Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 1
2 Ottobre 2023 — Compito n. 00064

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ☐☐☐☐☐☐☐

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 6\}\,.$$

1A) Il numero $x = 37$ appartiene ad E.
1B) Se x appartiene ad E, allora $x + 48$ non appartiene ad E.
1C) Non esiste il minimo di E.
1D) L'insieme $\mathbb{N}\setminus E$ non è limitato superiormente.

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \le 4\} \setminus \{0\}.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.
2B) Il numero reale $x = 5$ appartiene ad E.
2C) L'insieme E non è limitato superiormente.
2D) L'insieme E non ha massimo.

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 20x + 75 \le 0\}\,.$$

3A) L'insieme E è vuoto.
3B) L'insieme E non è un intervallo.
3C) L'insieme $E \setminus \{10\}$ è un intervallo.
3D) L'insieme E ha minimo.

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \le \sqrt{13}\}\,.$$

4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ appartiene ad E.
4B) Il numero $x = -1$ non appartiene ad E.
4C) L'insieme E è limitato.
4D) Non esiste il massimo di E.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00064**

5) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 8\} \setminus \{0\}\,.$$

a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 6]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme

$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00064**

---

6) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x - 7)\,(x - 8)\,(x - 9) \leq 0\}\,.$$
a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzioni del compito 00064

1) Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 6\}\,.$$

1A) Il numero $x = 37$ appartiene ad E.

Falso: Il numero $x = 37$ non appartiene ad E dato che non è un multiplo di 6; infatti, dividendo x per 6 si ottiene come resto 1 (e non 0).

1B) Se x appartiene ad E, allora $x + 48$ non appartiene ad E.

Falso: Se x appartiene ad E, x è un multiplo intero di 6; esiste quindi un intero k tale che $x = 6\,k$. Dato che $48 = 8 \cdot 6$, si ha quindi
$$x + 48 = 6\,k + 8 \cdot 6 = (k + 8) \cdot 6\,,$$
e quindi $x + 48$ appartiene ad E perché è un multiplo intero di 6.

1C) Non esiste il minimo di E.

Falso: Dato che E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, E ammette minimo per il principio di buon ordinamento. Un altro modo per dimostrare che E ha minimo è osservare che
$$E = \{0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \ldots\}\,,$$
e quindi il minimo di E esiste ed è 0.

1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato superiormente.

Vero: Se $\mathbb{N} \setminus E$ fosse limitato superiormente, esisterebbe N in $\mathbb{N}$ tale che se x appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$, allora $x < N$. Pertanto, $x = N$ appartiene ad E. Ma se N appartiene ad E, allora $N + 1$ non vi appartiene (perché dividendo N per 6 si ottiene come resto 1, e quindi $N + 1$ non è divisibile per 6). Abbiamo dunque un assurdo: tutti i numeri di $\mathbb{N} \setminus E$ sono strettamente minori di N, ma $N + 1 > N$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$. Ne segue quindi che $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato.

---

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \le 4\} \setminus \{0\}.$$

Si ha
$$|x - 4| \le 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -4 \le x - 4 \le 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \le x \le 8\,,$$
cosicché
$$E = [0, 8] \setminus \{0\} = (0, 8]\,. \tag{1}$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Per la (1), si ha che $E = (0, 8]$ è un intervallo.

2B) Il numero reale $x = 5$ appartiene ad E.

Vero: Dalla (1) segue che $x = 5$ appartiene ad E.

2C) L'insieme E non è limitato superiormente.

Falso: Per la (1), l'insieme E è limitato superiormente.

2D) L'insieme E non ha massimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E ha $M = 8$ come massimo.

---

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 20x + 75 \le 0\}\,.$$

Si ha
$$x^2 - 20x + 75 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 5, 15\,.$$
Pertanto,
$$x^2 - 20x + 75 \le 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5 \le x \le 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [5, 15]\,.$$
Si ha quindi

(1) $$E = [5, 15]\,.$$

3A) L'insieme E è vuoto.

Falso: Per la (1), l'insieme E non è vuoto.

3B) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Per la (1), l'insieme E è un intervallo.

3C) L'insieme $E \setminus \{10\}$ è un intervallo.

Falso: Per la (1) si ha
$$E \setminus \{10\} = [5, 10) \cup (10, 15]\,,$$
che non è un intervallo.

3D) L'insieme E ha minimo.

Vero: Per la (1), l'insieme E ha $m = 5$ come minimo.

---

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{13}\}\,.$$

Sia ha
$$|x| \leq \sqrt{13} \qquad \iff \qquad -\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13} \qquad \iff \qquad x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
da cui segue che
$$E = [-\sqrt{13}, \sqrt{13}] \cap \mathbb{Q}\,. \tag{1}$$

4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ appartiene ad E.

Falso: Dato che $x = \sqrt{13}$ non è un numero razionale, x non appartiene ad E.

4B) Il numero $x = -1$ non appartiene ad E.

Falso: Dato che $x = -1$ è un numero razionale, e che si ha
$$-\sqrt{13} \leq -1 \leq \sqrt{13}\,,$$
il numero $x = 1$ appartiene ad E.

4C) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che
$$E \subset [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
e quindi E è un insieme limitato dato che è contenuto in un insieme limitato.

4D) Non esiste il massimo di E.

Vero: Il "candidato massimo" di E è $x = \sqrt{13}$, che però non appartiene ad E dato che non è un numero razionale. Ne segue che non esiste il massimo di E.

---

5) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 8\} \setminus \{0\}.$$
a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0,6]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme
$$F = \{x^2,\ x \in E\}.$$

Soluzione:
a) Si ha
$$E = [-3,8] \setminus \{0\} = [-3,0) \cup (0,8], \tag{1}$$
che non è un intervallo.

b) Dalla (1) segue che (ad esempio) $x = 8$ è un maggiorante di E, e che (ad esempio) $x = -3$ è un minorante di E. Si ha infatti che
$$\overline{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 8\} = [8,+\infty), \qquad \underline{m}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\} = (-\infty,-3].$$

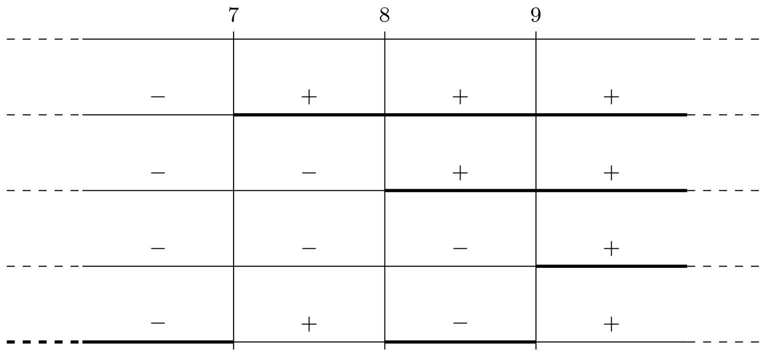
c) Si ha, per la (1),
$$E \cap [0,6] = ([-3,0) \cup (0,8]) \cap [0,6] = (0,6],$$
che è un insieme che non ha minimo.

d) Se x appartiene ad E, allora
$$-3 \leq x \leq 8, \qquad x \neq 0.$$
Se $x > 0$, si ha
$$0 < x \leq 8 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \leq 64,$$
mentre se $x < 0$, si ha
$$-3 \leq x < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \leq 9.$$
Si ha quindi che se x appartiene ad E, allora
$$0 < x \leq \max(9,64) = 64,$$
e quindi
$$F = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 64\} = (0,64],$$
che è un insieme che non ha minimo.

6) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-7)\,(x-8)\,(x-9) \leq 0\}\,.$$
a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzione:
a) Se $x = 0$, si ha
$$(x-7)\,(x-8)\,(x-9) = (0-7)\,(0-8)\,(0-9) = -504 \leq 0\,,$$
e quindi (per definizione) $x = 0$ appartiene ad E.

b) Consideriamo i segni dei tre fattori che determinano la disequazione che definisce E; si ha
$$x - 7 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 7\,, \qquad x - 8 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 8\,,$$
e
$$x - 9 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 9\,.$$
Graficamente, quindi, si ha



e quindi
$$E = (-\infty, 7] \cup [8, 9]\,. \tag{1}$$

c) Dalla (1) si ha che
$$E \cap [0, +\infty) = [0, 7] \cup [8, 9]\,,$$
che è un insieme limitato (superiormente da 9 e inferiormente da 0).

d) Dato che dalla (1) segue che il massimo di E è $M = 9$, che è anche un numero razionale, allora il massimo di $E \cap \mathbb{Q}$ è $M = 9$. Sempre dalla (1) segue che
$$E \cap \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, 7, 8, 9\}\,,$$
che ha come minimo $m = 0$.