



**Calcolo differenziale — Compito di pre-esonero**  
**6 Novembre 2023 — Compito n. 00098**

**Istruzioni:** le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:**

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 7\}.$$

1A) L'insieme  $E$  è un intervallo.

1B) L'insieme  $E$  è limitato.

1C) Non esiste il minimo di  $E$ .

1D) Se  $F = E \cap (-\infty, 0)$ , esiste il massimo di  $F$ .

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Il dominio di  $f(x) = \log(|x - 4|)$  è  $\{x \neq \pm 4\}$ .

2B) Il dominio di  $g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 64}$  è  $\{x \neq 8\}$ .

2C) Il dominio di  $h(x) = \sqrt{\frac{64}{x^2} - 1}$  è  $[-8, 8] \setminus \{0\}$ .

2D) Il dominio di  $k(x) = \sqrt[7]{x^2 - 25}$  è  $\{|x| \geq 5\}$ .

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^9}{5^n} = 0.$$

3B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^n + n^6}{8^n + n!} = +\infty.$$

3C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{5^n + 10^n} = +\infty.$$

3D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^3} = 1.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^9 \sin\left(\frac{4}{n^9}\right) = 1.$$

4B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{11}{n}\right)} = \frac{50}{121}.$$

4C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^2) \sin\left(\frac{4}{n^2}\right) = 4.$$

4D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n} \left[ \arctan\left(\frac{4^n}{n!}\right) \right]^2 = +\infty.$$

**Docente**

☐ Garroni [A, F]

☐ Orsina [G, Z]

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00098

---

5) Siano

$$a_n = \frac{7n+8}{7n+4}, \quad E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad f(x) = \log(-x^2 + 8x - 12).$$

- a) Dimostrare che la successione  $a_n$  è monotona decrescente.
  - b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme  $E$ , specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
  - c) Determinare il dominio  $\text{dom}(f)$  della funzione  $f(x)$ .
  - d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme  $\text{dom}(f)$ , specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.
-

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00098

6) Si calcolino i seguenti limiti:

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9}]$ ,      b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 2^n}{8^n + n^4}$ ,

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{n^7 + 4}\right)^{n^7}$ ,      d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{7}{n}\right)}$ .

## Soluzioni del compito 00098

1) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 7\}.$$

---

Risolvendo la disequazione, si ha

$$|x - 4| \leq 7 \iff -7 \leq x - 4 \leq 7 \iff -3 \leq x \leq 11,$$

e quindi

$$(1) \quad E = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 11\} = [-3, 11].$$

---

**1A)** L'insieme  $E$  è un intervallo.

**Vero:** Dalla (1) segue che  $E$  è un intervallo.

---

**1B)** L'insieme  $E$  è limitato.

**Vero:** Dalla (1) segue che  $E$  è limitato.

---

**1C)** Non esiste il minimo di  $E$ .

**Falso:** Dalla (1) segue che l'estremo inferiore di  $E$  è  $I = -3$ . Dato che  $I$  appartiene ad  $E$ ,  $I$  è il minimo di  $E$ .

---

**1D)** Se  $F = E \cap (-\infty, 0)$ , esiste il massimo di  $F$ .

**Falso:** Dalla (1) segue che

$$F = E \cap (-\infty, 0) = [-3, 11] \cap (-\infty, 0) = [-3, 0).$$

Si ha pertanto che l'estremo superiore di  $F$  è  $S = 0$ . Dato che  $S$  non appartiene ad  $F$ , non esiste il massimo di  $F$ .

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

**2A)** Il dominio di  $f(x) = \log(|x - 4|)$  è  $\{x \neq \pm 4\}$ .

**Falso:** Ricordando che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi, la funzione  $f(x)$  è definita per ogni  $x$  reale tale che  $|x - 4| > 0$ ; dato che tale disuguaglianza è verificata per ogni  $x \neq 4$ , il dominio di  $f(x)$  è

$$\text{dom}(f) = \{x \neq 4\} \neq \{x \neq \pm 4\}.$$

---

**2B)** Il dominio di  $g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 64}$  è  $\{x \neq 8\}$ .

**Falso:** La funzione è definita per ogni  $x$  che non annulla il denominatore della frazione. Dato che  $x^2 - 64 = 0$  se e solo se  $x = \pm 8$ , si ha

$$\text{dom}(g) = \{x \neq \pm 8\} \neq \{x \neq 8\}.$$

---

**2C)** Il dominio di  $h(x) = \sqrt{\frac{64}{x^2} - 1}$  è  $[-8, 8] \setminus \{0\}$ .

**Vero:** Affinché la funzione sia definita, deve essere definito, e positivo, l'argomento della radice quadrata, che è la funzione

$$h_1(x) = \frac{64}{x^2} - 1.$$

Chiaramente  $h_1(x)$  è definita per ogni  $x \neq 0$ , mentre si ha (dato che  $x^2 > 0$  per ogni  $x \neq 0$ )

$$h_1(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{64}{x^2} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 64 \geq x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad -8 \leq x \leq 8.$$

Pertanto,  $h_1(x)$  è definita e positiva nell'insieme  $[-8, 8] \setminus \{0\}$ , e quindi

$$\text{dom}(h) = [-8, 8] \setminus \{0\}.$$

---

**2D)** Il dominio di  $k(x) = \sqrt[7]{x^2 - 25}$  è  $\{|x| \geq 5\}$ .

**Falso:** Dato che le radici di ordine dispari sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ , e dato che la funzione  $k_1(x) = x^2 - 25$  è definita per ogni  $x$  reale, si ha

$$\text{dom}(k) = \mathbb{R} \neq \{|x| \geq 5\}.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

3A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^9}{5^n} = 0.$$

**Vero:** Per la gerarchia degli infiniti (per la quale gli esponenziali “battono” le potenze di  $n$  all’infinito) si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^9}{5^n} = 0.$$

---

3B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^n + n^6}{8^n + n!} = +\infty.$$

**Falso:** Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore i termini che divergono più velocemente, si ha

$$\frac{11^n + n^6}{8^n + n!} = \frac{11^n}{n!} \frac{1 + \frac{n^6}{11^n}}{1 + \frac{8^n}{n!}}.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^6}{11^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^n}{n!} = 0,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^n + n^6}{8^n + n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11^n}{n!} \frac{1 + \frac{n^6}{11^n}}{1 + \frac{8^n}{n!}} = 0 \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = 0 \neq +\infty.$$

---

3C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{5^n + 10^n} = +\infty.$$

**Vero:** Si ha

$$\frac{n!}{5^n + 10^n} = \frac{n!}{10^n} \frac{1}{1 + \frac{5^n}{10^n}} = \frac{n!}{10^n} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Dato che, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{10^n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{5^n + 10^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{10^n} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = (+\infty) \cdot \frac{1}{1 + 0} = +\infty.$$

---

3D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^3} = 1.$$

**Vero:** Si ha

$$\left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^3} = \left[\left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{n^3}{n^9}} = \left[\left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{1}{n^6}}.$$

Pertanto, ricordando che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^9} = e^8,$$

e che  $\frac{1}{n^6}$  tende a zero, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{8}{n^9}\right)^{n^9}\right]^{\frac{1}{n^6}} = [e^8]^0 = 1.$$



4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

---

4A)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^9 \sin\left(\frac{4}{n^9}\right) = 1.$$

**Falso:** Ricordando che se  $a_n$  è una successione che tende a zero si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1,$$

si ha, ponendo  $a_n = 4/n^9$ ,

$$n^9 \sin\left(\frac{4}{n^9}\right) = 4 \frac{n^9}{4} \sin\left(\frac{4}{n^9}\right) = 4 \frac{\sin\left(\frac{4}{n^9}\right)}{\frac{4}{n^9}},$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^9 \sin\left(\frac{4}{n^9}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \frac{\sin\left(\frac{4}{n^9}\right)}{\frac{4}{n^9}} = 4 \cdot 1 = 4 \neq 1.$$

---

4B)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{11}{n}\right)} = \frac{50}{121}.$$

**Vero:** Ricordando che se  $a_n$  tende a zero allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2},$$

si ha

$$\frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{11}{n}\right)} = \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2} \frac{\left(\frac{10}{n}\right)^2}{\left(\frac{11}{n}\right)^2} \frac{\left(\frac{11}{n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{11}{n}\right)} = \frac{100}{121} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2} \left(\frac{\frac{11}{n}}{\sin\left(\frac{11}{n}\right)}\right)^2,$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{11}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{121} \frac{1 - \cos\left(\frac{10}{n}\right)}{\left(\frac{10}{n}\right)^2} \left(\frac{\frac{11}{n}}{\sin\left(\frac{11}{n}\right)}\right)^2 = \frac{100}{121} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{50}{121}.$$

---

4C)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^2) \sin\left(\frac{4}{n^2}\right) = 4.$$

**Falso:** La successione  $\sin(n^2)$  è limitata, mentre, dato che  $4/n^2$  tende a zero, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{4}{n^2}\right) = 0.$$

Pertanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^2) \sin\left(\frac{4}{n^2}\right) = 0 \neq 4,$$

dato che si tratta del prodotto tra una successione limitata ed una che tende a zero.

---

4D)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n} \left[ \arctan\left(\frac{4^n}{n!}\right) \right]^2 = +\infty.$$

**Falso:** Dato che  $4^n/n!$  tende a zero, si ha

$$\arctan\left(\frac{4^n}{n!}\right) \approx \frac{4^n}{n!}.$$



Pertanto

$$\frac{n!}{2^n} \left[ \arctan \left( \frac{4^n}{n!} \right) \right]^2 \approx \frac{n!}{2^n} \left[ \frac{4^n}{n!} \right]^2 = \frac{n!}{2^n} \frac{16^n}{(n!)^2} = \frac{(8)^n}{n!}.$$

Ricordando la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n} \left[ \arctan \left( \frac{4^n}{n!} \right) \right]^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(8)^n}{n!} = 0 \neq +\infty.$$

---

5) Siano

$$a_n = \frac{7n+8}{7n+4}, \quad E = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad f(x) = \log(-x^2 + 8x - 12).$$

a) Dimostrare che la successione  $a_n$  è monotona decrescente.

b) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme  $E$ , specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

c) Determinare il dominio  $\text{dom}(f)$  della funzione  $f(x)$ .

d) Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme  $\text{dom}(f)$ , specificando se siano rispettivamente massimo e minimo.

---

**Soluzione:**

a) Si ha

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{7(n+1)+8}{7(n+1)+4} \leq \frac{7n+8}{7n+4}$$

che è equivalente a

$$(7(n+1)+8)(7n+4) \leq (7n+8)(7(n+1)+4).$$

Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere

$$49n(n+1) + 28(n+1) + 56n + 32 \leq 49n(n+1) + 28n + 56(n+1) + 32,$$

e quindi, semplificando i termini uguali ed espandendo i rimanenti,

$$28n + 28 + 56n \leq 28n + 56n + 56 \iff 28 \leq 56,$$

che è vero. La successione  $a_n$  è quindi monotona decrescente.

Analogamente, si poteva osservare che

$$\begin{aligned} a_n = \frac{7n+8}{7n+4} &= \frac{7n+4+8-4}{7n+4} = 1 + \frac{4}{7n+4} \\ &\geq 1 + \frac{4}{7(n+1)+4} = \frac{7(n+1)+4+8-4}{7(n+1)+4} \\ &= \frac{7(n+1)+8}{7(n+1)+4} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

b) Dato che la successione  $a_n$  è monotona decrescente, si ha

$$\sup(E) = \max(E) = a_0 = 2, \quad \inf(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{7}{7} = 1,$$

dato che  $a_n$  è definita dal rapporto di due polinomi di primo grado. L'estremo inferiore non è un minimo dato che non esiste  $n$  in  $\mathbb{N}$  tale che  $a_n = 1$ . Infatti

$$a_n = 1 \iff \frac{7n+8}{7n+4} = 1 \iff 7n+8 = 7n+4 \iff 8 = 4,$$

che è falso.

c) Il logaritmo è definito se e solo se il suo argomento è positivo; dato che

$$-x^2 + 8x - 12 > 0 \iff x^2 - 8x + 12 < 0,$$

si tratta di risolvere quest'ultima disequazione. Si ha  $x^2 - 8x + 12 = 0$  per  $x = 2$  e per  $x = 6$ , e quindi

$$x^2 - 8x + 12 < 0 \iff 2 < x < 6,$$

da cui segue che

$$\text{dom}(f) = (2, 6).$$

d) Dato che  $\text{dom}(f) = (2, 6)$ , si ha

$$\sup(\text{dom}(f)) = 6, \quad \inf(\text{dom}(f)) = 2,$$

che non sono, rispettivamente, né massimo (dato che 6 non appartiene all'insieme), né minimo (dato che 2 non appartiene all'insieme).

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9}], & \text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 2^n}{8^n + n^4}, \\ \text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{n^7 + 4}\right)^{n^7}, & \text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{7}{n}\right)}. \end{array}$$

**Soluzione:**

a) Si ha, razionalizzando,

$$\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9} = \frac{(\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9})(\sqrt{n+9} + \sqrt{n-9})}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n-9}} = \frac{n+9 - (n-9)}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n-9}},$$

cosicché (semplificando)

$$\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9} = \frac{18}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n-9}}.$$

Pertanto (dato che il denominatore diverge)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{18}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n-9}} = 0.$$

b) Ricordando la gerarchia degli infiniti, mettiamo in evidenza  $n!$  al numeratore e  $8^n$  al denominatore. Si ha

$$\frac{n! + 2^n}{8^n + n^4} = \frac{n!}{8^n} \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{1 + \frac{n^4}{8^n}}.$$

Dato che (sempre per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{8^n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{8^n} = 0,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 2^n}{8^n + n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{8^n} \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{1 + \frac{n^4}{8^n}} = (+\infty) \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty.$$

c) Ricordando che se  $a_n$  è una successione divergente a più infinito, e se  $A$  è un numero reale, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{A}{a_n}\right)^{a_n} = e^A,$$

riscriviamo la successione come segue:

$$\left(1 + \frac{6}{n^7 + 4}\right)^{n^7} = \left[\left(1 + \frac{6}{n^7 + 4}\right)^{n^7 + 4}\right]^{\frac{n^7}{n^7 + 4}}.$$

Dato che, trattandosi del rapporto tra due polinomi dello stesso grado, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7}{n^7 + 4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot n^7}{1 \cdot n^7 + 4} = \frac{1}{1} = 1,$$

ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{n^7 + 4}\right)^{n^7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{6}{n^7 + 4}\right)^{n^7 + 4}\right]^{\frac{n^7}{n^7 + 4}} = [e^6]^1 = e^6.$$

d) Ricordando che se  $a_n$  è una successione che tende a zero, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1,$$

scriviamo

$$\frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{7}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1}{\frac{2}{n^2}} \frac{\left(\frac{7}{n}\right)^2}{\tan^2\left(\frac{7}{n}\right)} = \frac{2}{49} \frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1}{\frac{2}{n^2}} \left(\tan\left(\frac{7}{n}\right)\right)^2.$$

Pertanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1}{\tan^2\left(\frac{7}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{49} \frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1}{\frac{2}{n^2}} \left( \frac{\frac{7}{n}}{\tan\left(\frac{7}{n}\right)} \right)^2 = \frac{2}{49} \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{1} \right)^2 = \frac{2}{49}.$$