Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero
6 Novembre 2023 — Compito n. 00052

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-5| \leq 9\}\,.$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.
1B) L'insieme E è limitato.
1C) Esiste il minimo di E.
1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di F.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x-4|)$ è $\{x \neq \pm 4\}$.
2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-16}$ è $\{x \neq \pm 4\}$.
2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{64}{x^2} - 1}$ è $[-8, 8]$.
2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[9]{x^2-4}$ è $\mathbb{R}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{9^n} = 0\,.$$
3B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n + n^2}{5^n + n!} = +\infty\,.$$
3C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{6^n + 8^n} = +\infty\,.$$
3D)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^5} = 1\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$\lim_{n\to+\infty} n^7 \sin\left(\frac{9}{n^7}\right) = 1\,.$$
4B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{3}{n}\right)} = \frac{100}{9}\,.$$
4C)
$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^9)\,\sin\left(\frac{3}{n^9}\right) = 3\,.$$
4D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{4^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 = +\infty\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00052**

---

5) Siano

$$a_n = \frac{5\,n+10}{5\,n+4}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2 + 6x - 8)\,.$$

a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio dom(f) della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme dom(f), specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00052**

---

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}\right], \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+2^n}{8^n+n^4},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n^6+3}\right)^{n^6}, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Soluzioni del compito 00052

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| \leq 9\} .$$

Risolvendo la disequazione, si ha

$$|x - 5| \leq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad -9 \leq x - 5 \leq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \leq x \leq 14 \,,$$

e quindi

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 14\} = [-4, 14] \,. \tag{1}$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Dalla (1) segue che E è un intervallo.

1B) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che E è limitato.

1C) Esiste il minimo di E.

Vero: Dalla (1) segue che l'estremo inferiore di E è $I = -4$. Dato che I appartiene ad E, I è il minimo di E.

1D) Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di F.

Falso: Dalla (1) segue che

$$F = E \cap (-\infty, 0) = [-4, 14] \cap (-\infty, 0) = [-4, 0) \,.$$

Si ha pertanto che l'estremo superiore di F è $S = 0$. Dato che S non appartiene ad F, non esiste il massimo di F.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di $f(x) = \log(|x-4|)$ è $\{x \neq \pm 4\}$.

Falso: Ricordando che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi, la funzione $f(x)$ è definita per ogni x reale tale che $|x-4| > 0$; dato che tale disuguaglianza è verificata per ogni $x \neq 4$, il dominio di $f(x)$ è

$$\operatorname{dom}(f) = \{x \neq 4\} \neq \{x \neq \pm 4\}\,.$$

2B) Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-16}$ è $\{x \neq \pm 4\}$.

Vero: La funzione è definita per ogni x che non annulla il denominatore della frazione. Dato che $x^2 - 16 = 0$ se e solo se $x = \pm 4$, si ha

$$\operatorname{dom}(g) = \{x \neq \pm 4\}\,.$$

2C) Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{64}{x^2} - 1}$ è $[-8, 8]$.

Falso: Affinché la funzione sia definita, deve essere definito, e positivo, l'argomento della radice quadrata, che è la funzione

$$h_1(x) = \frac{64}{x^2} - 1\,.$$

Chiaramente $h_1(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, mentre si ha (dato che $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$)

$$h_1(x) \geq 0 \quad \iff \quad \frac{64}{x^2} \geq 1 \quad \iff \quad 64 \geq x^2 \quad \iff \quad -8 \leq x \leq 8\,.$$

Pertanto, $h_1(x)$ è definita e positiva nell'insieme $[-8, 8] \setminus \{0\}$, e quindi

$$\operatorname{dom}(h) = [-8, 8] \setminus \{0\} \neq [-8, 8]\,.$$

2D) Il dominio di $k(x) = \sqrt[9]{x^2 - 4}$ è $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che le radici è di ordine dispari sono definite su tutto $\mathbb{R}$, e dato che la funzione $k_1(x) = x^2 - 4$ è definita per ogni x reale, si ha

$$\operatorname{dom}(k) = \mathbb{R}\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{9^n} = 0\,.$$

Vero: Per la gerarchia degli infiniti (per la quale gli esponenziali "battono" le potenze di n all'infinito) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{9^n} = 0\,.$$

3B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n + n^2}{5^n + n!} = +\infty\,.$$

Falso: Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore i termini che divergono più velocemente, si ha

$$\frac{10^n + n^2}{5^n + n!} = \frac{10^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^2}{10^n}}{1 + \frac{5^n}{n!}}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{10^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{n!} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n + n^2}{5^n + n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^2}{10^n}}{1 + \frac{5^n}{n!}} = 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0 \neq +\infty\,.$$

3C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{6^n + 8^n} = +\infty\,.$$

Vero: Si ha

$$\frac{n!}{6^n + 8^n} = \frac{n!}{8^n}\,\frac{1}{1 + \frac{6^n}{8^n}} = \frac{n!}{8^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{8^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{6^n + 8^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{8^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = (+\infty) \cdot \frac{1}{1+0} = +\infty\,.$$

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^5} = 1\,.$$

Vero: Si ha

$$\left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^5} = \left[\left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{n^5}{n^9}} = \left[\left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{1}{n^4}}\,.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^9} = \mathrm{e}^5\,,$$

e che $\frac{1}{n^4}$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^5} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{5}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{1}{n^4}} = [\mathrm{e}^5]^0 = 1\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\lim_{n\to+\infty} n^7 \sin\left(\frac{9}{n^7}\right) = 1\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

si ha, ponendo $a_n = 9/n^7$,

$$n^7 \sin\left(\frac{9}{n^7}\right) = 9\,\frac{n^7}{9}\,\sin\left(\frac{9}{n^7}\right) = 9\,\frac{\sin\left(\frac{9}{n^7}\right)}{\frac{9}{n^7}}\,,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^7 \sin\left(\frac{9}{n^7}\right) = \lim_{n\to+\infty} 9\,\frac{\sin\left(\frac{9}{n^7}\right)}{\frac{9}{n^7}} = 9\cdot 1 = 9 \neq 1\,.$$

4B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{3}{n}\right)} = \frac{100}{9}\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n tende a zero allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}\,,$$

si ha

$$\frac{1-\cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{3}{n}\right)} = \frac{1-\cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{10}{n}\right)^2}{\left(\frac{3}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{3}{n}\right)} = \frac{100}{9}\,\frac{1-\cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{3}{n}}{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}\right)^2,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{100}{9}\,\frac{1-\cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{3}{n}}{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}\right)^2 = \frac{100}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{50}{9} \neq \frac{100}{9}\,.$$

4C)

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^9)\,\sin\left(\frac{3}{n^9}\right) = 3\,.$$

Falso: La successione $\sin(n^9)$ è limitata, mentre, dato che $3/n^9$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{3}{n^9}\right) = 0\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^9)\,\sin\left(\frac{3}{n^9}\right) = 0 \neq 3\,,$$

dato che si tratta del prodotto tra una successione limitata ed una che tende a zero.

4D)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{4^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 = +\infty\,.$$

Falso: Dato che $6^n/n!$ tende a zero, si ha

$$\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right) \approx \frac{6^n}{n!}\,.$$

Pertanto
$$\frac{n!}{4^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 \approx \frac{n!}{4^n}\left[\frac{6^n}{n!}\right]^2 = \frac{n!}{4^n}\,\frac{36^n}{(n!)^2} = \frac{(9)^n}{n!}\,.$$
Ricordando la gerarchia degli infiniti, si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{4^n}\left[\arctan\left(\frac{6^n}{n!}\right)\right]^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{(9)^n}{n!} = 0 \neq +\infty\,.$$

5) Siano
$$a_n = \frac{5\,n+10}{5\,n+4}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2+6x-8)\,.$$
a) Dimostrare che la successione a_n è monotona decrescente.
b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme E, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
c) Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

Soluzione:
a) Si ha
$$a_{n+1} \le a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{5\,(n+1)+10}{5\,(n+1)+4} \le \frac{5\,n+10}{5\,n+4}$$
che è equivalente a
$$(5\,(n+1)+10)\,(5\,n+4) \le (5\,n+10)\,(5\,(n+1)+4)\,.$$
Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere
$$25\,n\,(n+1)+20\,(n+1)+50\,n+40 \le 25\,n\,(n+1)+20\,n+50\,(n+1)+40\,,$$
e quindi, semplificando i termini uguali ed espandendo i rimanenti,
$$20\,n+20+50\,n \le 20\,n+50\,n+50 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 20 \le 50\,,$$
che è vero. La successione a_n è quindi monotona decrescente.
Analogamente, si poteva osservare che
$$\begin{aligned} a_n = \frac{5\,n+10}{5\,n+4} &= \frac{5\,n+4+10-4}{5\,n+4} = 1 + \frac{6}{5\,n+4} \\ &\ge 1 + \frac{6}{5\,(n+1)+4} = \frac{5\,(n+1)+4+10-4}{5\,(n+1)+4} \\ &= \frac{5\,(n+1)+10}{5\,(n+1)+4} = a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

b) Dato che la successione a_n è monotona decrescente, si ha
$$\sup(E) = \max(E) = a_0 = \frac{5}{2}\,, \qquad \inf(E) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{5}{5} = 1\,,$$
dato che a_n è definita dal rapporto di due polinomi di primo grado. L'estremo inferiore non è un minimo dato che non esiste n in $\mathbb{N}$ tale che $a_n = 1$. Infatti
$$a_n = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{5\,n+10}{5\,n+4} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5\,n+10 = 5\,n+4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 10 = 4\,,$$
che è falso.

c) Il logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; dato che
$$-x^2+6x-8 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-6x+8 < 0\,,$$
si tratta di risolvere quest'ultima disequazione. Si ha $x^2-6x+8 = 0$ per $x = 2$ e per $x = 4$, e quindi
$$x^2-6x+8 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 < x < 4\,,$$
da cui segue che
$$\mathrm{dom}(f) = (2,4)\,.$$

d) Dato che $\mathrm{dom}(f) = (2,4)$, si ha
$$\sup(\mathrm{dom}(f)) = 4\,, \qquad \inf(\mathrm{dom}(f)) = 2\,,$$
che non sono, rispettivamente, né massimo (dato che 4 non appartiene all'insieme), né minimo (dato che 2 non appartiene all'insieme).

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}\right], \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+2^n}{8^n+n^4},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n^6+3}\right)^{n^6}, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{9}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Soluzione:

a) Si ha, razionalizzando,

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}=\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})\,(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}=\frac{n+3-(n-3)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}},$$

cosicché (semplificando)

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}=\frac{6}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}.$$

Pertanto (dato che il denominatore diverge)

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}=0.$$

b) Ricordando la gerarchia degli infiniti, mettiamo in evidenza $n!$ al numeratore e 8^n al denominatore. Si ha

$$\frac{n!+2^n}{8^n+n^4}=\frac{n!}{8^n}\,\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{n^4}{8^n}}.$$

Dato che (sempre per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{8^n}=+\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{8^n}=0,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+2^n}{8^n+n^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{8^n}\,\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{n^4}{8^n}}=(+\infty)\cdot\frac{1+0}{1+0}=+\infty.$$

c) Ricordando che se a_n è una successione divergente a più infinito, e se A è un numero reale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{A}{a_n}\right)^{a_n}=e^A,$$

riscriviamo la successione come segue:

$$\left(1+\frac{4}{n^6+3}\right)^{n^6}=\left[\left(1+\frac{4}{n^6+3}\right)^{n^6+3}\right]^{\frac{n^6}{n^6+3}}.$$

Dato che, trattandosi del rapporto tra due polinomi dello stesso grado, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^6}{n^6+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot n^6}{1\cdot n^6+3}=\frac{1}{1}=1,$$

ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n^6+3}\right)^{n^6}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n^6+3}\right)^{n^6+3}\right]^{\frac{n^6}{n^6+3}}=[e^4]^1=e^4.$$

d) Ricordando che se a_n è una successione che tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\tan(a_n)}{a_n}=1,$$

scriviamo

$$\frac{e^{\frac{9}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)}=\frac{e^{\frac{9}{n^2}}-1}{\frac{9}{n^2}}\,\frac{\frac{9}{n^2}}{\left(\frac{3}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)}=1\,\frac{e^{\frac{9}{n^2}}-1}{\frac{9}{n^2}}\left(\frac{\frac{3}{n}}{\tan\left(\frac{3}{n}\right)}\right)^2.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} 1\, \frac{\mathrm{e}^{\frac{9}{n^2}}-1}{\frac{9}{n^2}} \left(\frac{\frac{3}{n}}{\tan\left(\frac{3}{n}\right)}\right)^2 = 1\cdot 1\cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1\,.$$