^2\,.$$
Sviluppando i quadrati, si ha che deve essere
$$A\,n^2 + 2A\,n + A + B\,n^2 > B\,n^2 + 2B\,n + B + A\,n^2\,,$$
che è equivalente a
$$2A\,n + A > 2B\,n + B \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2(A - B)\,n + A - B > 0\,,$$
e questa disuguaglianza è vera per ogni $n$ in $\mathbb{N}$ se e solo se $A > B$. In definitiva,

(1) la successione $a_n$ è monotona crescente se e solo se $A > B$.

---

**4A)** La successione $a_n$ tende a zero.

**Falso:** Si ha
$$a_n = \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{A + \frac{1}{n^2}}{B + \frac{1}{n^2}} = \frac{A + \frac{1}{n^2}}{B + \frac{1}{n^2}}\,.$$
Dato che $\frac{1}{n^2}$ tende a zero, per i teoremi sui limiti si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{A + \frac{1}{n^2}}{B + \frac{1}{n^2}} = \frac{A + 0}{B + 0} = \frac{A}{B}\,,$$
che è diverso da zero dato che $A \neq 0$ per ipotesi.

---

**4B)** Se $A = 8$ e $B = 5$, la successione $a_n$ è monotona decrescente.

**Falso:** Dato che $A > B$, per la (1) la successione è monotona crescente.

---

**4C)** Se $A = 8$ e $B = 11$, la successione $a_n$ è monotona decrescente.

**Vero:** Dato che $A < B$, per la (1) la successione è monotona decrescente.

---

**4D)** Se $A = 7$ e $B = 2$, non esiste il massimo dell'insieme
$$E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

**Vero:** Dato che $A > B$, per la (1) la successione $a_n$ è monotona crescente. Si ha quindi (si veda l'eserczio **4A**) che
$$\sup(E) = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{7}{2}\,.$$

Per dimostrare che l'estremo superiore non è un massimo, è sufficiente verificare che non esiste alcun valore di $n$ tale che $a_n = \frac{7}{2}$. Risolvendo l'equazione, si ha

$$\frac{7\,n^2+1}{2\,n^2+1} = \frac{7}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,[7\,n^2+1] = 7\,[2\,n^2+1] \quad \Longleftrightarrow \quad 14\,n^2+2 = 14\,n^2+7 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = 7\,,$$

che è falsa. Si ha quindi che il numero 4 non appartiene ad $E$, che quindi non ha massimo.

---

**5)** Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{9n^2+4n+9}{6n^2+7n+8}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^7-4}{9-4\,n^4}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{5^n+n^{15}}{7\cdot 5^n+10}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^6}\,,$$

---

**Soluzione:**

**a)** Si tratta del limite del rapporto di polinomi dello stesso grado. Mettendo in evidenza $n^2$ al numeratore ed al denominatore, si ha

$$\frac{9n^2+4n+9}{6n^2+7n+8}=\frac{n^2}{n^2}\,\frac{9+\frac{4}{n}+\frac{9}{n^2}}{6+\frac{7}{n}+\frac{8}{n^2}}=\frac{9+\frac{4}{n}+\frac{9}{n^2}}{6+\frac{7}{n}+\frac{8}{n^2}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{9n^2+4n+9}{6n^2+7n+8}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9+\frac{4}{n}+\frac{9}{n^2}}{6+\frac{7}{n}+\frac{8}{n^2}}=\frac{9+0+0}{6+0+0}=\frac{3}{2}\,.$$

**b)** Si tratta del limite del rapporto di polinomi, con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore. Mettendo in evidenza $n^7$ al numeratore e $n^4$ al denominatore, si ha

$$\frac{n^7-4}{9-4\,n^4}=\frac{n^7}{n^4}\,\frac{1-\frac{4}{n^7}}{\frac{9}{n^4}-4}=n^3\,\frac{1-\frac{4}{n^7}}{\frac{9}{n^4}-4}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^7-4}{9-4\,n^4}=\lim_{n\to+\infty}n^3\,\frac{1-\frac{4}{n^7}}{\frac{9}{n^4}-4}=(+\infty)\cdot\left(\frac{1-0}{0-4}\right)=(+\infty)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\infty\,.$$

**c)** Ricordando che $5^n$ diverge più velocemente di $n^{15}$, si ha

$$\frac{5^n+n^{15}}{7\cdot 5^n+10}=\frac{5^n}{5^n}\,\frac{1+\frac{n^{15}}{5^n}}{7+\frac{10}{5^n}}=\frac{1+\frac{n^{15}}{5^n}}{7+\frac{10}{5^n}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n+n^{15}}{7\cdot 5^n+10}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{n^{15}}{5^n}}{7+\frac{10}{5^n}}=\frac{1+0}{7+0}=\frac{1}{7}\,.$$

**d)** Scriviamo la successione come segue:

$$\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^6}=\frac{(\frac{9}{7})^n}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^6}=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{(\frac{9}{7})^n\cdot 7^n}{9^n+n^6}=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{9^n}{9^n+n^6}\,.$$

Pertanto,

$$0\le\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^6}=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{9^n}{9^n+n^6}\le\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\cdot 1=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}=0\,,$$

per il teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^6}=0\,.$$

**6)** Sia
$$a_n = \frac{3 \cdot 3^n + 5}{3^n + 2}\,.$$
**a)** Si dimostri che la successione $\{a_n\}$ è limitata.
**b)** Si dimostri che la successione $\{n^4\, a_n\}$ è illimitata superiormente.
**c)** Si dimostri che si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$
**d)** Si calcoli il minimo della successione $\{a_n\}$.

---

**Soluzione:**
**a)** Si ha
$$0 \le a_n = \frac{3 \cdot 3^n + 5}{3^n + 2} = \frac{3 \cdot 3^n + 6 - 1}{3^n + 2} = \frac{3\,(3^n + 2) - 1}{3^n + 2} = 3 - \frac{1}{3^n + 2} \le 3\,,$$
e quindi la successione $\{a_n\}$ è limitata.
In alternativa, si ha
$$a_n = \frac{3 \cdot 3^n + 5}{3^n + 2} = \frac{3^n}{3^n}\,\frac{3 + \frac{5}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{3 + \frac{5}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}}\,.$$
Pertanto, dato che sia $\frac{5}{3^n}$ che $\frac{2}{3^n}$ tendono a zero, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3 + \frac{5}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3\,.$$
Dato che la successione $a_n$ tende ad un limite finito, è limitata.

**b)** Dato che la successione $a_n$ converge ad 3 per l'esercizio **a)**, la successione $n^4\, a_n$ diverge a più infinito, ed è dunque illimitata superiormente.

**c)** Dimostriamo che la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente. Si ha
$$a_{n+1} \ge a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3 \cdot 3^{n+1} + 5}{3^{n+1} + 2} \ge \frac{3 \cdot 3^n + 5}{3^n + 2}\,,$$
e l'ultima disuguaglianza è equivalente a
$$(3 \cdot 3^{n+1} + 5)\,(3^n + 2) \ge (3 \cdot 3^n + 5)\,(3^{n+1} + 2)\,.$$
Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere
$$3 \cdot 3^{2n+1} + 6 \cdot 3^{n+1} + 5 \cdot 3^n + 10 \ge 3 \cdot 3^{2n+1} + 6 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} + 10\,,$$
che, semplificando, è equivalente a
$$(6 - 5) \cdot 3^{n+1} \ge (6 - 5) \cdot 3^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3^{n+1} \ge 3^n\,,$$
che è vera. Pertanto, la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$

**d)** Dato che per l'esercizio **c)** la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente, si ha
$$a_n \ge a_0 = \frac{3 \cdot 3^0 + 5}{3^0 + 2} = \frac{3 + 5}{1 + 2} = \frac{8}{3}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
e quindi
$$\min(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}) = a_0 = \frac{8}{3}\,.$$