



Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 1
2 Ottobre 2023 — Compito n. 00109

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|

| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| V | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| F | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| C | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

1) Sia

$$E = \{\text{multipli interi di } 5\}.$$

1A) Il numero $x = 16$ appartiene ad E .

1B) Se x appartiene ad E , allora $x + 15$ non appartiene ad E .

1C) Esiste il minimo di E .

1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ è limitato superiormente.

2) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 4\} \setminus \{0\}.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

2B) Il numero reale $x = 5$ non appartiene ad E .

2C) L'insieme E non è limitato superiormente.

2D) L'insieme E ha minimo.

3) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 14x + 45 \leq 0\}.$$

3A) L'insieme E non è vuoto.

3B) L'insieme E è un intervallo.

3C) L'insieme $E \setminus \{7\}$ è un intervallo.

3D) L'insieme E ha massimo.

4) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{11}\}.$$

4A) Il numero $x = \sqrt{11}$ non appartiene ad E .

4B) Il numero $x = -1$ non appartiene ad E .

4C) L'insieme E è limitato.

4D) Non esiste il minimo di E .

Docente

☐ Garroni [A, F]

☐ Orsina [G, Z]

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00109

5) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x \leq 11\} \setminus \{0\}.$$

- a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
- b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E .
- c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 9]$.
- d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme

$$F = \{x^2, x \in E\}.$$

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00109

6) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(x-4)(x-5) \leq 0\}.$$

- a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E .
 - b) Risolvendo la disequazione che definisce E , scrivere E come unione di intervalli.
 - c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.
 - d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.
-

Soluzioni del compito 00109

1) Sia

$$E = \{\text{multipli interi di } 5\}.$$

1A) Il numero $x = 16$ appartiene ad E .

Falso: Il numero $x = 16$ non appartiene ad E dato che non è un multiplo di 5; infatti, dividendo x per 5 si ottiene come resto 1 (e non 0).

1B) Se x appartiene ad E , allora $x + 15$ non appartiene ad E .

Falso: Se x appartiene ad E , x è un multiplo intero di 5; esiste quindi un intero k tale che $x = 5k$. Dato che $15 = 3 \cdot 5$, si ha quindi

$$x + 15 = 5k + 3 \cdot 5 = (k + 3) \cdot 5,$$

e quindi $x + 15$ appartiene ad E perché è un multiplo intero di 5.

1C) Esiste il minimo di E .

Vero: Dato che E è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} , E ammette minimo per il principio di buon ordinamento. Un altro modo per dimostrare che E ha minimo è osservare che

$$E = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\},$$

e quindi il minimo di E esiste ed è 0.

1D) L'insieme $\mathbb{N} \setminus E$ è limitato superiormente.

Falso: Se $\mathbb{N} \setminus E$ fosse limitato superiormente, esisterebbe N in \mathbb{N} tale che se x appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$, allora $x < N$. Pertanto, $x = N$ appartiene ad E . Ma se N appartiene ad E , allora $N + 1$ non vi appartiene (perché dividendo N per 5 si ottiene come resto 1, e quindi $N + 1$ non è divisibile per 5). Abbiamo dunque un assurdo: tutti i numeri di $\mathbb{N} \setminus E$ sono strettamente minori di N , ma $N + 1 > N$ appartiene a $\mathbb{N} \setminus E$. Ne segue quindi che $\mathbb{N} \setminus E$ non è limitato.

2) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 4\} \setminus \{0\}.$$

Si ha

$$|x - 4| \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \leq x - 4 \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 8,$$

cosicché

$$(1) \quad E = [0, 8] \setminus \{0\} = (0, 8].$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

Falso: Per la (1), si ha che $E = (0, 8]$ è un intervallo.

2B) Il numero reale $x = 5$ non appartiene ad E .

Falso: Dalla (1) segue che $x = 5$ appartiene ad E .

2C) L'insieme E non è limitato superiormente.

Falso: Per la (1), l'insieme E è limitato superiormente.

2D) L'insieme E ha minimo.

Falso: Per la (1), l'insieme E non ha minimo, dato che 0 non appartiene ad E .

3) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 14x + 45 \leq 0\}.$$

Si ha

$$x^2 - 14x + 45 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5, 9.$$

Pertanto,

$$x^2 - 14x + 45 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 5 \leq x \leq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [5, 9].$$

Si ha quindi

$$(1) \quad E = [5, 9].$$

3A) L'insieme E non è vuoto.

Vero: Per la (1), l'insieme E non è vuoto.

3B) L'insieme E è un intervallo.

Vero: Per la (1), l'insieme E è un intervallo.

3C) L'insieme $E \setminus \{7\}$ è un intervallo.

Falso: Per la (1) si ha

$$E \setminus \{7\} = [5, 7) \cup (7, 9],$$

che non è un intervallo.

3D) L'insieme E ha massimo.

Vero: Per la (1), l'insieme E ha $M = 9$ come massimo.

4) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \sqrt{11}\}.$$

Sia ha

$$|x| \leq \sqrt{11} \iff -\sqrt{11} \leq x \leq \sqrt{11} \iff x \in [-\sqrt{11}, \sqrt{11}],$$

da cui segue che

$$(1) \quad E = [-\sqrt{11}, \sqrt{11}] \cap \mathbb{Q}.$$

4A) Il numero $x = \sqrt{11}$ non appartiene ad E .

Vero: Dato che $x = \sqrt{11}$ non è un numero razionale, x non appartiene ad E .

4B) Il numero $x = -1$ non appartiene ad E .

Falso: Dato che $x = -1$ è un numero razionale, e che si ha

$$-\sqrt{11} \leq -1 \leq \sqrt{11},$$

il numero $x = -1$ appartiene ad E .

4C) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla (1) segue che

$$E \subset [-\sqrt{11}, \sqrt{11}],$$

e quindi E è un insieme limitato dato che è contenuto in un insieme limitato.

4D) Non esiste il minimo di E .

Vero: Il “candidato minimo” di E è $x = -\sqrt{11}$, che però non appartiene ad E dato che non è un numero razionale. Ne segue che non esiste il minimo di E .

5) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x \leq 11\} \setminus \{0\}.$$

- a) Dimostrare che l'insieme E non è un intervallo.
- b) Dimostrare che l'insieme E è limitato superiormente ed inferiormente, esibendo un maggiorante ed un minorante di E .
- c) Dimostrare che non esiste il minimo di $E \cap [0, 9]$.
- d) Dimostrare che non esiste il minimo dell'insieme

$$F = \{x^2, x \in E\}.$$

Soluzione:

a) Si ha

$$(1) \quad E = [-10, 11] \setminus \{0\} = [-10, 0) \cup (0, 11],$$

che non è un intervallo.

b) Dalla (1) segue che (ad esempio) $x = 11$ è un maggiorante di E , e che (ad esempio) $x = -10$ è un minorante di E . Si ha infatti che

$$\overline{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 11\} = [11, +\infty), \quad \underline{m}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -10\} = (-\infty, -10].$$

c) Si ha, per la (1),

$$E \cap [0, 9] = ([-10, 0) \cup (0, 11]) \cap [0, 9] = (0, 9],$$

che è un insieme che non ha minimo.

d) Se x appartiene ad E , allora

$$-10 \leq x \leq 11, \quad x \neq 0.$$

Se $x > 0$, si ha

$$0 < x \leq 11 \quad \implies \quad 0 < x^2 \leq 121,$$

mentre se $x < 0$, si ha

$$-10 \leq x < 0 \quad \implies \quad 0 < x^2 \leq 100.$$

Si ha quindi che se x appartiene ad E , allora

$$0 < x^2 \leq \max(100, 121) = 121,$$

e quindi

$$F = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 121\} = (0, 121],$$

che è un insieme che non ha minimo.

6) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(x-4)(x-5) \leq 0\}.$$

a) Dimostrare che $x = 0$ appartiene ad E .

b) Risolvendo la disequazione che definisce E , scrivere E come unione di intervalli.

c) Dimostrare che $E \cap [0, +\infty)$ è un insieme limitato.

d) Dimostrare che l'insieme $E \cap \mathbb{Q}$ ha massimo, e che l'insieme $E \cap \mathbb{N}$ ha minimo.

Soluzione:

a) Se $x = 0$, si ha

$$(x-3)(x-4)(x-5) = (0-3)(0-4)(0-5) = -60 \leq 0,$$

e quindi (per definizione) $x = 0$ appartiene ad E .

b) Consideriamo i segni dei tre fattori che determinano la disequazione che definisce E ; si ha

$$x-3 \geq 0 \iff x \geq 3, \quad x-4 \geq 0 \iff x \geq 4,$$

e

$$x-5 \geq 0 \iff x \geq 5.$$

Graficamente, quindi, si ha

| | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|
| ----- | | | |
| - | + | + | + |
| ----- | | | |
| - | - | + | + |
| ----- | | | |
| - | - | - | + |
| ----- | | | |
| - | + | - | + |
| ----- | | | |

e quindi

(1)
$$E = (-\infty, 3] \cup [4, 5].$$

c) Dalla (1) si ha che

$$E \cap [0, +\infty) = [0, 3] \cup [4, 5],$$

che è un insieme limitato (superiormente da 5 e inferiormente da 0).

d) Dato che dalla (1) segue che il massimo di E è $M = 5$, che è anche un numero razionale, allora il massimo di $E \cap \mathbb{Q}$ è $M = 5$. Sempre dalla (1) segue che

$$E \cap \mathbb{N} = \{0, 1, \dots, 3, 4, 5\},$$

che ha come minimo $m = 0$.