Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 1
2 Ottobre 2023 — Compito n. 00003

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 4\}\,.$$

1A) Il numero $x = 25$ appartiene ad E.
1B) Se x appartiene ad E, allora $x+24$ appartiene ad E.
1C) Non esiste il minimo di E.
1D) L'insieme $\mathbb{N}\setminus E$ non è limitato superiormente.

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-6| \le 6\} \setminus \{0\}.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.
2B) Il numero reale $x = 7$ non appartiene ad E.
2C) L'insieme E non è limitato inferiormente.
2D) L'insieme E non ha massimo.

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x + 21 \le 0\}\,.$$

3A) L'insieme E è vuoto.
3B) L'insieme E è un intervallo.
3C) L'insieme $E \setminus \{5\}$ non è un intervallo.
3D) L'insieme E non ha massimo.

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \le \sqrt{13}\}\,.$$

4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ non appartiene ad E.
4B) Il numero $x = -1$ appartiene ad E.
4C) L'insieme E è limitato.
4D) Esiste il minimo di E.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00003**

---

5) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 8\} \setminus \{0\}\,.$$
a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 6]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme
$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00003**

---

6) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x - 8)\,(x - 9)\,(x - 10) \leq 0\}\,.$$

a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzioni del compito 00003

1) Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 4\}\,.$$

1A) Il numero $x = 25$ appartiene ad E.

Falso: Il numero $x = 25$ non appartiene ad E dato che non è un multiplo di 4; infatti, dividendo x per 4 si ottiene come resto 1 (e non 0).

1B) Se x appartiene ad E, allora $x + 24$ appartiene ad E.

Vero: Se x appartiene ad E, x è un multiplo intero di 4; esiste quindi un intero k tale che $x = 4\,k$. Dato che $24 = 6 \cdot 4$, si ha quindi
$$x + 24 = 4\,k + 6 \cdot 4 = (k + 6) \cdot 4\,,$$
e quindi $x + 24$ appartiene ad E perché è un multiplo intero di 4.

1C) Non esiste il minimo di E.

Falso: Dato che E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, E ammette minimo per il principio di buon ordinamento. Un altro modo per dimostrare che E ha minimo è osservare che
$$E = \{0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \ldots\}\,,$$
e quindi il minimo di E esiste ed è 0.

1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato superiormente.

Vero: Se $\mathbb{N} \setminus E$ fosse limitato superiormente, esisterebbe N in $\mathbb{N}$ tale che se x appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$, allora $x < N$. Pertanto, $x = N$ appartiene ad E. Ma se N appartiene ad E, allora $N + 1$ non vi appartiene (perché dividendo N per 4 si ottiene come resto 1, e quindi $N + 1$ non è divisibile per 4). Abbiamo dunque un assurdo: tutti i numeri di $\mathbb{N} \setminus E$ sono strettamente minori di N, ma $N + 1 > N$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$. Ne segue quindi che $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato.

---

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \leq 6\} \setminus \{0\}.$$

Si ha
$$|x-6| \leq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad -6 \leq x - 6 \leq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 12\,,$$
cosicché
$$E = [0, 12] \setminus \{0\} = (0, 12]\,. \tag{1}$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Per la (1), si ha che $E = (0, 12]$ è un intervallo.

2B) Il numero reale $x = 7$ non appartiene ad E.

Falso: Dalla (1) segue che $x = 7$ appartiene ad E.

2C) L'insieme E non è limitato inferiormente.

Falso: Per la (1), l'insieme E è limitato inferiormente.

2D) L'insieme E non ha massimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E ha $M = 12$ come massimo.

---

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x + 21 \leq 0\}\,.$$

Si ha
$$x^2 - 10x + 21 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 3, 7\,.$$
Pertanto,
$$x^2 - 10x + 21 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 \leq x \leq 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [3, 7]\,.$$
Si ha quindi
$$E = [3, 7]\,. \tag{1}$$

3A) L'insieme E è vuoto.

Falso: Per la (1), l'insieme E non è vuoto.

3B) L'insieme E è un intervallo.

Vero: Per la (1), l'insieme E è un intervallo.

3C) L'insieme $E \setminus \{5\}$ non è un intervallo.

Vero: Per la (1) si ha
$$E \setminus \{5\} = [3, 5) \cup (5, 7]\,,$$
che non è un intervallo.

3D) L'insieme E non ha massimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E ha $M = 7$ come massimo.

---

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{13}\}\,.$$

Sia ha
$$|x| \leq \sqrt{13} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
da cui segue che
$$E = [-\sqrt{13}, \sqrt{13}] \cap \mathbb{Q}\,. \tag{1}$$

4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ non appartiene ad E.

Vero: Dato che $x = \sqrt{13}$ non è un numero razionale, x non appartiene ad E.

4B) Il numero $x = -1$ appartiene ad E.

Vero: Dato che $x = -1$ è un numero razionale, e che si ha
$$-\sqrt{13} \leq -1 \leq \sqrt{13}\,,$$
il numero $x = 1$ appartiene ad E.

4C) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che
$$E \subset [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
e quindi E è un insieme limitato dato che è contenuto in un insieme limitato.

4D) Esiste il minimo di E.

Falso: Il "candidato minimo" di E è $x = -\sqrt{13}$, che però non appartiene ad E dato che non è un numero razionale. Ne segue che non esiste il minimo di E.

---

5) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 8\} \setminus \{0\}\,.$$
a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0,6]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme
$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

Soluzione:
a) Si ha
$$E = [-4,8] \setminus \{0\} = [-4,0) \cup (0,8]\,, \tag{1}$$
che non è un intervallo.

b) Dalla (1) segue che (ad esempio) $x = 8$ è un maggiorante di E, e che (ad esempio) $x = -4$ è un minorante di E. Si ha infatti che
$$\overline{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 8\} = [8,+\infty)\,, \qquad \underline{m}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \le -4\} = (-\infty,-4]\,.$$

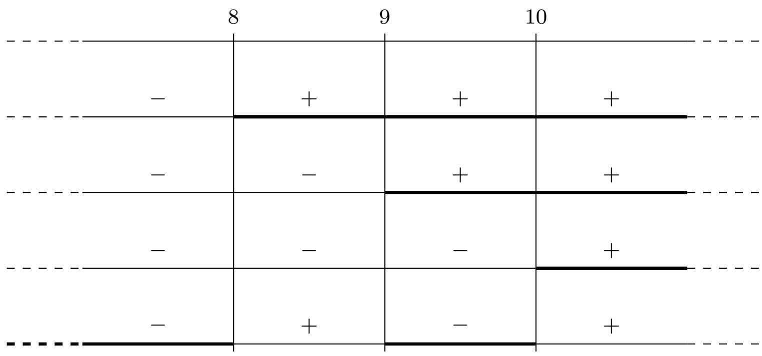
c) Si ha, per la (1),
$$E \cap [0,6] = ([-4,0) \cup (0,8]) \cap [0,6] = (0,6]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

d) Se x appartiene ad E, allora
$$-4 \le x \le 8\,, \qquad x \ne 0\,.$$
Se $x > 0$, si ha
$$0 < x \le 8 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \le 64\,,$$
mentre se $x < 0$, si ha
$$-4 \le x < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \le 16\,.$$
Si ha quindi che se x appartiene ad E, allora
$$0 < x \le \max(16,64) = 64\,,$$
e quindi
$$F = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \le 64\} = (0,64]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

6) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-8)\,(x-9)\,(x-10) \le 0\}\,.$$
a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0,+\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzione:
a) Se $x = 0$, si ha
$$(x-8)\,(x-9)\,(x-10) = (0-8)\,(0-9)\,(0-10) = -720 \le 0\,,$$
e quindi (per definizione) $x = 0$ appartiene ad E.

b) Consideriamo i segni dei tre fattori che determinano la disequazione che definisce E; si ha
$$x-8 \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \ge 8\,, \qquad x-9 \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \ge 9\,,$$
e
$$x-10 \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \ge 10\,.$$
Graficamente, quindi, si ha



e quindi
$$E = (-\infty, 8] \cup [9, 10]\,. \tag{1}$$

c) Dalla (1) si ha che
$$E \cap [0,+\infty) = [0,8] \cup [9,10]\,,$$
che è un insieme limitato (superiormente da 10 e inferiormente da 0).

d) Dato che dalla (1) segue che il massimo di E è $M = 10$, che è anche un numero razionale, allora il massimo di $E \cap \mathbb{Q}$ è $M = 10$. Sempre dalla (1) segue che
$$E \cap \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, 8, 9, 10\}\,,$$
che ha come minimo $m = 0$.