문제 9: 치환적분

(✓)

변수 변경 또는 다른 방법을 통해 다음을 보여라.

$$\int_0^{\infty} \mathrm{f}\big((x^2+1)^{\frac{1}{2}}+x\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(1+t^{-2})\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

주어진 함수 f 에 대해.

따라서, 또는 다른 방법으로, 다음을 보여라.

$$\int_0^{\infty} \big((x^2+1)^{\frac{1}{2}}+x\big)^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\,.$$

1998 논문 I

댓글

'변수 변경에 의해'는 '치환에 의해'와 동일한 의미임을 주목하라.

변수를 변환하여 하나의 적분을 다른 적분으로 변환하려고 할 때 걱정해야 할 두 가지가 있습니다: 적분 함수가 일치해야 하고 한계도 일치해야 합니다. 때때로, 한계가 변수 변환에 대한 단서를 제공합니다. (예를 들어, 원래 적분의 한계가 0과 1이고 변환된 적분의 한계가 0과 $\frac{1}{4}\pi$라면, 명백한 가능성은 치환 t = tan x로 만드는 것입니다.) 여기서 변수의 변화는 적분 함수에 의해 결정되며, 이는 f의 모든 선택에 대해 작동해야 합니다.

아마도 당신은 적분의 무한 상한에 대해 걱정하고 있을 것입니다. 무한 적분에 대한 어떤 엄격한 결과를 증명하려고 한다면, 정의를 사용할 수 있습니다.

$$\int_0^{\infty} \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^{a} \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

하지만 현재의 목적을 위해서는 적분을 수행하고 한계를 넣기만 하면 됩니다. 무한 한계는 일반적으로 문제를 일으키지 않습니다. 예를 들어,

$$\int_1^{\infty}(x^{-2}+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = \big(-x^{-1}-\mathrm{e}^{-x}\big)\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty}-\mathrm{e}^{-\infty}+\frac{1}{1}+\mathrm{e}^{-1} = 1+\mathrm{e}^{-1}\ .$$

$1/\infty = 0$를 쓰는 것을 두려워하지 마세요. 이것은 $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$의 약어로 사용하는 것이 완전히 괜찮습니다. 하지만 ∞/∞, $\infty-\infty$ 와 0/0는 그 모호성 때문에 확실히 괜찮지 않습니다.