1996 年答案

一．证明：

a. ∀无限集 A，将 A 中元素按照某种次序（任意规则）排序，以 0,1,2,……,n 来表示 A 中某元素排列的位置，所以存在自然数集 N 到集合 A 的单射，∴ $N <= A$。得证。

b. ∀无限集 A，∃元素 $\alpha \notin A$，设 $B = A \cup \{\alpha\}$，则 A 到 B 有单射关系"="，∴ $\alpha \notin A$， ∴ $A \neq B$。∴ $A \prec B$，∴ ∃比 A 势更大的集合。因为对任一集合均有比其更大的势的集合。得证。

二．$B = E(A^n)$，其中 $A^n = \begin{cases} A & n = 1 \text{ 时} \\ A^{n-1} \circ A & n > 1 \text{ 时} \end{cases}$ 运算定义为：两矩阵相乘 E 为 A^n 运算收敛后若元素不为 0，则将其置为 1

三．证明：

1. 对于 G 中任一条边，先证其必在一个圈中：

设存在边 e，e 不在一个圈中，e 的两个断点记为 u，v。若去掉边 e，∵u, v 不在一个圈中，∴u，v 间无通路，即 $P(G - e) > P(G)$。∴e 为桥，与题设矛盾。得证。

2. 再证不存在桥的连通图 G 赋予边以方向后，G'为强连通图。

设不存在这样的圈，则存在对两个顶点 u, v 没有经过它们的圈。∴ G是连通的，∴u 到 v 有通路，设通路上的点为 $u, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$，v 对于与 u, v 相关联边，必有圈，$v_1, v_2$ 间必有圈，则可将两圈合并，得到必有 u 到 v_2 的圈，同理可得 u 到 v_3 的圈，以此类推可得到 u 到 v 的圈，与假设不成立。∴必存在将所有顶点连接的圈，将其以逆时针赋予方向后得经过每个点至少一次的回路，∴G 为强连通图。

得证。

四．证明：

永真推理：
$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \land \beta) \to \gamma)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha \to (\neg\beta \lor \gamma)) \to (\neg(\alpha \land \beta) \lor \gamma)$$
$$\Leftrightarrow (\neg\alpha \lor \neg\beta \lor \gamma) \to (\neg\alpha \lor \neg\beta \lor \gamma)$$
$$\Leftrightarrow 1$$

假设推理：

前提引入	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$
结论	$(\alpha \land \beta) \to \gamma$
结论否定引入	$\neg((\alpha \land \beta) \to \gamma)$

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \land \neg((\alpha \land \beta) \to \gamma)$$
$$\Leftrightarrow (\neg\alpha \lor \neg\beta \lor \gamma) \land (\neg\alpha \lor \neg\beta \lor \gamma)$$
$$\Leftrightarrow 0$$

五．
$$(p \to q) \to (p \to r)$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \lor q) \to (\neg p \lor r)$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \lor (\neg p \lor r)$$
$$\Leftrightarrow (p \lor \neg q) \lor \neg p \lor r$$
$$\Leftrightarrow ((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor r$$
$$\Leftrightarrow \neg p \lor \neg q \lor r$$
$$\Leftrightarrow M_6$$

$\Leftrightarrow\ m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee\ m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

六．群的定义：(1)、(A, *)是代数系统；(2)、*为二元运算；(3)、存在关于*的单位元；

(4)、$\forall a \in A$，$\exists a^{-1} \in A$。

P(x, y)：x 与 y 构成代数系统；　　H(x, y)：x∈y；

F(x)：x 是二元运算；　　I(x, y)：x 是 y 的逆；

R(x, y)：x 是关系 y 的单位元。

$P(A,*) \wedge F(*) \wedge \exists e\, R(e, *) \wedge \forall a\,(H(a,A) \rightarrow \exists b\,(I(b, a) \wedge H(b,A)))$

七．证明：

【置换群问题，答案略】

1997 年答案

一．证明：

1. ① ∵ R_1 与 R_2 都是等价关系，∴ $\forall S1\in S$ ∴ $\forall t1\in T$，有 $S_1R_1S_1$ 与 $t_1R_1t_1$。∴ $\forall <S_1,t_1>\in S\times t$。有 $<S_1,t_1>R_3<S_1,t_1>$，∴ R_3 满足自反性。

② 对于 $\forall$ $S_1R_1S_2$，必有 $S_2R_1S_1$，同样 $\forall$ $t_1R_2t_2$ 必有 $t_2R_2t_1$。

∴ $<S_1,t_1>R_3<S_2,t_2> \Rightarrow S_1R_1S_2 \wedge t_1R_2t_2 \Rightarrow S_2R_1S_1 \wedge t_2R_2t_1 \Rightarrow <S_2,t_2>R_3<S_1,t_1>$

∴ R_3 满足对称性。

③ $\forall$ $<S_1,t_1>R_3<S_2,t_2> \wedge <S_2,t_2>R_3<S_3,t_3>$

$\Leftrightarrow (S_1R_1S_2 \wedge t_1R_2t_2) \wedge (S_2R_1S_3 \wedge t_2R_2t_3)$

$\Leftrightarrow (S_1R_1S_2 \wedge S_2R_1S_3) \wedge (t_1R_2t_2 \wedge t_2R_2t_3)$

$\Leftrightarrow S_1R_1S_3 \wedge t_1R_2t_2$

$\Leftrightarrow <S_1,t_1>R_3<S_3,t_3>$

∴ R_3 满足传递性。

2. 自反性与传递性同 1。

证明反对称性： $\forall <S_1,t_1>R_3<S_2,t_2> \wedge <S_1,t_1> \neq <S_2,t_2>$

$\Longrightarrow (S_1R_1S_2) \wedge (t_1R_2t_2) \wedge S_1\neq S_2 \wedge t_1\neq t_2$

$\Longrightarrow (S_2 \not{R}_1 S_1) \wedge (t_2 \not{R}_2 t_1) \wedge S_1\neq S_2 \wedge t_1\neq t_2$

$\Longrightarrow <S_2,t_2> \not{R}_3 <S_1,t_1> \wedge <S_1,t_1> \neq <S_2,t_2>$

∴R_3 满足反对称性，∴R_3 也是偏序关系。

二．证明：

1. 充分性：$S \approx S$，将 S 中去掉一个元素 x，并将 S→S 的映射从元素 x 开始指向原来的下一个元素。∵S 是无限集，S'也是无限集，∴S 到 S'仍然存在双射，∴ $\exists S \subset S \wedge S \approx S$ 。

2. 必要性：∴ $S \subset S \wedge S \approx S$ 若 S 不是无限集，则 S'中必比 S 中少元素，则不可能有 S'→S 的单射，这与$S \approx S$ 矛盾，∴S 必是无限集。

三．证明：

1. 对于任意$<u,v>,<v,r>\subset R'$，u 到 v 有通路，

v 到 r 有通路，则 u 到 r 必有通路，∴$<u,v>\in R$，∴ R 是传递的。

2. $\forall u,v\in Ea$，则 u 到 v 必有通路，∴$<u,v>\in R$，∴ $R \subseteq R$ 。

3. 对$\forall <u,v>\in R$，u 与 v 必是 n 条边关联的通路，即有$<u,n1>\in R$、$<u,n2>\in R$……$<ni,v>\in R$，∴对于包含 R 的传递关系 R''，必有$<u,v>\in R$ ，∴ $R \subseteq R$ 。

四．证明：

1. ∵树中每条边都是桥，∴去掉一条边后连通分支数加 1，∴$T' = T - \{e\}$为连通分支数为 2 的森林。

2. (i)，(ii)成立，则结果显然成立。

(i)，(iii)成立，则对于 G 中的某一生成树，$n = m + 1$，∵$n = m$，∴对于这个生成树任加一条边，根据树的性质可得生成的图仅含一个回路，得证。

(ii)，(iii)成立，∵G 中恰含一条回路，则去掉回路一条边得 G 中无回路，此时 $n = m + 1$。对于 G 各个连通分量，均有 $v_i = e_i + 1$，∴$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_{n'} = e_1 + e_2 + \ldots + e_n + n' = e + n'$。∵ $n = m + 1$，∴ $n' = 1$。∴G 中只有一个连通分量，即 G 是连通的。

五．1. 证明：

因为 G 的阶为奇数，

故无偶数因子，

所以任意一个元素 a 的阶也是奇数，不妨设为 2k+1。即有：

$a^{2k+1}=e$（幺元）

而且 $a^{j}\neq e.$

因此方程 $x^2=a$ 有解如下：

$x= a^{k+1}$

事实上

$(a^{k+1})^2=a^{2k+1}a=ea=a$

2. 证明：

$\forall x$，$x^2=a$ 有唯一解，有 $e\circ e=e$。

$\therefore a\in G$ 且 $a\neq e$，有 $a\circ a^{-1}=e$ 且 $a\neq a^{-1}$。

$\therefore a$ 与 a^{-1} 成对出现。

$\therefore$ 非 e 元素有偶数个，$\therefore$ 元素数为奇，即$|G|$必为奇数。

六． 证明：

1. $\because$ 代数系统 $<Z_m\times Z_n,*>$ 中 $*$ 是二元运算关系，$\forall x_1,x_2,x_3\in Z_m$，$y_1,y_2,y_3\in Z_n$。

$<x_1,y_1>*<x_2,y_2>*<x_3,y_3>=<x_1+_m x_2+_m x_3,\ y_1+_m y_2+_m y_3>=<x_1,y_1>*(<x_2,y_2>*<x_3,y_3>)$

满足结合律。$\because$ $<x,y>*<0,0>=<x,y>$， $<0,0>*<x,y>=<x,y>$，$\therefore$ 存在幺元 $<0,0>$。

$\therefore$ $Z_m\times Z_n$ 是群。

2. 设 $<x,y>=<1,1>^t$ 证明 $<x+1,y>=<1,1>^{t1}$，$<x,y+1>=<1,1>^{t2}$(t,t^1,t^2 为整数)。

根据一次同余方程定理，$\because$ $\gcd(n,m)\mid 1$，$\therefore$ $\exists\alpha$ 使 $n\alpha\equiv m$ (α为整数)。

$\therefore \exists t_1=t+n\alpha$，$\therefore$ $<1,1>^{t+n\alpha}=<x+1,y>$。

同理可得 $<1,1>^{t+m\alpha}=<x,y+1>$

$\therefore \forall<x,y>\in Z_m\times Z_n$ 均有 $<x,y>=<1,1>^t$ 存在，即 $Z_m\times Z_n=<<1,1>>$，$<1,1>$ 是生成元。

七.【略】

八. 设 F(x)，x 参观了展览。 (1) $\forall x(F(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\rightarrow K(x))$

N(x)，x 来自 N 大学。 (2) $\forall x(F(x)\wedge K(x)\rightarrow N(x)\wedge M(x))$

M(x)，x 是男生。 (3) $\forall x(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\rightarrow F(x))$

K(x)，x 背 k 牌书包。

前提：$\forall x(F(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\rightarrow K(x))$；$\forall x(F(x)\wedge K(x)\rightarrow N(x)\wedge M(x))$

结论：$\forall x(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\rightarrow F(x))$

$\forall x(F(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\rightarrow K(x))$ 前提引入

$\forall x(\neg F(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee K(x))$ ①

$\forall x(F(x)\wedge K(x)\rightarrow N(x)\wedge M(x))$ 前提引入

$\forall x(\neg F(x)\vee\neg K(x)\vee(N(x)\wedge M(x)))$ ②

$\forall x(\neg F(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee K(x))\wedge\forall x(\neg F(x)\vee\neg K(x)\vee(N(x)\wedge M(x)))$①与②交

$\Rightarrow$ $\forall x(\left(\neg F(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee K(x)\right)\wedge\left(\neg F(x)\vee\neg K(x)\vee\left(N(x)\wedge M(x)\right)\right))$

$\Rightarrow$ $\forall x((\neg F(x)\vee K(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x))\wedge N(x)\wedge M(x)$

$\Rightarrow$ $\forall x(\neg F(x)\vee K(x))$

$\forall x(\neg F(x)\vee K(x))\rightarrow\forall x(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\rightarrow F(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\neg(F(x)\vee K(x))\rightarrow(K(x)\wedge N(x)\wedge M(x)\rightarrow F(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x((F(x)\vee\neg K(x))\vee\neg K(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee F(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\neg K(x)\vee\neg N(x)\vee\neg M(x)\vee F(x))$不一定为真，

$\therefore$ 上述结论不一定成立。

1998 年答案

一．1. a. $G(x)$中 x 不在$\exists x$辖域内，可换名。b. $G(x, y)$中 x，y 不在$\forall z\exists y$辖域内，可换元。

2. $(p \to q) \land ((q \land r) \to \neg(p \land r))$

$\Rightarrow (p \to q) \land (\neg q \lor \neg r \lor \neg(p \land r))$

$\Rightarrow (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor \neg r \lor \neg p)$

$\Rightarrow (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r \land (\neg q \lor \neg r \lor \neg p))$

$\Rightarrow M_4 \land M_5 \land M_7$

$\Rightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \lor m_6$

二．$F(x)$：x 是狗；

$G(x)$：x 是猫；

$R(x)$：x 吃鱼。

前提：$\forall x(F(x) \to \neg R(x))$，$\neg\exists x(G(x) \land \neg R(x))$

结论：$\neg\exists x(F(x) \land G(x))$

(1) $\forall x(F(x) \to \neg R(x))$　　前提引入

(2) $\forall x(\neg F(x) \lor \neg R(x))$

(3) $\neg\exists x(G(x) \land \neg R(x))$　　前提引入

(4) $\forall x(\neg G(x) \lor R(x))$

(5) $\forall x(\neg F(x) \lor \neg R(x)) \lor \forall x(\neg G(x) \lor R(x))$　　(2)(4)合并

(6) $\forall x((\neg F(x) \lor \neg R(x)) \lor (\neg G(x) \lor R(x)))$

(7) $\forall x(\neg F(x) \lor \neg G(x))$

(8) $\forall x \neg(F(x) \land G(x))$

(9) $\neg\exists x(F(x) \land G(x))$　　得证

三．1. 证明：自反性：$\forall x \in N$，有 $x|x$ 成立，所以 xRx，$\therefore <x, x> \in R$。$\therefore$ R满足自反律。

反对称性：$\forall x, y \in N$且$x \neq y$有 $x|y$ 成立，则 $y|x$ 必不成立，

即$<x, y> \in R \Rightarrow <y, x> \notin R$。$\therefore R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。$\therefore$ R满足反对称性。

传递性：$\forall <x, y> \in R \land <x, y> \in R$，则 $x|y$，$y|z$，则 $x|z$，即$<x, z> \in R$，

$\therefore$R 满足传递性。

2. 有极小元与最小元 1，无极大元和最大元。

3. $<B, R>$，B 是集合$\{2^k \mid k \geq 0\}$。

4. $<B, R>$，B 是素数。

四．【答案略】

五．【颜色填充问题，答案略】

六．对 k 用数学归纳法证明

1. $k = 1$，图 G 是一个只含俩个节点 u 和 v 的连通图，所以图 G 存在一条欧拉通路，$E(P_1)$，且 $E(G) = E(P_1) = (u, v)$。

2. 归纳假设，$k \leq i$ ($i \geq 1$)时结论成立，即 G 中存在各边不重复的 i 条简单路 P_1，P_2，…，P_i，使得 $E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_i)$

3. $k = i + 1$ 时，任选两个奇节点，不妨设为 v_1 和 u_1。

因为图 G 是连通的，所以为 v_1 和 u_1 间必存在一条简单路径（边部重复的路径）P，不妨设为为 $v_1 v_2 \ldots v_p u_1$。从 G 中删去路径 P，节点 v_2，…，v_p 奇数的奇偶性不变，而 v_1 和 u_1 变为偶度数结点。

设图 G 删去路径 P 后变为 G′，如果 G′中某节点 v′的度数为 0，则再删去 v′，显然 G′的

奇度数结点变为 2i 个。

在 G’的任意连通分支中，对于只含有偶度数结点的连通分支 O_n，O_n 是欧拉图，所以 O_n 存在欧拉回路。

因为图 G 是连通的，所以 O_n 中必存在一个节点 v_0 在 v_1 和 u_1 间的简单路径 P 上。

把这个欧拉回路 v_0 加入路径 P 得 P’。同理，可以采用这种方法消除致函偶度数结点的连通分支。

对于含有奇度数结点的连通分支 W_m，根据握手定理，则一定包含偶数个奇度数结点。

不妨设连通分支 W_m 中含有 2x (m = 2x)个奇度数结点，并且 $x_m \le i$，在根据归纳假设（2），W_m 中存在各边不重复的 x(m)条简单路 P_1，P_2，…，$P_{x(m)}$，使得

$$E(W_m) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_{x(m)})$$

综上所述，G 中存在各边不重复的 k 条简单路 P_1，P_2，…，P_k，使得

$$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k)$$

七.【置换群、对称群问题，答案略】

八. 证明：

由(i)(ii)(iii)可推出 S 是群，只需证明交换群。

$\forall a, b, c \in S$，　$a(bc) = (ab)c$。

$\because$ $a(bc) = (ba)c$

$\therefore$ $(ab)c = (ba)c$

$\because$群满足消去律，

$\therefore$ $\forall a, b \in S$，有 $ab = ba$，

$\therefore$ S 为 Abel 群。

2001 年答案

一．证明：

$\forall a,b\ \in G$，若 $a = b$，对于$\forall h_{ij} \in H$在代数系统内有$h * a * j \in HaH$。

$\because a = b$

$\therefore h * a * j = h * b * j \in HbH$

$\therefore HaH \subseteq HbH$

同理可证$HbH \subseteq HaH$

$\therefore HaH = HbH$

若$a \neq b$，对于$\forall h, j \in H$，若 h*a*j = h*b*j，则更具消去率 a = b 与题设矛盾。

$\therefore h * a * j\ \neq\ h * b * j$;，$\therefore h * a * j\ \in HaH\ \Rightarrow h * a * j \notin HbH$，

同理$\forall h * b * j \in HbH \Rightarrow h * b * j \notin HaH$，

$\therefore HaH \cap HbH = \phi$

$\therefore (\forall a, b \in G)(HaH \cap HbH = \phi \vee HaH = HbH)$

二．证明：

a) $\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to (\forall xP(x) \to \forall xQ(x))$

$\Rightarrow\quad \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)\,) \to (\,\neg\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$

$\Rightarrow\quad \neg\,\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)\,) \vee \neg\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)\,) \vee \exists x\neg P(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x((P(x) \wedge \neg Q(x)\,) \vee \neg P(x)) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x((P(x) \vee \neg P(x)\,) \wedge (\,\neg Q(x) \vee \neg P(x))) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x((P(x) \vee \neg P(x)\,) \wedge (\,\neg Q(x) \vee \neg P(x))) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x(\neg Q(x) \vee \neg P(x)) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \exists x\neg Q(x) \vee \exists x\neg P(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad \neg\forall xQ(x) \vee \neg\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

$\Rightarrow\quad 1$ $\quad\therefore$原命题成立

b）$\big(\forall xP(x) \to \forall xQ(x)\big) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$ //从一开始使用归谬法更简单

$\Rightarrow\quad (\neg\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)\,) \to \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad (\forall xP(x) \wedge \neg\forall xQ(x)\,) \vee \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad (\forall xP(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))) \wedge \neg\forall xQ(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad (\forall xP(x) \vee \neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg\forall xQ(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad \neg\forall xQ(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

使用归谬法

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \neg\forall x(P(x) \to Q(x))$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \exists x\neg Q(x) \wedge \exists xP(x)$

$\Rightarrow\quad \forall xQ(x) \wedge \neg\forall xQ(x) \wedge \exists xP(x)$

$\Rightarrow\quad \exists xP(x)$

$\not\Rightarrow\quad 0$ $\quad\therefore$原命题未必成立

三．【颜色填充问题，答案略】

2002 年答案

一．证明：

1. 若 G 为无限群，则$(G *) \cong (Z+)$，而$(H *) \cong (Z+)$，$\therefore (G *) \cong (H *) \cong (Z+)$，$\therefore \exists H \to G$的漫射。

2. 若 G 为有限群，|a| = n，则$(G *) \cong (Z_n \oplus_n)$，而$(H *)$存在到$(Z_n \oplus_n)$的满射，$\therefore \exists H \to G$的满射。

得证。

二．证明：

①	$\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$	公理 A1
②	$(\neg\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$	公理 A3
③	$(\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	公理 A3
④	$(\neg\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	规则 R3
⑤	$\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	规则 R3
⑥	$(\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$	公理 A2
⑦	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	规则 R1（⑤成立）

三．证明：

$\because\ e \le \frac{v(v-1)}{2}$

$\therefore\ \frac{v(v-1)}{2} \ge e \ge \frac{v^2-3v+6}{2}$

$\therefore\ v^2 - 3v + 6 \le 2e \le v^2 - v$

$\therefore\ v \ge 3$

2e 即为 G 的每个顶点度数之和，设为 d

$\therefore\ v^2 - 3v + 6 \le d \le v^2 - v$

任取两个不相邻的顶点 v_1，v_2 度数为 d_1，d_2

$\therefore d = d_{v-2} + d_1 + d_2$

对于剩下 v – 2 个顶点，其内部（即不与 v_1，v_2 相关联边上的度）度数最大为

$(v-2)(v-3) = v^2 - 5v + 6$，而与 v_1，v_2 相关联边上的度$d \le d_1 + d_2$

$\therefore d \le v^2 - 5v + 6 + 2(d_1 + d_2)$

$\therefore\ v^2 - 3v + 6 \le v^2 - 5v + 6 + 2(d_1 + d_2)$

$\therefore\ 2v \le 2(d_1 + d_2)$

$\therefore\ v \le d_1 + d_2$

根据定理 G 为阶 n 大于 3 的无向图人两个不相邻顶点均有$d_1 + d_2 \ge n$，则 G 中存在哈密尔顿图。

得证。

2003 年答案

一．证明：

∀集合 a 且$a \in AUB$，则$a \in A$ 或 $a \in B$

∀x　$x \in UAUB$，则必有一个集合$a \in AUB$使得$x \in a$

若$a \in A$　　则$x \in UA$

若$a \in B$　　则$x \in UB$

$\therefore\ x \in UAU(UB)$

$\therefore\ UAUB \subseteq UAU(UB)$

$\forall x \in UAU(UB)$，必存在某集合$a \in A$ 或 $a \in B$，使得$x \in a$

$\therefore\ x \in a \subseteq AUB$

$\therefore\ x \in U(AUB)$

$\therefore$ 有$UAU(UB) \subseteq U(AUB)$

$\therefore UAU(UB) = UAU(UB)$

二．证明：

设∃元素$< x,y > \in S$，若 S 中存在$< x_i, y_i >$且$x_i = x$，若$y_i \geq y$，则有$x_i \geq x$，$y_i \geq y$，若$y_i \leq y$亦然，$\therefore x_i \neq x$

则对于 S 中其他元素可分为两类，　①$< x_i, y_i >$且$x_i > x$，则$y_i < y$

①$< x_i, y_i >$且$x_j < x$

$\because\ x_i, x, x_j \in N$，$y_i, y, y_j \in N$

$\therefore\ y_i \geq 0, x_j \geq 0$　　（可证$y_i = 0, x_j = 0$不成立）

$\therefore$　对于①，有$0 < y_i < y$，则①为有穷集合；

对于②，有$0 < x_j < x$，则②为有穷集合。

$\therefore$ S 为①U②U$\{< x,y >\}$　　　　$\therefore$ S 为有穷。

三．证明：

设开始节点度数为 d_1，有 n 个节点，最后一个节点度数为 d_n。

$\because$ G 是一个初级通路，$\therefore$ 边数 $e = n - 1$；

$\therefore\ d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n = 2(n-1) = 2n-2$　　$(*)$

对于 G 中各节点，$d_1 \geq 1$，$d_n \geq 1$，$d_i \geq 2$

则 $d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n \geq 1 + 2 \times (n-2) + 1 = 2n-2$

$\therefore$ 若$d_i > 1$ 或$d_n > 1$则 $d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n > 1 + 2 \times (n-2) + 1 = 2n-2$与$(*)$矛盾

$\therefore\ d_1 = d_n = 1$

若$d_i > 2$　则 $d_1 + d_2 + \ldots + d_i + \ldots + d_n > 1 + 2 \times (n-3) + 2 + 1 = 2n-2$与$(*)$矛盾

$\therefore\ d_i = 2$

$\therefore$ G 中有两点度数为 1，其余点度数为 2。

四．证明：

$\because |H| = \frac{1}{2}|G|$　　$|G| = |H| \cdot [G:H]$

$\therefore [G:H] = 2$

$\forall g \in G$，设$g \in G - N$

$\because gN \neq N$，$Ng \neq N$

$\therefore$ G的两个右陪集为 N 与 Ng，两个左陪集为 N，gN

$\because$ $N \cup gN = \phi$，$N \cap gN = \phi$

$\therefore$ $gN = Ng$

五．$(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \neg\beta) \to ((\gamma \vee \zeta) \to ((\zeta \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$

$\Rightarrow$ $\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg\gamma \vee \neg\beta \to (\neg(\gamma \vee \zeta) \vee \neg(\neg\zeta \vee \neg\beta) \vee \neg\alpha)$

$\Rightarrow$ $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \to (\neg(\gamma \vee \zeta) \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha)$

$\Rightarrow$ $\neg\gamma \to (\neg\gamma \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\Rightarrow$ $\gamma \vee (\neg\gamma \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\Rightarrow$ $\gamma \vee \neg\zeta \vee (\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\Rightarrow$ $\gamma \vee (\neg\zeta \wedge \beta) \vee \neg\alpha$

$\nRightarrow$ 1 当$\alpha = 1$，$\beta = 0$，$\gamma = 0$，$\zeta = 1$

故原题有误。

2004 年答案

一.

1. 证明：

自反性：设$\forall <s,t> \in S\times S$，满足$(\mathrm{st}=\mathrm{st}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{ss}>0\wedge tt>0)$

$\therefore <s,t>R<t,s>$ $\therefore$ R 具有自反性

对称性：设$\forall <s,t>,<u,v>\in S\times S$

$\forall <s,t>R<u,v>$

$\Rightarrow \quad ((\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0))$

$\Rightarrow \quad ((\mathrm{uv}=\mathrm{st}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{us}>0\wedge vt>0))$

$\Rightarrow \quad <u,v>R<s,t>$ $\therefore$ R 具有对称性

传递性：设$\forall <s,t>,<u,v>,<m,n>\in S\times S$

$\forall <s,t>R<u,v>\wedge <u,v>R<m,n>$

$$\Rightarrow \quad \big((\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\big)$$
$$\wedge\big((\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0)\big)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{c}(\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0)\wedge((\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0))\vee\\((\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\wedge((\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0))\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c}((\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0\wedge \mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\underbrace{\mathrm{st}=\mathrm{uv}=0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0}_{=0}))\vee\\((\underbrace{\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\wedge(\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0}_{=0}))\vee\\((\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0)\wedge(\mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0))\end{array}$$

$\Rightarrow \quad (\mathrm{st}=\mathrm{uv}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{uv}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{su}>0\wedge tv>0\wedge \mathrm{um}>0\wedge vn>0)$

$\because \mathrm{su}>0, um>0 \therefore sv^2m>0 \;\therefore sm>0 \quad \because tu>0, un>0 \therefore tu^2n>0 \therefore tn>0$

$\Rightarrow \quad (\mathrm{st}=\mathrm{mn}=0)\vee(\mathrm{st}\neq 0\wedge \mathrm{mn}\neq 0\wedge \mathrm{sm}>0\wedge tn>0)$

$\Rightarrow \quad <s,t>R<m,n>$ $\therefore$ R 具有传递性

$\therefore$ R 是等价关系

2. $\mathrm{S}\times\mathrm{S}/\mathrm{R}=\{<u,v>|\forall <s,t>\in S\times S\wedge <s,t>R<u,v>\}$

用右图坐标系表示分为第一象限，第二象限，第三象限和第四象限

$\mathrm{S}\times\mathrm{S}/\mathrm{R}=\{\{<x,y>|\mathrm{x}=0\vee \mathrm{y}=0\},\{<x,y>|\mathrm{x}>0\wedge y>0\},\{<x,y>|\mathrm{x}<0\wedge y<0\},$
$\{<x,y>|\mathrm{x}>0\wedge y<0\},\{\mathrm{x},\mathrm{y}|\mathrm{x}<0\wedge y>0\}\}$

3. 不是等价关系，因为 R 不满足传递性。

反例：$\forall \mathrm{a}\in \mathrm{S}$且$\mathrm{a}\neq 0$ $\forall \mathrm{b}\in\mathrm{S}$，且$\mathrm{b}\neq 0$，由上述定义式可知$<0,\mathrm{a}>\mathrm{R}<0,0>$且$<0,0>\mathrm{R}<\mathrm{b},0>$，

但$<0,\mathrm{a}>$与$<\mathrm{b},0>$不满足 R 的关系，即：

$<0,a>R<0,0>\wedge <0,0>R<b,0>\wedge(\mathrm{a}\in\mathrm{S},\mathrm{a}\neq 0)\wedge(\mathrm{b}\in\mathrm{S},\mathrm{b}\neq 0)\nRightarrow <0,a>R<b,0>$

$\therefore$ R 不具有传递性，R 如此定义则不是等价关系。

二．1. 证明：$\forall \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{G}$，$\because$ (G $\circ$)是 Abel 群，满足交换律。

$\varphi(\mathrm{x}\circ\mathrm{y})=(\mathrm{x}\circ\mathrm{y})\circ(\mathrm{x}\circ\mathrm{y})=\mathrm{x}\circ\mathrm{y}\circ\mathrm{x}\circ\mathrm{y}=\mathrm{x}\circ\mathrm{x}\circ(\mathrm{y}\circ\mathrm{y})=\varphi(\mathrm{x})\circ\varphi(\mathrm{y})$

$\therefore \varphi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}$是同态映射。

2. φ是双射关系时是同构映射，如$\mathrm{x}\circ\mathrm{x}=\mathrm{x}$即 G 满足幂等率。

三．设$|V_G|$=n，设 G 与 G^C 均为平面图，则根据欧拉公式推广，有 G 的边$\mathrm{m}_G\leq 3\mathrm{n}-6$，$G^C$ 的边$\mathrm{m}_c\leq 3\mathrm{n}-6$

$\therefore$G 与 G^C 的完全图的边$\mathrm{m}=\mathrm{m}_a+\mathrm{m}_c\leq 2(3\mathrm{n}-6)$

由完全图中边与顶点关系$\mathrm{m}=\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2}$得

$\frac{n(n-1)}{2} \le 2(3n-6) \Rightarrow n^2 - n \le 12n - 24 \Rightarrow n^2 - 13n + 24 \le 0$

$\therefore \frac{13-\sqrt{73}}{2} \le n \le \frac{13+\sqrt{73}}{2} < \frac{13+\sqrt{81}}{2} = 11$与$n \ge 11$相矛盾

∴ G 与 G^C 二者中至少有一个是非平面图。

四．格的定义：设$< S, \preccurlyeq >$是偏序集，如果$\forall x, y \in S$，{x, y}都有最小上界和最大下界，则称 S 关于$\preccurlyeq$偏序作成一个格。

证明：

1. 定义运算符∧和∨：

$\because (x, \prec)$是全序集，$\forall x, y \in X$，x 与 y 可比

$x = y$时　　$x \wedge y = x = y$，　$x \vee y = x = y$

$x \prec y$时　　$x \wedge y = x$，　$x \vee y = y$，$y \wedge x = x$，　$y \vee x = y$

2. 证明∧和∨满足交换律、结合律、吸收率：

交换律：有定义得$x \wedge y = y \wedge x$，$x \vee y = y \vee x$，满足交换律。

结合律：$(x \wedge y) \wedge z = t$，t 为 x，y，z 中最小者

$x \wedge (y \wedge z) = t$，$\therefore (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$，∴∧满足结合律。

同理　$(x \vee y) \vee z = s$，s 为 x，y，z 中最大者

$x \vee (y \vee z) = s$，$\therefore (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$，∴∨满足结合律。

吸收率：$x \vee (x \wedge y)$，若$x \prec y$，则$x \vee (x \wedge y) = x \vee x = x$

若$y \prec x$，则$x \vee (x \wedge y) = x \vee y = x$

$x \wedge (x \vee y)$，若$x \prec y$，则$x \wedge (x \vee y) = x \wedge y = x$

若$y \prec x$，则$x \wedge (x \vee y) = x \vee x = x$　∴满足吸收率

有定义得$< X, \wedge, \vee >$构成一个格。

3. 有定义得，∧，∨均是定义在偏序关系$\prec$上的二元运算，∴其推导出的偏序关系即为$\prec$。

五．设：p：所有成员事先得到通知

q：到场者达到法定人数

r：会议能够举行

s：至少有 15 人到场

t：邮局罢工

前提：$p \wedge q \to r$，$s \to q$，$\neg t \to p$

结论：$\neg r \to (\neg s \vee t)$

(1) $p \wedge q \to r$　　前提引入

(2) $\neg r \to \neg(p \vee q)$

(3) $\neg r$　　附加前提引入

(4) $\neg p \vee \neg q$

(5) $p \to \neg q$

(6) $\neg t \to p$　　前提引入

(7) $\neg t \to \neg q$

(8) $s \to q$　　前提引入

(9) $\neg q \to \neg s$

(10) $\neg t \to \neg s$

(11) $\neg s \vee t$

∴ 结论正确

2005 年答案

一． $\alpha \to \beta \vee \gamma \to (\beta \wedge \gamma \leftrightarrow \neg\alpha \vee \gamma)$

$\Rightarrow \neg\alpha \vee \beta \vee \gamma \to ((\neg(\beta \wedge \gamma) \vee \neg\alpha \vee \gamma) \wedge ((\beta \wedge \gamma) \vee \neg(\neg\alpha \wedge \gamma)))$

$\Rightarrow \neg\alpha \vee \beta \vee \gamma \to ((\neg\beta \wedge \neg\gamma \vee \neg\alpha \vee \gamma) \wedge ((\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma)))$

$\Rightarrow \neg(\neg\alpha \vee \beta \vee \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma)$

$\Rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma)$

$\Rightarrow (\alpha \wedge \neg\gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$

$\Rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \vee (\neg\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$

$\Rightarrow m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$

$\Rightarrow M_0 \vee M_1 \vee M_2 \vee M_5$

二．1. 证明：

$\because t(x,y,z) = (x,y,z \oplus (xy)) \qquad (x,y,z) \in \{0,1\}^3$

$\therefore t^{-1}(x,y,z \oplus (xy)) = (x,y,z)$

$\therefore t(x,y,z \oplus (xy)) = (x,y,z \oplus (xy) \oplus (xy)) = (x,y,z)$

$\therefore$ t的逆函数即为 t。

2. $AND(x,y) = \pi_3(t(x,y,0))$

$OR(x,y) = \pi_3(t(x,y,t(x,1,y)))$

$NOT(x) = \pi_3(t(x,1,1))$

三．证明：

1. 若元素个数为 1，是平凡群{e}，则是 Abel 群
2. 若元素个数为 2，设为 a，e，则对于 ae = ea，aa = aa，是 Abel 群
3. 若元素个数为 3，设为 a，b，e，若 ab = a，根据消去率得 b = e，$\therefore$ ab ≠ a 且 ab ≠ b，$\therefore$ ab = e，即$b = a^{-1}$，$\therefore$ ab = ba = e， $\therefore$是 Abel 群
4. 若元素个数为 4，设为 a，b，c，d，e，则ab ≠ a，ab ≠ b

设 ab = e，则$b = a^{-1}$，$\therefore$ ab = ba = e

设 ab = c，则 aba = ca，若 ba = e，则$b = a^{-1}$，ab = e 不成立，$\therefore$ ba = c，$\therefore$ ab = ba，同理 ac = ca，bc = cb

得证。

四．证明：

有$f(m+n\sqrt{-1}) = 2^n3^m$，$\forall x,y \in G$均可写成$x = m_1 + n_1\sqrt{-1}$和$y = m_2 + n_2\sqrt{-1}$的形式。

$\forall x,y \in G$ 均可写成$x = 2^{n_1}3^{m_1}$和$y = 2^{n_2}3^{m_2}$的形式。

则：$f(x+y) = f(m_1 + n_1\sqrt{-1} + m_2 + n_2\sqrt{-1})$

$= f((m_1+m_2) + (n_1+n_2)\sqrt{-1}) = 2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}$

$= 2^{n_1}3^{m_1} \cdot 2^{n_2}3^{m_2} = f(x)\cdot f(y)$

$\therefore f: G \to G$ 是同态映射。

$\because x,y$ 必可写成 $2^{n_1}3^{m_1}$ 和 $2^{n_2}3^{m_2}$ 形式，$\therefore$ 有 $m_1 + n_1\sqrt{-1}$，$m_2 + n_2\sqrt{-1} \in G$，使得 $f: (m_1 + n_1\sqrt{-1}, m_2 + n_2\sqrt{-1}) \to (x,y)$，$\therefore$ f为满射。

设$\exists m_1'$，m_2'，n_1'，n_2'使得 $f: (m_1 + n_1\sqrt{-1}, m_2 + n_2\sqrt{-1}) \to (x,y)$

则有$2^{n_1'}3^{m_1'} = 2^{n_1}3^{m_1}$，

$2^{n_2'}3^{m_2'} = 2^{n_2}3^{m_2}$，$\because$ 2与 3 互素，$\therefore$ 2^{n_1}中必不含因子 3，

$\therefore n_1' = n_1$，$m_1' = m_1$。$n_2' = n_2$，$m_2' = m_2$ $\therefore$ f 是单射，$\therefore$ f 构成双射。

$\therefore$ G 与 G'是同构的。

五．证明：

$\because$ G 为奇数顶点的二分图，设 G 的一个顶点划分v_1有 n 个顶点，另一个顶点划分v_2有 m 个顶点，$\therefore n \neq m$。

设 $n < m$，若 G 为哈密尔顿图，则 $P(G - V_1) = |V_2| = m > |V| = n$

与定理“若 G 是哈密尔顿图，则对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \phi$均有$P(G - V_1) \leq |V_1|$”相矛盾。

$\therefore$ G 不是哈密尔顿图。

六．证明：

设一群人中有朋友的个数为为 n，

若 $n = 0$，$\because$人群中人数大于等于 2，$\therefore$至少有两个朋友数为 0，他们的朋友数相等。

若 $n = 1$，人群中只有 1 人有朋友，且朋友不是自己，则必存在另一人有朋友为他本人。故 $n = 1$ 条件不成立。

若$n \geq 2$，用途表示关系，顶点为人，边连接两个是朋友的人，则一个顶点的度数代表这个人具有的朋友数。度数最大为 $n - 1$，则具有不同朋友数的个数为 $1, 2, \ldots, n - 1$ 共 $n - 1$ 种，而人数为 n，$\therefore$必有两个人有相同的朋友数。

2006 年答案

一．证明：

自反性：对于$< a,b >$，$a \in N$，$b \in N^+$有 ab = ba。$\therefore < a,b > R < b,a >$， $\therefore$ R满足自反性。

对称性：对于$< a,b > \in (N \times N^+)$　　$< c,d > \in (N \times N^+)$

$< a,b > R < c,d > \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow < c,d > R < a,b >$，$\therefore$ R满足对称性。

传递性：对于$< a,b > \in (N \times N^+)$　　$< c,d > \in (N \times N^+)$　　$< e,f > \in (N \times N^+)$

$(< a,b > R < c,d >) \wedge (< c,d > R < e,f >)$

$\Rightarrow$　$(ad = bc) \wedge (cf = de)$

$\Rightarrow$　$(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}) \wedge (\frac{c}{d} = \frac{e}{f})$

$\Rightarrow$　$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

$\Rightarrow$　$af = be$

$\Rightarrow$　$(< a,b > R < e,f >)$　　　　　　　　$\therefore$ R 满足传递性

$\therefore$ R 为等价关系

$[< 1,2 >] = \{< x,y > |y = 2x \wedge y \neq 0\}$

二．证明：

1. 定义：　　有界格$< L,\wedge,\vee ,0,1 >$：L 是格且存在全下界与全上界

　　有补格$< L,\wedge,\vee,0,1 >$是有界格，$\forall a \in L$，在 L 中有 a 补元存在

　　布尔代数$< L,\wedge,\vee,',0,1 >$：有补分配格。

2. ①定义偏序集$< U,\preccurlyeq >$有$\forall a,b \in U$，有　$a \preccurlyeq b$则$a \cup b = b$　$a \cap b = a$；

$b \preccurlyeq a$则$a \cup b = a$　$a \cap b = b$。

则对于任意 a，b 均有最小上界和最大下界，$\therefore < U,\preccurlyeq >$关于$\preccurlyeq$作成一个格$< U,\cap,\cup >$

② $\forall x \in U$，有$\phi \cap x = \phi$，即$\phi \preccurlyeq x$；　　$\therefore \phi$为全下界。

$\forall x \in U$，有$N^+ \cup x = N^+$，即$x \preccurlyeq N^+$；$\therefore N^+$为全上界。

$\therefore < U,\cap,\cup,\phi,N^+ >$是有界格。

③对于$\forall x \in U$，　$x \cup (N^+ - \{x\}) = N^+$

$x \cap (N^+ - \{x\}) = \phi$　　$\therefore < U,\cap,\cup,\phi,N^+ >$是有补格。

④$< U,\cap,\cup >$中$\cap,\cup$关系满足分配律，$\therefore < U,\cap,\cup,\ ^{-1},\phi,N^+ >$是有补分配格，

$\therefore < U,\cap,\cup,\ ^{-1},\phi,N^+ >$是布尔代数。

三．证明：

设 G 中顶点数、边数、面数分别为 n、m、r；

G*中顶点数、边数、面数分别为 n*、m*、r*；

设 G 的连通分量为 k，

则　n* = r

m* = r

r* = n – k + 1

$\because$ G 与 G*同构

$\therefore$　n = n*　　$\Rightarrow$　　n = r　　$\Rightarrow$　　k = 1

m = m*　　　　r = n – k + 1

r = r*

由欧拉公式：$n-m+r=2$ 得 $n-m+n=2$，$\therefore m=2n-2$。得证。

四．证明：

设 e 的基本割集为 S_e，S_e 将 G 分为两个子图 G_1,G_2。e 将 T 分为两个子图 T_1,T_2。

$\because$ T是 G 的生成树，$\therefore T_1,T_2$ 分别为 G_1,G_2 的生成树，T_1 与 T_2 不连通。

对于生成树 T'，必存在一个不为 e 的边 e'，且$e' \in S_e$，则将$\{e', G_1, G_2\}$看作一个图，则此图连通且 e'为桥。

$\therefore$e'将 T_1 与 T_2 连通。

$\therefore\{e', T_1, T_2\}$是图 G 的生成树，得证。

五．证明：

充分性：　前提$\Gamma\wedge\Psi\to\neg\varphi$

　　　　　结论$\Gamma\wedge\varphi\to\neg\Psi$

$\Gamma\wedge\Psi\to\neg\varphi$	前提引入
$\varphi\to\neg(\Gamma\wedge\Psi)$	
$\Gamma\wedge\varphi$	附加前提引入
φ	
$\neg(\Gamma\wedge\Psi)$	
$\neg\Gamma\vee\neg\Psi$	
$\Gamma\to\neg\Psi$	
$\neg\Psi$	得证

必要性：　前提$\Gamma\wedge\varphi\to\neg\Psi$

　　　　　结论$\Gamma\wedge\Psi\to\neg\varphi$

$\Gamma\wedge\varphi\to\neg\Psi$	前提引入
$\Psi\to\neg(\Gamma\wedge\varphi)$	
$\Gamma\wedge\Psi$	附加前提引入
Ψ	
$\neg(\Gamma\wedge\varphi)$	
$\neg\Gamma\vee\neg\varphi$	
$\Gamma\to\neg\varphi$	
$\neg\varphi$	得证

$\therefore\Gamma\wedge\Psi\to\neg\varphi\Leftrightarrow\Gamma\wedge\varphi\to\neg\Psi$

六．证明：

因为G_2是 G 的正规子群，所以映射$f: G\to G/G_2$为满同态，$G_2=\ker(f)$，又因为$G_1\le G$，所以$f(G_1)\le G/G_2$。由 Lagrauge 定理可知$|f(G_1)|$能整除$|G/G_2|$，从而$|f(G_1)|$能整除$[G:G_2]$，又因为$|f(G_1)|$能整除$|G_1|$，所以$f(G_1)$整除$[G:G_2]$、$|G_1|$的最大公约数。而$\gcd([G:G_2],|G_1|)=1$，从而$|f(G_1)|=1$，故$f(G_1)$恰为幺生成之集，因此$f(G_1)=\{G_2\}$，从而$\forall g\in G_1$，$gG_2=G_2$。因此$\forall g\in G_1$，有$g\in G_2$因此G_1为 G_2的子集。

2007 年答案

一．证明：

充分性：$a=c\wedge b=d \Rightarrow <a,b>=<c,d>$

$a=c \Rightarrow \{\{a\},\phi\}=\{\{c\},\phi\}$　　　　$<a,b>=\{\{\{a\},\phi\},\{\{b\}\}\}$

$b=d \Rightarrow \{\{b\}\}=\{\{d\}\}$　　　　$<c,d>=\{\{\{c\},\phi\},\{\{d\}\}\}$

$\therefore <a,b>=<c,d>$

必要性：$<a,b>=<c,d> \Rightarrow a=c\wedge b=d$

$\because <a,b>=<c,d> \Rightarrow \{\{\{a\},\phi\},\{\{b\}\}\}=\{\{\{c\},\phi\},\{\{d\}\}\}$

$\Rightarrow \{\{a\},\phi\}=\{\{c\},\phi\}\wedge\{\{b\}\}=\{\{d\}\}$（两集合相等，则集合中元素个数相等）

$\Rightarrow \{a\}=\{c\}\wedge\{b\}=\{d\}$

$\Rightarrow a=c\wedge b=d$

二．证明：

【见教材 P177】

【附】证明：p 与 n 互素则自同构，否则不是。（此处 n=6）

若 p 与 n 不互素，设最小公约数为 r，则$r\neq 1$

则$\frac{n}{r}*p$一定是 n 的倍数，$\therefore f_p\left(\frac{n}{r}\right)=\left(\frac{n}{r}*p\right)\bmod n=0$

$\therefore f_p\left(\frac{n}{r}\right)=f_p(0)=0$

$\therefore f_p$必不为双射。

若 p 与 n 互素，最小公约数为 1，若$\exists f_p(x_1)=f_p(x_2)$，设$x_2<x_1<n$；

则$x_1p \bmod n=x_2p \bmod n$

$\therefore (x_1p-x_2p) \bmod n=(x_1-x_2)p \bmod n=0$，$x_1-x_2<n$，

和 p 与 n 互素相矛盾。

$\therefore$不存在$f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore f_p$满足单射。

$\because Z^n$与Z^n中元素个数相同，$f_p:Z^n\to Z^n$满足单射，$\therefore f_p$是双射。

$\therefore f_p$是同构。

6 中有 1，5 两个数与 6 互素，$\therefore <Z^6,\ \odot>$有且只有两个自同构。

三．证明：

设存在两条最长路径没有公共点，他们分别是$v_1\to u_1, v_2\to u_2$

因为图 G 是连通的，所以这两条路径上某两点之间必有一条边将这两条路径相连，设这两个点分别为v_1', v_2'；

则这两个点将两条路径分为四条：$v_1\to v_1', v_1'\to u_1, v_2\to v_2', v_2'\to u_2$

且$v_1\to v_1'+v_1'\to u_1$的长度等于$v_2\to v_2'+v_2'\to u_2$的长度，

设$v_1\to v_1'\geq v_2\to v_2'$长度，则$v_1'\to u_1\leq v_2'\to u_2$长度，

$\therefore$存在路径$v_1\to v_1'+v_1'v_2'+v_2'\to u_2$的长度大于$v_1\to u_1$长度，这与$v_1\to u_1$是最长路径相矛盾。

得证。

四．证明：

易见$<B,\preccurlyeq>$是偏序集

$\forall[\alpha],[\beta]\in B$，$\because \alpha\to\alpha\vee\beta$，$\beta\to\alpha\vee\beta$

$\therefore$ $[\alpha]$与$[\beta]$最大下界为$[\alpha \vee \beta] \in \beta$

$\because$ $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$，$\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

$\therefore$ $[\alpha]$与$[\beta]$最小上界为$[\alpha \wedge \beta] \in \beta$

$\therefore < B, \preccurlyeq >$生成格

$\because$ $\forall [\alpha] \in \beta$ $\quad$ $\alpha \rightarrow 1$为真 $\quad$ $\therefore$ $[\alpha] \preccurlyeq [1] \in B$

$0 \rightarrow \alpha$为真 $\quad$ $\therefore$ $[0] \preccurlyeq [\alpha] \in B$

$\therefore$有最大上界为重言式集，记为[1]；有最小下界为矛盾式集，记为[0]。

$\therefore < B, \wedge, \vee, [0], [1] >$为有界格

$\forall [\alpha] \in \beta$ $\quad$ $\alpha \vee \neg\alpha = 1$ 即$[\alpha]$与$[\neg\alpha]$最小上界为重言式集；

$\alpha \wedge \neg\alpha = 0$ 即$[\alpha]$与$[\neg\alpha]$最大下界为矛盾式集。

$\therefore$ $[\alpha]$与$[\neg\alpha]$互为补元

$\therefore < B, \wedge, \vee, \neg, [0], [1] >$为有补格。

可证满足分配率，

$\therefore < B, \wedge, \vee, \neg, [0], [1] >$为布尔代数。

五．【可能属于组合逻辑问题，答案待研究】

2009 年答案

一．$|B| = 2^{n-1}$

二．（1）提示，反证法

（2）　略

三．若 m、n 都是奇数，V1（i+j 为奇数），v2（i+j 为偶数），有边的定义可知，这是一个二部图，m、n 为奇数，则必有 V1 集合中点点个数不等 V2，设第一个大，p（G-V2）=V1 的个数，这与哈密屯图的必要条件冲突，所以原题有误！

四．(参见 1997 年第 6 题)。

五．(参见 1998 年第 2 题)

2010年答案

一、（1）用定理证明很简单

（2）∵S⊆T(S)，T⊆T(T)

∴S U T ⊆ T（S）UT（T）

∴T（SUT）⊆T（T（S）UT（T））

∵T(S)⊆T（SUT），T(T)⊆T（SUT）

∴ T（S）UT（T）⊆T（SUT）

又∵T（S）UT（T）为传递的

∴T（S）UT（T）=T（T（S）UT（T））

∴T（T（S）UT（T））⊆T（SUT）

二、先取 a 属于 G ,令 a*是 a 的逆元,注意 a 不等于 a*,

因为若他们相等则 a 的阶是 2,这与 G 的阶是奇数矛盾(Lagrange 定理).

所以 G 中除 e 以外，任意 a 与 a*成对存在。

G 中所有元素之积,由于 G 为 Abel 群，可交换 a 与 a*在一起，最后结果为单位元。

三、k 逆 hk 属于 H，h 逆也属于 H，他们乘起来为 h 逆 k 逆 hk，也自然属于 H

h 逆 k 逆 h 属于 K，k 也属于 K， 他们乘起来为 h 逆 k 逆 hk，也自然属于 k

所以h逆k逆hk∈H∩K={e}，h逆k逆hk=e,hk=kh

四、P306 第 10 题（书上课后习题）

五、原式化成 （任意 xA 且非 B）或（非存在 xA 或 B）

然后对或分配 任意 xA 或 B 或任意 X 非 A

然后任意（A 或非 A）或 B

所以为 1

2011年答案

1、因为|A/R|=t

所以有 t 个等价类

设每个等价类中的关系个数为 Xi，则所有等价类的关系个数之和为|R|

即 $X1^2+X2^2+.....+Xt^2=r$

$rt-n^2 = t*(X1^2+X2^2+.....+Xt^2)-（X1+X2+....+Xt)^2$

$= (X1-X2)^2+(X1-X3)^2+..+(X1-Xt)^2+(X2-X3)^2+.....+(X3-X4)^2+.....$

PS:无法理解最后一个式子的可以用 t=2,3,4 来试下

2、未做出正确答案

3、书本 P295 50 题，第十四章课后习题最后一题

4、宋方敏课件第 26 讲

5、原来的答案不见了，大家自己做吧，该题比较简单

6、未做出正确答案

2012年答案

1、课件上有一样的

2、《离散，屈婉玲，高教》第十章 P189 页

3、《离散，屈婉玲，高教》第五章 P69 页 ，用“量词辖域收缩与扩张等值式”可以讲任意转为存在。

4、先证明任意一点至多与 3 个点距离为 1。

以任意点 Xi 画半径为 1 的圆，与 Xi 距离为 1 的点只能分布在圆周上，该圆周长为 3.14 又因为圆周上的各点距离至少为 1，所以圆周上只能有 3 个点。

再利用归纳假设证明题目

假设 n 个点至多有 3n 对距离为 1 的点

现有 n+1 个点，因为对于新加的点，至多有 3 个点与它距离为 1，

所以至多有 3n+3 对距离为 1 的点，得证

5、那个 任意选取一个 K3

那么其他任意一个节点到这三个点只能由两边

那么这三个点的边数和为 5

是在顶点为 n+1 的情况下

忘说这个了

选了一个 K3

剩下 n-2 个顶点

这 n-2 个顶点到这三个点做多有 2*（n-2)条边 那么这三个点的边数和就是 2*（n-2)+3 等于 2n-1

所以必存在一个点的关联边数小于等于（2n-1)/3

那么把这一个点和关联的边删除 剩下的就是 N 个顶点的图 由归纳法 N 个顶点的不含 K4 的图边数为 N^2/3

那么 N+1 个顶点的边数必小于 N^2/3+(2n-1)/3 <(N+1)^2/3