1996 年

一．试证：　a.自然数集为无限集中势最小者。
　　　　　　b.不存在最大的势。

二．任给无向图 G，其联结矩阵为 $A=[a_{ij}]$，（即若存在边(vi,vj)则 $a_{ij}=1$ 否则 $a_{ij}=0$）试定义矩阵运算并给出关于 A 的矩阵的表达式，B=E(A)，使得矩阵 $B=[b_{ij}]$满足：对于 G 中的任意两结点 v_i,vj 若其间存在通路则 $b_{ij}=1$ 否则 $b_{ij}=0$。

三．任给无向图 G，　对 G 中的边赋予方向得图 G’，试证：存在 G 满足对任意两点 v1,v2∈G’，不论从哪点为始终端均有有向通路到达另一点的充分条件是原图 G 连通且不存在割边。

四．试分别用永真推理过程和假设推理过程证明：

$$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\wedge\beta)\rightarrow\gamma)$$

五．试给出下式的析合范式和合析范式：

$$(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)$$

六．试用谓词演算公式来描述一个代数系统(A,*)为一个群。

七．任给一个集合 S，S 到自身的一一对应的映射成为 S 上的置换，试证：S 上置换的全体关于置换的复合运算构成群。

1997 年

一．R_1、R_2 分别是集合 S、T 上的关系，定义 S×T 上的关系 R_3：$<s_1,t_1>R_3<s_2,t_2>$当且仅当 $s_1R_1s_2$，$t_1R_2t_2$。

证明：　(1)若 R_1、R_2 为等价关系，则 R_3 为等价关系。

　　　　(2)若 R_1、R_2 为偏序，则 R_3 也是偏序。

二．证明：S 是无限集当且仅当存在 S 的真子集 S'：满足 S 与 S'等势。

三．图 $G=(V_G,E_G)$，R_1 是定点集 V_G 上的相邻关系，即对任意 $u,v\in V_G$，uR_1v 当且仅当 $u,v\in E_G$。R_2 是 V_G 上的可达关系，即 uR_2v 当且仅当在 G 中存在 vu-通路。

证明 R2 是 R1 的传递闭包。

四．(1)T 是树，e 是 T 中任意一条边，证明：T'=T-{e}是连通分支数为 2 的森林。

(2)图 $G=(V_G,E_G)$，$|V_G|=n$，$|E_G|=m$，G 连通且恰好含一个回路的充分必要条件是下列三项中的任意两项成立。

(i)G 连通，(ii)G 恰好含一个回路，(iii)m=n。

五．(1)若 G 是奇数阶有限群，证明对任意 a∈G，方程 $x^2=a$ 有解。

(2)若在有限群 G 中，对任意 a，$x^2=a$ 有唯一解，则|G|必为奇数。

六．Zm、Zn 分别是 m、n 阶剩余加群。定义代数系统(Zm×Zn,*)：对任意 x1,x2∈Zm，y1,y2∈Zn，(x1,y1)*(x2,y2)=(x1+mx2,y1+ny2)。

证明：若 m、n 互质，Zm×Zn 是循环群，生成元为(1,1)。

证明：（1）封闭性

（2）可结合性

（3）幺元　（0, 0）

（4）逆元　显然，对于任意（a,b）$\in Z_m\times Z_n$，有（a^{-1}, b^{-1}）

综上所述，对于任意的 m、n，（$Z_m\times Z_n$, *）都是群。

显然，若 m 与 n 互质，　Zm×Zn 是循环群，生成元为(1,1)。

七．试讨论在一给定公理系统的公理系统集合中添加或删除元素，对系统的性质可能产生什么影响。（提示：在添加元素的情况下，要考虑所加公式在原系统中是否可证。）

八．给下列命题：

(1)参加展览的人中，每个 N 大学的男生都背 K 牌书包。

(2)参观展览的人中，每个背 K 牌书宝的都是来自 N 大学的男生。

(3)每个背 K 牌书包的 N 大学男生都参观了该展览。

写出相关的谓词逻辑表达式，证明：(1)(2)不能推出(3)。

1998 年

一．(1)在下列谓词演算公式中，哪些变元可以换名：

$(a)\exists xF(x) \equiv G(x)$　　　$(b)\forall z\exists y(A(z) \land B(y) \to C(x,y))$

(2)写出命题演算公式(p → q) ∧ ((q∧r) →¬(p∧r))的析合、合析范式。

二．利用谓词演算描述下列推理的过程：

前提：(i)所有的狗都不吃鱼。(ii)没有一个猫不吃鱼。

结论：没有一只狗是猫。

三．设 N 是正整数集，定义关系 R⊆N×N 如下：对任意的 x,y∈N，xRy 当且仅当：存在 z∈N，使得 xz=y。(即 x|y).

(1)证明：R 是偏序。

(2)偏序集<N,R>是否有极小、极大、最小、最大元？

(3)描述偏序集<N,R>中一个链的一般形式。（偏序集<A,R>中的一个链是 A 的一个子集 B，满足$<B, R \cap B \times B>$是偏序集。）

(4)描述偏序集<N,R>中一个反链的一般形式。（偏序集<A,R>中的一个反链是 A 的一个子集 B，满足对 B 中任意元素 x,y，若 x≠y，则 xRy 和 yRx 均部成立。）

四．人给一个有限的正整数序列，序列中元素各不相等。

(1)证明：以不同元素结尾的最大递增或最大递减子序列长度不会相等。（例如，在序列（2，15，8，7，6，4，21）中，以 6 结尾的最大递增子序列是（2，6），最大递减子序列是（15，8，7，6）。而以 4 结尾的最大递增子序列是（2，4），最大递减子序列是（15，8，7，6，4）。）

(2)利用鸽巢原理证明：在由 n2+1 个不同的正整数构成的序列中，至少有一个递增或递减子序列的长度大于 n。

五．若干足球队参加比赛，每队之间赛一场，没有平局，而且对任意三个队 A、B 和 C，若 A 胜 B 且 B 胜 C，则必有 C 胜 A。试建立一个描述此问题的图模型，并讨论满足上述条件的参赛队伍的个数是否有上限，若有是多少？

六．简单连通图 G 恰好含 2K（K 是不小于 1 的整数）个奇次顶点。证明：G 可以分为 K 各边互不相交的简单通路。

七．代数系统$(S = \{a,b,c,d\},+,\times)$中的运算均满足交换率，证明：结合 S 上所有保持$(a \times b) + (c \times d)$的值不变的一一对应的映射（置换）构成对称群 S4（即 S 上所有置换的集合与映射符合运算所构成的群）的子群。

八．代数系统 S，满足以下 4 条公理：

(i)封闭性；　　　　(ii)对任意的 a,b∈S,a(bc)=(ba)c；

(iii)有单位元；　　　　(iv)每个元素都有逆元素。

证明：S 是可交换群。

2001 年

一．设(H,*)是群(G,*)的子群，对于 a∈G，令 HaH={h*a*j|h,j∈H}

证明：$(\forall a, b \in G)(HaH \cap HbH = \emptyset \vee HaH = HbH)$

二．设 P、Q 为一元谓词，在一阶谓词演算中证明

a) $\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$成立

b) $\vdash (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$不成立

三．问题：考试日程安排问题。

每个学生选若干课。要求安排能保证每个学生不会有两门或两门以上所选课程考试时间重叠。假设每门课的考试时间一样长，以一门考试为单位时间段。求所需的最短时间段数。

2002 年

一．H 为无限循环群，G 为任意阶循环群，证明存在从 H 到 G 的满同态。

二．设α,β,γ为命题演算中任意命题，$\neg$和 $\supset$分别表示否定和蕴含联结词，仅仅用一下公理 A1，A2，A3 和规律 R1，R2，R3 证明$(\neg\neg\alpha)\supset\alpha$。

公理：　$A1:\alpha\supset(\beta\supset\alpha)$　　$A2:\big(\alpha\supset(\alpha\supset\beta)\big)\supset(\alpha\supset\beta)$　　$A3:(\neg\alpha\supset\neg\beta)\supset(\beta\supset\alpha)$

规则：　$R1:\alpha\supset\beta，\alpha\vdash\beta$　　$R2:\alpha\supset\beta\vdash(\gamma\supset\alpha)\supset(\gamma\supset\beta)$　$R3:\alpha\supset\beta，\beta\supset\gamma\vdash\alpha\supset\gamma$

三．设 G 为无向简单图，e 为 G 的边数，v 为 G 的点数，证明：若$e\geq(v^2-3v+6)/2$，则 G 含有 Hamilton 回路。

2003 年

一．证明 $\cup\ A\cup B=\ \cup A\ \cup(\cup B)$。

二．设 N 为全体自然数的集合，证明：若 $S\subseteq N\times N$ 且对于 S 的任何两个元素 $(x1,y1)$和$(x2,y2)$既无 $x1\le x2\wedge y1\le y2$ 又无 $(x2\le x1\wedge y2\le y1)$,则 S 有穷.

三．设 G 为简单连通图，证明：G 为一条非回路的基本通路 G 中有两点的度为 1 且其余点的度为 2.

四．设$<G,*>$为偶数阶有限群，$<H,*>$为$<G,*>$的子群，且 $H=\frac{1}{2}G$，证明$<H,*>$是$<G,*>$的正规子群，这里 H 为 G 的正规子群是指$(a\in G)(aH=Ha)$。

五．在命题演算中证明

$$\vdash(\alpha\to\beta)\to(\gamma\to\neg\beta)\to((\gamma\vee\tau)\to((\tau\to\neg\beta)\to\neg\alpha))$$（本题有误）

2004 年

一．设 S 是实数集，定义 $S\times S$ 上的关系 R 如下：对任意的$<s,t>,<s,t>\in S\times S$，$<s,t>R<u,v>$当且仅当 $((st = uv = 0) \vee (st \neq 0 \wedge uv \neq 0 \wedge su > 0 \wedge tv > 0))$

(1)证明：R 是等价关系。

(2)描述 $S\times S$ 关于 R 的商集。

(3)假如将上述定义式改为

$((s = u = 0) \vee (t = v = 0) \vee (st \neq 0 \wedge uv \neq 0 \wedge su > 0 \wedge tv > 0))$，R 是否仍然是等价关系，为什么？

二．设$(G,\circ)$是可交换群，定义映射$\phi: G \to G$，对任意$x \in G, \phi(x) = x \circ x$

(1)证明$\phi: G \to G$是同态映射。

(2)在什么条件下，$\phi: G \to G$有可能是同构映射，举例说明。

三．给定简单无向图 $G=(V_G,E_G)$，其顶点数$|V_G| \geq 11$。证明：G 与 G^C（即 G 的补图）二者中至少有一个是非平面图。

四. 假设$(X, <)$是全序关系，证明：一定可以在 X 上定义两个相应的运算$\wedge$和$\vee$，使得$(X, \wedge, \vee)$构成格，且这个格导出的偏序关系就是$<$。

五．利用命题演算判断下列推理正确与否，如果正确，给出推理过程，反之给出反例。

前提：如果所有成员事先得到通知，且到场者达到法定人数，会议就能够举行，如果至少有 15 人到场就算是达到法定人数了，并且如果邮局没有罢工通知就会提前送到。

结论：假如会议被取消了，不是到场的人不到 15 人，就是邮局罢工了。

2005 年

一．求出命题演算公式$(\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to ((\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \gamma))$ 的合析范式与析合范式。

二．**Toffoli**函数是一个Boole函数，设$t:\{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$定义为$t(x,y,z) = (x,y,z \oplus (xy))$，这里$\oplus$为模2加法. 令$\pi i:(0,1)^3 \to (0,1)$为$\pi i$ x1,x2,x3 =xi(i=1,2,3) 证明：

1) t之逆函数为t;

2) 利用t, πi(i=1,2,3)构造函数

$$\mathrm{AND}(x,y) = \begin{cases} 1 & 若x=y=1 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \qquad \mathrm{OR}(x,y) = \begin{cases} 0 & 若x=y=0 \\ 1 & \text{others} \end{cases} \qquad \mathrm{NOT}(x,y) = \begin{cases} 0 & 若x=1 \\ 1 & 若x=0 \end{cases}$$

三．证明：若一个群的元素个数≤4，则它必为Abel群。

四．证明：元素呈形$m+n\sqrt{-1}(m,n\epsilon Z)$的加群G与元素成形$2^n3^m(m,n \in Z)$的乘群G’是同构的。

五．证明：若G为具有奇数个顶点的二分图，则G不是Hamilton图。

六．证明：在任一个至少有两个人的人群中，总存在两个人，他们在该人群中的朋友数相等。

2006 年

一．【12 分】设二元关系$R \subseteq (N \times N^{+})^2$定义如下：

对任何 $a, c \in N$，$b, d \in N^{+}$，$(a, b)\ R\ (c, d)$当且仅当 $ad = bc$。

证明：R 为等价关系并求等价类$[(1, 2)]$，这里 N 为全体自然数的集合$(0 \in N)$，$N^{+} = N-\{0\}$。

二．【12 分】令 $U = \{A \in N^{+} \mid A$ 有穷或 $N^{+}-A$ 有穷 $\}$，

证明：$(U, \cap, \cup, ^{-1}, \phi, N^{+})$为布尔代数。这里 N^{+}为全体正整数之集，A^{-1}定义为 $N^{+}-A$。

三．【14 分】设 G 为具有 $n \geq 2$ 个点的平面图，证明：若 G 同构于它的对偶图，则 G 有 $2n-2$ 条边。

四．【14 分】设 T 和 T'为图 G 的不同的两棵生成树，e 为 T 的边但非 T'的边。令图 T_e 由 T 去边 e 而得。证明：存在 T'的边 e'使 T_e 加上 e'后所得图仍为 G 的生成树。

五．【14 分】设Γ为谓词演算 PK 的有穷公式序列，且φ为 PK 公式，$\Gamma \vdash \varphi$指在 PK 中由Γ可推导出φ。

证明：$\Gamma, \varphi \vdash \psi$当且仅当$\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi$，这里φ，ψ为 PK 公式。

六．【14 分】设 G_1 与 G_2 为 G 的子群，若 G_2 为正规子群且$|G_1|$与$[G:G_2]$互素，则 G_1 为 G_2 的子群。

2007 年

一．用集合定义有序对的方法有很多种，证明下面这种定义也是可行的（即，证明<a,b>=<c,d>当且仅当 a=c 且 b=d）：定义$<x,y>=\{\{\{x\},\Phi\},\{\{y\}\}\}$。（15 分）

二．证明$<Z^6, \odot>$上有且仅有 6 个自同态，并证明其中有且仅有 2 个自同构。其中⊙为模 6 加法运算。（15 分）

三．设 G 为连通图，证明 G 中任意两条最长路径必有公共点。（15 分）

四．对于一阶谓词系统 PK，记 S 为 PK 中的所有公式的集合。在 S 上定义等价关系≈如下：对任意$\alpha, \beta \in S$，令$\alpha \approx \beta$当且仅当$PK \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$。记 $B=\{[\alpha] \mid \alpha \in S$ 上的公式，$[\alpha]$为 S 关于≈的等价类$\}$。在 B 上定义二元关系≼如下，对任意$[\alpha], [\beta] \in B$，令$[\alpha] \preccurlyeq [\beta]$当且仅当 $PK \vdash \alpha \rightarrow \beta$。证明：$< B, \preccurlyeq >$是一个布尔代数。（20 分）

五．有 200 名学生要到一家公司参加面试。面试的流程是，面试者先进入会议室，然后要看一个小时的公司历史展览，然后参加一个小时的面试。会议室于早上 8:00:00 打开，于上午 10:59:59 关闭。面试者必须逐个进入会议室，且只能在每分钟开始的那一个时刻（如 8:00、8:01 等）进入，且当有面试正在举行时，会议室不允许进新成员。只有在会议室关闭后，面试时间才有可能延长。问，这一天最多能有多少学生参加面试。（15 分）

2009年

一．|A|表示 A 中的元素个数，B={x|x∈P(A)且|x|为奇数}，若|A|=n，求|B|。

二．设 f 为 A 到 A 的映射，

(1)、证明若 A 为有限集，f 为 A 到 A 的单射当且仅当 f 是 A 到 A 的满射。

(2)、若 A 为无限集，举例说明上述结论不成立。

三．设图 G，V={<i,j>|i<=m,j<=n,i,j∈N}，m，n 为大于 1 且 m，n∈N，E={(i,j)与仅当有一个元素相同且另一个元素相差 1 的点相连}。证明：G 为哈密顿图。（有误）

四．(G,#),(H,*)为群，对于所有的∀<a,b>,<c,d>∈G×H 有<a,b>⊕<c,d> = <a#c,b*d>。

(1)、证明：(G× H,⊕)为群。

(2)、Z_p、Z_q、Z_{pq} 分别为 p、q 和 pq 阶整数加群，证明：$Z_p \oplus Z_q$ 同构于 Z_{pq} 当且仅当 p 与 q 互素。

五．用一阶谓词系统证明：

所有的北极熊都是白色的，没有棕熊是白色的，所以北极熊不是棕熊。

2010 年

一.S，T 是定义在集合 A 上的关系，T（X）是 X 的传递闭包
（1）S，T 是 A 上的对称关系，证明 S°T 对称当且仅当 S°T=T°S
（2）S，T 是 A 上的关系，证明 T（SUT）=T（T（S）UT（T））
二.G 是奇数阶的 Abel 群，证明 G 中所有元素之积为单位元
三.H 和 K 是群 G 的正规子群，且 H∩K={e}，证明：h∈ H 且 k∈K，有 hk=kh
四.G 的顶点数大于 3，且 u、v 属于 V，u、v 不相邻，且满足 D（u）+D（v）>=n。
证明 G 为 Hamilton 图当且仅当 G+e 为 Hamilton 图，e 为 u、v 新边
五.用一阶谓词逻辑推导证明(∀xA->B)->(∃xA->B),B 与 X 无关。

2011 年

1. R 为 A 上的等价关系，|A|=n，|R|=r，|A/R|=t，证明 $n^2<=rt$

2. σ1=(0 1@1 0)，σ2=(0 –i@i 0)（两个是二阶复数矩阵），证明<G,0>为 8 阶群。0 为矩阵乘法，G 为 σ1、σ2 的任意幂或乘积的集合

3. 证明 6 阶简单连通图 G，在 G 中或其补图中存在 3 阶完全子图

4. 证明任意简单连通图均存在生成树

5. 在命题逻辑中，定义-->*

p	q	p-->*q
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

   证明使用-->和-->*可以表示所有的命题连接词

6. 证明$\neg\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow \exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$

2012 年

1. 设 A 是一集合，s=p(A)-A-空集，
   - 证明（s,包含符号）不含最大元和最小元
   - 求 s 的所有极小元组成的集合和所有极大元组成的集合
   - S 的极小元组成的集合与极大元组成的集合等势

2. G 为群，S 为 G 的子群，证明 S 的左右陪集数目相等

3. 用一元谓词逻辑证明：
   已知：$\forall x(p(x,x) \to (p(x,x) \to p(c,c)))$；　$\exists x p(x,x)$
   结论：p(c,c)

4. S={x1,x2,…,xn}为平面上点的集合，且任意点间距离至少为 1，证明这些点至多有 3n 对距离为 1 的点
   注意(xi,xj)与(xj,xi)是一样的

5. G 是简单无向图，且不含 k4（4 阶完全图），证明|E|<=1/3*(|V|²)，|E|和|V|分别为 G 的边数和顶点数

2013 年

1. t(R)传递闭包，S（R）为对称闭包，r(R)为自反闭包；证明 t(s(r(R)))为等价关系

2. G 为 p^n 阶群，p 为素数，证明 G 存在 p 阶子群　（之前写错了，感谢下面同学改正）

3. （1）证明 3-正则图节点数必为偶数
（2）画出 2 个不同构的 6 阶 3-正则图

4. 证明若 e>(v^2-3v+2)/2，G 连通（e 为边数，V 为点数）

5. 证明：
$\exists x \forall y \varphi(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y)$成立
$\forall x \exists y \varphi(x,y) \longrightarrow \exists y \forall x \varphi(x,y)$不成立