Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 4
23 Ottobre 2023 — Compito n. 00133

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+4^n}{4^n-n^4} = 1\,.$$

1B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7\,5^n}{n^n} = +\infty\,.$$

1C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n} = +\infty\,.$$

1D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\,n!}{n^n} = 0\,.$$

2) Sia
$$a_n = \frac{7\,n^2+8\,n}{2\,n+9}\,.$$

2A)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

2B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{a_n} = 0\,.$$

2C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^6} = +\infty\,.$$

2D)
$$\lim_{n\to+\infty} \left[a_n - \frac{7}{2}\,n\right] = +\infty\,.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)
$$\lim_{n\to+\infty} n^7\ \mathrm{tg}\left(\frac{6}{n^6}\right) = 6\,.$$

3B)
$$\lim_{n\to+\infty} 4^n\ \sin^2\left(\frac{n^7}{4^n}\right) = 0\,.$$

3C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^7(5\,n)}{n} = 5^7\,.$$

3D)
$$\lim_{n\to+\infty} n^5\left(\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^5}}-1\right) \text{ non esiste.}$$

4) Sia
$$a_n = \cos\left(\frac{9}{n^3}\right).$$

4A)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,.$$

4B)
$$\lim_{n\to+\infty} n^6\,a_n = +\infty\,.$$

4C)
$$\lim_{n\to+\infty} n^6\,(1-a_n) = \frac{81}{2}\,.$$

4D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n\,n^2+2}{n^2+4} = 1\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00133**

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{7}{n}\right)^{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6\,n}{n^2+8}\right)^{n},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}]\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n}]\,,$$

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00133**

---

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n\, n^7}{n!}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n! + 6^n}{(n+1)! + 3^n}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{7}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{n}} - 1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{9}{n}\right).$$

Soluzioni del compito 00133

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+4^n}{4^n-n^4} = 1\,.$$

Vero: Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore il termine che diverge più velocemente (che è 4^n), si ha

$$\frac{n^3+4^n}{4^n-n^{3+1}} = \frac{4^n}{4^n}\,\frac{1+\frac{n^3}{4^n}}{1-\frac{n^4}{4^n}} = \frac{1+\frac{n^3}{4^n}}{1-\frac{n^4}{4^n}}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{4^n} = 0\,,$$

per i teoremi sui limiti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+4^n}{4^n-n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{n^3}{4^n}}{1-\frac{n^4}{4^n}} = \frac{1+0}{1-0} = 1\,.$$

1B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7\,5^n}{n^n} = +\infty\,.$$

Falso: Si ha, semplificando,

$$\frac{n^7\,5^n}{n^n} = \frac{5^n}{n^{n-7}} = 5^7\,\frac{5^{n-7}}{n^{n-7}} = 5^7\left(\frac{5}{n}\right)^{n-7}.$$

Pertanto, se $n \geq 6$, si ha

$$0 \leq \frac{n^7\,5^n}{n^n} \leq 5^7\left(\frac{5}{n}\right)^{n-7} \leq 5^7\left(\frac{5}{6}\right)^{n-7},$$

e l'ultima successione tende a zero. Per il teorema dei carabinieri, la successione data tende a zero.

1C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n} = +\infty\,.$$

Vero: Si ha, se n è sufficientemente grande,

$$\frac{2^{n^2}}{n^n} = \left(\frac{2^n}{n}\right)^n \geq \frac{2^n}{n}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n} = +\infty\,.$$

1D)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\,n!}{n^n} = 0\,.$$

Vero: Per calcolare il limite, usiamo la formula di Stirling:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}} = 1\,.$$

Pertanto,

$$\frac{n^3\,n!}{n^n} = \frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}}\,n^3\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n} = \sqrt{2\pi}\,\frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}}\,\frac{n^{\frac{7}{2}}}{\mathrm{e}^n}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{7}{2}}}{\mathrm{e}^n} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\,n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi}\,\frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}}\,\frac{n^{\frac{7}{2}}}{\mathrm{e}^n} = \sqrt{2\pi}\cdot 1\cdot 0 = 0\,.$$

2) Sia

$$a_n = \frac{7\,n^2 + 8\,n}{2\,n + 9}\,.$$

2A)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

Vero: Si tratta del rapporto di due polinomi, con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore. Dato che il rapporto 7/2 tra i due termini di grado massimo è positivo, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

2B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{a_n} = 0\,.$$

Vero: Dato che la successione a_n diverge a più infinito (si veda l'esercizio **2A**), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{a_n} = 0\,.$$

2C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^6} = +\infty\,.$$

Falso: Si ha

$$\frac{a_n}{n^6} = \frac{1}{n^6}\,\frac{7\,n^2 + 8\,n}{2\,n + 9} = \frac{7\,n^2 + 8\,n}{2\,n^7 + 9\,n^6}\,,$$

che è il rapporto di due polinomi, con il grado del denominatore maggiore del grado del numeratore. Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7\,n^2 + 8\,n}{2\,n^7 + 9\,n^6} = 0\,.$$

2D)

$$\lim_{n\to+\infty} \left[a_n - \frac{7}{2}\,n\right] = +\infty\,.$$

Falso: Si ha

$$a_n - \frac{7}{2}\,n = \frac{7\,n^2 + 8\,n}{2\,n + 9} - \frac{7}{2}\,n = \frac{2\,(7\,n^2 + 8\,n) - 7\,n\,(2\,n + 9)}{2\,(2\,n + 9)}\,.$$

Sviluppando i prodotti si ha

$$a_n - \frac{7}{2}\,n = \frac{14\,n^2 + 16\,n - 14\,n^2 - 63\,n}{4\,n + 18} = \frac{-47\,n}{4\,n + 18}\,.$$

Pertanto, dato che si tratta del rapporto tra due polinomi dello stesso grado,

$$\lim_{n\to+\infty} \left[a_n - \frac{7}{2}\,n\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{-47\,n}{4\,n + 18} = -\frac{47}{4}\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n\to+\infty} n^7 \, \mathrm{tg}\left(\frac{6}{n^6}\right) = 6\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

si ha (ponendo $a_n = 6/n^6$)

$$\lim_{n\to+\infty} n^7 \, \mathrm{tg}\left(\frac{6}{n^6}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{6\,n^7}{n^6} \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{6}{n^6}\right)}{\frac{6}{n^6}} = \lim_{n\to+\infty} 6\,n \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{6}{n^6}\right)}{\frac{6}{n^6}} = 6 \cdot (+\infty) \cdot 1 = +\infty\,.$$

3B)

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n \sin^2\left(\frac{n^7}{4^n}\right) = 0\,.$$

Vero: Dato che $b_n = n^7/4^n$ è una successione infinitesima, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2(b_n)}{b_n^2} = 1\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}, 4^n \sin^2\left(\frac{n^7}{4^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 4^n \frac{n^{14}}{4^{2n}} \frac{\sin^2(b_n)}{b_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{14}}{4^n} \frac{\sin^2(b_n)}{b_n^2} = 0 \cdot 1 = 0\,,$$

dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{14}}{4^n} = 0\,.$$

3C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^7(5\,n)}{n} = 5^7\,.$$

Falso: La successione $\sin^7(5\,n)$ è limitata (da 1), mentre la successione $\frac{1}{n}$ è infinitesima. Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^7(5\,n)}{n} = 0\,.$$

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} n^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^5}} - 1\right) \text{ non esiste.}$$

Vero: Ricordando che se a_n è una successione infinitesima allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a_n} - 1}{a_n} = 1\,,$$

ed osservando che si ha

$$n^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^5}} - 1\right) = n^5 \frac{(-1)^n}{n^5} \frac{\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^5}} - 1}{\frac{(-1)^n}{n^5}} = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^5}} - 1}{\frac{(-1)^n}{n^5}}\,,$$

è chiaro che il limite della successione data non esiste (esiste una sottosuccessione convergente a 1, ed una a -1).

---

4) Sia

$$a_n = \cos\left(\frac{9}{n^3}\right).$$

4A)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,.$$

Vero: Dato che $9/n^3$ tende a zero, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0\,.$$

4B)

$$\lim_{n\to+\infty} n^6\, a_n = +\infty\,.$$

Vero: Dato che (si veda l'esercizio **4A)**)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^6\, a_n = (+\infty)\cdot(1) = +\infty\,.$$

4C)

$$\lim_{n\to+\infty} n^6\,(1-a_n) = \frac{81}{2}\,.$$

Vero: Ricordiamo che se b_n tende a zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(b_n)}{b_n^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Scegliendo $b_n = 9/n^3$, si ha quindi $1-a_n = 1-\cos(b_n)$. Pertanto

$$n^6\,(1-a_n) = \frac{1-\cos(b_n)}{\frac{1}{n^6}} = 81\,\frac{1-\cos(b_n)}{\frac{81}{n^6}} = 81\,\frac{1-\cos(b_n)}{b_n^2}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} n^6\,(1-a_n) = \lim_{n\to+\infty} 81\,\frac{1-\cos(b_n)}{b_n^2} = 81\cdot\frac{1}{2} = \frac{81}{2}\,.$$

4D)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n\,n^2+2}{n^2+4} = 1\,.$$

Vero: Si ha, mettendo in evidenza n^2 al numeratore e al denominatore,

$$\frac{a_n\,n^2+2}{n^2+4} = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{a_n+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} = \frac{a_n+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\,.$$

Dato che sia $2/n^2$ che $4/n^2$ tendono a zero, e che a_n tende a 1 (si veda l'esercizio **4A)**), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n\,n^2+2}{n^2+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1\,.$$

---

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{6\,n}{n^2+8}\Big)^{n},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}], \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n}],$$

Soluzione:

a) Ricordiamo che se a_n è una successione che diverge positivamente, e se A è un numero reale, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{A}{a_n}\Big)^{n}=\mathrm{e}^{A}. \tag{1}$$

Riscriviamo la successione data come segue:

$$\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{\sqrt{n}}=\Big[\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{n}\Big]^{\frac{\sqrt{n}}{n}}=\Big[\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{n}\Big]^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Passando al limite, utilizzando la (1) con $a_n = n$ e $A=-7$, nonché i teoremi sui limiti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\Big[\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{n}\Big]^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=[\mathrm{e}^{-7}]^{0}=1.$$

b) Riscriviamo la successione come segue:

$$\Big(1+\frac{6\,n}{n^2+8}\Big)^{n}=\Big[\Big(1+\frac{6\,n}{n^2+8}\Big)^{\frac{n^2+8}{n}}\Big]^{\frac{n^2}{n^2+8}}.$$

Passando al limite, utilizzando la (1) con $a_n=\frac{n^2+8}{n}$ e $A=6$, nonché i teoremi sui limiti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{6\,n}{n^2+8}\Big)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\Big[\Big(1+\frac{6\,n}{n^2+8}\Big)^{\frac{n^2+8}{n}}\Big]^{\frac{n^2}{n^2+8}}=[\mathrm{e}^{6}]^{1}=\mathrm{e}^{6}.$$

c) Razionalizziamo la successione:

$$\begin{aligned} n\,[\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}] &= n\,\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5})\,(\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}} \\ &= n\,\frac{(n+5)-(n-5)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}} \\ &= \frac{10\,n}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}}. \end{aligned}$$

Mettendo in evidenza $\sqrt{n}$ al denominatore, si ha

$$n\,[\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}]=\frac{10\,n}{\sqrt{n}\,\Big[\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}\Big]}=\frac{10\,\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}.$$

Dato che il numeratore diverge, ed il denominatore tende a 2, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}]=+\infty.$$

d) Razionalizziamo:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n} &= \frac{(n+4)-n}{\sqrt[3]{(n+4)^2}+\sqrt[3]{n\,(n+4)}+\sqrt[3]{n^2}} \\ &= \frac{4}{n^{\frac{2}{3}}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(1+4/n)^2}+\sqrt[3]{1+4/n}+1}. \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n}]=4\,\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(1+4/n)^2}+\sqrt[3]{1+4/n}+1}=\frac{4}{\sqrt[3]{(1+4/n)^2}+\sqrt[3]{1+4/n}+1},$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{(1+4/n)^2}+\sqrt[3]{1+4/n}+1} = \frac{4}{3}\,.$$

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{6^n\,n^7}{n!}\,,\qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+6^n}{(n+1)!+3^n}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{7}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}\,,\qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{n}}-1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{9}{n}\right).$$

Soluzione:

a) Si ha

$$\frac{6^n\,n^7}{n!}=\frac{2^n}{2^n}\,\frac{6^n\,n^7}{n!}=\frac{n^7}{2^n}\,\frac{12^n}{n!}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^7}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{12^n}{n!}=0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6^n\,n^7}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^7}{2^n}\,\frac{12^n}{n!}=0\cdot 0=0\,.$$

b) Mettendo in evidenza $n!$ al numeratore, e $(n+1)!$ al denominatore, si ha

$$\frac{n!+6^n}{(n+1)!+3^n}=\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{1+\frac{6^n}{n!}}{1+\frac{3^n}{(n+1)!}}=\frac{1}{n+1}\,\frac{1+\frac{6^n}{n!}}{1+\frac{3^n}{(n+1)!}}\,,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$. Ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6^n}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}=0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+6^n}{(n+1)!+3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\,\frac{1+\frac{6^n}{n!}}{1+\frac{3^n}{(n+1)!}}=0\cdot\frac{1+0}{1+0}=0\cdot 1=0\,.$$

c) Ricordando che se a_n tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(a_n)}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+a_n)}{a_n}=1\,,$$

possiamo scrivere

$$\frac{\sin^2\left(\frac{7}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{7}{n}\right)}{\frac{49}{n^2}}\,\frac{\frac{49}{n^2}}{\frac{6}{n^2}}\,\frac{\frac{6}{n^2}}{\log\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}=\frac{49}{6}\,\frac{\sin^2\left(\frac{7}{n}\right)}{\frac{49}{n^2}}\,\frac{\frac{6}{n^2}}{\log\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{7}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{49}{6}\,\frac{\sin^2\left(\frac{7}{n}\right)}{\frac{49}{n^2}}\,\frac{\frac{6}{n^2}}{\log\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}=\frac{49}{6}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=\frac{49}{6}\,.$$

d) Ricordando che se a_n tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{tg}(a_n)}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{a_n}-1}{a_n}=1\,,$$

possiamo scrivere

$$n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{n}}-1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{9}{n}\right)=n^2\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{n}}-1}{\frac{3}{n}}\,\frac{3}{n}\,\frac{9}{n}\,\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{9}{n}\right)}{\frac{9}{n}}=27\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{n}}-1}{\frac{3}{n}}\,\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{9}{n}\right)}{\frac{9}{n}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{n}}-1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{9}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}27\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{n}}-1}{\frac{3}{n}}\,\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{9}{n}\right)}{\frac{9}{n}}=27\cdot 1\cdot 1=27\,.$$