Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 2
9 Ottobre 2023 — Compito n. 00128

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ☐☐☐☐☐☐☐

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 14x + 40}\,.$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.
1B) L'insieme E non è limitato.
1C) L'insieme E non contiene l'insieme $[7, +\infty)$.
1D) La funzione $f(x)$ è dispari.

2) Sai E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \log_8(|x-7| - 1)\,.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.
2B) L'insieme E è limitato.
2C) Il valore $x = 8$ appartiene ad E.
2D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

3) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \frac{\sin(5\,x)}{\cos(x)}\,.$$

3A) L'insieme E è un intervallo.
3B) L'insieme E non è limitato.
3C) La funzione $f(x)$ non è periodica.
3D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

4) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \left|\frac{x+4}{x-4}\right|.$$

4A) L'insieme E non è un intervallo.
4B) L'insieme $E \cap (6, 8)$ non è un intervallo.
4C) La funzione $f(x)$ è pari.
4D) La funzione $f(x)$ è limitata.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00128**

5) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \sqrt{(x-2)\,(x-4)\,(x-6)}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-10}}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \log_9(-x^2+7x-10)\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt[6]{\cos(9\,x)-\frac{1}{2}}\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00128**

6) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{\mathrm{tg}(x) - 1}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \sqrt{5^{\sqrt{x-3}} - 25}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt{36 - x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt{\log_5(x-2) - 2}\,.$$

Soluzioni del compito 00128

1) Sia E l'insieme di definizione di
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 14x + 40}\,.$$

La funzione $f(x)$ è definita se e solo se l'argomento della radice è positivo:
$$E = \{\ \in \mathbb{R} : x^2 - 14x + 40 \geq 0\}\,.$$
Risolvendo l'equazione $x^2 - 14x + 40 = 0$ si trova $x = 4$ e $x = 10$; dovendo risolvere la disuguaglianza con il maggiore o uguale, si ha
$$x^2 - 14x + 40 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq 4 \ \text{ oppure } \ x \geq 10\,.$$
Si ha pertanto che
$$E = (-\infty, 4] \cup [10, +\infty)\,. \tag{1}$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.

Vero: Per la (1), E non è un intervallo, ed è l'unione di due intervalli disgiunti.

1B) L'insieme E non è limitato.

Vero: Dalla (1) si ha che E è illimitato, sia superiormente che inferiormente.

1C) L'insieme E non contiene l'insieme $[7, +\infty)$.

Vero: Per la (1), l'insieme $[7, 10)$ non è contenuto in E, e quindi l'insieme $[7, +\infty)$ non è contenuto in E.

1D) La funzione $f(x)$ è dispari.

Falso: Se la funzione $f(x)$ fosse pari (o fosse dispari), il suo insieme di definizione E sarebbe simmetrico rispetto all'origine. Dato che per la (1) l'insieme di definizione di $f(x)$ non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione $f(x)$ non è né pari, né dispari.
Alternativamente, la funzione è definita per $x = -7$, ma non lo è per $-x = 7$ e quindi, per tale valore di x, non ha senso chiedersi se si abbia $f(-x) = f(x)$, ovvero $f(-x) = -f(x)$.

---

2) Sai E l'insieme di definizione di
$$f(x) = \log_8(|x-7|-1)\,.$$

La funzione $f(x)$ è definita se e solo se il suo argomento è positivo, e quindi
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-7|-1 > 0\}\,.$$
Risolvendo la disequazione, si ha
$$|x-7|-1>0 \iff |x-7|>1 \iff x-7>1 \text{ oppure } x-7<-1\,.$$
Pertanto x appartiene ad E se e solo se $x > 8$, ovvero $x < 6$. Si ha quindi

(1) $$E = (-\infty, 6) \cup (8, +\infty)\,.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

Vero: Dalla (1) segue che E non è un intervallo, ed è l'unione di due intervalli disgiunti.

2B) L'insieme E è limitato.

Falso: Dalla (1) segue che l'insieme E è illimitato, sia superiormente che inferiormente.

2C) Il valore $x = 8$ appartiene ad E.

Falso: Dalla (1) segue che $x = 8$ non appartiene ad E.

2D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

Vero: Se la funzione $f(x)$ fosse pari (o fosse dispari), il suo insieme di definizione E sarebbe simmetrico rispetto all'origine. Dato che per la (1) l'insieme di definizione di $f(x)$ non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione $f(x)$ non è né pari, né dispari.
Alternativamente, la funzione è definita per $x = -7$, ma non lo è per $-x = 7$ e quindi, per tale valore di x, non ha senso chiedersi se si abbia $f(-x) = f(x)$, ovvero $f(-x) = -f(x)$.

---

3) Sia E l'insieme di definizione di
$$f(x) = \frac{\sin(5\,x)}{\cos(x)}\,.$$

Il denominatore della frazione che definisce $f(x)$ si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, con k in $\mathbb{Z}$. Per tali valori, si ha
$$5\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right) = \frac{5\,\pi}{2} + 5\,k\,\pi\,.$$
Per tutti questi valori (un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$ più un multiplo intero di π) la funzione $\sin(y)$ vale 1 o -1. Pertanto, se si annulla il denominatore della frazione, il numeratore non si annulla, e quindi l'insieme di definizione di $f(x)$ coincide con l'insieme dei numeri reali tali che $\cos(x) \neq 0$. Si ha quindi

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{1}$$

3A) L'insieme E è un intervallo.

Falso: Dalla (1) segue che E non è un intervallo: è pieno di buchi...

3B) L'insieme E non è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che l'insieme E non è limitato, essendo illimitato sia superiormente che inferiormente.

3C) La funzione $f(x)$ non è periodica.

Falso: Si ha, ricordando che seno e coseno sono periodiche di periodo 2π, e se x è tale che $f(x)$ è definita (esercizio: per tali valori è definita anche $f(x + 2\pi)$)
$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(5\,(x + 2\pi))}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(5\,x + 10\,\pi)}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(5\,x)}{\cos(x)} = f(x)\,,$$
e quindi la funzione $f(x)$ è periodica di periodo 2π.

3D) La funzione $f(x)$ non è né pari né dispari.

Falso: Si ha, ricordando che la funzione seno è dispari, che la funzione coseno è pari, e se x è tale che $f(x)$ è definita (esercizio: per tali valori è definita anche $f(-x)$),
$$f(-x) = \frac{\sin(-5\,x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(5\,x)}{\cos(x)} = -f(x)\,,$$
e quindi la funzione $f(x)$ è dispari.

---

4) Sia E l'insieme di definizione di

$$f(x) = \left|\frac{x+4}{x-4}\right|.$$

La funzione $f(x)$ è definita se e solo se il denominatore della frazione all'interno del modulo non si annulla, ovvero se e solo se $x - 4 \neq 0$. Si ha pertanto

$$E = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)\,. \tag{1}$$

Esercizio: dimostrare che

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}\,, \quad \text{per ogni } x \neq \pm 4.$$

4A) L'insieme E non è un intervallo.

Vero: Per la (1), l'insieme E non è un intervallo, ed è l'unione di due intervalli disgiunti.

4B) L'insieme $E \cap (6, 8)$ non è un intervallo.

Falso: Dalla (1) si ha che

$$E \cap (6, 8) = [(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)] \cap (6, 8) = (6, 8)\,,$$

che è un intervallo.

4C) La funzione $f(x)$ è pari.

Falso: Si ha

$$f(5) = \left|\frac{5+4}{5-4}\right| = 9\,,$$

e

$$f(-5) = \left|\frac{-5+4}{-5-4}\right| = \frac{1}{9}\,.$$

Dato che $f(-5) \neq \pm f(5)$, la funzione non è né pari né dispari.

4D) La funzione $f(x)$ è limitata.

Falso: Calcoliamo $f(4 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Si ha

$$f(4 + \varepsilon) = \left|\frac{4 + 4 + \varepsilon}{4 + \varepsilon - 4}\right| = \frac{8 + \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{8}{\varepsilon} + 1\,.$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, con n in $\mathbb{N}$, si ha

$$f(4 + 1/n) = 8\,n + 1\,,$$

che diventa arbitrariamente grande quando n diventa grande. Ne segue che l'insieme dei valori assunti da $f(x)$ è illimitato superiormente, e quindi che la funzione non è limitata.

---

5) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \sqrt{(x-2)\,(x-4)\,(x-6)}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-10}}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \log_9(-x^2+7x-10)\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt[6]{\cos(9\,x)-\frac{1}{2}}\,.$$

Soluzione:

a) La funzione è definita se e solo se l'argomento della radice è maggiore o uguale a zero. Si tratta quindi di risolvere la disequazione

$$(x-2)\,(x-4)\,(x-6) \geq 0\,.$$

Studiamo il segno dei tre termini separatamente:

$$x-2 \geq 0 \iff x \geq 2\,, \qquad x-4 \geq 0 \iff x \geq 6\,, \qquad x-6 \geq 0 \iff x \geq 6\,,$$

il che porta al seguente schema:

		2	4	6
$x \geq 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x \geq 4$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x \geq 6$	$-$	$-$	$-$	$+$
segno	$-$	$+$	$-$	$+$

Si ha quindi $(x-2)\,(x-4)\,(x-6) \geq 0$ se e solo se $2 \leq x \leq 4$ ovvero se $x \geq 6$. Ne segue che l'insieme di definizione di $f(x)$ è l'insieme

$$F = [2,4] \cup [8,+\infty)\,,$$

che non è un intervallo.

b) La funzione $g(x)$ è definita se e solo se gli argomenti delle radici sono positivi, e il denominatore è diverso da zero:

$$x-2 \geq 0\,, \qquad x-10 \geq 0\,, \qquad \sqrt{x-2}+\sqrt{x-10} \neq 0\,.$$

Risolvendo le prime due disequazioni, abbiamo che deve essere $x \geq 2$ **e** $x \geq 10$; ovvero, che deve essere $x \geq 10$. Osserviamo ora che se $x \geq 10$ si ha

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-10} \geq \sqrt{8}+\sqrt{10-10} = \sqrt{8} > 0\,.$$

In definitiva, se le due radici quadrate sono definite, la loro somma non si annulla mai. Si ha pertanto che l'insieme di definizione di $g(x)$ è

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10\} = [10,+\infty)\,,$$

che è un intervallo (illimitato superiormente).

c) La funzione $h(x)$ è definita se e solo se l'argomento del logaritmo è positivo, ovvero se e solo se

$$-x^2+7x-10 > 0 \qquad \iff \qquad x^2-7x+10 < 0\,.$$

Risolvendo l'equazione $x^2-7x+10=0$ si trova $x=2$ oppure $x=5$. Dato che ci interessano i valori in cui il polinomio è negativo, si deve considerare l'intervallo

$$H = (2,5)\,,$$

che è pertanto l'insieme di definizione della funzione $h(x)$.

d) Dato che la radice è pari, la funzione $k(x)$ è definita se e solo se l'argomento è positivo. Ricordiamo ora che

$$\cos(y) \geq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\,\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \right].$$

Dato che nella funzione compare $\cos(9\,x)$, definendo $y = 9\,x$ si ha che la funzione $k(x)$ è definita nell'insieme

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{27} + \frac{2}{9}\,k\,\pi, \frac{\pi}{27} + \frac{2}{9}\,k\,\pi \right],$$

che non è un intervallo.

6) Si determinino gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni, dicendo se sono intervalli o no.

$$\textbf{a)}\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{\mathrm{tg}(x) - 1}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \sqrt{5^{\sqrt{x-3}} - 25}\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt{36 - x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \sqrt{\log_5(x-2) - 2}\,.$$

Soluzione:

a) Il denominatore della frazione che definisce $f(x)$ si annulla quando $\mathrm{tg}(x) = 1$, ovvero per

$$x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Per tali valori si ha

$$2\,x = 2\left(\frac{\pi}{4} + k\,\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi\,,$$

e quindi $\sin(2x) = 1$ qualsiasi sia il valore di k. Si ha pertanto che l'insieme di definizione di $f(x)$ è

$$F = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

che non è un intervallo.

b) Affinché la funzione $g(x)$ sia definita deve essere, contemporaneamente, $x - 3 \geq 0$ (condizione di esistenza per la radice "interna") e $5^{\sqrt{x-3}} - 25 \geq 0$ (condizione di esistenza per la radice "interna"). La prima condizione è $x \geq 3$, mentre per la seconda si ha

$$5^{\sqrt{x-3}} - 25 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5^{\sqrt{x-3}} \geq 25 \quad\Longleftrightarrow\quad 5^{\sqrt{x-3}} \geq 5^2 \Longleftrightarrow \quad \Longleftrightarrow\ \sqrt{x-3} \geq 2\,,$$

da cui segue che deve essere $x - 3 \geq 4$, ovvero $x \geq 7$. Delle due condizioni, la seconda è più forte della prima, e quindi l'insieme di definizione di $g(x)$ è

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 7\} = [7, +\infty)\,,$$

che è un intervallo (illimitato superiormente).

c) Affinché la funzione $h(x)$ sia definita, devono essere contemporaneamente maggiori o uguali di zero gli argomenti delle radici; deve quindi essere

$$x - 6 \geq 0\,, \qquad \text{e} \qquad 36 - x^2 \geq 0\,.$$

Risolvendo la prima disequazione, si ha che deve essere $x \geq 6$; risolvendo la seconda, si ha che deve essere $-6 \leq x \leq 6$. Ne segue quindi che l'insieme di definizione della funzione $h(x)$ è

$$H = [6, +\infty) \cap [-6, 6] = \{6\}\,,$$

che non è un intervallo (o, al massimo, è un intervallo degenere).

d) Affinché la funzione $k(x)$ sia definita, deve essere positivo l'argomento del logaritmo, e maggiore o uguale a zero l'argomento della radice; deve quindi essere

$$x - 2 > 0 \qquad \text{e} \qquad \log_5(x-2) - 2 \geq 0\,.$$

La prima disequazione è equivalente a $x > 2$, mentre per la seconda si ha

$$\log_5(x-2) - 2 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \log_5(x-2) \geq 2 \quad\Longleftrightarrow\quad x - 2 \geq 5^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x \geq 27\,.$$

Dato che la seconda condizione è più forte della prima, l'insieme di definizione della funzione $k(x)$ è l'intervallo (illimitato superiormente)

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 27\} = [27, +\infty)\,.$$