Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 1
2 Ottobre 2023 — Compito n. 00106

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 5\}\,.$$

1A) Il numero $x = 26$ appartiene ad E.
1B) Se x appartiene ad E, allora $x+35$ appartiene ad E.
1C) Esiste il minimo di E.
1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato superiormente.

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \le 6\} \setminus \{0\}.$$

2A) L'insieme E è un intervallo.
2B) Il numero reale $x = 7$ non appartiene ad E.
2C) L'insieme E è limitato superiormente.
2D) L'insieme E ha massimo.

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16x + 60 \le 0\}\,.$$

3A) L'insieme E non è vuoto.
3B) L'insieme E non è un intervallo.
3C) L'insieme $E \setminus \{8\}$ non è un intervallo.
3D) L'insieme E non ha massimo.

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \le \sqrt{3}\}\,.$$

4A) Il numero $x = \sqrt{3}$ appartiene ad E.
4B) Il numero $x = -1$ appartiene ad E.
4C) L'insieme E è limitato.
4D) Non esiste il massimo di E.

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00106**

---

5) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -6 \le x \le 4\} \setminus \{0\}\,.$$

a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 2]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme

$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

								Cognome	Nome	Matricola	Compito 00106

6) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-9)\,(x-10)\,(x-11) \le 0\}\,.$$
a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzioni del compito 00106

1) Sia
$$E = \{\text{multipli interi di } 5\}\,.$$

1A) Il numero $x = 26$ appartiene ad E.

Falso: Il numero $x = 26$ non appartiene ad E dato che non è un multiplo di 5; infatti, dividendo x per 5 si ottiene come resto 1 (e non 0).

1B) Se x appartiene ad E, allora $x + 35$ appartiene ad E.

Vero: Se x appartiene ad E, x è un multiplo intero di 5; esiste quindi un intero k tale che $x = 5\,k$. Dato che $35 = 7 \cdot 5$, si ha quindi
$$x + 35 = 5\,k + 7 \cdot 5 = (k + 7) \cdot 5\,,$$
e quindi $x + 35$ appartiene ad E perché è un multiplo intero di 5.

1C) Esiste il minimo di E.

Vero: Dato che E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, E ammette minimo per il principio di buon ordinamento. Un altro modo per dimostrare che E ha minimo è osservare che
$$E = \{0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots\}\,,$$
e quindi il minimo di E esiste ed è 0.

1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato superiormente.

Vero: Se $\mathbb{N} \setminus E$ fosse limitato superiormente, esisterebbe N in $\mathbb{N}$ tale che se x appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$, allora $x < N$. Pertanto, $x = N$ appartiene ad E. Ma se N appartiene ad E, allora $N + 1$ non vi appartiene (perché dividendo N per 5 si ottiene come resto 1, e quindi $N + 1$ non è divisibile per 5). Abbiamo dunque un assurdo: tutti i numeri di $\mathbb{N} \setminus E$ sono strettamente minori di N, ma $N + 1 > N$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$. Ne segue quindi che $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato.

---

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \leq 6\} \setminus \{0\}.$$

Si ha
$$|x - 6| \leq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad -6 \leq x - 6 \leq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 12\,,$$
cosicché
$$E = [0, 12] \setminus \{0\} = (0, 12]\,. \tag{1}$$

2A) L'insieme E è un intervallo.

Vero: Per la (1), si ha che $E = (0, 12]$ è un intervallo.

2B) Il numero reale $x = 7$ non appartiene ad E.

Falso: Dalla (1) segue che $x = 7$ appartiene ad E.

2C) L'insieme E è limitato superiormente.

Vero: Per la (1), l'insieme E è limitato superiormente.

2D) L'insieme E ha massimo.

Vero: Per la (1), l'insieme E ha $M = 12$ come massimo.

---

3) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16x + 60 \leq 0\}\,.$$

Si ha
$$x^2 - 16x + 60 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 6, 10\,.$$
Pertanto,
$$x^2 - 16x + 60 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6 \leq x \leq 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [6, 10]\,.$$
Si ha quindi
$$E = [6, 10]\,. \tag{1}$$

3A) L'insieme E non è vuoto.

Vero: Per la (1), l'insieme E non è vuoto.

3B) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Per la (1), l'insieme E è un intervallo.

3C) L'insieme $E \setminus \{8\}$ non è un intervallo.

Vero: Per la (1) si ha
$$E \setminus \{8\} = [6, 8) \cup (8, 10]\,,$$
che non è un intervallo.

3D) L'insieme E non ha massimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E ha $M = 10$ come massimo.

---

4) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{3}\}\,.$$

Sia ha
$$|x| \leq \sqrt{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\,,$$
da cui segue che
$$E = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}\,. \tag{1}$$

4A) Il numero $x = \sqrt{3}$ appartiene ad E.

Falso: Dato che $x = \sqrt{3}$ non è un numero razionale, x non appartiene ad E.

4B) Il numero $x = -1$ appartiene ad E.

Vero: Dato che $x = -1$ è un numero razionale, e che si ha
$$-\sqrt{3} \leq -1 \leq \sqrt{3}\,,$$
il numero $x = 1$ appartiene ad E.

4C) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che
$$E \subset [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\,,$$
e quindi E è un insieme limitato dato che è contenuto in un insieme limitato.

4D) Non esiste il massimo di E.

Vero: Il "candidato massimo" di E è $x = \sqrt{3}$, che però non appartiene ad E dato che non è un numero razionale. Ne segue che non esiste il massimo di E.

---

5) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq 4\} \setminus \{0\}\,.$$
a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E.
c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 2]$.
d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme
$$F = \{x^2,\ x \in E\}\,.$$

Soluzione:
a) Si ha
$$E = [-6, 4] \setminus \{0\} = [-6, 0) \cup (0, 4]\,, \tag{1}$$
che non è un intervallo.

b) Dalla (1) segue che (ad esempio) $x = 4$ è un maggiorante di E, e che (ad esempio) $x = -6$ è un minorante di E. Si ha infatti che
$$\overline{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\} = [4, +\infty)\,, \qquad \underline{m}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -6\} = (-\infty, -6]\,.$$

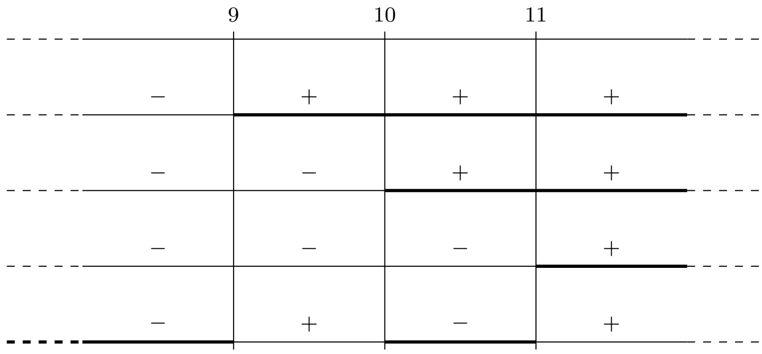
c) Si ha, per la (1),
$$E \cap [0, 2] = ([-6, 0) \cup (0, 4]) \cap [0, 2] = (0, 2]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

d) Se x appartiene ad E, allora
$$-6 \leq x \leq 4\,, \qquad x \neq 0\,.$$
Se $x > 0$, si ha
$$0 < x \leq 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \leq 16\,,$$
mentre se $x < 0$, si ha
$$-6 \leq x < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 \leq 36\,.$$
Si ha quindi che se x appartiene ad E, allora
$$0 < x \leq \max(36, 16) = 36\,,$$
e quindi
$$F = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 36\} = (0, 36]\,,$$
che è un insieme che non ha minimo.

6) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-9)\,(x-10)\,(x-11) \leq 0\}\,.$$
a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E.
b) Risolvendo la disequazione che definisce E, scrivere E come unione di intervalli.
c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzione:
a) Se $x = 0$, si ha
$$(x-9)\,(x-10)\,(x-11) = (0-9)\,(0-10)\,(0-11) = -990 \leq 0\,,$$
e quindi (per definizione) $x = 0$ appartiene ad E.

b) Consideriamo i segni dei tre fattori che determinano la disequazione che definisce E; si ha
$$x - 9 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 9\,, \qquad x - 10 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 10\,,$$
e
$$x - 11 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 11\,.$$
Graficamente, quindi, si ha



e quindi

(1) $$E = (-\infty, 9] \cup [10, 11]\,.$$

c) Dalla (1) si ha che
$$E \cap [0, +\infty) = [0, 9] \cup [10, 11]\,,$$
che è un insieme limitato (superiormente da 11 e inferiormente da 0).

d) Dato che dalla (1) segue che il massimo di E è $M = 11$, che è anche un numero razionale, allora il massimo di $E \cap \mathbb{Q}$ è $M = 11$. Sempre dalla (1) segue che
$$E \cap \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, 9, 10, 11\}\,,$$
che ha come minimo $m = 0$.