



Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero  
25 Dicembre 2023 — Compito n. 00116

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{1 - \cos(2x)} = \frac{25}{8}.$$

1B)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(x-4)}{\tan(4(x-5))} = \frac{1}{4}.$$

1C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{3x^3 + 2x} = 0.$$

1D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-7x})^{e^{11x}} = +\infty.$$

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 7x^2 + x(e^{3x} - 1) & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(7x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2A) La funzione  $f(x)$  è continua in  $x = 0$ .

2B) La funzione  $f(x)$  è derivabile in  $x = 0$ .

2C) Non esiste  $\xi < 0$  tale che  $f'(\xi) = 0$ .

2D) Esiste  $0 < \xi < 1$  tale che  $f'(\xi) = e^3 + 6$ .

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 4 - 3x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

3A) La funzione  $f(x)$  è decrescente su  $(0, +\infty)$ .

3B) La funzione  $f(x)$  è crescente su  $(-\infty, 0)$ .

3C) La funzione  $f(x)$  è crescente su  $\mathbb{R}$ .

3D) Si ha  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$T_3(\sin(3x); 0) = 3x - \frac{9}{2}x^3.$$

4B)

$$T_3(x^2(e^{5x} - 1); 0) = x^3.$$

4C)

$$\frac{1 - \cos(4x^2)}{x^2} = 8x^2 + o(x^2).$$

4D)

$$e^{4x} - 1 - \sin(4x) = 4x + o(x).$$

Docente

- ☐ Garroni [A, F]  
☐ Orsina [G, Z]

--	--	--	--	--	--	--	--

**Cognome****Nome****Matricola****Compito 00116**

---

**5)** Sia

$$f(x) = \frac{(x^2 + 7)(x + 6)}{x - 6}.$$

**a)** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

**b)** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x).$$

**c)** Dimostrare che esiste il minimo di  $f(x)$  su  $(6, +\infty)$ .**d)** Dimostrare che  $f((-\infty, 6)) = \mathbb{R}$ .

---

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00116

---

6) Sia

$$f(x) = (x^2 - 2x - 23)e^x.$$

- a) Calcolare i limiti di  $f(x)$  a più infinito e meno infinito.
  - b) Calcolare  $T_2(x; 0)$ .
  - c) Determinare i punti stazionari di  $f(x)$  su  $\mathbb{R}$ , studiandone la natura.
  - d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di  $f(x)$  sull'intervallo  $[4, 6]$ .
-

## Soluzioni del compito 00116

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

1A)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{1 - \cos(2x)} = \frac{25}{8}.$$

**Falso:** Ricordando che quando  $t$  tende a zero si ha  $\sin(t) \approx t$ , e  $1 - \cos(t) \approx t^2/2$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x)^2}{(2x)^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 5^2}{2^2} = \frac{25}{2} \neq \frac{25}{8}.$$

---

1B)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(x-4)}{\tan(4(x-5))} = \frac{1}{4}.$$

**Vero:** Scriviamo  $\log(x-4) = \log(1 + (x-5))$ . Pertanto, ricordando che quando  $t$  tende a zero si ha  $\log(1+t) \approx t$  e  $\tan(t) \approx t$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(x-4)}{\tan(4(x-5))} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{4(x-5)} = \frac{1}{4}.$$

---

1C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{3x^3 + 2^x} = 0.$$

**Vero:** Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0,$$

e che  $x^3 \asymp x^2$  quando  $x$  tende a  $-\infty$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x x^2}{3x^3 + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{x^2}{x^3} \frac{1}{3 + \frac{2^x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{1}{x} \frac{1}{3 + \frac{2^x}{x^3}} = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3+0} = 0.$$

---

1D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-7x})^{e^{11x}} = +\infty.$$

**Vero:** Ricordando che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e,$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{11x}}{e^{7x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x} = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-7x})^{e^{11x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^{7x}}\right)^{e^{11x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{e^{7x}}\right)^{e^{7x}}\right]^{\frac{e^{11x}}{e^{7x}}} = [e]^{+\infty} = +\infty.$$

---

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 7x^2 + x(e^{3x} - 1) & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(7x^3)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

---

**2A)** La funzione  $f(x)$  è continua in  $x = 0$ .

**Vero:** Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [7x^2 + x(e^{3x} - 1)] = 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(7x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \frac{\sin(7x^3)}{x^3} = 0 \cdot 7 = 0.$$

Dato che i due limiti sono uguali, esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0),$$

e quindi la funzione è continua in  $x = 0$ .

---

**2B)** La funzione  $f(x)$  è derivabile in  $x = 0$ .

**Vero:** Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{7h^2 + h(e^{3h} - 1) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} [7h + e^{3h} - 1] = 0 + 0 = 0,$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin(7h^3)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(7h^3)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \frac{\sin(7h^3)}{h^3} = 0 \cdot 7 = 0.$$

Dato che i due limiti sono uguali (e finiti) la funzione  $f(x)$  è derivabile in  $x = 0$ , e si ha  $f'(0) = 0$ .

---

**2C)** Non esiste  $\xi < 0$  tale che  $f'(\xi) = 0$ .

**Falso:** Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione  $f(x)$  è continua e derivabile su  $(-\infty, 0]$ . Inoltre,  $f(0) = 0$  e (ad esempio)

$$f(-\sqrt[3]{\pi}) = \frac{\sin(-7\pi)}{-\sqrt[3]{\pi}} = 0.$$

Per il teorema di Rolle, applicato all'intervallo  $[-\sqrt[3]{\pi}, 0]$ , esiste  $\xi$  in tale intervallo tale che  $f'(\xi) = 0$ .

---

**2D)** Esiste  $0 < \xi < 1$  tale che  $f'(\xi) = e^3 + 6$ .

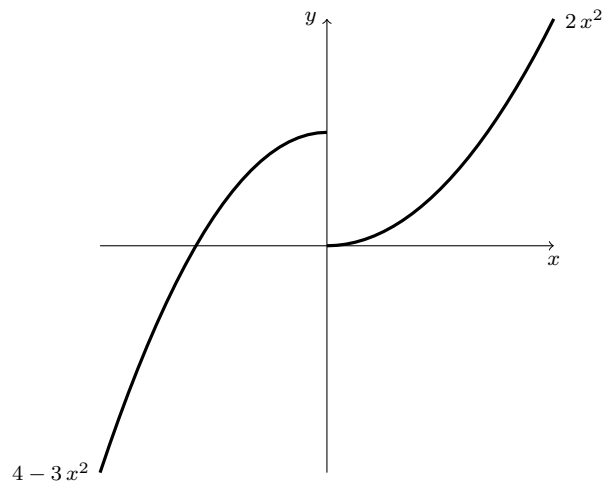
**Vero:** Per gli esercizi **2A)** e **2B)** la funzione  $f(x)$  è continua e derivabile in  $[0, 1]$ , ed è tale che  $f(0) = 0$  e  $f(1) = e^3 + 6$ . Per il teorema di Lagrange, esiste  $\xi$  in  $(0, 1)$  tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = e^3 + 6.$$

---

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 4 - 3x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Disegno non in scala

**3A)** La funzione  $f(x)$  è decrescente su  $(0, +\infty)$ .

**Falso:** Dato che per  $x \geq 0$  si ha  $f(x) = 2x^2$ , si ha

$$f'(x) = 4x, \quad \forall x > 0.$$

Dato che  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x > 0$ , la funzione  $f(x)$  è crescente su  $(0, +\infty)$ .

**3B)** La funzione  $f(x)$  è crescente su  $(-\infty, 0)$ .

**Vero:** Dato che  $f(x) = 4 - 3x^2$  per  $x < 0$ , si ha

$$f'(x) = -6x, \quad \forall x < 0.$$

Dato che  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x < 0$ , la funzione  $f(x)$  è crescente su  $(-\infty, 0)$ .

**3C)** La funzione  $f(x)$  è crescente su  $\mathbb{R}$ .

**Falso:** Per dimostrare che  $f(x)$  non è crescente è sufficiente osservare che

$$f(-1) = 4 - 3 = 1 > 0 = f(0).$$

**3D)** Si ha  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

**Vero:** Dato che  $f(x)$  è monotona crescente su  $(0, +\infty)$ , e che  $f(0) = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$(1) \quad f([0, +\infty)) = [0, +\infty).$$

Dato che  $f(x)$  è crescente anche su  $(-\infty, 0)$ , e che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [4 - 3x^2] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [4 - 3x^2] = 4,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$(2) \quad f((-\infty, 0)) = (-\infty, 4).$$

Da (1) e da (2) si ha quindi

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-\infty, 4) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

4A)

$$T_3(\sin(3x); 0) = 3x - \frac{9}{2}x^3.$$

**Vero:** Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si ha, ponendo  $t = 3x$ ,

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

da cui segue che

$$T_3(\sin(3x); 0) = 3x - \frac{9}{2}x^3.$$

---

4B)

$$T_3(x^2(e^{5x} - 1); 0) = x^3.$$

**Falso:** Ricordando che

$$e^t = 1 + t + o(t),$$

si ha, ponendo  $t = 5x$ ,

$$e^{5x} = 1 + 5x + o(x),$$

da cui segue che

$$x^2(e^{5x} - 1) = x^2(1 + 5x + o(x) - 1) = x^2(5x + o(x)) = 5x^3 + o(x^3),$$

da cui segue che

$$T_3(x^2(e^{5x} - 1); 0) = 5x^3 \neq x^3.$$

---

4C)

$$\frac{1 - \cos(4x^2)}{x^2} = 8x^2 + o(x^2).$$

**Vero:** Ricordando che si ha

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

si ha, ponendo  $t = 4x^2$ ,

$$\cos(4x^2) = 1 - \frac{(4x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 - 8x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\frac{1 - \cos(4x^2)}{x^2} = \frac{1 - 1 + 8x^4 + o(x^4)}{x^2} = \frac{8x^4 + o(x^4)}{x^2} = 8x^2 + o(x^2).$$

---

4D)

$$e^{4x} - 1 - \sin(4x) = 4x + o(x).$$

**Falso:** Ricordando che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = t + o(t^2),$$

si ha, ponendo  $t = 4x$ ,

$$e^{4x} = 1 + 4x + 8x^2 + o(x^2), \quad \sin(4x) = 4x + o(x^2).$$



Pertanto,

$$e^{4x} - 1 - \sin(4x) = 1 + 4x + 8x^2 + o(x^2) - 1 - 4x + o(x^2) = 8x^2 + o(x^2) \neq 4x + o(x).$$

---

5) Sia

$$f(x) = \frac{(x^2 + 7)(x + 6)}{x - 6}.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x).$$

c) Dimostrare che esiste il minimo di  $f(x)$  su  $(6, +\infty)$ .

d) Dimostrare che  $f((-\infty, 6)) = \mathbb{R}$ .

---

**Soluzione:**

a) Si ha

$$f(x) = \frac{(x^2 + 7)(x + 6)}{x - 6} = \frac{x^3}{x} \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{6}{x}\right)}{1 - \frac{6}{x}} = x^2 \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{6}{x}\right)}{1 - \frac{6}{x}}.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{6}{x}\right)}{1 - \frac{6}{x}} = (+\infty) \cdot \frac{(1 + 0)(1 + 0)}{1 - 0} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \frac{\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \left(1 + \frac{6}{x}\right)}{1 - \frac{6}{x}} = (+\infty) \cdot \frac{(1 + 0)(1 + 0)}{1 - 0} = +\infty.$$

b) Osserviamo che quando  $x$  tende a 6 da destra il binomio  $x - 6$  è positivo, mentre è negativo quando  $x$  tende a 6 da sinistra. Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{1}{x - 6} = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x - 6} = -\infty.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 6} (x^2 + 7)(x + 6) = 43 \cdot 12 = 516 > 0,$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 516 \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 516 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

c) Dal punto a) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre dal punto b) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = +\infty.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema di Weierstrass, esiste il minimo di  $f(x)$  sulla semiretta  $(6, +\infty)$ .

d) Dal punto a) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre dal punto b) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty.$$

Pertanto, per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha  $f((-\infty, 6)) = \mathbb{R}$ .

6) Sia

$$f(x) = (x^2 - 2x - 23) e^x.$$

a) Calcolare i limiti di  $f(x)$  a più infinito e meno infinito.

b) Calcolare  $T_2(x; 0)$ .

c) Determinare i punti stazionari di  $f(x)$  su  $\mathbb{R}$ , studiandone la natura.

d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di  $f(x)$  sull'intervallo  $[4, 6]$ .

---

**Soluzione:**

a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 23) e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Per il limite a meno infinito, poniamo  $y = -x$ ; allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} ((-y)^2 - 2(-y) - 23) e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 + 2y - 23}{e^y} = 0,$$

dato che  $e^y \gg y^k$  per ogni  $k$ .

b) Derivando, si ha

$$(1) \quad f'(x) = (2x - 2) e^x + (x^2 - 2x - 23) e^x = (x^2 - 25) e^x,$$

e, derivando ancora,

$$f''(x) = 2x e^x + (x^2 - 25) e^x = (x^2 + 2x - 25) e^x.$$

Dato che  $f(0) = -23$ , che  $f'(0) = -25$  e che  $f''(0) = -25$ , si ha

$$T_2(x; 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 = -23 - 25x - \frac{25}{2} x^2.$$

c) Dalla (1) si ha  $f'(x) = (x^2 - 25) e^x$ , che si annulla se e solo se  $x^2 - 25 = 0$ , ovvero se e solo se  $x = \pm 5$ . Studiando il segno di  $f'(x)$  si ha il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & -5 & & - & & 5 & & + \\ \hline & \nearrow & & & & \searrow & & & & \nearrow \end{array}$$

da cui si deduce che  $x = -5$  è un punto di massimo relativo, mentre  $x = 5$  è di minimo relativo.

d) Dallo studio del segno della derivata prima, si ha che  $x = 4$  è di massimo relativo (dato che  $f'(4) < 0$ ); che  $x = 5$  è di minimo relativo (come già sapevamo); che  $x = 6$  è di massimo relativo (dato che  $f'(6) > 0$ ).

Si ha poi

$$f(4) = -15e^4, \quad f(5) = -8e^5, \quad f(6) = e^6.$$

Osservando che la funzione  $f(x)$  è decrescente in  $[4, 5]$ , si ha  $f(4) > f(5)$ , e quindi

$$\max(\{f(x), x \in [4, 6]\}) = f(6) = e^6, \quad \min(\{f(x), x \in [4, 6]\}) = f(5) = -8e^5.$$