Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 7
11 Dicembre 2023 — Compito n. 00009

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A)
$$x^8 = \mathrm{o}(x^8)\,.$$

1B)
$$\sin^2(x-4) = \mathrm{o}((x-4)^2)\,.$$

1C)
$$3\,x^4 + 9\,x^3 = \mathrm{o}(x^3)\,.$$

1D)
$$\left[\mathrm{e}^{x-4} - 1\right]^3 = \mathrm{o}((x-4)^3)\,.$$

---

2) Sia
$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4\,.$$

2A)
$$T_1(f(x);0) = -5x + 4\,.$$

2B)
$$T_2(f(x);0) = 3x^2 - 5x + 4\,.$$

2C)
$$T_1(f(x);3) = 13x + 16\,.$$

2D)
$$T_3(f(x);2) \neq T_2(f(x);2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)
$$T_2(\mathrm{e}^{8\,x};0) = 1 + 8\,x + 32\,x^2\,.$$

3B)
$$T_3(x\,\sin(5\,x);0) = 25\,x^2\,.$$

3C)
$$T_2\Big(\frac{\sin(3\,x)}{x};0\Big) = 3 - \frac{3}{2}\,x^2\,.$$

3D)
$$T_2\Big(\frac{x}{1+7\,x};0\Big) = x + 7\,x^2\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)
$$\cos(2\,x^2) = 1 - 8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

4B)
$$x\,(\mathrm{e}^{3\,x} - 5) = -4\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

4C)
$$\frac{\sin(4\,x^2)}{x^2} = 16 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

4D)
$$\frac{\log(1+3\,x^2)}{x} = 3\,x + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Docente

☐ Garroni [A, F]

☐ Orsina [G, Z]

	Cognome	Nome	Matricola	Compito 00009

5) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\textbf{a)}\ f(x) = e^{6\,x^2}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x\,(\cos(10\,x) - 1)\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \frac{1}{1 - 2\,x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = x^2\,(e^{10\,x} - \sin(10\,x))\,,$$

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00009**

6) Calcolare, usando Taylor, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{4\,x^3}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(\mathrm{e}^{6\,x^2} - 1)}{1 - \cos(6\,x^2)}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(4\,x) - 4\,x)^2}{64\,x^6}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{5\,x} - 1)\,\sin(2\,x)}{\log(1 + 10\,x^2)}\,.$$

Soluzioni del compito 00009

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A)

$$x^8 = \mathrm{o}(x^8)\,.$$

Falso: Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0\,,$$

non è ha vero che $x^8 = \mathrm{o}(x^8)$. Dividendo per x^7, si vede facilmente che $x^8 = \mathrm{o}(x^7)$.

1B)

$$\sin^2(x-4) = \mathrm{o}((x-4)^2)\,.$$

Falso: Dato che, con la sostituzione $y = x - 4$ si ha

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sin^2(x-4)}{(x-4)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(y)}{y^2} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 = 1^2 = 1 \neq 0\,,$$

non è vero che $\sin^2(x-4) = \mathrm{o}((x-4)^2)$. Dividendo per $x-4$, si vede facilmente che $\sin^2(x-4) = \mathrm{o}(x-4)$.

1C)

$$3\,x^4 + 9\,x^3 = \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Falso: Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,x^4 + 9\,x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0}\,[3\,x + 9] = 9 \neq 0\,,$$

non è vero che $3\,x^4 + 9\,x^3 = \mathrm{o}(x^3)$. Dividendo per x^2, si vede facilmente che $3\,x^4 + 9\,x^3 = \mathrm{o}(x^2)$.

1D)

$$\left[\mathrm{e}^{x-4} - 1\right]^3 = \mathrm{o}((x-4)^3)\,.$$

Falso: Dato che si ha, con la sostituzione $y = x - 4$,

$$\lim_{x\to 4} \frac{\left[\mathrm{e}^{x-4} - 1\right]^3}{(x-4)^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\left[\mathrm{e}^{y} - 1\right]^3}{y^3} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^y - 1}{y}\right)^3 = 1^3 = 1 \neq 0\,,$$

non è vero che $\left[\mathrm{e}^{x-4} - 1\right]^3 = \mathrm{o}((x-4)^3)$. Dividendo per $(x-4)^2$, si vede facilmente che $\left[\mathrm{e}^{x-4} - 1\right]^3 = \mathrm{o}((x-4)^2)$.

---

2) Sia
$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4\,.$$

2A)
$$T_1(f(x); 0) = -5x + 4\,.$$

Vero: Si ha $f(0) = 4$; inoltre, dato che $f'(x) = 6x - 5$, si ha $f'(0) = -5$. Pertanto,
$$T_1(f(x); 0) = f(0) + f'(0)\,x = -5x + 4\,.$$
Analogamente, dato che
$$f(x) = 4 - 5\,x + 3\,x^2 = -5x + 4 + \mathrm{o}(x)\,,$$
si ha $T_1(f(x); 0) = -5x + 4$.

2B)
$$T_2(f(x); 0) = 3x^2 - 5x + 4\,.$$

Vero: Ci sono due modi per rispondere a questa domanda: calcolare $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$ e scrivere il polinomio di Taylor usando la formula, oppure ricordare che il polinomio di Taylor di ordine n di un polinomio di grado n è il polinomio stesso.
Seguendo la prima strada, dato che $f(0) = 4$, che $f'(0) = -5$ e che $f''(0) = 6$ dato che $f''(x) = 6$ per ogni x, si ha
$$T_2(f(x); 0) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 3x^2 - 5x + 4 = f(x)\,,$$
che è lo stesso risultato che si ottiene con il secondo metodo.

2C)
$$T_1(f(x); 3) = 13x + 16\,.$$

Falso: Dato che $f(3) = 16$ e che $f'(3) = 13$ essendo $f'(x) = 6x - 5$ per ogni x, si ha
$$T_1(f(x); 3) = f(3) + f'(3)\,(x - 3) = 13\,(x - 3) + 16 \neq 13x + 16\,.$$

2D)
$$T_3(f(x); 2) \neq T_2(f(x); 2)\,.$$

Falso: Dato che la derivata terza di un polinomio di grado 2 è identicamente nulla (così come le derivate successive), si ha
$$T_3(f(x); 2) = T_2(f(x); 2) + \frac{f^{(3)}(2)}{6}\,x^3 = T_2(f(x); 2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$T_2(\mathrm{e}^{8\,x};0) = 1 + 8\,x + 32\,x^2\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 8\,x$,

$$\mathrm{e}^{8\,x} = 1 + 8\,x + \frac{(8\,x)^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) = 1 + 8\,x + 32\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,,$$

da cui segue che

$$T_2(\mathrm{e}^{8\,x};0) = 1 + 8\,x + 32\,x^2\,.$$

3B)

$$T_3(x\,\sin(5\,x);0) = 25\,x^2\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 5\,x$,

$$\sin(5\,x) = 5\,x - \frac{(5\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$x\,\sin(5\,x) = x\left(5\,x - \frac{(5\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right) = 5\,x^2 - \frac{5^3}{6}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) = 5\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Pertanto,

$$T_3(x\,\sin(5\,x);0) = 5\,x^2 \neq 25\,x^2\,.$$

3C)

$$T_2\Big(\frac{\sin(3\,x)}{x};0\Big) = 3 - \frac{3}{2}\,x^2\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 3\,x$,

$$\sin(3\,x) = 3\,x - \frac{(3\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) = 3\,x - \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{\sin(3\,x)}{x} = \frac{3\,x - \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{x} = 3 - \frac{9}{2}\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Si ha pertanto

$$T_2\Big(\frac{\sin(3\,x)}{x};0\Big) = 3 - \frac{9}{2}\,x^2 \neq 3 - \frac{3}{2}\,x^2\,.$$

3D)

$$T_2\Big(\frac{x}{1+7\,x};0\Big) = x + 7\,x^2\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = -7\,x$,

$$\frac{1}{1+7\,x} = 1 - 7\,x + \mathrm{o}(x)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{x}{1+7\,x} = x\,(1 - 7\,x + \mathrm{o}(x)) = x - 7\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Pertanto,

$$T_2\Big(\frac{x}{1+7\,x};0\Big) = x - 7\,x^2 \neq x + 7\,x^2\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\cos(2\,x^2) = 1 - 8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 2\,x^2$,

$$\cos(2\,x^2) = 1 - \frac{(2\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 - 2\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) \neq 1 - 8\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

4B)

$$x\,(\mathrm{e}^{3\,x} - 5) = -4\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 3\,x$,

$$\mathrm{e}^{3\,x} = 1 + 3\,x + \mathrm{o}(x)\,,$$

da cui segue che

$$x\,(\mathrm{e}^{3\,x} - 5) = x\,(1 + 3\,x + \mathrm{o}(x) - 5) = -4\,x + 3\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) = -4\,x + \mathrm{o}(x)\,.$$

4C)

$$\frac{\sin(4\,x^2)}{x^2} = 16 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 4\,x^2$,

$$\sin(4\,x^2) = 4\,x^2 - \frac{(4\,x^2)^3}{6} + \mathrm{o}((x^2)^3) = 4\,x^2 - \frac{4^3}{6}\,x^6 + \mathrm{o}(x^6) = 4\,x^2 + \mathrm{o}(x^5)\,.$$

Pertanto,

$$\frac{\sin(4\,x^2)}{x^2} = \frac{4\,x^2 + \mathrm{o}(x^5)}{x^2} = 4 + \mathrm{o}(x^3) \neq 16 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

4D)

$$\frac{\log(1 + 3\,x^2)}{x} = 3\,x + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Falso: Ricordando che

$$\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 3\,x^2$,

$$\log(1 + 3\,x^2) = 3\,x^2 - \frac{(3\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 3\,x^2 - \frac{9}{2}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$\frac{\log(1 + 3\,x^2)}{x} = \frac{3\,x^2 - \frac{9}{2}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{x} = 3\,x - \frac{9}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) \neq 3\,x + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

---

5) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\textbf{a)}\ f(x) = \mathrm{e}^{6\,x^2}\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x\,(\cos(10\,x) - 1)\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = \frac{1}{1 - 2\,x^2}\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = x^2\,(\mathrm{e}^{10\,x} - \sin(10\,x))\,,$$

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 6\,x^2$,

$$\mathrm{e}^{6\,x^2} = 1 + 6\,x^2 + \frac{(6\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 + 6\,x^2 + 18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,,$$

da cui segue che

$$T_4(f(x); 0) = 1 + 6\,x^2 + 18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

b) Ricordando che

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \mathrm{o}(t^4) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 10\,x$,

$$\cos(10\,x) = 1 - \frac{(10\,x)^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) = 1 - 50\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$x\,(\cos(10\,x) - 1) = x\,(1 - 50\,x^2 + \mathrm{o}(x^3) - 1) = -50\,x^3 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$T_4(g(x); 0) = -50\,x^3\,.$$

c) Ricordando che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 2\,x^2$,

$$\frac{1}{1 - 2\,x^2} = 1 + 2\,x^2 + (2\,x^2)^2 + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 + 2\,x^2 + 4\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$T_4(h(x); 0) = 1 + 2\,x^2 + 4\,x^4\,.$$

d) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,, \qquad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 10\,x$,

$$\mathrm{e}^{10\,x} = 1 + 10\,x + \frac{(10\,x)^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\,, \qquad \sin(10\,x) = 10\,x - \frac{(10\,x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) = 10\,x + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Pertanto,

$$\mathrm{e}^{10\,x} - \sin(10\,x) = 1 + 10\,x + 50\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 10\,x + \mathrm{o}(x^2) = 1 + 50\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,,$$

da cui segue che

$$x^2\,(\mathrm{e}^{10\,x} - \sin(10\,x)) = x^2\,(1 + 50\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)) = x^2 + 50\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

In definitiva,

$$T_4(k(x); 0) = x^2 + 50\,x^4\,.$$

6) Calcolare, usando Taylor, i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{4\,x^3}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(\mathrm{e}^{6\,x^2} - 1)}{1 - \cos(6\,x^2)}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(4\,x) - 4\,x)^2}{64\,x^6}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{5\,x} - 1)\,\sin(2\,x)}{\log(1 + 10\,x^2)}\,.$$

Soluzione:

a) Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 2\,x$,

$$\sin(2\,x) = 2\,x - \frac{(2\,x)^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{4\,x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,x - \frac{2^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) - 2\,x}{4\,x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{2^2\,x^3}\,.$$

Semplificando, si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,x}{4\,x^3} = \lim_{x\to 0} \Big[-\frac{1}{3} + \frac{\mathrm{o}(x^3)}{x^3}\Big] = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}\,.$$

b) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)\,, \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 6\,x^2$,

$$\mathrm{e}^{6\,x^2} = 1 + 6\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,, \qquad \cos(6\,x^2) = 1 - \frac{(6\,x^2)^2}{2} + \mathrm{o}((x^2)^2) = 1 - 18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$x^2\,(\mathrm{e}^{6\,x^2} - 1) = x^2\,(1 + 6\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 1) = 6\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,,$$

e

$$1 - \cos(6\,x^2) = 1 - (1 - 18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)) = 18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(\mathrm{e}^{6\,x^2} - 1)}{1 - \cos(6\,x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{6\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{18\,x^4 + \mathrm{o}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4}\,\frac{6 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}}{18 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{6 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}}{18 + \frac{\mathrm{o}(x^4)}{x^4}} = \frac{6 + 0}{18 + 0} = \frac{1}{3}\,.$$

c) Ricordando che

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t = 4\,x$,

$$\sin(4\,x) = 4\,x - \frac{(4\,x)^3}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) = 4\,x - \frac{32}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Si ha quindi

$$\sin(4\,x) - 4\,x = 4\,x - \frac{32}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) - 4\,x = -\frac{32}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,.$$

Elevando al quadrato, si ha

$$(\sin(4\,x) - 4\,x)^2 = \Big(-\frac{32}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\Big)^2 = \Big(\frac{32}{3}\Big)^2\,x^6 - 2\,\frac{32}{3}\,x^3\,\mathrm{o}(x^3) + \mathrm{o}(x^6) = \Big(\frac{32}{3}\Big)^2\,x^6 + \mathrm{o}(x^6)\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(4\,x)-4\,x)^2}{64\,x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{32}{3}\right)^2 x^6+\mathrm{o}(x^6)}{64\,x^6}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9}+\frac{\mathrm{o}(x^6)}{x^6}\right]=\frac{16}{9}+0=\frac{16}{9}\,.$$

d) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\,,\qquad \sin(s)=s-\frac{s^3}{6}+\mathrm{o}(s^3)\,,$$

si ha, con le sostituzioni $t=5\,x$ e $s=2\,x$,

$$\mathrm{e}^{5\,x}=1+5\,x+\frac{(5\,x)^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)=1+5\,x+\mathrm{o}(x)\,,$$

e

$$\sin(2\,x)=2\,x-\frac{(2\,x)^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)=2\,x+\mathrm{o}(x^2)\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{5\,x}-1)\,\sin(2\,x)&=(1+5\,x+\mathrm{o}(x)-1)\,(2\,x+\mathrm{o}(x^2))\\&=(5\,x+\mathrm{o}(x))\,(2\,x+\mathrm{o}(x^2))\\&=10\,x^2+5\,x\,\mathrm{o}(x^2)+2\,x\,\mathrm{o}(x)+\mathrm{o}(x)\,\mathrm{o}(x^2)\\&=10\,x^2+\mathrm{o}(x^3)+\mathrm{o}(x^2)+\mathrm{o}(x^3)\\&=10\,x^2+\mathrm{o}(x^2)\,.\end{aligned}\tag{1}$$

Ricordando poi che

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha, con la sostituzione $t=10\,x^2$,

$$\log(1+10\,x^2)=10\,x^2-\frac{(10\,x^2)^2}{2}+\mathrm{o}((x^2)^2)=10\,x^2+\mathrm{o}(x^2)\,.\tag{2}$$

Da (1) e (2) segue allora che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{5\,x}-1)\,\sin(2\,x)}{\log(1+10\,x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{10\,x^2+\mathrm{o}(x^2)}{10\,x^2+\mathrm{o}(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\,\frac{10+\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}}{10+\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}}\,,\tag{3}$$

e, semplificando,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{5\,x}-1)\,\sin(2\,x)}{\log(1+10\,x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{10+\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}}{10+\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}}=\frac{10+0}{10+0}=1\,.$$

Osservazione: nella formula (3) compare la frazione

$$\frac{10\,x^2+\mathrm{o}(x^2)}{10\,x^2+\mathrm{o}(x^2)}\,;$$

osserviamo che la frazione **tende** a 1, ma non è **uguale** a 1, dato che non conosciamo quanto valgono le quantità $\mathrm{o}(x^2)$ al numeratore e al denominatore.