Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 3
16 Ottobre 2023 — Compito n. 00005

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	**1B**	**1C**	**1D**	**2A**	**2B**	**2C**	**2D**	**3A**	**3B**	**3C**	**3D**	**4A**	**4B**	**4C**	**4D**
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Sia

$$E = \left\{ \frac{10}{n}\,,\ n \geq 1 \right\}.$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.
1B) L'insieme E è limitato.
1C) Non esiste il massimo di E.
1D) Esiste il minimo di E.

2) Sia

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(18\,x) > 0\} \cap [0, \pi]\,.$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.
2B) L'insieme E è limitato.
2C) Si ha $\sup(E) < \pi$.
2D) Si ha $\inf(E) > 0$.

3) Si consideri la successione

$$a_n = \frac{11\,n + 1}{8\,n + 1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

3A)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 11/8\,.$$

3B)

$$\lim_{n \to +\infty} [a_{n+1} - a_n] = 11/8\,.$$

3C)

$$\lim_{n \to \infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = 0\,.$$

3D)

$$\lim_{n \to +\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = 0\,.$$

4) Siano $A > 0$, $B > 0$ e

$$a_n = \frac{A\,n^2 + 1}{B\,n^2 + 1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

4A) La successione a_n diverge positivamente.
4B) Se $A = 12$ e $B = 9$, la successione a_n è monotona decrescente.
4C) Se $A = 10$ e $B = 15$, la successione a_n è monotona decrescente.
4D) Se $A = 7$ e $B = 4$, esiste il massimo dell'insieme

$$E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00005**

---

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+8n+7}{4n^2+3n+4}\,, \qquad \textbf{b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^8-2}{2-6\,n^3}\,,$$

$$\textbf{c)} \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+n^{11}}{11\cdot 3^n+10}\,, \qquad \textbf{d)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^8}\,,$$

Cognome | Nome | Matricola | Compito 00005

6) Sia

$$a_n = \frac{5 \cdot 5^n + 14}{5^n + 3}\,.$$

a) Si dimostri che la successione $\{a_n\}$ è limitata.
b) Si dimostri che la successione $\{n^3\, a_n\}$ è illimitata superiormente.
c) Si dimostri che si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$

d) Si calcoli il minimo della successione $\{a_n\}$.

Soluzioni del compito 00005

1) Sia
$$E = \left\{ \frac{10}{n}\,,\ n \geq 1 \right\}.$$

1A) L'insieme E non è un intervallo.

Vero: Per definizione, $b = \frac{10}{1} = 10$ e $a = \frac{10}{2} = 5$ appartengono ad E. Se consideriamo il numero
$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{5+10}{2} = \frac{15}{2}\,,$$
si vede facilmente che non appartiene ad E. Infatti, risolvendo l'equazione
$$\frac{10}{n} = \frac{15}{2}\,,$$
si trova
$$n = \frac{3}{4}\,,$$
che non è un numero intero. Abbiamo quindi trovato a e b in E tali che $[a,b]$ non è tutto contenuto in E, e quindi E non è un intervallo.

1B) L'insieme E è limitato.

Vero: Dato che
$$0 < \frac{10}{n} \leq \frac{10}{1} = 10\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
l'insieme E è contenuto nell'intervallo $(0, 10]$, ed è quindi limitato.

1C) Non esiste il massimo di E.

Falso: Dato che
$$\frac{10}{n} \leq \frac{10}{1} = 10\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
il numero $x = 10$ è più grande di tutti gli elementi di E. Dato che appartiene ad E, si ha che il massimo di E esiste, e vale 10.

1D) Esiste il minimo di E.

Falso: Supponiamo che esista il minimo di E, ovvero un numero reale m della forma $\frac{10}{\overline{n}}$, per qualche intero $\overline{n} \geq 1$, con la proprietà che $m \leq y$ per ogni y in E. Se, però, scegliamo
$$y = \frac{10}{\overline{n}+1}\,,$$
abbiamo che y appartiene ad E (per definizione), e che
$$y = \frac{10}{\overline{n}+1} < \frac{10}{\overline{n}} = m\,,$$
contraddicendo la minimalità di m.

---

2) Sia
$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(18\,x) > 0\} \cap [0,\pi]\,.$$

Ricordando che $\sin(y) > 0$ se e solo se
$$2k\,\pi < y < (2k+1)\,\pi\,, \qquad \text{per qualche } k \text{ in } \mathbb{Z}\,,$$
si ha $\sin(18\,x) > 0$ se e solo se
$$2k\,\pi < 18\,x < (2k+1)\,\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2k}{18}\,\pi < x < \frac{2k+1}{18}\,\pi\,, \qquad \text{per qualche } k \text{ in } \mathbb{Z}\,.$$
Se chiediamo, inoltre, che x appartenga a $[0,\pi]$, allora k varia tra 0 e 8. Infatti, se $k < 0$ e
$$\frac{2k}{18}\,\pi < x < \frac{2k+1}{18}\,\pi\,,$$
allora $x < 0$ e quindi non appartiene a $[0,\pi]$, mentre se $k \geq 9$ e
$$\frac{2k}{18}\,\pi < x < \frac{2k+1}{18}\,\pi\,,$$
allora $x > \pi$ (e quindi non è in $[0,\pi]$. In definitiva, si ha
$$E = \bigcup_{k=0}^{8} \left(\frac{2k\,\pi}{18}, \frac{(2k+1)\,\pi}{18} \right) = \bigcup_{k=0}^{8} I_k\,. \tag{1}$$

2A) L'insieme E non è un intervallo.

Vero: Come si vede dalla (1), E è l'unione di 9 intervalli disgiunti, e quindi non è un intervallo. Per vederlo meglio,
$$E = \left(0, \frac{\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{18}, \frac{3\,\pi}{18}\right) \cup \left[\bigcup_{k=2}^{8} \left(\frac{2k\,\pi}{18}, \frac{(2k+1)\,\pi}{18} \right) \right],$$
e quindi in E non c'è alcun numero reale x tale che
$$0 < a = \frac{\pi}{36} < \frac{\pi}{18} \leq x \leq \frac{2\pi}{18} < \frac{5\pi}{36} = b < \frac{3\pi}{18}\,,$$
con a e b appartenenti ad E.

2B) L'insieme E è limitato.

Vero: Dalla definizione, si ha $E \subseteq [0,\pi]$, e quindi E è un insieme limitato.

2C) Si ha $\sup(E) < \pi$.

Vero: Dalla (1), si ha che l'intervallo "più a destra" che forma E è l'intervallo corrispondente a $k = 8$, ovvero l'intervallo
$$I_8 = \left(\frac{16\,\pi}{18}, \frac{17\,\pi}{18} \right).$$
Dato che $\sup(I_8) = \frac{17\,\pi}{18} < \pi$, si ha $\sup(E) = \sup(I_8) < \pi$.

2D) Si ha $\inf(E) > 0$.

Falso: Dalla (1), si ha che l'intervallo "più a sinistra" che forma E è l'intervallo corrispondente a $k = 0$, ovvero l'intervallo
$$I_0 = \left(0, \frac{\pi}{18}\right).$$
Dato che $\inf(I_0) = 0$, si ha $\inf(E) = \inf(I_0) = 0$.

---

3) Si consideri la successione

$$a_n = \frac{11\,n+1}{8\,n+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Si ha

$$a_{n+1} - a_n = \frac{11\,(n+1)+1}{8\,(n+1)+1} - \frac{11\,n+1}{8\,n+1} = \frac{[11\,(n+1)+1]\,[8\,n+1] - [11\,n+1]\,[8\,(n+1)+1]}{(8\,(n+1)+1)\,(8\,n+1)}\,.$$

Sviluppando il numeratore, si ha

$$\begin{aligned} &[11\,(n+1)+1]\,[8\,n+1] - [11\,n+1]\,[8\,(n+1)+1] \\ &\quad = 11\cdot 8\,n\,(n+1) + 11\,(n+1) + 8\,n + 1 \\ &\qquad -[11\cdot 8\,n\,(n+1) + 11\,n + 8\,(n+1) + 1] \\ &\quad = 11 - 8 = 3\,. \end{aligned}$$

Sviluppando il denominatore, invece, si ha

$$(8\,(n+1)+1)\,(8\,n+1) = 64\,n\,(n+1) + 8\,(n+1) + 8\,n + 1 = 64n^2 + 80n + 9\,.$$

Pertanto,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{64n^2+80n+9}\,. \tag{1}$$

3A)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 11/8\,.$$

Vero: Si ha

$$a_n = \frac{11\,n+1}{8\,n+1} = \frac{n}{n}\,\frac{11+\frac{1}{n}}{8+\frac{1}{n}} = \frac{11+\frac{1}{n}}{8+\frac{1}{n}}\,.$$

Dato che $\frac{1}{n}$ tende a zero, si ha, per i teoremi sui limiti,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{11+\frac{1}{n}}{8+\frac{1}{n}} = \frac{11+0}{8+0} = \frac{11}{8}\,.$$

3B)

$$\lim_{n\to+\infty} [a_{n+1} - a_n] = 11/8\,.$$

Falso: Dato che (si veda l'esercizio precedente) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{11}{8}\,,$$

si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \frac{11}{8}\,.$$

Per i teoremi sui limiti, si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} [a_{n+1} - a_n] = \frac{11}{8} - \frac{11}{8} = 0 \neq \frac{11}{8}\,.$$

3C)

$$\lim_{n\to\infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = 0\,.$$

Vero: Dalla (1) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\,[a_{n+1} - a_n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\,n}{64n^2+80n+9} = 0\,,$$

dato che è il limite del rapporto di due polinomi, con il grado del denominatore (2) maggiore del grado del numeratore (1).

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = 0\,.$$

Falso: Dalla (1) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\,n^2}{64n^2 + 80n + 9}\,.$$

Dato che si tratta del rapporto di due polinomi di secondo grado, il limite è il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo, che sono 3 e 64. Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\,[a_{n+1} - a_n] = \frac{3}{64} \neq 0\,.$$

4) Siano $A > 0$, $B > 0$ e
$$a_n = \frac{A\,n^2+1}{B\,n^2+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Per studiare la monotonia di a_n, calcoliamo $a_{n+1} - a_n$. Si ha
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{A\,(n+1)^2+1}{B\,(n+1)^2+1} - \frac{A\,n^2+1}{B\,n^2+1} \\ &= \frac{[A\,(n+1)^2+1]\,[B\,n^2+1] - [B\,(n+1)^2+1]\,[A\,n^2+1]}{[B\,(n+1)^2+1]\,[B\,n^2+1]}\,. \end{aligned}$$
Osserviamo che il denominatore è sempre positivo (perché $B > 0$), e quindi si ha $a_{n+1} > a_n$ se e solo se
$$[A\,(n+1)^2+1]\,[B\,n^2+1] - [B\,(n+1)^2+1]\,[A\,n^2+1] > 0\,.$$
Sviluppando i prodotti si ha
$$A\,B\,(n+1)^2\,n^2 + A\,(n+1)^2 + B\,n^2 + 1 - [A\,B\,(n+1)^2\,n^2 + B\,(n+1)^2 + A\,n^2 + 1] > 0\,,$$
che diventa, dopo aver semplificato i termini uguali
$$A\,(n+1)^2 + B\,n^2 > B\,(n+1)^2 + A\,n^2\,.$$
Sviluppando i quadrati, si ha che deve essere
$$A\,n^2 + 2A\,n + A + B\,n^2 > B\,n^2 + 2B\,n + B + A\,n^2\,,$$
che è equivalente a
$$2A\,n + A > 2B\,n + B \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2(A-B)\,n + A - B > 0\,,$$
e questa disuguaglianza è vera per ogni n in $\mathbb{N}$ se e solo se $A > B$. In definitiva,

(1) la successione a_n è monotona crescente se e solo se $A > B$.

4A) La successione a_n diverge positivamente.

Falso: Si ha
$$a_n = \frac{A\,n^2+1}{B\,n^2+1} = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{A+\frac{1}{n^2}}{B+\frac{1}{n^2}} = \frac{A+\frac{1}{n^2}}{B+\frac{1}{n^2}}\,.$$
Dato che $\frac{1}{n^2}$ tende a zero, per i teoremi sui limiti si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{A+\frac{1}{n^2}}{B+\frac{1}{n^2}} = \frac{A+0}{B+0} = \frac{A}{B}\,,$$
che non è $+\infty$ perché $B \neq 0$ per ipotesi.

4B) Se $A = 12$ e $B = 9$, la successione a_n è monotona decrescente.

Falso: Dato che $A > B$, per la (1) la successione è monotona crescente.

4C) Se $A = 10$ e $B = 15$, la successione a_n è monotona decrescente.

Vero: Dato che $A < B$, per la (1) la successione è monotona decrescente.

4D) Se $A = 7$ e $B = 4$, esiste il massimo dell'insieme
$$E = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Falso: Dato che $A > B$, per la (1) la successione a_n è monotona crescente. Si ha quindi (si veda l'eserczio **4A**) che
$$\sup(E) = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{7}{4}\,.$$

Per dimostrare che l'estremo superiore non è un massimo, è sufficiente verificare che non esiste alcun valore di n tale che $a_n = \frac{7}{4}$. Risolvendo l'equazione, si ha

$$\frac{7\,n^2+1}{4\,n^2+1} = \frac{7}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 4\,[7\,n^2+1] = 7\,[4\,n^2+1] \quad \Longleftrightarrow \quad 28\,n^2+4 = 28\,n^2+7 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 = 7\,,$$

che è falsa. Si ha quindi che il numero $\frac{11}{8}$ non appartiene ad E, che quindi non ha massimo.

---

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+8n+7}{4n^2+3n+4}\,,\qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^8-2}{2-6\,n^3}\,,$$
$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n^{11}}{11\cdot 3^n+10}\,,\qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^8}\,,$$

Soluzione:

a) Si tratta del limite del rapporto di polinomi dello stesso grado. Mettendo in evidenza n^2 al numeratore ed al denominatore, si ha

$$\frac{3n^2+8n+7}{4n^2+3n+4}=\frac{n^2}{n^2}\,\frac{3+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}=\frac{3+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+8n+7}{4n^2+3n+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}=\frac{3+0+0}{4+0+0}=\frac{3}{4}\,.$$

b) Si tratta del limite del rapporto di polinomi, con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore. Mettendo in evidenza n^8 al numeratore e n^3 al denominatore, si ha

$$\frac{n^8-2}{2-6\,n^3}=\frac{n^8}{n^3}\,\frac{1-\frac{2}{n^8}}{\frac{2}{n^3}-6}=n^5\,\frac{1-\frac{2}{n^8}}{\frac{2}{n^3}-6}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^8-2}{2-6\,n^3}=\lim_{n\to+\infty}n^5\,\frac{1-\frac{2}{n^8}}{\frac{2}{n^3}-6}=(+\infty)\cdot\left(\frac{1-0}{0-6}\right)=(+\infty)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\infty\,.$$

c) Ricordando che 3^n diverge più velocemente di n^{11}, si ha

$$\frac{3^n+n^{11}}{11\cdot 3^n+10}=\frac{3^n}{3^n}\,\frac{1+\frac{n^{11}}{3^n}}{11+\frac{10}{3^n}}=\frac{1+\frac{n^{11}}{3^n}}{11+\frac{10}{3^n}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n^{11}}{11\cdot 3^n+10}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{n^{11}}{3^n}}{11+\frac{10}{3^n}}=\frac{1+0}{11+0}=\frac{1}{11}\,.$$

d) Scriviamo la successione come segue:

$$\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^8}=\frac{(\frac{9}{7})^n}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^8}=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{(\frac{9}{7})^n\cdot 7^n}{9^n+n^8}=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{9^n}{9^n+n^8}\,.$$

Pertanto,

$$0\le\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^8}=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,\frac{9^n}{9^n+n^8}\le\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\cdot 1=\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{16}}{(\frac{9}{7})^n}=0\,,$$

per il teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{16}\,7^n}{9^n+n^8}=0\,.$$

6) Sia
$$a_n = \frac{5 \cdot 5^n + 14}{5^n + 3}\,.$$
a) Si dimostri che la successione $\{a_n\}$ è limitata.
b) Si dimostri che la successione $\{n^3\, a_n\}$ è illimitata superiormente.
c) Si dimostri che si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$
d) Si calcoli il minimo della successione $\{a_n\}$.

Soluzione:
a) Si ha
$$0 \le a_n = \frac{5 \cdot 5^n + 14}{5^n + 3} = \frac{5 \cdot 5^n + 15 - 1}{5^n + 3} = \frac{5\,(5^n + 3) - 1}{5^n + 3} = 5 - \frac{1}{5^n + 3} \le 5\,,$$
e quindi la successione $\{a_n\}$ è limitata.
In alternativa, si ha
$$a_n = \frac{5 \cdot 5^n + 14}{5^n + 3} = \frac{5^n}{5^n}\,\frac{5 + \frac{14}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}} = \frac{5 + \frac{14}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}}\,.$$
Pertanto, dato che sia $\frac{14}{5^n}$ che $\frac{3}{5^n}$ tendono a zero, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5 + \frac{14}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}} = \frac{5+0}{1+0} = 5\,.$$
Dato che la successione a_n tende ad un limite finito, è limitata.

b) Dato che la successione a_n converge ad 5 per l'esercizio **a)**, la successione $n^3\, a_n$ diverge a più infinito, ed è dunque illimitata superiormente.

c) Dimostriamo che la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente. Si ha
$$a_{n+1} \ge a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{5 \cdot 5^{n+1} + 14}{5^{n+1} + 3} \ge \frac{5 \cdot 5^n + 14}{5^n + 3}\,,$$
e l'ultima disuguaglianza è equivalente a
$$(5 \cdot 5^{n+1} + 14)\,(5^n + 3) \ge (5 \cdot 5^n + 14)\,(5^{n+1} + 3)\,.$$
Sviluppando i prodotti, si ha che deve essere
$$5 \cdot 5^{2n+1} + 15 \cdot 5^{n+1} + 14 \cdot 5^n + 42 \ge 5 \cdot 5^{2n+1} + 15 \cdot 5^n + 14 \cdot 5^{n+1} + 42\,,$$
che, semplificando, è equivalente a
$$(15 - 14) \cdot 5^{n+1} \ge (15 - 14) \cdot 5^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5^{n+1} \ge 5^n\,,$$
che è vera. Pertanto, la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$

d) Dato che per l'esercizio **c)** la successione $\{a_n\}$ è monotona crescente, si ha
$$a_n \ge a_0 = \frac{5 \cdot 5^0 + 14}{5^0 + 3} = \frac{5 + 14}{1 + 3} = \frac{19}{4}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$
e quindi
$$\min(\{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}) = a_0 = \frac{19}{4}\,.$$