



Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 1
2 Ottobre 2023 — Compito n. 00038

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia

$$E = \{\text{multipli interi di } 5\}.$$

- 1A) Il numero $x = 16$ non appartiene ad E .
1B) Se x appartiene ad E , allora $x + 35$ appartiene ad E .
1C) Non esiste il minimo di E .
1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ è limitato superiormente.

2) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 9| \leq 9\} \setminus \{0\}.$$

- 2A) L'insieme E è un intervallo.
2B) Il numero reale $x = 10$ appartiene ad E .
2C) L'insieme E è limitato superiormente.
2D) L'insieme E non ha massimo.

3) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 24x + 108 \leq 0\}.$$

- 3A) L'insieme E è vuoto.
3B) L'insieme E è un intervallo.
3C) L'insieme $E \setminus \{12\}$ non è un intervallo.
3D) L'insieme E non ha minimo.

4) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{13}\}.$$

- 4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ non appartiene ad E .
4B) Il numero $x = -1$ non appartiene ad E .
4C) L'insieme E non è limitato.
4D) Non esiste il massimo di E .

Docente

- ☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00038

5) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -11 \leq x \leq 9\} \setminus \{0\}.$$

- a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
- b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E .
- c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 7]$.
- d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme

$$F = \{x^2, x \in E\}.$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00038

6) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x - 6)(x - 7)(x - 8) \leq 0\}.$$

- a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E .
 - b) Risolvendo la disequazione che definisce E , scrivere E come unione di intervalli.
 - c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
 - d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.
-

Soluzioni del compito 00038

1) Sia

$$E = \{\text{multipli interi di } 5\}.$$

1A) Il numero $x = 16$ non appartiene ad E .

Vero: Il numero $x = 16$ non appartiene ad E dato che non è un multiplo di 5; infatti, dividendo x per 5 si ottiene come resto 1 (e non 0).

1B) Se x appartiene ad E , allora $x + 35$ appartiene ad E .

Vero: Se x appartiene ad E , x è un multiplo intero di 5; esiste quindi un intero k tale che $x = 5k$. Dato che $35 = 7 \cdot 5$, si ha quindi

$$x + 35 = 5k + 7 \cdot 5 = (k + 7) \cdot 5,$$

e quindi $x + 35$ appartiene ad E perché è un multiplo intero di 5.

1C) Non esiste il minimo di E .

Falso: Dato che E è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} , E ammette minimo per il principio di buon ordinamento. Un altro modo per dimostrare che E ha minimo è osservare che

$$E = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\},$$

e quindi il minimo di E esiste ed è 0.

1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ è limitato superiormente.

Falso: Se $\mathbb{N} \setminus E$ fosse limitato superiormente, esisterebbe N in \mathbb{N} tale che se x appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$, allora $x < N$. Pertanto, $x = N$ appartiene ad E . Ma se N appartiene ad E , allora $N + 1$ non vi appartiene (perché dividendo N per 5 si ottiene come resto 1, e quindi $N + 1$ non è divisibile per 5). Abbiamo dunque un assurdo: tutti i numeri di $\mathbb{N} \setminus E$ sono strettamente minori di N , ma $N + 1 > N$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$. Ne segue quindi che $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato.

2) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 9| \leq 9\} \setminus \{0\}.$$

Si ha

$$|x - 9| \leq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad -9 \leq x - 9 \leq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 18,$$

cosicché

$$(1) \quad E = [0, 18] \setminus \{0\} = (0, 18].$$

2A) L'insieme E è un intervallo.

Vero: Per la (1), si ha che $E = (0, 18]$ è un intervallo.

2B) Il numero reale $x = 10$ appartiene ad E .

Vero: Dalla (1) segue che $x = 10$ appartiene ad E .

2C) L'insieme E è limitato superiormente.

Vero: Per la (1), l'insieme E è limitato superiormente.

2D) L'insieme E non ha massimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E ha $M = 18$ come massimo.

3) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 24x + 108 \leq 0\}.$$

Si ha

$$x^2 - 24x + 108 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 6, 18.$$

Pertanto,

$$x^2 - 24x + 108 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6 \leq x \leq 18 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [6, 18].$$

Si ha quindi

$$(1) \quad E = [6, 18].$$

3A) L'insieme E è vuoto.

Falso: Per la (1), l'insieme E non è vuoto.

3B) L'insieme E è un intervallo.

Vero: Per la (1), l'insieme E è un intervallo.

3C) L'insieme $E \setminus \{12\}$ non è un intervallo.

Vero: Per la (1) si ha

$$E \setminus \{12\} = [6, 12) \cup (12, 18],$$

che non è un intervallo.

3D) L'insieme E non ha minimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E ha $m = 6$ come minimo.

4) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{13}\}.$$

Sia ha

$$|x| \leq \sqrt{13} \iff -\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13} \iff x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}],$$

da cui segue che

$$(1) \quad E = [-\sqrt{13}, \sqrt{13}] \cap \mathbb{Q}.$$

4A) Il numero $x = \sqrt{13}$ non appartiene ad E .

Vero: Dato che $x = \sqrt{13}$ non è un numero razionale, x non appartiene ad E .

4B) Il numero $x = -1$ non appartiene ad E .

Falso: Dato che $x = -1$ è un numero razionale, e che si ha

$$-\sqrt{13} \leq -1 \leq \sqrt{13},$$

il numero $x = -1$ appartiene ad E .

4C) L'insieme E non è limitato.

Falso: Dalla (1) segue che

$$E \subset [-\sqrt{13}, \sqrt{13}],$$

e quindi E è un insieme limitato dato che è contenuto in un insieme limitato.

4D) Non esiste il massimo di E .

Vero: Il “candidato massimo” di E è $x = \sqrt{13}$, che però non appartiene ad E dato che non è un numero razionale. Ne segue che non esiste il massimo di E .

5) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -11 \leq x \leq 9\} \setminus \{0\}.$$

- a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E .
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 7]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme

$$F = \{x^2, x \in E\}.$$

Soluzione:

a) Si ha

$$(1) \quad E = [-11, 9] \setminus \{0\} = [-11, 0) \cup (0, 9],$$

che non è un intervallo.

b) Dalla (1) segue che (ad esempio) $x = 9$ è un maggiorante di E , e che (ad esempio) $x = -11$ è un minorante di E . Si ha infatti che

$$\overline{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 9\} = [9, +\infty), \quad \underline{m}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -11\} = (-\infty, -11].$$

c) Si ha, per la (1),

$$E \cap [0, 7] = ([-11, 0) \cup (0, 9]) \cap [0, 7] = (0, 7],$$

che è un insieme che non ha minimo.

d) Se x appartiene ad E , allora

$$-11 \leq x \leq 9, \quad x \neq 0.$$

Se $x > 0$, si ha

$$0 < x \leq 9 \quad \implies \quad 0 < x^2 \leq 81,$$

mentre se $x < 0$, si ha

$$-11 \leq x < 0 \quad \implies \quad 0 < x^2 \leq 121.$$

Si ha quindi che se x appartiene ad E , allora

$$0 < x \leq \max(121, 81) = 121,$$

e quindi

$$F = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 121\} = (0, 121],$$

che è un insieme che non ha minimo.

6) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-6)(x-7)(x-8) \leq 0\}.$$

a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E .

b) Risolvendo la disequazione che definisce E , scrivere E come unione di intervalli.

c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.

d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzione:

a) Se $x = 0$, si ha

$$(x-6)(x-7)(x-8) = (0-6)(0-7)(0-8) = -336 \leq 0,$$

e quindi (per definizione) $x = 0$ appartiene ad E .

b) Consideriamo i segni dei tre fattori che determinano la disequazione che definisce E ; si ha

$$x-6 \geq 0 \iff x \geq 6, \quad x-7 \geq 0 \iff x \geq 7,$$

e

$$x-8 \geq 0 \iff x \geq 8.$$

Graficamente, quindi, si ha

	6	7	8

-	+	+	+

-	-	+	+

-	-	-	+

-	+	-	+

e quindi

(1)
$$E = (-\infty, 6] \cup [7, 8].$$

c) Dalla (1) si ha che

$$E \cap [0, +\infty) = [0, 6] \cup [7, 8],$$

che è un insieme limitato (superiormente da 8 e inferiormente da 0).

d) Dato che dalla (1) segue che il massimo di E è $M = 8$, che è anche un numero razionale, allora il massimo di $E \cap \mathbb{Q}$ è $M = 8$. Sempre dalla (1) segue che

$$E \cap \mathbb{N} = \{0, 1, \dots, 6, 7, 8\},$$

che ha come minimo $m = 0$.