



Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 5  
20 Novembre 2023 — Compito n. 00138

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(7x)}{3x} = 0.$$

1B)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x + 8} = -\infty.$$

1C)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(3x)}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x}{\log(1 + 3x)}$$

1D)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^5 \sin\left(\frac{7}{x}\right) = 0.$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}] = \frac{2}{5}.$$

2B)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = e^7.$$

2C)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17x)}{x - \frac{\pi}{2}} = 17.$$

2D)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2/x}}{x^8} = +\infty.$$

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+8x^2)}{x} & \text{se } x > 0, \\ \cos(4x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

3A) Il dominio della funzione  $f(x)$  è  $\mathbb{R}$ .

3B) La funzione  $f(x)$  è continua in 9.

3C) La funzione  $f(x)$  è continua in  $-8$ .

3D) La funzione  $f(x)$  non è continua in 0.

4) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(7x)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

4A) La funzione  $f(x)$  non è continua in 5.

4B) La funzione  $f(x)$  è continua in  $-4$ .

4C) La funzione  $f(x)$  è continua in 0.

4D) La funzione  $f(x)$  non ha massimo e minimo su  $[-4, 5]$ .

Docente

- ☐ Garroni [A, F]  
☐ Orsina [G, Z]

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00138

---

5) Sia

$$f(x) = x^{12} e^x - 8.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Dimostrare che esiste  $0 < x_0 < 8$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

c) Dimostrare che  $f(-12) > 0$ .

d) Dimostrare che esiste  $x_1 < -12$  tale che  $f(x_1) = 0$ .

---

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00138

---

6) Sia

$$f(x) = e^{5x} - (x^2 - 11x + 28).$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Dimostrare che  $f(x)$  ha massimo e minimo su  $[4, 7]$ .

c) Dimostrare che esiste  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

d) Dimostrare che per ogni  $t$  in  $\mathbb{R}$  esiste  $x_t$  in  $\mathbb{R}$  tale che  $f(x_t) = t$ .

---

## Soluzioni del compito 00138

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

1A)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(7x)}{3x} = 0.$$

**Vero:** Si tratta del prodotto di una funzione limitata ( $\sin(7x)$ ) e di una infinitesima ( $\frac{1}{3x}$ ). Il limite vale, pertanto, zero.

---

1B)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x + 8} = -\infty.$$

**Vero:** Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 + 3x] = +\infty,$$

perché è un polinomio di secondo grado (pari), e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 8] = -\infty.$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore, e che la frazione è negativa (per  $x$  sufficientemente negativo) si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x + 8} = -\infty.$$

Alternativamente, si poteva mettere in evidenza  $x^2$  al numeratore e  $x$  al denominatore, e semplificare:

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 8} = \frac{x^2}{x} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{8}{x}} = x \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{8}{x}},$$

da cui segue che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x + 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{8}{x}} = (-\infty) \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = -\infty.$$

---

1C)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(3x)}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x}{\log(1 + 3x)}$$

**Falso:** Dato che  $\tan(3x) \approx 3x$  e che  $\log(1 + 3x) \approx 3x$  per  $x$  tendente a zero, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(3x)}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{9x} = \frac{1}{3},$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x}{\log(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x}{3x} = 3,$$

e quindi i due limiti sono diversi.

---

1D)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^5 \sin\left(\frac{7}{x}\right) = 0.$$

**Vero:** Si tratta del prodotto tra una funzione limitata ed una infinitesima. Il limite, pertanto, vale zero.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

2A)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}] = \frac{2}{5}.$$

**Vero:** Razionalizzando “al contrario” si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} &= \frac{[\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}][\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} + 5\sqrt{x}]}{\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} + 5\sqrt{x}} \\ &= \frac{25x + 4\sqrt{x} - 25x}{\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} + 5\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} + 5\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Pertanto, mettendo in evidenza  $5\sqrt{x}$  al denominatore, si ha

$$\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} = \frac{4\sqrt{x}}{5\sqrt{x} \left[ \sqrt{1 + \frac{4/25}{\sqrt{x}}} + 1 \right]} = \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4/25}{\sqrt{x}}} + 1}.$$

Dato che  $\frac{4/25}{\sqrt{x}}$  tende a zero quando  $x$  tende a più infinito, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{25x + 4\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4/25}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{4}{5} \frac{1}{1 + 1} = \frac{2}{5}.$$

---

2B)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = e^7.$$

**Vero:** Si ha, con il cambio di variabile  $y = -x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{y}\right)^y} = \frac{1}{e^{-7}} = e^7.$$

---

2C)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17x)}{x - \frac{\pi}{2}} = 17.$$

**Falso:** Si ha, con il cambio di variabile  $y = x - \frac{\pi}{2}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(17y + 17\pi/2)}{y}.$$

Ricordando le formule di addizione degli archi, si ha

$$\cos(17y + 17\pi/2) = \cos(17y) \cos(17\pi/2) - \sin(17y) \sin(17\pi/2) = -\sin(17y).$$

Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(17x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\sin(17y)}{y} = -17 \neq 17.$$

---

2D)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2/x}}{x^8} = +\infty.$$

**Falso:** Si ha, con il cambio di variabile  $y = \frac{1}{x}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2/x}}{x^8} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^8 e^{-2y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^8}{e^{2y}} = 0,$$

dato che  $e^{2y} \mathfrak{O} y^8$ .



3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+8x^2)}{x} & \text{se } x > 0, \\ \cos(4x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

---

**3A)** Il dominio della funzione  $f(x)$  è  $\mathbb{R}$ .

**Vero:** Dato che  $1 + 8x^2 > 1$  per ogni  $x > 0$ , l'argomento della funzione logaritmo è sempre positivo (e quindi il logaritmo può essere calcolato); inoltre, se  $x > 0$  si ha  $x \neq 0$ , e quindi è possibile dividere per  $x$ . Se  $x \leq 0$ , invece,  $\cos(4x)$  è definita.

---

**3B)** La funzione  $f(x)$  è continua in 9.

**Vero:** In un intorno di  $9 > 0$  si ha  $f(x) = \frac{\log(1+8x^2)}{x}$ , che è una funzione continua essendo il rapporto di funzioni continue (con il denominatore diverso da zero).

---

**3C)** La funzione  $f(x)$  è continua in  $-8$ .

**Vero:** In un intorno di  $-8 < 0$  si ha  $f(x) = \cos(4x)$ , che è una funzione continua.

---

**3D)** La funzione  $f(x)$  non è continua in 0.

**Vero:** Si ha, ricordando che  $\log(1 + 8x^2) \approx 8x^2$  quando  $x$  tende a zero,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + 8x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 8x = 0,$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(4x) = 1.$$

Dato che i due limiti sono diversi, non esiste il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero (e quindi  $f(x)$  non è continua in 0).

---

4) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(7x)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

---

**4A)** La funzione  $f(x)$  non è continua in 5.

**Falso:** In un intorno di  $5 > 0$  si ha  $f(x) = 6x + 7$ , che è una funzione continua essendo un polinomio di primo grado.

---

**4B)** La funzione  $f(x)$  è continua in  $-4$ .

**Vero:** In un intorno di  $-4 < 0$  si ha  $f(x) = \frac{\sin(7x)}{x}$ , che è una funzione continua essendo il rapporto di funzioni continue (con il denominatore diverso da zero).

---

**4C)** La funzione  $f(x)$  è continua in 0.

**Vero:** Si ha, ricordando che  $\sin(7x) \approx 7x$  quando  $x$  tende a zero,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(7x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7x}{x} = 7,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [6x + 7] = 7 = f(0).$$

Dato che i due limiti sono uguali, esiste il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero, e vale 7. Dato che tale limite è uguale a  $f(0)$ , la funzione è continua in 0.

---

**4D)** La funzione  $f(x)$  non ha massimo e minimo su  $[-4, 5]$ .

**Falso:** La funzione  $f(x)$  è continua su  $[-4, 0)$  (come rapporto di funzioni continue con il denominatore diverso da zero), è continua in  $(0, 5]$  (essendo un polinomio di primo grado), ed è continua in 0 (per l'esercizio **4C**). Pertanto è continua sull'intervallo chiuso e limitato  $[-4, 5]$  e quindi ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

---



5) Sia

$$f(x) = x^{12} e^x - 8.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Dimostrare che esiste  $0 < x_0 < 8$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

c) Dimostrare che  $f(-12) > 0$ .

d) Dimostrare che esiste  $x_1 < -12$  tale che  $f(x_1) = 0$ .

---

**Soluzione:**

a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{12} e^x - 8] = (+\infty) \cdot (+\infty) - 8 = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^{12} e^x - 8] = \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{12} e^x \right] - 8,$$

e quindi si tratta di calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{12} e^x.$$

Ponendo  $y = -x$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{12} e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y)^{12} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{12}}{e^y} = 0,$$

dato che  $e^y \gg y^{12}$ . Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -8.$$

b) Si ha  $f(0) = -8 > 0$  e

$$f(8) = 8^{12} e^8 - 8 > 8^{12} - 8 > 8 - 8 = 0.$$

Dato che la funzione  $f(x)$  è continua su  $\mathbb{R}$ , applicando il teorema di esistenza degli zeri all'intervallo  $[0, 8]$ , si ha che esiste  $x_0$  in  $(0, 8)$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

c) Si ha

$$f(-12) = (-12)^{12} e^{-12} - 8 = 12^{12} e^{12} - 8 = \left(\frac{12}{e}\right)^{12} - 8.$$

Ricordando che  $e < 3$  si ha

$$\left(\frac{12}{e}\right)^{12} > \left(\frac{12}{3}\right)^{12} = 4^{12} > 8,$$

e quindi  $f(-12) > 0$ .

d) Già sappiamo, dall'esercizio precedente, che  $f(-12) > 0$ . Dall'esercizio a) sappiamo che  $f(x)$  tende a  $-8$  quando  $x$  tende a meno infinito. Quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste  $x_- < 0$  tale che  $f(x) \leq -4 < 0$  per ogni  $x \leq x_-$ . Scegliendo  $x_- < -12$ , abbiamo così costruito l'intervallo  $[x_-, -12]$  sul quale la funzione è continua ed è tale che  $f(x_-) < 0 < f(-12)$ . Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste  $x_1$  in  $[x_-, -12]$  tale che  $f(x_1) = 0$ .

6) Sia

$$f(x) = e^{5x} - (x^2 - 11x + 28).$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Dimostrare che  $f(x)$  ha massimo e minimo su  $[4, 7]$ .

c) Dimostrare che esiste  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

d) Dimostrare che per ogni  $t$  in  $\mathbb{R}$  esiste  $x_t$  in  $\mathbb{R}$  tale che  $f(x_t) = t$ .

---

**Soluzione:**

a) Si ha, ricordando che  $e^{5x} \asymp x^k$  per ogni  $k > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{5x} - (x^2 - 11x + 28)] = +\infty.$$

Ricordando poi che  $e^{5x}$  tende a zero per  $x$  tendente a meno infinito, mentre  $x^2 - 11x + 28$  tende a più infinito, si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{5x} - (x^2 - 11x + 28)] = 0 - (+\infty) = -\infty.$$

b) La funzione  $f(x)$  è continua su  $\mathbb{R}$ . Pertanto lo è sull'intervallo chiuso e limitato  $[4, 7]$ . Per il teorema di Weierstrass, esistono massimo e minimo di  $f(x)$  su tale intervallo.

c) Dai risultati del punto **a)** sappiamo che  $f(x)$  diverge positivamente a più infinito, e quindi esiste  $x_+ > 0$  tale che  $f(x_+) > 0$ . Dato che  $f(x)$  diverge negativamente a meno infinito, esiste  $x_- < 0$  tale che  $f(x_-) < 0$ . Ma allora la funzione continua  $f(x)$  soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri sull'intervallo chiuso e limitato  $[x_-, x_+]$ , e quindi esiste  $x_0$  in tale intervallo per il quale si ha  $f(x_0) = 0$ .

d) Consideriamo la funzione  $g(x) = f(x) - t$ ; la funzione  $g(x)$  è continua (come differenza tra una funzione continua ed una costante), ed è tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty,$$

dato che la sottrazione di  $t$  non cambia i limiti. In poche parole, la funzione  $g(x)$  ha le stesse proprietà della funzione  $f(x)$ . Ripetendo lo stesso ragionamento del punto **c)**, si dimostra che esiste  $x_t$  in  $\mathbb{R}$  tale che  $g(x_t) = 0$ . Ma allora

$$0 = g(x_t) = f(x_t) - t \quad \implies \quad f(x_t) = t,$$

come volevasi dimostrare.