Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 8
18 Dicembre 2023 — Compito n. 00009

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,x^2}-1}{\sin(9\,x)} = 0\,.$$

1B)
$$\lim_{x\to 2} \frac{\log^2(3-x)}{1-\cos(7\,(x-2))} = \frac{8}{49}\,.$$

1C)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\,5^x}{x^3+5^x} = 0\,.$$

1D)
$$\lim_{x\to 0^+} (1+4\,x)^{\frac{5}{x}} = e^{\frac{5}{4}}\,.$$

2) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-5x+5 & \text{se } x \geq 1, \\ x^3-x^2-2x+4 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ è continua in $x=1$.
2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x=1$.
2C) Non esiste $f''(1)$.
2D) Si ha $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

3) Sia
$$f(x) = (6\,x-11)\,e^{6\,x}\,.$$

3A) La funzione $f(x)$ è decrescente su $[10,+\infty)$.
3B) La funzione $f(x)$ è crescente su $(-\infty,0]$.
3C)
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0\,.$$
3D) Si ha $f([11/6,+\infty)) = [0,+\infty)$.

4) Sia
$$f(x) = e^{6\,x} - \sin(2\,x)\,.$$

4A)
$$T_1(f(x);0) = 4\,x\,.$$

4B)
$$T_1(f(x);0) \neq T_2(f(x);0)\,.$$

4C)
$$T_2(x\,f(x^2);0) = x+4\,x^2\,.$$

4D)
$$\frac{f(x)-1-4\,x}{x} = 18\,x + o(x)\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00009**

---

5) Sia

$$f(x) = x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 48x\,.$$

a) Calcolare $T_2(f(x); 0)$.
b) Dimostrare che esiste il minimo di $f(x)$ su $\mathbb{R}$.
c) Determinare massimi e minimi relativi di $f(x)$ su $\mathbb{R}$.
d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ su $[-2, 2]$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00009**

6) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 4\,x - 7 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Dimostrare che $f(x)$ non è continua in $x = 0$.
b) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui $f(x)$ è derivabile, e calcolare $f'(x)$ in tale insieme.
c) Dimostrare che $f(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
d) Calcolare $f(\mathbb{R})$.

Soluzioni del compito 00009

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,x^2}-1}{\sin(9\,x)} = 0\,.$$

Vero: Ricordando che $e^t - 1 \approx t$ e che $\sin(t) \approx t$ quando t tende a zero, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,x^2}-1}{\sin(9\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\,x^2}{9\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\,x = 0\,.$$

1B)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log^2(3-x)}{1-\cos(7\,(x-2))} = \frac{8}{49}\,.$$

Falso: Con il cambio di variabile $y = x - 2$ si ha

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log^2(3-x)}{1-\cos(7\,(x-2))} = \lim_{x\to 2} \frac{\log^2(1-(x-2))}{1-\cos(7\,(x-2))} = \lim_{y\to 0} \frac{[\log(1-y)]^2}{1-\cos(7\,y)}\,.$$

Ricordando che $\log(1+t) \approx t$ e che $1-\cos(t) \approx t^2/2$ quando t tende a zero, si ha

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log^2(1-y)}{1-\cos(7\,y)} = \lim_{y\to 0} \frac{(-y)^2}{(7\,y)^2/2} = \lim_{y\to 0} \frac{2\,y^2}{49\,y^2} = \frac{2}{49} \neq \frac{8}{49}\,.$$

1C)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\,5^x}{x^3+5^x} = 0\,.$$

Falso: Si ha

$$\frac{x^2\,5^x}{x^3+5^x} = x^2\,\frac{5^x}{x^3+5^x} = x^2\,\frac{5^x}{5^x}\,\frac{1}{1+\frac{x^3}{5^x}} = x^2\,\frac{1}{1+\frac{x^3}{5^x}}\,.$$

Pertanto, ricordando che $5^x \gg x^3$, si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\,5^x}{x^3+5^x} = \lim_{x\to +\infty} x^2\,\frac{1}{1+\frac{x^3}{5^x}} = (+\infty)\cdot\frac{1}{1+0} = +\infty \neq 0\,.$$

1D)

$$\lim_{x\to 0^+} (1+4\,x)^{\frac{5}{x}} = e^{\frac{5}{4}}\,.$$

Falso: Con la sostituzione $y = \frac{1}{x}$, da cui $x = \frac{1}{y}$, e l'osservazione che se x tende a zero da destra allora y tende a più infinito, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (1+4\,x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{4}{y}\right)^{5\,y}.$$

Ricordando che

$$\lim_{t\to +\infty} \left(1+\frac{A}{t}\right)^{t} = e^A\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (1+4\,x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{4}{y}\right)^{5\,y} = \lim_{y\to +\infty} \left[\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\right]^5 = [e^4]^5 = e^{20} \neq e^{\frac{5}{4}}\,.$$

---

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x + 5 & \text{se } x \geq 1, \\ x^3 - x^2 - 2x + 4 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

2A) La funzione $f(x)$ è continua in $x = 1$.

Vero: Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [2x^2 - 5x + 5] = 2\,,$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} [x^3 - x^2 - 2x + 4] = 2\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali, si ha

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)\,,$$

e quindi la funzione $f(x)$ è continua in $x = 1$.

2B) La funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 1$.

Falso: Si ha

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(1+h)^2 - 5(1+h) + 5 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h^2 - h}{h} = -1\,,$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^3 - (1+h)^2 - 2(1+h) + 4 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3 + 2h^2 - h}{h} = -1\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali e finiti, si ha che $f(x)$ è derivabile in $x = 1$ e

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1 = f'(1)\,.$$

2C) Non esiste $f''(1)$.

Falso: Dall'esercizio **2B)** si ha (derivando l'espressione di $f(x)$ per $x > 1$ e per $x < 1$),

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{se } x > 1, \\ -1 & \text{se } x = 1, \\ 3x^2 - 2x - 2 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4(1+h) - 5 - -1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4\,h}{h} = 4\,,$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3(1+h)^2 - 2(1+h) - 2 - -1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3\,h^2 + 4\,h}{h} = 4\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali e finiti, si ha che $f'(x)$ è derivabile in $x = 1$ (e quindi esiste $f''(1)$) e

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} = 4 = f''(1)\,.$$

2D) Si ha $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

Falso: Dato che $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [2x^2 - 5x + 5] = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [x^3 - x^2 - 2x + 4] = -\infty\,,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

---

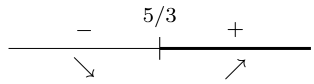
3) Sia

$$f(x) = (6\,x - 11)\,\mathrm{e}^{6\,x}\,.$$

Si ha

$$f'(x) = 6\,\mathrm{e}^{6\,x} + 6\,(6\,x - 11)\,\mathrm{e}^{6\,x} = 6\,(6\,x - 10)\,\mathrm{e}^{6\,x}$$

Dato che l'esponenziale è sempre positivo, si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $6\,x - 10 \geq 0$; si ottiene così il seguente diagramma:



3A) La funzione $f(x)$ è decrescente su $[10, +\infty)$.

Falso: Dallo studio del segno della derivata segue che $f'(x) \geq 0$ su $[10, +\infty)$, e quindi la funzione è crescente su tale insieme.

3B) La funzione $f(x)$ è crescente su $(-\infty, 0]$.

Falso: Dallo studio del segno della derivata segue che $f'(x) \leq 0$ su $(-\infty, 0]$, e quindi la funzione è decrescente su tale insieme.

3C)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,.$$

Vero: Si ha, con il cambio di variabile $y = -x$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (6\,x - 11)\,\mathrm{e}^{6\,x} = \lim_{y \to +\infty} (-6\,y - 11)\,\mathrm{e}^{-6\,y} = \lim_{y \to +\infty} -\frac{6\,y + 11}{\mathrm{e}^{6\,y}} = 0\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato che $\mathrm{e}^{6\,y} \gg 6\,y + 11$.

3D) Si ha $f([11/6, +\infty)) = [0, +\infty)$.

Vero: Dato che $f(11/6) = 0$, che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (6\,x - 11)\,\mathrm{e}^{6\,x} = +\infty\,,$$

e che la funzione è continua e crescente su $[11/6, +\infty)$ (dato che la derivata è positiva su tale insieme), per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

$$f([11/6, +\infty)) = [0, +\infty)\,.$$

---

4) Sia
$$f(x) = \mathrm{e}^{6\,x} - \sin(2\,x)\,.$$

Ricordando che
$$\mathrm{e}^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,, \qquad \sin(s) = s - \frac{s^3}{3} + \mathrm{o}(s^3)\,,$$
si ha, con la sostituzione $t = 6\,x$ e $s = 2\,x$,

(1) $$\mathrm{e}^{6\,x} = 1 + 6\,x + 18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,, \qquad \sin(2\,x) = 2\,x - \frac{4}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

4A)
$$T_1(f(x); 0) = 4\,x\,.$$

Falso: Dalla (1) segue che
$$f(x) = \mathrm{e}^{6\,x} - \sin(2\,x) = 1 + 6\,x + 18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 2\,x + \frac{4}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) = 1 + 4\,x + \mathrm{o}(x)\,,$$
da cui segue che
$$T_1(f(x); 0) = 1 + 4\,x \neq 4\,x\,.$$

4B)
$$T_1(f(x); 0) \neq T_2(f(x); 0)\,.$$

Vero: Dalla (1) segue che
$$f(x) = \mathrm{e}^{6\,x} - \sin(2\,x) = 1 + 6\,x + 18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 2\,x + \frac{4}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) = 1 + 4\,x + +18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,,$$
da cui segue che
$$T_2(f(x); 0) = 1 + 4\,x + 18\,x^2\,,$$
che è diverso da $T_1(f(x); 0) = 1 + 4\,x$ (si veda l'esercizio **4A)**, oppure si prendano i termini di grado minore o uguale a 1 di $T_2(f(x); 0)$).

4C)
$$T_2(x\,f(x^2); 0) = x + 4\,x^2\,.$$

Falso: Dalla (1) si ha (sostituendo ovunque x^2 a x)
$$f(x^2) = \mathrm{e}^{6\,x^2} - \sin(2\,x^2) = 1 + 6\,x^2 + 18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) - 2\,x^2 + \frac{4}{3}\,x^6 + \mathrm{o}(x^6) = 1 + \mathrm{o}(x)\,,$$
da cui segue che
$$x\,f(x^2) = x + \mathrm{o}(x^2)\,.$$
Quest'ultima relazione implica che
$$T_2(x\,f(x^2); 0) = x \neq x + 4\,x^2\,.$$

4D)
$$\frac{f(x) - 1 - 4\,x}{x} = 18\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

Vero: Dalla (1) si ha
$$f(x) = \mathrm{e}^{6\,x} - \sin(2\,x) = 1 + 6\,x + 18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 2\,x + \frac{4}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) = 1 + 4\,x + 18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{f(x) - 1 - 4\,x}{x} = \frac{1 + 4\,x + 18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 1 - 4}{x} = \frac{18\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{x} = 18\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

5) Sia

$$f(x) = x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 48x\,.$$

a) Calcolare $T_2(f(x); 0)$.
b) Dimostrare che esiste il minimo di $f(x)$ su $\mathbb{R}$.
c) Determinare massimi e minimi relativi di $f(x)$ su $\mathbb{R}$.
d) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$ su $[-2, 2]$.

Soluzione:
a) Dato che $f(x)$ è un polinomio, il suo polinomio di Taylor di ordine 2 nell'origine si ottiene prendendo i termini di grado minore o uguale a 2 del polinomio:

$$T_2(f(x); 0) = 48\,x - 2\,x^2\,.$$

b) Dato che $f(x)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} [x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 48x] = +\infty\,,$$

il minimo di $f(x)$ su $\mathbb{R}$ esiste per una generalizzazione del teorema di Weierstrass.

c) Derivando, si ha

$$f'(x) = 4\,x^3 - 48\,x^2 - 4\,x + 48 = 4\,(x^3 - 12\,x^2 - x + 12) = 4\,(x - 12)\,(x^2 - 1)\,.$$

Risolvendo la disequazione $f'(x) \geq 0$ si ha il seguente schema:

	-1	1	12	
$x - 12 \geq 0$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 1 \geq 0$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x) \geq 0$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dallo schema si deduce che $x = 1$ è un punto di massimo relativo, e che $x = -1$ e $x = 12$ sono punti di minimo relativo.

d) Il segno di $f'(x)$ sull'intervallo $[-2, 2]$ è il seguente:

-2		-1		1		2
	$-$		$+$		$-$	
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dallo schema, si ricava che $x = -2$ è di massimo relativo (perché $f'(-2) < 0$), che $x = -1$ è di minimo relativo (come già sapevamo), che $x = 1$ è di massimo relativo (come già sapevamo), e che $x = -2$ è di minimo relativo (perché $f'(2) < 0$).
Si ha poi

$$f(-2) = 40\,, \qquad f(-1) = -33\,, \qquad f(1) = 31\,, \qquad f(2) = -24\,,$$

da cui si ricava facilmente che

$$\max(\{f(x)\,,\ x \in [-2, 2]\}) = 40 = f(-2)\,, \qquad \min(\{f(x)\,,\ x \in [-2, 2]\}) = -33 = f(-1)\,.$$

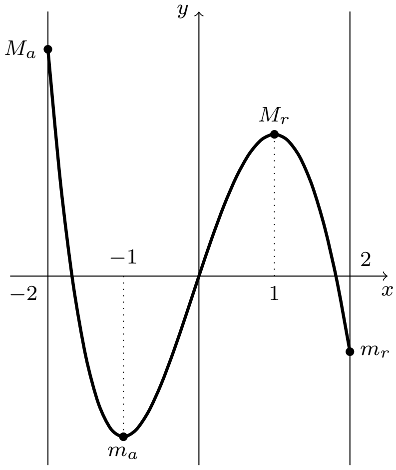


Grafico non in scala

6) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 4\,x - 7 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Dimostrare che $f(x)$ non è continua in $x = 0$.
b) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui $f(x)$ è derivabile, e calcolare $f'(x)$ in tale insieme.
c) Dimostrare che $f(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
d) Calcolare $f(\mathbb{R})$.

Soluzione:
a) Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 3\,x^2 = 0\,,$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [4\,x - 7] = -7\,.$$

Dato che i due limiti sono diversi, non esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a zero, e quindi la funzione non è continua in $x = 0$.

b) La funzione è derivabile per $x > 0$ (è un polinomio di secondo grado) e per $x < 0$ (è un polinomio di primo grado), e non è derivabile per $x = 0$ (perché non è continua in $x = 0$ e quindi non può essere derivabile in quel punto). Si ha poi, derivando per $x \neq 0$,

$$f'(x) = \begin{cases} 6\,x & \text{se } x > 0, \\ 4 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Dato che $f'(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, la funzione è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e sulla semiretta $[0, +\infty)$. Inoltre, se $x < 0 < y$ si ha

(1) $$f(x) = 4\,x - 7 < 0 \leq 3\,y^2 = f(y)\,.$$

Siano ora $x < y$ in $\mathbb{R}$. Se $x < y < 0$ si ha $f(x) < f(y)$ perché la funzione è crescente su $(-\infty, 0)$; se $x < 0 \leq y$, si ha $f(x) < f(y)$ per la (1); se $0 \leq x < y$ si ha $f(x) < f(y)$ perché la funzione è crescente su $(0, +\infty)$. In definitiva,

$$x < y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < f(y)\,,$$

e quindi $f(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

d) Dato che $f(x)$ è continua e crescente su $(-\infty, 0)$, e che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [4\,x - 7] = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -7\,,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

(2) $$f((-\infty, 0)) = (-\infty, -7)\,.$$

Dato che $f(x)$ è continua e crescente su $[0, +\infty)$, e che

$$f(0) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3\,x^2 = +\infty\,,$$

per una generalizzazione del teorema dei valori intermedi si ha

(3) $$f([0, +\infty)) = [0, +\infty)\,.$$

Da (2) e (3) segue allora che

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-\infty, -7) \cup [0, +\infty)\,.$$

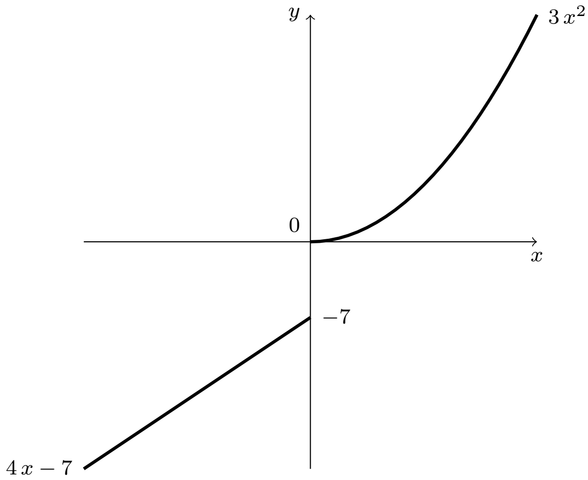


Grafico non in scala