Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero
6 Novembre 2023 — Compito n. 00123

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \leq 8\}\,.$$

1A) L'insieme E è un intervallo.
1B) L'insieme E è limitato.
1C) Esiste il massimo di E.
1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di F.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x - 9|)$ è $\{x \neq \pm 9\}$.
2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-9}{x^2-25}$ è $\{x \neq \pm 5\}$.
2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{64}{x^2} - 1}$ è $[-8, 8]$.
2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[11]{x^2 - 25}$ è $\{|x| \geq 5\}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^8}{9^n} = 0\,.$$

3B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{12^n + n^5}{6^n + n!} = 0\,.$$

3C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{7^n + 9^n} = 0\,.$$

3D)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^7} = 1\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$\lim_{n\to+\infty} n^8 \sin\left(\frac{6}{n^8}\right) = 1\,.$$

4B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{8}{25}\,.$$

4C)
$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^7)\,\sin\left(\frac{5}{n^7}\right) = 5\,.$$

4D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 = +\infty\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00123**

---

5) Siano

$$a_n = \frac{3\,n + 10}{3\,n + 6}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2 + 17x - 66)\,.$$

a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00123**

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)} \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}\right], \qquad \textbf{b)} \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+2^n}{7^n+n^6},$$

$$\textbf{c)} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{8}{n^2+3}\right)^{n^2}, \qquad \textbf{d)} \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{8}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{6}{n}\right)}.$$

Soluzioni del compito 00123

1) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \le 8\}\,.$$

Risolvendo la disequazione, si ha
$$|x - 6| \le 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -8 \le x - 6 \le 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 \le x \le 14\,,$$
e quindi
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -2 \le x \le 14\} = [-2, 14]\,. \tag{1}$$

1A) L'insieme E è un intervallo.

Vero: Dalla (1) segue che E è un intervallo.

1B) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che E è limitato.

1C) Esiste il massimo di E.

Vero: Dalla (1) segue che l'estremo superiore di E è $S = 14$. Dato che S appartiene ad E, S è il massimo di E.

1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di F.

Falso: Dalla (1) segue che
$$F = E \cap (-\infty, 0) = [-2, 14] \cap (-\infty, 0) = [-2, 0)\,.$$
Si ha pertanto che l'estremo superiore di F è $S = 0$. Dato che S non appartiene ad F, non esiste il massimo di F.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x-9|)$ è $\{x \neq \pm 9\}$.

Falso: Ricordando che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi, la funzione $f(x)$ è definita per ogni x reale tale che $|x-9| > 0$; dato che tale disuguaglianza è verificata per ogni $x \neq 9$, il dominio di $f(x)$ è

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \neq 9\} \neq \{x \neq \pm 9\} .$$

2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-9}{x^2-25}$ è $\{x \neq \pm 5\}$.

Vero: La funzione è definita per ogni x che non annulla il denominatore della frazione. Dato che $x^2 - 25 = 0$ se e solo se $x = \pm 5$, si ha

$$\mathrm{dom}(g) = \{x \neq \pm 5\} .$$

2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{64}{x^2} - 1}$ è $[-8, 8]$.

Falso: Affinché la funzione sia definita, deve essere definito, e positivo, l'argomento della radice quadrata, che è la funzione

$$h_1(x) = \frac{64}{x^2} - 1 .$$

Chiaramente $h_1(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, mentre si ha (dato che $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$)

$$h_1(x) \geq 0 \iff \frac{64}{x^2} \geq 1 \iff 64 \geq x^2 \iff -8 \leq x \leq 8 .$$

Pertanto, $h_1(x)$ è definita e positiva nell'insieme $[-8, 8] \setminus \{0\}$, e quindi

$$\mathrm{dom}(h) = [-8, 8] \setminus \{0\} \neq [-8, 8] .$$

2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[11]{x^2 - 25}$ è $\{|x| \geq 5\}$.

Falso: Dato che le radici è di ordine dispari sono definite su tutto $\mathbb{R}$, e dato che la funzione $k_1(x) = x^2 - 25$ è definita per ogni x reale, si ha

$$\mathrm{dom}(k) = \mathbb{R} \neq \{|x| \geq 5\} .$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^8}{9^n} = 0\,.$$

Vero: Per la gerarchia degli infiniti (per la quale gli esponenziali "battono" le potenze di n all'infinito) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^8}{9^n} = 0\,.$$

3B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{12^n + n^5}{6^n + n!} = 0\,.$$

Vero: Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore i termini che divergono più velocemente, si ha

$$\frac{12^n + n^5}{6^n + n!} = \frac{12^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^5}{12^n}}{1 + \frac{6^n}{n!}}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{12^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{n!} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{12^n}{n!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{12^n + n^5}{6^n + n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{12^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^5}{12^n}}{1 + \frac{6^n}{n!}} = 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0\,.$$

3C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{7^n + 9^n} = 0\,.$$

Falso: Si ha

$$\frac{n!}{7^n + 9^n} = \frac{n!}{9^n}\,\frac{1}{1 + \frac{7^n}{9^n}} = \frac{n!}{9^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{7}{9}\right)^n}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{9^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{7^n + 9^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{9^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{7}{9}\right)^n} = (+\infty) \cdot \frac{1}{1+0} = +\infty \neq 0\,.$$

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^7} = 1\,.$$

Vero: Si ha

$$\left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^7} = \left[\left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^{10}}\right]^{\frac{n^7}{n^{10}}} = \left[\left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^{10}}\right]^{\frac{1}{n^3}}\,.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^{10}} = \mathrm{e}^9\,,$$

e che $\frac{1}{n^3}$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^7} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{9}{n^{10}}\right)^{n^{10}}\right]^{\frac{1}{n^3}} = [\mathrm{e}^9]^0 = 1\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\lim_{n\to+\infty} n^8 \sin\left(\frac{6}{n^8}\right) = 1\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

si ha, ponendo $a_n = 6/n^8$,

$$n^8 \sin\left(\frac{6}{n^8}\right) = 6\,\frac{n^8}{6}\,\sin\left(\frac{6}{n^8}\right) = 6\,\frac{\sin\left(\frac{6}{n^8}\right)}{\frac{6}{n^8}}\,,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^8 \sin\left(\frac{6}{n^8}\right) = \lim_{n\to+\infty} 6\,\frac{\sin\left(\frac{6}{n^8}\right)}{\frac{6}{n^8}} = 6\cdot 1 = 6 \neq 1\,.$$

4B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{8}{25}\,.$$

Vero: Ricordando che se a_n tende a zero allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}\,,$$

si ha

$$\frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\left(\frac{4}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{4}{n}\right)^2}{\left(\frac{5}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{5}{n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{16}{25}\,\frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\left(\frac{4}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{5}{n}}{\sin\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^2,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{16}{25}\,\frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\left(\frac{4}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{5}{n}}{\sin\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^2 = \frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{8}{25}\,.$$

4C)

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^7)\,\sin\left(\frac{5}{n^7}\right) = 5\,.$$

Falso: La successione $\sin(n^7)$ è limitata, mentre, dato che $5/n^7$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{5}{n^7}\right) = 0\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^7)\,\sin\left(\frac{5}{n^7}\right) = 0 \neq 5\,,$$

dato che si tratta del prodotto tra una successione limitata ed una che tende a zero.

4D)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 = +\infty\,.$$

Falso: Dato che $6^n/n!$ tende a zero, si ha

$$\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right) \approx \frac{6^n}{n!}\,.$$

Pertanto

$$\frac{n!}{3^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 \approx \frac{n!}{3^n}\left[\frac{6^n}{n!}\right]^2 = \frac{n!}{3^n}\,\frac{36^n}{(n!)^2} = \frac{(12)^n}{n!}\,.$$

Ricordando la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{3^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{(12)^n}{n!} = 0 \neq +\infty\,.$$

5) Siano
$$a_n = \frac{3\,n+10}{3\,n+6}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2+17x-66)\,.$$
a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

Soluzione:
a) Si ha
$$a_{n+1} \le a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3\,(n+1)+10}{3\,(n+1)+6} \le \frac{3\,n+10}{3\,n+6}$$
che è equivalente a
$$(3\,(n+1)+10)\,(3\,n+6) \le (3\,n+10)\,(3\,(n+1)+6)\,.$$
Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere
$$9\,n\,(n+1)+18\,(n+1)+30\,n+60 \le 9\,n\,(n+1)+18\,n+30\,(n+1)+60\,,$$
e quindi, semplificando i termini uguali ed espandendo i rimanenti,
$$18\,n+18+30\,n \le 18\,n+30\,n+30 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 18 \le 30\,,$$
che è vero. La successione a_n è quindi monotona decrescente.
Analogamente, si poteva osservare che
$$\begin{aligned} a_n = \frac{3\,n+10}{3\,n+6} &= \frac{3\,n+6+10-6}{3\,n+6} = 1 + \frac{4}{3\,n+6} \\ &\ge 1 + \frac{4}{3\,(n+1)+6} = \frac{3\,(n+1)+6+10-6}{3\,(n+1)+6} \\ &= \frac{3\,(n+1)+10}{3\,(n+1)+6} = a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

b) Dato che la successione a_n è monotona decrescente, si ha
$$\sup(E) = \max(E) = a_0 = \frac{5}{3}\,, \qquad \inf(E) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{3} = 1\,,$$
dato che a_n è definita dal rapporto di due polinomi di primo grado. L'estremo inferiore non è un minimo dato che non esiste n in $\mathbb{N}$ tale che $a_n = 1$. Infatti
$$a_n = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3\,n+10}{3\,n+6} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3\,n+10 = 3\,n+6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 10 = 6\,,$$
che è falso.

c) Il logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; dato che
$$-x^2+17x-66 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-17x+66 < 0\,,$$
si tratta di risolvere quest'ultima disequazione. Si ha $x^2-17x+66 = 0$ per $x = 6$ e per $x = 11$, e quindi
$$x^2-17x+66 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6 < x < 11\,,$$
da cui segue che
$$\mathrm{dom}(f) = (6, 11)\,.$$

d) Dato che $\mathrm{dom}(f) = (6, 11)$, si ha
$$\sup(\mathrm{dom}(f)) = 11\,, \qquad \inf(\mathrm{dom}(f)) = 6\,,$$
che non sono, rispettivamente, né massimo (dato che 11 non appartiene all'insieme), né minimo (dato che 6 non appartiene all'insieme).

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)} \lim_{n\to+\infty} [\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}]\,, \qquad \textbf{b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+2^n}{7^n+n^6}\,,$$

$$\textbf{c)} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{8}{n^2+3}\right)^{n^2}, \qquad \textbf{d)} \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{8}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{6}{n}\right)}\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, razionalizzando,

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3} = \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})\,(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}} = \frac{n+3-(n-3)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}\,,$$

cosicché (semplificando)

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3} = \frac{6}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}\,.$$

Pertanto (dato che il denominatore diverge)

$$\lim_{n\to+\infty} [\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}} = 0\,.$$

b) Ricordando la gerarchia degli infiniti, mettiamo in evidenza $n!$ al numeratore e 7^n al denominatore. Si ha

$$\frac{n!+2^n}{7^n+n^6} = \frac{n!}{7^n}\,\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{n^6}{7^n}}\,.$$

Dato che (sempre per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{7^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^6}{7^n} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!+2^n}{7^n+n^6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{7^n}\,\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{n^6}{7^n}} = (+\infty)\cdot\frac{1+0}{1+0} = +\infty\,.$$

c) Ricordando che se a_n è una successione divergente a più infinito, e se A è un numero reale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{A}{a_n}\right)^{a_n} = e^A\,,$$

riscriviamo la successione come segue:

$$\left(1+\frac{8}{n^2+3}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{8}{n^2+3}\right)^{n^2+3}\right]^{\frac{n^2}{n^2+3}}\,.$$

Dato che, trattandosi del rapporto tra due polinomi dello stesso grado, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot n^2}{1\cdot n^2+3} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{8}{n^2+3}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{8}{n^2+3}\right)^{n^2+3}\right]^{\frac{n^2}{n^2+3}} = [e^8]^1 = e^8\,.$$

d) Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

scriviamo

$$\frac{e^{\frac{8}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{6}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{8}{n^2}}-1}{\frac{8}{n^2}}\,\frac{\frac{8}{n^2}}{\left(\frac{6}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{6}{n}\right)^2}{\tan^2\left(\frac{6}{n}\right)} = \frac{2}{9}\,\frac{e^{\frac{8}{n^2}}-1}{\frac{8}{n^2}}\left(\frac{\frac{6}{n}}{\tan\left(\frac{6}{n}\right)}\right)^2.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{8}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{6}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{9}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{8}{n^2}}-1}{\frac{8}{n^2}}\left(\frac{\frac{6}{n}}{\tan\left(\frac{6}{n}\right)}\right)^2 = \frac{2}{9}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{2}{9}\,.$$