Calcolo differenziale — Scheda di esercizi n. 4
23 Ottobre 2023 — Compito n. 00298

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ☐☐☐☐☐☐☐

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5^n}{5^n-n^3} = 1\,.$$

1B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^9\,2^n}{n^n} = 0\,.$$

1C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^2}}{n^n} = 0\,.$$

1D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\,n!}{n^n} = 0\,.$$

2) Sia
$$a_n = \frac{11\,n^2+4\,n}{4\,n+9}\,.$$

2A)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{11}{4}\,.$$

2B)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{a_n} = \frac{4}{11}\,.$$

2C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^8} = +\infty\,.$$

2D)
$$\lim_{n\to+\infty} \left[a_n - \frac{11}{4}\,n\right] = -\frac{83}{16}$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)
$$\lim_{n\to+\infty} n^7\ \mathrm{tg}\left(\frac{9}{n^6}\right) = 9\,.$$

3B)
$$\lim_{n\to+\infty} 8^n\,\sin^2\left(\frac{n^6}{8^n}\right) = 0\,.$$

3C)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2(6\,n)}{n} = 6^2\,.$$

3D)
$$\lim_{n\to+\infty} n^6\left(\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^6}}-1\right) = 1\,.$$

4) Sia
$$a_n = \cos\left(\frac{9}{n^2}\right).$$

4A)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,.$$

4B)
$$\lim_{n\to+\infty} n^4\,a_n = +\infty\,.$$

4C)
$$\lim_{n\to+\infty} n^4\,(1-a_n) = \frac{1}{162}\,.$$

4D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n\,n^2+4}{n^2+8} = 0\,.$$

Docente
☐ Garroni [A, F]
☐ Orsina [G, Z]

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00298**

---

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{7\,n}{n^2+8}\Big)^{n},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}\,], \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n}\,],$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00298**

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{8^n\, n^2}{n!}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n! + 12^n}{(n+1)! + 6^n}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{8}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{8}{n}} - 1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3}{n}\right).$$

Soluzioni del compito 00298

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5^n}{5^n-n^3} = 1\,.$$

Vero: Mettendo in evidenza al numeratore ed al denominatore il termine che diverge più velocemente (che è 5^n), si ha

$$\frac{n^2+5^n}{5^n-n^{2+1}} = \frac{5^n}{5^n}\,\frac{1+\frac{n^2}{5^n}}{1-\frac{n^3}{5^n}} = \frac{1+\frac{n^2}{5^n}}{1-\frac{n^3}{5^n}}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{5^n} = 0\,,$$

per i teoremi sui limiti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5^n}{5^n-n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{n^2}{5^n}}{1-\frac{n^3}{5^n}} = \frac{1+0}{1-0} = 1\,.$$

1B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^9\,2^n}{n^n} = 0\,.$$

Vero: Si ha, semplificando,

$$\frac{n^9\,2^n}{n^n} = \frac{2^n}{n^{n-9}} = 2^9\,\frac{2^{n-9}}{n^{n-9}} = 2^9\left(\frac{2}{n}\right)^{n-9}.$$

Pertanto, se $n \geq 3$, si ha

$$0 \leq \frac{n^9\,2^n}{n^n} \leq 2^9\left(\frac{2}{n}\right)^{n-9} \leq 2^9\left(\frac{2}{3}\right)^{n-9},$$

e l'ultima successione tende a zero. Per il teorema dei carabinieri, la successione data tende a zero.

1C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^2}}{n^n} = 0\,.$$

Falso: Si ha, se n è sufficientemente grande,

$$\frac{5^{n^2}}{n^n} = \left(\frac{5^n}{n}\right)^n \geq \frac{5^n}{n}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{n} = +\infty\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^2}}{n^n} = +\infty\,.$$

1D)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\,n!}{n^n} = 0\,.$$

Vero: Per calcolare il limite, usiamo la formula di Stirling:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}} = 1\,.$$

Pertanto,

$$\frac{n^2\,n!}{n^n} = \frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}}\,n^2\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n} = \sqrt{2\pi}\,\frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}}\,\frac{n^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{e}^n}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{e}^n} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\,n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi}\,\frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi\,n}}\,\frac{n^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{e}^n} = \sqrt{2\pi}\cdot 1\cdot 0 = 0\,.$$

2) Sia

$$a_n = \frac{11\,n^2 + 4\,n}{4\,n + 9}\,.$$

2A)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{11}{4}\,.$$

Falso: Si tratta del rapporto di due polinomi, con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore. Dato che il rapporto 11/4 tra i due termini di grado massimo è positivo, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

2B)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{a_n} = \frac{4}{11}\,.$$

Falso: Dato che la successione a_n diverge a più infinito (si veda l'esercizio **2A**), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{a_n} = 0 \neq \frac{4}{11}\,.$$

2C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^8} = +\infty\,.$$

Falso: Si ha

$$\frac{a_n}{n^8} = \frac{1}{n^8}\,\frac{11\,n^2 + 4\,n}{4\,n + 9} = \frac{11\,n^2 + 4\,n}{4\,n^9 + 9\,n^8}\,,$$

che è il rapporto di due polinomi, con il grado del denominatore maggiore del grado del numeratore. Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^8} = \lim_{n\to+\infty} \frac{11\,n^2 + 4\,n}{4\,n^9 + 9\,n^8} = 0\,.$$

2D)

$$\lim_{n\to+\infty} \left[a_n - \frac{11}{4}\,n\right] = -\frac{83}{16}$$

Vero: Si ha

$$a_n - \frac{11}{4}\,n = \frac{11\,n^2 + 4\,n}{4\,n + 9} - \frac{11}{4}\,n = \frac{4\,(11\,n^2 + 4\,n) - 11\,n\,(4\,n + 9)}{4\,(4\,n + 9)}\,.$$

Sviluppando i prodotti si ha

$$a_n - \frac{11}{4}\,n = \frac{44\,n^2 + 16\,n - 44\,n^2 - 99\,n}{16\,n + 36} = \frac{-83\,n}{16\,n + 36}\,.$$

Pertanto, dato che si tratta del rapporto tra due polinomi dello stesso grado,

$$\lim_{n\to+\infty} \left[a_n - \frac{11}{4}\,n\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{-83\,n}{16\,n + 36} = -\frac{83}{16}\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\lim_{n\to+\infty} n^7 \operatorname{tg}\left(\frac{9}{n^6}\right) = 9\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1\,,$$

si ha (ponendo $a_n = 9/n^6$)

$$\lim_{n\to+\infty} n^7 \operatorname{tg}\left(\frac{9}{n^6}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{9\,n^7}{n^6} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{9}{n^6}\right)}{\frac{9}{n^6}} = \lim_{n\to+\infty} 9\,n \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{9}{n^6}\right)}{\frac{9}{n^6}} = 9\cdot(+\infty)\cdot 1 = +\infty\,.$$

3B)

$$\lim_{n\to+\infty} 8^n \sin^2\left(\frac{n^6}{8^n}\right) = 0\,.$$

Vero: Dato che $b_n = n^6/8^n$ è una successione infinitesima, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2(b_n)}{b_n^2} = 1\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}, 8^n \sin^2\left(\frac{n^6}{8^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 8^n \frac{n^{12}}{8^{2n}} \frac{\sin^2(b_n)}{b_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{12}}{8^n} \frac{\sin^2(b_n)}{b_n^2} = 0\cdot 1 = 0\,,$$

dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{12}}{8^n} = 0\,.$$

3C)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2(6\,n)}{n} = 6^2\,.$$

Falso: La successione $\sin^2(6\,n)$ è limitata (da 1), mentre la successione $\frac{1}{n}$ è infinitesima. Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2(6\,n)}{n} = 0\,.$$

3D)

$$\lim_{n\to+\infty} n^6 \left(\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^6}} - 1\right) = 1\,.$$

Falso: Ricordando che se a_n è una successione infinitesima allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a_n} - 1}{a_n} = 1\,,$$

ed osservando che si ha

$$n^6 \left(\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^6}} - 1\right) = n^6 \frac{(-1)^n}{n^6} \frac{\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^6}} - 1}{\frac{(-1)^n}{n^6}} = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n^6}} - 1}{\frac{(-1)^n}{n^6}}\,,$$

è chiaro che il limite della successione data non esiste (esiste una sottosuccessione convergente a 1, ed una a -1).

---

4) Sia
$$a_n = \cos\left(\frac{9}{n^2}\right).$$

4A)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,.$$

Vero: Dato che $9/n^2$ tende a zero, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0\,.$$

4B)
$$\lim_{n\to+\infty} n^4\, a_n = +\infty\,.$$

Vero: Dato che (si veda l'esercizio **4A)**)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,,$$
si ha
$$\lim_{n\to+\infty} n^4\, a_n = (+\infty)\cdot(1) = +\infty\,.$$

4C)
$$\lim_{n\to+\infty} n^4\,(1-a_n) = \frac{1}{162}\,.$$

Falso: Ricordiamo che se b_n tende a zero si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(b_n)}{b_n^2} = \frac{1}{2}\,.$$
Scegliendo $b_n = 9/n^2$, si ha quindi $1 - a_n = 1 - \cos(b_n)$. Pertanto
$$n^4\,(1-a_n) = \frac{1-\cos(b_n)}{\frac{1}{n^4}} = 81\,\frac{1-\cos(b_n)}{\frac{81}{n^4}} = 81\,\frac{1-\cos(b_n)}{b_n^2}\,.$$
Pertanto,
$$\lim_{n\to+\infty} n^4\,(1-a_n) = \lim_{n\to+\infty} 81\,\frac{1-\cos(b_n)}{b_n^2} = 81\cdot\frac{1}{2} = \frac{81}{2} \neq \frac{1}{162}\,.$$

4D)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n\,n^2+4}{n^2+8} = 0\,.$$

Falso: Si ha, mettendo in evidenza n^2 al numeratore e al denominatore,
$$\frac{a_n\,n^2+4}{n^2+8} = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{a_n+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{8}{n^2}} = \frac{a_n+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{8}{n^2}}\,.$$
Dato che sia $4/n^2$ che $8/n^2$ tendono a zero, e che a_n tende a 1 (si veda l'esercizio **4A)**), si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n\,n^2+4}{n^2+8} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{8}{n^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \neq 0\,.$$

---

5) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{7\,n}{n^2+8}\Big)^{n},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}\,], \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n}\,],$$

Soluzione:

a) Ricordiamo che se a_n è una successione che diverge positivamente, e se A è un numero reale, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{A}{a_n}\Big)^{n} = \mathrm{e}^{A}. \tag{1}$$

Riscriviamo la successione data come segue:

$$\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{\sqrt{n}} = \Big[\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{n}\Big]^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \Big[\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{n}\Big]^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Passando al limite, utilizzando la (1) con $a_n = n$ e $A = -7$, nonché i teoremi sui limiti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\Big[\Big(1-\frac{7}{n}\Big)^{n}\Big]^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = [\mathrm{e}^{-7}]^{0} = 1.$$

b) Riscriviamo la successione come segue:

$$\Big(1+\frac{7\,n}{n^2+8}\Big)^{n} = \Big[\Big(1+\frac{7\,n}{n^2+8}\Big)^{\frac{n^2+8}{n}}\Big]^{\frac{n^2}{n^2+8}}.$$

Passando al limite, utilizzando la (1) con $a_n = \frac{n^2+8}{n}$ e $A = 7$, nonché i teoremi sui limiti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{7\,n}{n^2+8}\Big)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\Big[\Big(1+\frac{7\,n}{n^2+8}\Big)^{\frac{n^2+8}{n}}\Big]^{\frac{n^2}{n^2+8}} = [\mathrm{e}^{7}]^{1} = \mathrm{e}^{7}.$$

c) Razionalizziamo la successione:

$$\begin{aligned} n\,[\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}\,] &= n\,\frac{(\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9})\,(\sqrt{n+9}+\sqrt{n-9})}{\sqrt{n+9}+\sqrt{n-9}} \\ &= n\,\frac{(n+9)-(n-9)}{\sqrt{n+9}+\sqrt{n-9}} \\ &= \frac{18\,n}{\sqrt{n+9}+\sqrt{n-9}}. \end{aligned}$$

Mettendo in evidenza $\sqrt{n}$ al denominatore, si ha

$$n\,[\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}\,] = \frac{18\,n}{\sqrt{n}\,\Big[\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1-\frac{9}{n}}\Big]} = \frac{18\,\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1-\frac{9}{n}}}.$$

Dato che il numeratore diverge, ed il denominatore tende a 2, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\,[\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}\,] = +\infty.$$

d) Razionalizziamo:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n} &= \frac{(n+7)-n}{\sqrt[3]{(n+7)^2}+\sqrt[3]{n\,(n+7)}+\sqrt[3]{n^2}} \\ &= \frac{7}{n^{\frac{2}{3}}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(1+7/n)^2}+\sqrt[3]{1+7/n}+1}. \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n}\,] = 7\,\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(1+7/n)^2}+\sqrt[3]{1+7/n}+1} = \frac{7}{\sqrt[3]{(1+7/n)^2}+\sqrt[3]{1+7/n}+1},$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}}\,[\sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{\sqrt[3]{(1+7/n)^2}+\sqrt[3]{1+7/n}+1} = \frac{7}{3}\,.$$

6) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{8^n\, n^2}{n!}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n! + 12^n}{(n+1)! + 6^n}\,,$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{8}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}\,, \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{8}{n}}-1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3}{n}\right).$$

Soluzione:

a) Si ha

$$\frac{8^n\, n^2}{n!} = \frac{2^n}{2^n}\,\frac{8^n\, n^2}{n!} = \frac{n^2}{2^n}\,\frac{16^n}{n!}\,.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{16^n}{n!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8^n\, n^2}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}\,\frac{16^n}{n!} = 0\cdot 0 = 0\,.$$

b) Mettendo in evidenza $n!$ al numeratore, e $(n+1)!$ al denominatore, si ha

$$\frac{n! + 12^n}{(n+1)! + 6^n} = \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{1+\frac{12^n}{n!}}{1+\frac{6^n}{(n+1)!}} = \frac{1}{n+1}\,\frac{1+\frac{12^n}{n!}}{1+\frac{6^n}{(n+1)!}}\,,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$. Ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{12^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n}{(n+1)!} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + 12^n}{(n+1)! + 6^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\,\frac{1+\frac{12^n}{n!}}{1+\frac{6^n}{(n+1)!}} = 0\cdot\frac{1+0}{1+0} = 0\cdot 1 = 0\,.$$

c) Ricordando che se a_n tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1\,,$$

possiamo scrivere

$$\frac{\sin^2\left(\frac{8}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{8}{n}\right)}{\frac{64}{n^2}}\,\frac{\frac{64}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}\,\frac{\frac{5}{n^2}}{\log\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{64}{5}\,\frac{\sin^2\left(\frac{8}{n}\right)}{\frac{64}{n^2}}\,\frac{\frac{5}{n^2}}{\log\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{8}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{64}{5}\,\frac{\sin^2\left(\frac{8}{n}\right)}{\frac{64}{n^2}}\,\frac{\frac{5}{n^2}}{\log\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{64}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = \frac{64}{5}\,.$$

d) Ricordando che se a_n tende a zero, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{tg}(a_n)}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a_n}-1}{a_n} = 1\,,$$

possiamo scrivere

$$n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{8}{n}}-1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3}{n}\right) = n^2\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{8}{n}}-1}{\frac{8}{n}}\,\frac{8}{n}\,\frac{3}{n}\,\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}} = 24\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{8}{n}}-1}{\frac{8}{n}}\,\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}}\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{8}{n}}-1\right)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 24\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{8}{n}}-1}{\frac{8}{n}}\,\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}} = 24\cdot 1\cdot 1 = 24\,.$$