Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 5
20 Novembre 2023 — Compito n. 00009

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(8\,x)}{6\,x} = \frac{4}{3}\,.$$

1B)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8x}{x+6} = -\infty\,.$$

1C)
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\tan(7\,x)}{3\,x} \neq \lim_{x\to0^-} \frac{3\,x}{\log(1+7\,x)}$$

1D)
$$\lim_{x\to0} x^8 \sin\left(\frac{4}{x}\right) \text{ non esiste.}$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)
$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{9\,x+2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}] = \frac{1}{3}\,.$$

2B)
$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{9}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{-9}\,.$$

2C)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(9\,x)}{x-\frac{\pi}{2}} = 9\,.$$

2D)
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{-2/x}}{x^7} = 0\,.$$

3) Sia
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+8\,x^2)}{x} & \text{se } x>0, \\ \cos(6\,x) & \text{se } x\le 0. \end{cases}$$

3A) Il dominio della funzione $f(x)$ non è tutto $\mathbb{R}$.
3B) La funzione $f(x)$ è continua in 3.
3C) La funzione $f(x)$ non è continua in -8.
3D) La funzione $f(x)$ non è continua in 0.

4) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 7\,x+6 & \text{se } x\ge 0, \\ \frac{\sin(6\,x)}{x} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

4A) La funzione $f(x)$ non è continua in 2.
4B) La funzione $f(x)$ è continua in -7.
4C) La funzione $f(x)$ è continua in 0.
4D) La funzione $f(x)$ ha massimo e minimo su $[-7,2]$.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00009**

5) Sia
$$f(x) = x^6\,e^x - 4\,.$$
a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$
b) Dimostrare che esiste $0 < x_0 < 4$ tale che $f(x_0) = 0$.
c) Dimostrare che $f(-6) > 0$.
d) Dimostrare che esiste $x_1 < -6$ tale che $f(x_1) = 0$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00009**

---

6) Sia

$$f(x) = \mathrm{e}^{8\,x} - (x^2 - 11x + 28)\,.$$

a) Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)\,.$$

b) Dimostrare che $f(x)$ ha massimo e minimo su $[4, 7]$.

c) Dimostrare che esiste x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

d) Dimostrare che per ogni t in $\mathbb{R}$ esiste x_t in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_t) = t$.

Soluzioni del compito 00009

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(8\,x)}{6\,x} = \frac{4}{3}\,.$$

Falso: Si tratta del prodotto di una funzione limitata ($\sin(8\,x)$) e di una infinitesima ($\frac{1}{6\,x}$). Il limite vale, pertanto, zero.

1B)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8x}{x+6} = -\infty\,.$$

Vero: Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} [x^2+8x] = +\infty\,,$$

perché è un polinomio di secondo grado (pari), e

$$\lim_{x\to-\infty} [x+6] = -\infty\,.$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore, e che la frazione è negativa (per x sufficientemente negativo) si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8x}{x+6} = -\infty\,.$$

Alternativamente, si poteva mettere in evidenza x^2 al numeratore e x al denominatore, e semplificare:

$$\frac{x^2+8x}{x+6} = \frac{x^2}{x}\,\frac{1+\frac{8}{x}}{1+\frac{6}{x}} = x\,\frac{1+\frac{8}{x}}{1+\frac{6}{x}}\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8x}{x+6} = \lim_{x\to-\infty} x\,\frac{1+\frac{8}{x}}{1+\frac{6}{x}} = (-\infty)\cdot\frac{1+0}{1+0} = -\infty\,.$$

1C)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\tan(7\,x)}{3\,x} \neq \lim_{x\to0^-} \frac{3\,x}{\log(1+7\,x)}$$

Vero: Dato che $\tan(7\,x) \approx 7\,x$ e che $\log(1+7\,x) \approx 7\,x$ per x tendente a zero, si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\tan(7\,x)}{3\,x} = \lim_{x\to0^+} \frac{7\,x}{3\,x} = \frac{7}{3}\,,$$

e

$$\lim_{x\to0^-} \frac{3\,x}{\log(1+7\,x)} = \lim_{x\to0^-} \frac{3\,x}{7\,x} = \frac{3}{7}\,,$$

e quindi i due limiti sono diversi.

1D)

$$\lim_{x\to0} x^8\,\sin\left(\frac{4}{x}\right) \text{ non esiste.}$$

Falso: Si tratta del prodotto tra una funzione limitata ed una infinitesima. Il limite, pertanto, vale zero.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} - 3\,\sqrt{x}] = \frac{1}{3}\,.$$

Vero: Razionalizzando “al contrario” si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} - 3\,\sqrt{x} &= \frac{[\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} - 3\,\sqrt{x}]\,[\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} + 3\,\sqrt{x}]}{\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} + 3\,\sqrt{x}} \\ &= \frac{9\,x + 2\,\sqrt{x} - 9\,x}{\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} + 3\,\sqrt{x}} = \frac{2\,\sqrt{x}}{\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} + 3\,\sqrt{x}}\,.\end{aligned}$$

Pertanto, mettendo in evidenza $3\,\sqrt{x}$ al denominatore, si ha

$$\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} - 3\,\sqrt{x} = \frac{2\,\sqrt{x}}{3\,\sqrt{x}\left[\sqrt{1 + \frac{2/9}{\sqrt{x}}} + 1\right]} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2/9}{\sqrt{x}}} + 1}\,.$$

Dato che $\frac{2/9}{\sqrt{x}}$ tende a zero quando x tende a più infinito, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{9\,x + 2\,\sqrt{x}} - 3\,\sqrt{x}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2/9}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1+1} = \frac{1}{3}\,.$$

2B)

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{-9}\,.$$

Falso: Si ha, con il cambio di variabile $y = -x$,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{9}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{9}{y}\right)^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-9}} = \mathrm{e}^9 \neq \mathrm{e}^{-9}\,.$$

2C)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(9\,x)}{x - \frac{\pi}{2}} = 9\,.$$

Falso: Si ha, con il cambio di variabile $y = x - \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(9\,x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(9\,y + 9\,\pi/2)}{y}\,.$$

Ricordando le formule di addizione degli archi, si ha

$$\cos(9\,y + 9\,\pi/2) = \cos(9\,y)\,\cos(9\,\pi/2) - \sin(9\,y)\,\sin(9\,\pi/2) = -\sin(9\,y)\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(9\,x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} -\frac{\sin(9\,y)}{y} = -9 \neq 9\,.$$

2D)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{-2/x}}{x^7} = 0\,.$$

Vero: Si ha, con il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{-2/x}}{x^7} = \lim_{y\to+\infty} y^7\,\mathrm{e}^{-2\,y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^7}{\mathrm{e}^{2\,y}} = 0\,,$$

dato che $\mathrm{e}^{2\,y} \gg y^2$.

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+8\,x^2)}{x} & \text{se } x > 0, \\ \cos(6\,x) & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

3A) Il dominio della funzione $f(x)$ non è tutto $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che $1 + 8\,x^2 > 1$ per ogni $x > 0$, l'argomento della funzione logaritmo è sempre positivo (e quindi il logaritmo può essere calcolato); inoltre, se $x > 0$ si ha $x \neq 0$, e quindi è possibile dividere per x. Se $x \le 0$, invece, $\cos(6\,x)$ è definita.

3B) La funzione $f(x)$ è continua in 3.

Vero: In un intorno di $3 > 0$ si ha $f(x) = \frac{\log(1+8\,x^2)}{x}$, che è una funzione continua essendo il rapporto di funzioni continue (con il denominatore diverso da zero).

3C) La funzione $f(x)$ non è continua in -8.

Falso: In un intorno di $-8 < 0$ si ha $f(x) = \cos(6\,x)$, che è una funzione continua.

3D) La funzione $f(x)$ non è continua in 0.

Vero: Si ha, ricordando che $\log(1 + 8\,x^2) \approx 8\,x^2$ quando x tende a zero,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + 8\,x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{8\,x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} 8\,x = 0\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(6\,x) = 1\,.$$

Dato che i due limiti sono diversi, non esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a zero (e quindi $f(x)$ non è continua in 0.

---

4) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 7\,x+6 & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{\sin(6\,x)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

4A) La funzione $f(x)$ non è continua in 2.

Falso: In un intorno di $2 > 0$ si ha $f(x) = 7\,x + 6$, che è una funzione continua essendo un polinomio di primo grado.

4B) La funzione $f(x)$ è continua in -7.

Vero: In un intorno di $-7 < 0$ si ha $f(x) = \frac{\sin(6\,x)}{x}$, che è una funzione continua essendo il rapporto di funzioni continue (con il denominatore diverso da zero).

4C) La funzione $f(x)$ è continua in 0.

Vero: Si ha, ricordando che $\sin(6\,x) \approx 6\,x$ quando x tende a zero,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(6\,x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{6\,x}{x} = 6\,,$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [7\,x+6] = 6 = f(0)\,.$$

Dato che i due limiti sono uguali, esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a zero, e vale 6. Dato che tale limite è uguale a $f(0)$, la funzione è continua in 0.

4D) La funzione $f(x)$ ha massimo e minimo su $[-7, 2]$.

Vero: La funzione $f(x)$ è continua su $[-7, 0)$ (come rapporto di funzioni continue con il denominatore diverso da zero), è continua in $(0, 2]$ (essendo un polinomio di primo grado), ed è continua in 0 (per l'esercizio **4C)**. Pertanto è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[-7, 2]$ e quindi ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

---

5) Sia
$$f(x) = x^6\,\mathrm{e}^x - 4\,.$$
a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$
b) Dimostrare che esiste $0 < x_0 < 4$ tale che $f(x_0) = 0$.
c) Dimostrare che $f(-6) > 0$.
d) Dimostrare che esiste $x_1 < -6$ tale che $f(x_1) = 0$.

Soluzione:
a) Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [x^6\,\mathrm{e}^x - 4] = (+\infty)\cdot(+\infty) - 4 = +\infty\,.$$
Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x^6\,\mathrm{e}^x - 4] = [\lim_{x\to-\infty} x^6\,\mathrm{e}^x] - 4\,,$$
e quindi si tratta di calcolare
$$\lim_{x\to-\infty} x^6\,\mathrm{e}^x\,.$$
Ponendo $y = -x$ si ha
$$\lim_{x\to-\infty} x^6\,\mathrm{e}^x = \lim_{y\to+\infty} (-y)^6\,\mathrm{e}^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^6}{\mathrm{e}^y} = 0\,,$$
dato che e^y y^6. Pertanto,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -4\,.$$
b) Si ha $f(0) = -4 > 0$ e
$$f(4) = 4^6\,\mathrm{e}^4 - 4 > 4^6 - 4 > 4 - 4 = 0\,.$$
Dato che la funzione $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$, applicando il teorema di esistenza degli zeri all'intervallo $[0, 4]$, si ha che esiste x_0 in $(0, 4)$ tale che $f(x_0) = 0$.

c) Si ha
$$f(-6) = (-6)^6\,\mathrm{e}^{-6} - 4 = 6^6\,\mathrm{e}^6 - 4 = \left(\frac{6}{\mathrm{e}}\right)^6 - 4\,.$$
Ricordando che $\mathrm{e} < 3$ si ha
$$\left(\frac{6}{\mathrm{e}}\right)^6 > \left(\frac{6}{3}\right)^6 = 2^6 > 4\,,$$
e quindi $f(-6) > 0$.

d) Già sappiamo, dall'esercizio precedente, che $f(-6) > 0$. Dall'esercizio **a)** sappiamo che $f(x)$ tende a -4 quando x tende a meno infinito. Quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste $x_- < 0$ tale che $f(x) \le -2 < 0$ per ogni $x \le x_-$. Scegliendo $x_- < -6$, abbiamo così costruito l'intervallo $[x_-, -6]$ sul quale la funzione è continua ed è tale che $f(x_-) < 0 < f(-6)$. Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste x_1 in $[x_-, -6]$ tale che $f(x_1) = 0$.

6) Sia
$$f(x) = e^{8\,x} - (x^2 - 11x + 28)\,.$$
a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,.$$
b) Dimostrare che $f(x)$ ha massimo e minimo su $[4, 7]$.
c) Dimostrare che esiste x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
d) Dimostrare che per ogni t in $\mathbb{R}$ esiste x_t in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_t) = t$.

Soluzione:
a) Si ha, ricordando che $e^{8\,x} \gg x^k$ per ogni $k > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [e^{8\,x} - (x^2 - 11x + 28)] = +\infty\,.$$
Ricordando poi che $e^{8\,x}$ tende a zero per x tendente a meno infinito, mentre $x^2 - 11x + 28$ tende a più infinito, si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [e^{8\,x} - (x^2 - 11x + 28)] = 0 - (+\infty) = -\infty\,.$$

b) La funzione $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto lo è sull'intervallo chiuso e limitato $[4, 7]$. Per il teorema di Weierstrass, esistono massimo e minimo di $f(x)$ su tale intervallo.

c) Dai risultati del punto **a)** sappiamo che $f(x)$ diverge positivamente a più infinito, e quindi esiste $x_+ > 0$ tale che $f(x_+) > 0$. Dato che $f(x)$ diverge negativamente a meno infinito, esiste $x_- < 0$ tale che $f(x_-) < 0$. Ma allora la funzione continua $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri sull'intervallo chiuso e limitato $[x_-, x_+]$, e quindi esiste x_0 in tale intervallo per il quale si ha $f(x_0) = 0$.

d) Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - t$; la funzione $g(x)$ è continua (come differenza tra una funzione continua ed una costante), ed è tale che
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty\,,$$
dato che la sottrazione di t non cambia i limiti. In poche parole, la funzione $g(x)$ ha le stesse proprietà della funzione $f(x)$. Ripetendo lo stesso ragionamento del punto **c)**, si dimostra che esiste x_t in $\mathbb{R}$ tale che $g(x_t) = 0$. Ma allora
$$0 = g(x_t) = f(x_t) - t \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_t) = t\,,$$
come volevasi dimostrare.