## Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 1
## 2 Ottobre 2023 — Compito n. 00046

**Istruzioni**: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

**Nome:** ______________________

**Cognome:** ______________________

**Matricola:** | | | | | | | |

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **F** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| **C** | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

---

**1)** Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 3\}\,.$$

**1A)** Il numero $x = 13$ non appartiene ad $E$.
**1B)** Se $x$ appartiene ad $E$, allora $x+21$ appartiene ad $E$.
**1C)** Non esiste il minimo di $E$.
**1D)** L'insieme $\mathbb{N}\setminus E$ non è limitato superiormente.

**2)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-7| \le 7\} \setminus \{0\}.$$

**2A)** L'insieme $E$ è un intervallo.
**2B)** Il numero reale $x = 8$ appartiene ad $E$.
**2C)** L'insieme $E$ non è limitato superiormente.
**2D)** L'insieme $E$ non ha massimo.

**3)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 20x + 84 \le 0\}\,.$$

**3A)** L'insieme $E$ non è vuoto.
**3B)** L'insieme $E$ non è un intervallo.
**3C)** L'insieme $E \setminus \{10\}$ è un intervallo.
**3D)** L'insieme $E$ ha minimo.

**4)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \le \sqrt{13}\}\,.$$

**4A)** Il numero $x = \sqrt{13}$ appartiene ad $E$.
**4B)** Il numero $x = -1$ appartiene ad $E$.
**4C)** L'insieme $E$ è limitato.
**4D)** Esiste il massimo di $E$.

---

**Docente**
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Cognome** | **Nome** | **Matricola** | **Compito 00046** |

**5)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x \leq 10\} \setminus \{0\}\,.$$
**a)** Dimostrare che l'insieme $E$ non è un intervallo.
**b)** Dimostrare che l'insieme $E$ è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di $E$.
**c)** Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 8]$.
**d)** Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme
$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ☐☐☐☐☐☐☐☐ | **Cognome** | **Nome** | **Matricola** | **Compito 00046** |

**6)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-6)\,(x-7)\,(x-8) \leq 0\}\,.$$
**a)** Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad $E$.
**b)** Risolvendo la disequazione che definisce $E$, scrivere $E$ come unione di intervalli.
**c)** Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
**d)** Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

# Soluzioni del compito 00046

**1)** Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 3\} .$$

---

**1A)** Il numero $x = 13$ non appartiene ad $E$.

**Vero:** Il numero $x = 13$ non appartiene ad $E$ dato che non è un multiplo di 3; infatti, dividendo $x$ per 3 si ottiene come resto 1 (e non 0).

---

**1B)** Se $x$ appartiene ad $E$, allora $x + 21$ appartiene ad $E$.

**Vero:** Se $x$ appartiene ad $E$, $x$ è un multiplo intero di 3; esiste quindi un intero $k$ tale che $x = 3\,k$. Dato che $21 = 7 \cdot 3$, si ha quindi
$$x + 21 = 3\,k + 7 \cdot 3 = (k + 7) \cdot 3 ,$$
e quindi $x + 21$ appartiene ad $E$ perché è un multiplo intero di 3.

---

**1C)** Non esiste il minimo di $E$.

**Falso:** Dato che $E$ è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, $E$ ammette minimo per il principio di buon ordinamento. Un altro modo per dimostrare che $E$ ha minimo è osservare che
$$E = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots\} ,$$
e quindi il minimo di $E$ esiste ed è 0.

---

**1D)** L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato superiormente.

**Vero:** Se $\mathbb{N} \setminus E$ fosse limitato superiormente, esisterebbe $N$ in $\mathbb{N}$ tale che se $x$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$, allora $x < N$. Pertanto, $x = N$ appartiene ad $E$. Ma se $N$ appartiene ad $E$, allora $N + 1$ non vi appartiene (perché dividendo $N$ per 3 si ottiene come resto 1, e quindi $N + 1$ non è divisibile per 3). Abbiamo dunque un assurdo: tutti i numeri di $\mathbb{N} \setminus E$ sono strettamente minori di $N$, ma $N + 1 > N$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$. Ne segue quindi che $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato.

---

**2)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 7| \le 7\} \setminus \{0\}.$$

---

Si ha
$$|x - 7| \le 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -7 \le x - 7 \le 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \le x \le 14\,,$$
cosicché

(1) $$E = [0, 14] \setminus \{0\} = (0, 14]\,.$$

---

**2A)** L'insieme $E$ è un intervallo.

**Vero:** Per la (1), si ha che $E = (0, 14]$ è un intervallo.

---

**2B)** Il numero reale $x = 8$ appartiene ad $E$.

**Vero:** Dalla (1) segue che $x = 8$ appartiene ad $E$.

---

**2C)** L'insieme $E$ non è limitato superiormente.

**Falso:** Per la (1), l'insieme $E$ è limitato superiormente.

---

**2D)** L'insieme $E$ non ha massimo.

**Falso:** Per la (1), l'insieme $E$ ha $M = 14$ come massimo.

---

**3)** Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 20x + 84 \leq 0\} .$$

---

Si ha

$$x^2 - 20x + 84 = 0 \qquad \iff \qquad x = 6, 14 .$$

Pertanto,

$$x^2 - 20x + 84 \leq 0 \qquad \iff \qquad 6 \leq x \leq 14 \qquad \iff \qquad x \in [6, 14] .$$

Si ha quindi

(1) $$E = [6, 14] .$$

---

**3A)** L'insieme $E$ non è vuoto.

**Vero:** Per la (1), l'insieme $E$ non è vuoto.

---

**3B)** L'insieme $E$ non è un intervallo.

**Falso:** Per la (1), l'insieme $E$ è un intervallo.

---

**3C)** L'insieme $E \setminus \{10\}$ è un intervallo.

**Falso:** Per la (1) si ha

$$E \setminus \{10\} = [6, 10) \cup (10, 14] ,$$

che non è un intervallo.

---

**3D)** L'insieme $E$ ha minimo.

**Vero:** Per la (1), l'insieme $E$ ha $m = 6$ come minimo.

---

**4)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{13}\}\,.$$

---

Sia ha
$$|x| \leq \sqrt{13} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
da cui segue che
$$E = [-\sqrt{13}, \sqrt{13}] \cap \mathbb{Q}\,. \tag{1}$$

---

**4A)** Il numero $x = \sqrt{13}$ appartiene ad $E$.

**Falso:** Dato che $x = \sqrt{13}$ non è un numero razionale, $x$ non appartiene ad $E$.

---

**4B)** Il numero $x = -1$ appartiene ad $E$.

**Vero:** Dato che $x = -1$ è un numero razionale, e che si ha
$$-\sqrt{13} \leq -1 \leq \sqrt{13}\,,$$
il numero $x = 1$ appartiene ad $E$.

---

**4C)** L'insieme $E$ è limitato.

**Vero:** Dalla (1) segue che
$$E \subset [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]\,,$$
e quindi $E$ è un insieme limitato dato che è contenuto in un insieme limitato.

---

**4D)** Esiste il massimo di $E$.

**Falso:** Il "candidato massimo" di $E$ è $x = \sqrt{13}$, che però non appartiene ad $E$ dato che non è un numero razionale. Ne segue che non esiste il massimo di $E$.

---

**5)** Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -10 \le x \le 10\} \setminus \{0\}\,.$$
**a)** Dimostrare che l'insieme $E$ non è un intervallo.
**b)** Dimostrare che l'insieme $E$ è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di $E$.
**c)** Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 8]$.
**d)** Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme
$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

---

**Soluzione:**
**a)** Si ha
$$E = [-10, 10] \setminus \{0\} = [-10, 0) \cup (0, 10]\,, \tag{1}$$
che non è un intervallo.

**b)** Dalla (1) segue che (ad esempio) $x = 10$ è un maggiorante di $E$, e che (ad esempio) $x = -10$ è un minorante di $E$. Si ha infatti che
$$\overline{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 10\} = [10, +\infty)\,, \qquad \underline{m}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \le -10\} = (-\infty, -10]\,.$$

**c)** Si ha, per la (1),
$$E \cap [0, 8] = ([-10, 0) \cup (0, 10]) \cap [0, 8] = (0, 8]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

**d)** Se $x$ appartiene ad $E$, allora
$$-10 \le x \le 10\,, \qquad x \ne 0\,.$$
Se $x > 0$, si ha
$$0 < x \le 10 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \le 100\,,$$
mentre se $x < 0$, si ha
$$-10 \le x < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \le 100\,.$$
Si ha quindi che se $x$ appartiene ad $E$, allora
$$0 < x \le \max(100, 100) = 100\,,$$
e quindi
$$F = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \le 100\} = (0, 100]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

**6)** Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-6)\,(x-7)\,(x-8) \le 0\}\,.$$

**a)** Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad $E$.
**b)** Risolvendo la disequazione che definisce $E$, scrivere $E$ come unione di intervalli.
**c)** Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
**d)** Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

---

**Soluzione:**
**a)** Se $x = 0$, si ha

$$(x-6)\,(x-7)\,(x-8) = (0-6)\,(0-7)\,(0-8) = -336 \le 0\,,$$

e quindi (per definizione) $x = 0$ appartiene ad $E$.

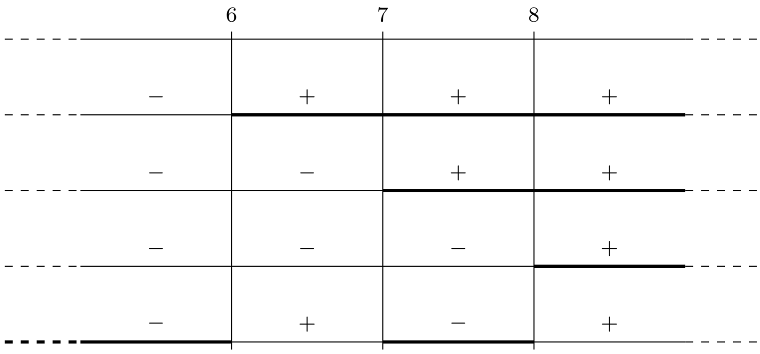
**b)** Consideriamo i segni dei tre fattori che determinano la disequazione che definisce $E$; si ha

$$x - 6 \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \ge 6\,, \qquad x - 7 \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \ge 7\,,$$

e

$$x - 8 \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \ge 8\,.$$

Graficamente, quindi, si ha




e quindi

(1) $$E = (-\infty, 6] \cup [7, 8]\,.$$

**c)** Dalla (1) si ha che

$$E \cap [0, +\infty) = [0, 6] \cup [7, 8]\,,$$

che è un insieme limitato (superiormente da 8 e inferiormente da 0).

**d)** Dato che dalla (1) segue che il massimo di $E$ è $M = 8$, che è anche un numero razionale, allora il massimo di $E \cap \mathbb{Q}$ è $M = 8$. Sempre dalla (1) segue che

$$E \cap \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, 6, 7, 8\}\,,$$

che ha come minimo $m = 0$.