# Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero
## 6 Novembre 2023 — Compito n. 00138

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** ____________________

**Cognome:** ____________________

**Matricola:** | | | | | | | |

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **F** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **C** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**1)** Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 7| \leq 9\}\,.$$

**1A)** L'insieme $E$ è un intervallo.
**1B)** L'insieme $E$ non è limitato.
**1C)** Esiste il minimo di $E$.
**1D)** Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di $F$.

**2)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**2A)** Il dominio di $f(x) = \log(|x - 2|)$ è $\{x \neq 2\}$.
**2B)** Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-5}{x^2 - 64}$ è $\{x \neq \pm 8\}$.
**2C)** Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{64}{x^2} - 1}$ è $[-8, 8] \setminus \{0\}$.
**2D)** Il dominio di $k(x) = \sqrt[11]{x^2 - 25}$ è $\{|x| \geq 5\}$.

**3)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**3A)**
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{8^n} = +\infty\,.$$

**3B)**
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8^n + n^5}{6^n + n!} = +\infty\,.$$

**3C)**
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{6^n + 11^n} = 0\,.$$

**3D)**
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^7} = 1\,.$$

**4)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**4A)**
$$\lim_{n\to+\infty} n^4 \sin\left(\frac{3}{n^4}\right) = 3\,.$$

**4B)**
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{4}{9}\,.$$

**4C)**
$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^5)\, \sin\left(\frac{8}{n^5}\right) = 0\,.$$

**4D)**
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n} \left[\arctan\left(\frac{9^n}{n!}\right)\right]^2 = 0\,.$$

**Docente**
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00138**

---

**5)** Siano

$$a_n = \frac{11\,n+8}{11\,n+4}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2 + 11x - 24)\,.$$

**a)** Dimostrare che la successione $a_n$ è monotona decrescente.
**b)** Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $E$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
**c)** Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
**d)** Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

---

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00138**

---

**6)** Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}[\sqrt{n+6}-\sqrt{n-6}]\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+3^n}{9^n+n^6}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^7+7}\right)^{n^7}, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{6}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)}\,.$$

---

# Soluzioni del compito 00138

**1)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 7| \leq 9\} .$$

---

Risolvendo la disequazione, si ha
$$|x - 7| \leq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad -9 \leq x - 7 \leq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 16 ,$$
e quindi
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 16\} = [-2, 16] . \tag{1}$$

---

**1A)** L'insieme $E$ è un intervallo.

**Vero:** Dalla (1) segue che $E$ è un intervallo.

---

**1B)** L'insieme $E$ non è limitato.

**Falso:** Dalla (1) segue che $E$ è limitato.

---

**1C)** Esiste il minimo di $E$.

**Vero:** Dalla (1) segue che l'estremo inferiore di $E$ è $I = -2$. Dato che $I$ appartiene ad $E$, $I$ è il minimo di $E$.

---

**1D)** Se $F = E \cap (-\infty, 0)$, esiste il massimo di $F$.

**Falso:** Dalla (1) segue che
$$F = E \cap (-\infty, 0) = [-2, 16] \cap (-\infty, 0) = [-2, 0) .$$
Si ha pertanto che l'estremo superiore di $F$ è $S = 0$. Dato che $S$ non appartiene ad $F$, non esiste il massimo di $F$.

---

**2)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**2A)** Il dominio di $f(x) = \log(|x-2|)$ è $\{x \neq 2\}$.

**Vero:** Ricordando che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi, la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x$ reale tale che $|x-2| > 0$; dato che tale disuguaglianza è verificata per ogni $x \neq 2$, il dominio di $f(x)$ è

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \neq 2\}\,.$$

---

**2B)** Il dominio di $g(x) = \dfrac{x-5}{x^2-64}$ è $\{x \neq \pm 8\}$.

**Vero:** La funzione è definita per ogni $x$ che non annulla il denominatore della frazione. Dato che $x^2 - 64 = 0$ se e solo se $x = \pm 8$, si ha

$$\mathrm{dom}(g) = \{x \neq \pm 8\}\,.$$

---

**2C)** Il dominio di $h(x) = \sqrt{\dfrac{64}{x^2} - 1}$ è $[-8, 8] \setminus \{0\}$.

**Vero:** Affinché la funzione sia definita, deve essere definito, e positivo, l'argomento della radice quadrata, che è la funzione

$$h_1(x) = \frac{64}{x^2} - 1\,.$$

Chiaramente $h_1(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, mentre si ha (dato che $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$)

$$h_1(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{64}{x^2} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 64 \geq x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad -8 \leq x \leq 8\,.$$

Pertanto, $h_1(x)$ è definita e positiva nell'insieme $[-8, 8] \setminus \{0\}$, e quindi

$$\mathrm{dom}(h) = [-8, 8] \setminus \{0\}\,.$$

---

**2D)** Il dominio di $k(x) = \sqrt[11]{x^2 - 25}$ è $\{|x| \geq 5\}$.

**Falso:** Dato che le radici è di ordine dispari sono definite su tutto $\mathbb{R}$, e dato che la funzione $k_1(x) = x^2 - 25$ è definita per ogni $x$ reale, si ha

$$\mathrm{dom}(k) = \mathbb{R} \neq \{|x| \geq 5\}\,.$$

---

**3)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**3A)**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{8^n} = +\infty\,.$$

**Falso:** Per la gerarchia degli infiniti (per la quale gli esponenziali "battono" le potenze di $n$ all'infinito) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{8^n} = 0 \neq +\infty\,.$$

---

**3B)**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8^n + n^5}{6^n + n!} = +\infty\,.$$

**Falso:** Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore i termini che divergono più velocemente, si ha

$$\frac{8^n + n^5}{6^n + n!} = \frac{8^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^5}{8^n}}{1 + \frac{6^n}{n!}}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{8^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{n!} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{8^n}{n!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8^n + n^5}{6^n + n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8^n}{n!}\,\frac{1 + \frac{n^5}{8^n}}{1 + \frac{6^n}{n!}} = 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0 \neq +\infty\,.$$

---

**3C)**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{6^n + 11^n} = 0\,.$$

**Falso:** Si ha

$$\frac{n!}{6^n + 11^n} = \frac{n!}{11^n}\,\frac{1}{1 + \frac{6^n}{11^n}} = \frac{n!}{11^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{6}{11}\right)^n}\,.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{11^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{6}{11}\right)^n = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{6^n + 11^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{11^n}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{6}{11}\right)^n} = (+\infty) \cdot \frac{1}{1+0} = +\infty \neq 0\,.$$

---

**3D)**

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^7} = 1\,.$$

**Vero:** Si ha

$$\left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^7} = \left[\left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^{11}}\right]^{\frac{n^7}{n^{11}}} = \left[\left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^{11}}\right]^{\frac{1}{n^4}}\,.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^{11}} = \mathrm{e}^4\,,$$

e che $\frac{1}{n^4}$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^7} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n^{11}}\right)^{n^{11}}\right]^{\frac{1}{n^4}} = [\mathrm{e}^4]^0 = 1\,.$$

**4)** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**4A)**

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 \sin\left(\frac{3}{n^4}\right) = 3\,.$$

**Vero:** Ricordando che se $a_n$ è una successione che tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

si ha, ponendo $a_n = 3/n^4$,

$$n^4 \sin\left(\frac{3}{n^4}\right) = 3\,\frac{n^4}{3}\,\sin\left(\frac{3}{n^4}\right) = 3\,\frac{\sin\left(\frac{3}{n^4}\right)}{\frac{3}{n^4}}\,,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 \sin\left(\frac{3}{n^4}\right) = \lim_{n\to+\infty} 3\,\frac{\sin\left(\frac{3}{n^4}\right)}{\frac{3}{n^4}} = 3\cdot 1 = 3\,.$$

---

**4B)**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{4}{9}\,.$$

**Falso:** Ricordando che se $a_n$ tende a zero allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}\,,$$

si ha

$$\frac{1-\cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{1-\cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\left(\frac{6}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{6}{n}\right)^2}{\left(\frac{9}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{9}{n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \frac{4}{9}\,\frac{1-\cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\left(\frac{6}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{9}{n}}{\sin\left(\frac{9}{n}\right)}\right)^2,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{9}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{9}\,\frac{1-\cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\left(\frac{6}{n}\right)^2}\left(\frac{\frac{9}{n}}{\sin\left(\frac{9}{n}\right)}\right)^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{2}{9} \neq \frac{4}{9}\,.$$

---

**4C)**

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^5)\,\sin\left(\frac{8}{n^5}\right) = 0\,.$$

**Vero:** La successione $\sin(n^5)$ è limitata, mentre, dato che $8/n^5$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{8}{n^5}\right) = 0\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n^5)\,\sin\left(\frac{8}{n^5}\right) = 0\,,$$

dato che si tratta del prodotto tra una successione limitata ed una che tende a zero.

---

**4D)**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n}\left[\arctan\left(\frac{9^n}{n!}\right)\right]^2 = 0\,.$$

**Vero:** Dato che $9^n/n!$ tende a zero, si ha

$$\arctan\left(\frac{9^n}{n!}\right) \approx \frac{9^n}{n!}\,.$$

Pertanto
$$\frac{n!}{3^n}\left[\arctan\left(\frac{9^n}{n!}\right)\right]^2 \approx \frac{n!}{3^n}\left[\frac{9^n}{n!}\right]^2 = \frac{n!}{3^n}\,\frac{81^n}{(n!)^2} = \frac{(27)^n}{n!}\,.$$
Ricordando la gerarchia degli infiniti, si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{3^n}\left[\arctan\left(\frac{9^n}{n!}\right)\right]^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{(27)^n}{n!} = 0\,.$$

**5)** Siano
$$a_n = \frac{11\,n+8}{11\,n+4}\,, \qquad E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad f(x) = \log(-x^2+11x-24)\,.$$
**a)** Dimostrare che la successione $a_n$ è monotona decrescente.
**b)** Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $E$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
**c)** Determinare il dominio $\mathrm{dom}(f)$ della funzione $f(x)$.
**d)** Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $\mathrm{dom}(f)$, specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

---

**Soluzione:**
**a)** Si ha
$$a_{n+1} \le a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{11\,(n+1)+8}{11\,(n+1)+4} \le \frac{11\,n+8}{11\,n+4}$$
che è equivalente a
$$(11\,(n+1)+8)\,(11\,n+4) \le (11\,n+8)\,(11\,(n+1)+4)\,.$$
Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere
$$121\,n\,(n+1)+44\,(n+1)+88\,n+32 \le 121\,n\,(n+1)+44\,n+88\,(n+1)+32\,,$$
e quindi, semplificando i termini uguali ed espandendo i rimanenti,
$$44\,n+44+88\,n \le 44\,n+88\,n+88 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 44 \le 88\,,$$
che è vero. La successione $a_n$ è quindi monotona decrescente.
Analogamente, si poteva osservare che
$$\begin{aligned} a_n = \frac{11\,n+8}{11\,n+4} &= \frac{11\,n+4+8-4}{11\,n+4} = 1 + \frac{4}{11\,n+4} \\ &\ge 1 + \frac{4}{11\,(n+1)+4} = \frac{11\,(n+1)+4+8-4}{11\,(n+1)+4} \\ &= \frac{11\,(n+1)+8}{11\,(n+1)+4} = a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

**b)** Dato che la successione $a_n$ è monotona decrescente, si ha
$$\sup(E) = \max(E) = a_0 = 2\,, \qquad \inf(E) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{11}{11} = 1\,,$$
dato che $a_n$ è definita dal rapporto di due polinomi di primo grado. L'estremo inferiore non è un minimo dato che non esiste $n$ in $\mathbb{N}$ tale che $a_n = 1$. Infatti
$$a_n = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{11\,n+8}{11\,n+4} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 11\,n+8 = 11\,n+4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 8 = 4\,,$$
che è falso.

**c)** Il logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; dato che
$$-x^2+11x-24 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-11x+24 < 0\,,$$
si tratta di risolvere quest'ultima disequazione. Si ha $x^2-11x+24 = 0$ per $x = 3$ e per $x = 8$, e quindi
$$x^2-11x+24 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 < x < 8\,,$$
da cui segue che
$$\mathrm{dom}(f) = (3, 8)\,.$$

**d)** Dato che $\mathrm{dom}(f) = (3, 8)$, si ha
$$\sup(\mathrm{dom}(f)) = 8\,, \qquad \inf(\mathrm{dom}(f)) = 3\,,$$
che non sono, rispettivamente, né massimo (dato che 8 non appartiene all'insieme), né minimo (dato che 3 non appartiene all'insieme).

**6)** Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} [\sqrt{n+6}-\sqrt{n-6}]\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+3^n}{9^n+n^6}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^7+7}\right)^{n^7}, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{6}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)}\,.$$

---

**Soluzione:**

**a)** Si ha, razionalizzando,

$$\sqrt{n+6}-\sqrt{n-6} = \frac{(\sqrt{n+6}-\sqrt{n-6})\,(\sqrt{n+6}+\sqrt{n-6})}{\sqrt{n+6}+\sqrt{n-6}} = \frac{n+6-(n-6)}{\sqrt{n+6}+\sqrt{n-6}}\,,$$

cosicché (semplificando)

$$\sqrt{n+6}-\sqrt{n-6} = \frac{12}{\sqrt{n+6}+\sqrt{n-6}}\,.$$

Pertanto (dato che il denominatore diverge)

$$\lim_{n\to+\infty} [\sqrt{n+6}-\sqrt{n-6}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{12}{\sqrt{n+6}+\sqrt{n-6}} = 0\,.$$

**b)** Ricordando la gerarchia degli infiniti, mettiamo in evidenza $n!$ al numeratore e $9^n$ al denominatore. Si ha

$$\frac{n!+3^n}{9^n+n^6} = \frac{n!}{9^n}\,\frac{1+\frac{3^n}{n!}}{1+\frac{n^6}{9^n}}\,.$$

Dato che (sempre per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{9^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^6}{9^n} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!+3^n}{9^n+n^6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{9^n}\,\frac{1+\frac{3^n}{n!}}{1+\frac{n^6}{9^n}} = (+\infty)\cdot\frac{1+0}{1+0} = +\infty\,.$$

**c)** Ricordando che se $a_n$ è una successione divergente a più infinito, e se $A$ è un numero reale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{A}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}^A\,,$$

riscriviamo la successione come segue:

$$\left(1+\frac{3}{n^7+7}\right)^{n^7} = \left[\left(1+\frac{3}{n^7+7}\right)^{n^7+7}\right]^{\frac{n^7}{n^7+7}}\,.$$

Dato che, trattandosi del rapporto tra due polinomi dello stesso grado, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7}{n^7+7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot n^7}{1\cdot n^7+7} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^7+7}\right)^{n^7} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{3}{n^7+7}\right)^{n^7+7}\right]^{\frac{n^7}{n^7+7}} = [\mathrm{e}^3]^1 = \mathrm{e}^3\,.$$

**d)** Ricordando che se $a_n$ è una successione che tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a_n}-1}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

scriviamo

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{6}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{6}{n^2}}-1}{\frac{6}{n^2}}\,\frac{\frac{6}{n^2}}{\left(\frac{5}{n}\right)^2}\,\frac{\left(\frac{5}{n}\right)^2}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \frac{6}{25}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{6}{n^2}}-1}{\frac{6}{n^2}}\left(\frac{\frac{5}{n}}{\tan\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^2\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{6}{n^2}}-1}{\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{25}\, \frac{\mathrm{e}^{\frac{6}{n^2}}-1}{\frac{6}{n^2}} \left(\frac{\frac{5}{n}}{\tan\left(\frac{5}{n}\right)}\right)^2 = \frac{6}{25}\cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{6}{25}\,.$$