Բովանդակություն

## Table of Contents

# Ներածություն

Ժամանակակից կրթական հաստատություններում դասացուցակի ավտոմատ և օպտիմալ կազմումը դարձել է կարևորագույն խնդիրներից մեկը։ Արտակարգ ծանրաբեռնվածության պայմաններում՝ բազմաթիվ դասախոսներ, լսարաններ, ուսումնական խմբեր և դասընթացներ պետք է համակարգվեն այնպես, որ բացառվեն կոնֆլիկտները, իսկ ռեսուրսների բաշխումը լինի արդարացի և արդյունավետ։ Դասացուցակի խնդիրը համարվում է NP-դժվար համակցական օպտիմալացման խնդիր։ Դրա լուծման համար լայնորեն կիրառվում է գրաֆերի մաթեմատիկական ապարատը, որտեղ խնդիրները ձևակերպվում են գույների հատկացումներով։ Գրաֆների գունավորման մոտեցումը հնարավորություն է տալիս պարզ, տրամաբանական և ֆորմալ մոդելով ներկայացնել դասաժամերի բաշխումը, ուսանողական խմբերի և դասախոսների զբաղվածությունը, ինչպես նաև լսարանային ռեսուրսների մրցակցությունը։ Այս դիպլոմային աշխատանքում ուսումնասիրվում են գրաֆների գունավորման ալգորիթմների տեսական հիմքերը և դրանց կիրառումը դասացուցակի կազմման օպտիմալացման մեջ։ Իբրև կիրառական փորձ՝ իրականացվում է Python-ով գրաֆի կառուցում, DSATUR և Greedy ալգորիթմների իրականացում և դրանց համեմատություն իրական դասացուցակի տվյալների հիման վրա։

Աշխատանքը նպատակ ունի

- ստեղծել ուսումնական դասացուցակի գրաֆային մոդել,
- կիրառել գունավորման ալգորիթմներ,
- ստանալ օպտիմալ կամ մոտ-օպտիմալ լուծումներ,
- համեմատել տարբեր ալգորիթմների արդյունավետությունը։

# ԳԼՈՒԽ 1. Գրաֆներ: Հիմնական սահմանումներ և պարզագույն հատկություններ

## 1.1 Գրաֆի սահմանումը, տեսակները և տրման եղանակները

Դիցուք = { $v_1, \ldots, v_n$ }-ը ցանկացած ոչ դատարկ վերջավոր բազմություն է, և դիցուք $V^{(2)}$-ը $V$ բազմության տարրերի բոլոր ոչ կարգավոր զույգերի բազմությունն է: Նշենք, որ $|V^{(2)}|=\binom{n}{2}$: Ենթադրենք, որ $E \subseteq V^{(2)}$:

**Սահմանում 1.1.1:** $(V, E)$ կարգավոր զույգին կանվանենք գրաֆ, և այն կնշանակենք $G$-ով: $G = (V, E)$ գրաֆի $V$ բազմության տարրերին կանվանենք գրաֆի գագաթներ, իսկ $E$ բազմության տարրերին՝ կողեր:

Դիցուք $G = (V, E)$ և $G' = (V', E')$ երկու գրաֆներ են:

**Սահմանում 1.1.2:** $G$ և $G'$ գրաֆները կանվանենք հավասար և կգրենք $G = G'$ այն և միայն այն. դեպքում,երբ $V = V'$, և $E = E'$:

Գրաֆները կարելի է նաև դիտարկել որպես հատուկ տիպի համասեռ բինարհարաբերություն, որի հենքային բազմությունը V-ն է: $\alpha \subseteq \mathrm{V} \times \mathrm{V}$ բինար հարաբերությունը կոչվում է

- ռեֆլեքսիվ, եթե ցանկացած $v \in V$ համար $v\alpha v$,
- անտիռեֆլեքսիվ, եթե ցանկացած $v \in V$ համար $v\alpha v$,
- սիմետրիկ, եթե ցանկացած u, $v \in V$ համար բավարարվում է պայմանը. եթե $u\alpha v$, ապա $v\alpha u$:

Այժմ դիտարկենք գրաֆների տրման եղանակները: Նախ նշենք, որ գրաֆը կարելի է տալ, նշելով նրա գագաթների եւ կողերի բազմությունները:

**Սահմանում 1.1.3:** $G$ գրաֆը կանվանենք նշված, եթե այդ գրաֆի գագաթներին վերագրված են զույգ առ զույգ տարբեր նիշեր:

Գրաֆների տրման եղանակները նկարագրելու համար տանք մի քանի սահմանում:

Դիցուք $G = (V, E)$ -ն գրաֆ է, u, $v \in V$ եւ $e, e' \in E$:

**Սահմանում 1.1.4:** $u$ և $v$ գագաթները կանվանենք հարեւան, եթե $uv \in E$:

**Սահմանում 1.1.5:** $u$ գագաթին և $e$ կողին կանվանենք կից, եթե $u \in e$:

**Սահմանում 1.1.6:** $e$ և $e'$ տարբեր կողերը կանվանենք հարեւան, եթե գոյություն ունի $v \in V$ այնպես, որ $v$ -ն կից է $e$ -ին և $e'$-ին:

Եթե $G = (V, E)$ գրաֆում $V = \{ v_1,..., v_n\}$ եւ $E = \{e_1,..., e_m\}$, ապա այդ գրաֆին համապատասխանեցնենք $n \times n$ կարգի $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$մատրիցը հետեւյալ կերպ.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{եթե } v_i \textit{ և } v_j \textit{ հարևան են} \\ 0, \textit{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$A(G)$ մատրիցը կանվանենք $G$ գրաֆի հարևանության մատրից: Նկատենք, որ ցանկացած $i$-ի համար ($1 \le i \le n$) $a_{ii}$=0,և ցանկացած $i,j$ -ի համար ($1\le i,j \le n$) $a_{ij} = a_{ji}$: $G$ գրաֆի հարեւանության մատրիցը կլինի՝

$$A\,(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Եթե $G = (V, E)$ գրաֆում $V = \{ v_1,..., v_n\}$ և $E = \{e_1,..., e_m\}$, ապա այդ գրաֆին համապատաս-խանեցնենք $n \times m$ կարգի $B(G) = (b_{ij})_{n\times m}$մատրիցը հետևյալ կերպ.

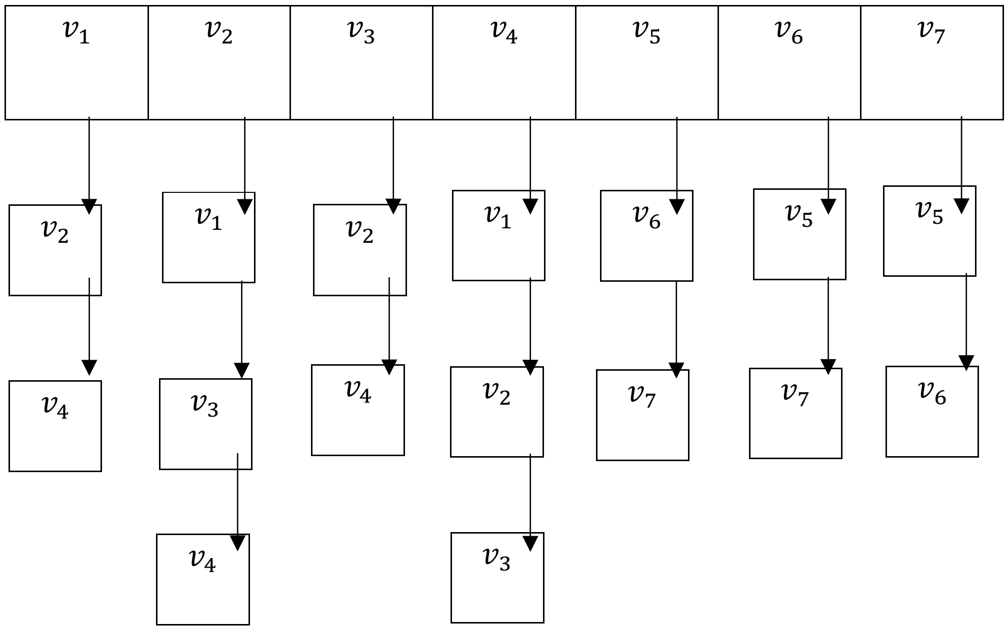
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{եթե } v_i \textit{ և } e_j \textit{ կից են} \\ 0, \textit{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$B(G)$ մատրիցը կանվանենք $G$ գրաֆի կցության մատրից: $G$ գրաֆի կցության մատրիցը կլինի՝

$$A\,(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

որտեղ $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_1v_4, e_5 = v_2v_4, e_6 = v_5v_6,\ e_7 = v_6v_7, e_8 = v_5v_7$

Գրաֆների տրման ևս մեկ եղանակ է գրաֆների գագաթների հարևանության ցուցակների միջոցով ներկայացումը: Եթե $G$ գրաֆում $V = \{ v_1,..., v_n\}$, ապա դիտարկենք n երկարությամբ զանգված, որի $i$-րդ բաղադրիչն իրենից ներկայացնում է $v_i$ գագաթին հարևան գագաթների ցուցակ գրված ինչ-որ մի կարգով: Օրինակ A(G) գրաֆի գագաթների հարևանության ցուցակներով ներկայացումը կլինի՝



## 1.2 Աստիճաններ, ենթագրաֆներ և ճանապարհներ

Դիտարկենք $G = (V, E)$ գրաֆը: $G$ գրաֆը կանվանենք (n, m)- գրաֆ, եթե $|V| = n$ և $|E| = m$: Եթե $S \subseteq V(G)$, ապա կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$N_G(s) = \{u \in V\backslash S\text{: գոյություն ունի } v \in S\text{ որ}, uv \in E\},$$

$$\partial_G(S) = \{uv \in E: u \in S, v \in V\backslash S\}:$$

$G$ գրաֆում $v \in V$ գագաթի շրջակայք ասելով կհասկանանք $N_G(\{v\})$ բազմությունը: Այն կրճատ կնշանակենք $N_G(v)$- ով : Ավելին, $v$ գագաթին կից կողերի բազմությունն՝ $\partial_G(\{v\})$-ն կնշանակենք $\partial_G(v)$-ով:

**Սահմանում 1.2.1:** $G$ գրաֆում $v$ գագաթի աստիճան, որը կնշանակենք $d_G(v)$-ով կամ $d(v)$- ով կանվանենք այդ գագաթին կից կողերի քանակը : Պարզ է դառնում որ $d_G(v)$=$|d_G(v)|$:

$G$ գրաֆում $v$ գագաթը կանվանենք մեկուսացված, եթե $d_G(v) = 0$ և կանվանենք կախված, եթե $d_G(v) = 1$: $G$ գրաֆի համար սահմանենք $\delta(G)$ և $\Delta(G)$ թվերը հետեվյալ կերպ.

$$\delta(G) = min_{v\in V} d_G(v), \Delta(G) = max_{v\in V} d_G(v)$$

$\delta(G)$ – կանվանենք $G$ գրաֆի նվազագույն աստիճան, իսկ $\Delta(G)$- ն՝ առավելագույն աստիճան:

**Թեորեմ 1.2.1 (Լ. Էյլեր)** Կամայական $G = (V, E)$ գրաֆում տեղի ունի՝

$$\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

հավասարությունը:

Իրոք, քանի որ ցանկացած կող կից է երկու գագաթի, ապա $\sum_{v\in V} d_G(v)$ գումարում այդ կողը հաշվվում է երկու անգամ, հետևաբար՝

$$\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

**Հետևանք 1.2.1:** Կամայական $G = (V, E)$ գրաֆում կենտ աստիճան ունեցող գագաթների քանակը զույգ է:

**Սահմանում 1.2.1:** $G$ գրաֆը կանվանենք համասեռ կամ ռեգուլյար, եթե $\delta(G) = \Delta(G)$ կամ որ նույնն է, որ եթե նրանում բոլոր գագաթների աստիճանները միևնույն թիվն է: $G$

գրաֆը կանվանենք $r$ -համասեռ կամ $r$ -ռեգուլյար, եթե $\delta(G) = \Delta(G) = r(r \in \mathbb{Z}_+)$: Թեորեմ 1.2.1-ից անմիջապես հետևում է, որ

**Հետևանք 1.2.2:** Եթե $G$ -ն $r$ -համասեռ $(n, m)$-գրաֆ է, ապա

$$m = \frac{n \cdot r}{2}$$

**Սահմանում 1.2.3:** 3-համասեռ գրաֆներին կանվանենք խորանարդ գրաֆներ: Հետևանք 1.2.1-ից բխում է՝

**Հետևանք 1.2.3:** Խորանարդ գրաֆում գագաթների քանակը զույգ թիվ է:

**Սահմանում 1.2.4:** $G$ գրաֆը կոչվում է լրիվ, եթե նրանում ցանկացած երկու գագաթ հարևան են:

**Սահմանում 1.2.5:** $G = (V, E)$ գրաֆը կանվանենք $r$ -կողմանի ($r \in$ N), եթե $V$ բազմությունը հնարավոր է տրոհել $r$ ենթաբազմությունների այնպես, որ միևնույն ենթաբազմության գագաթները զույգ առ զույգ հարևան չեն: Եթե $r = 2$, ապա $r$ -կողմանի գրաֆը կանվանենք երկկողմանի: Նկատենք, որ եթե $G = (V, E)$ գրաֆը երկկողմանի է, ապա $V$ բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների $V_1$և $V_2$-ի այնպես, որ $G$ գրաֆի ցանկացած կող կից լինի մեկ գագաթի $V_1$-ից և մեկ գագաթի $V_2$-ից:

**Սահմանում 1.2.6:** Եթե $G = (V, E)$երկկողմանի գրաֆում $V_1$ բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր գագաթ միացված է $V_2$ բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր գագաթի, ապա $G$ գրաֆը կանվանենք լրիվ երկկողմանի գրաֆ: Եթե այդ դեպքում $|V_1| = m$ և $|V_2| = n$, ապա կգրենք $G = K_{m,n}$:

**Թեորեմ 1.2.2:** Այն գրաֆների քանակը, որոնց գագաթների բազմությունը $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ -ն է, հավասար է $2^{\binom{n}{2}}$:

**Թեորեմ 1.2.3:** Այն գրաֆների քանակը, որոնց գագաթների բազմությունը $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ –ն է և որոնցում բոլոր գագաթների աստիճանները զույգ թվեր են, հավասար է $2^{\binom{n-1}{2}}$

Դիցուք $G$-ն և $H$ -ը գրաֆներ են:

**Սահմանում 1.2.7:** $H$ գրաֆը կոչվում է $G$ գրաֆի ենթագրաֆ և կգրենք $H \subseteq G$, եթե $V(H) \subseteq V(G)$ և $E(H) \subseteq E(G)$: Հակառակ դեպքում, կգրենք $H \subsetneq G$:

**Սահմանում 1.2.8:** $H$ գրաֆը կոչվում է $G$ գրաֆի կմախքային ենթագրաֆ, եթե $H \subseteq G$ և

$V(H) = V(G)$:

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է և $S \subseteq V(G)$:

**Սահմանում 1.2.9:** $G$ գրաֆի $G\ [S]$ ենթագրաֆը կոչվում է $S$ բազմությամբ ծնված ենթագրաֆ կամ ծնված ենթագրաֆ, եթ $V(G[S]) = S$ և $E(G[S])=\{ uv; u, v \in S$ և $uv \in E(G)\}$:

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է :

**Սահմանում 1.2.10:** $G$ գրաֆի $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k$ գագաթներից և $e_1, \dots e_k$ կողերից կազմված $u_0, e_1\ u_1, \dots\ u_{k-1}, e_k,\ u_k$ հաջորդականության կանվանենք $k$ երկարությամբ $u_0$-ից $u_k$ շրջանցում կամ $k$ $(u_0, u_k)$-շրջանցում , եթե $e_j = u_{i-1}u_i$, երբ $1 \leq i \leq k$: Սահմանված $(u_0, u_k)$-շրջանցումը կրճատ կնշանակենք նրա գագաթների $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k$ հաջորդականությամբ, ենթադրելով, որ յուրաքանչյուր հաջորդ գագաթ հարևան է նախորդին:

**Սահմանում 1.2.11:** $(u_0, u_k)$-շրջանցումը կանվանենք փակ, եթե $u_0 = u_k$:

**Սահմանում 1.2.12:** $G$ գրաֆի $(u_0, u_k)$-շրջանցումը կանվանենք $u_0$-ից $u_k$ ճանապարհ կամ $(u_0, u_k)$-ճանապարհ, եթե $u_0\ u_1$-ը,..., $u_{k-1}u_k$-ն $G$ գրաֆի զույգ առ զույգ տարբեր կողեր են: Եթե $P$ -ն $G$ գրաֆի ճանապարհ է, ապա $|\ P\ |$-ով կնշանակենք այդ ճանապարհի երկարությունը, այսինքն՝ այդ ճանապարհի մեջ առկա կողերի քանակը:

**Սահմանում 1.2.13:** $G$ գրաֆի $((u_0, u_k)$-ճանապարհը կանվանենք պարզ $(u_0, u_k)$-ճանապարհ, եթե նրա մեջ մտնող բոլոր գագաթները զույգ առ զույգ տարբեր են:

**Սահմանում 1.2.14:** $G$ գրաֆի $(u_0, u_k)$-ճանապարհը կանվանենք փակ ճանապարհ կամ ցիկլ, եթե այն փակ շրջանցում է, այսինքն՝ եթե $u_0 = u_k$:

**Սահմանում 1.2.15:** $G$ գրաֆի ցիկլը կանվանենք պարզ, եթե նրանում կրկնվում են միայն առաջին և վերջին գագաթները:

**Սահմանում 1.2.16:** $G$ գրաֆում $u$ և $v$ գագաթների միջև հեռավորությունը կսահմանենք որպես կարճագույն $(u,\ v)$-ճանապարհի երկարություն, եթե $G$ գրաֆում գոյություն ունի առնվազն մեկ $(u, v)$-ճանապարհ, և $+\infty$՝ հակառակ դեպքում: $G$ գրաֆում $u$ և $v$ գագաթների միջև հեռավորությունը կնշանակենք $d_G(u, v)$-ով կամ $d(u, v)$-ով:

1. $G$ գրաֆի ցանկացած $u$ և $v$ գագաթների համար $d_G(u, v) \geq 0$, և $d_G(u, v) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $u = v$ ;
2. $G$ գրաֆի ցանկացած $u$ և $v$ գագաթների համար$d_G(u, v) = d_G(u, v)$;

3. $G$ գրաֆի ցանկացած $u, v$ և $w$ գագաթների համար և $d_G(u,v) \leq d_G(u,w) + d_G(w,v)$

**Լեմմա 1.2.1**: Ենթադրենք, որ $G$ գրաֆում $u$ -ն և $v$ -ն իրարից տարբեր երքու գագաթներ են:

Այդ դեպքում ցանկացած $(u, v)$- շրջանցումից կարելի է առանձնացնել պարզ $(u, v)$ – ճանապարհ:

**Լեմմա 1.2.2**: $G$ գրաֆի ցանկացած կենտ երկարություն ունեցող փակ շրջանցումից կարելի է առանձնացնել կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ:

## 1.3 Կապակցվածության բաղադրիչներ և կապակցված գրաֆներ,

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է:

**Սահմանում 1.3.1:** $G$ գրաֆը կանվանենք կապակցված, եթե նրա ցանկացած երկու $u$ և $v$ գագաթների համար $G$ գրաֆում գոյություն ունի $(u, v)$-ճանապարհ:

Կապակցված գրաֆի օրինակներ են հանդիսանում լրիվ և լրիվ երկկողմանի գրաֆները:

Եթե $G = (V, E)$-ն ցանկացած գրաֆ է, ապա դիտարկենք $V$ բազմության վրա սահմանված $\alpha$ բինար հարաբերությունը, որտեղ ցանկացած $u$, $v \in V$ համար $u\alpha v$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $G$ գրաֆում գոյություն ունի $(u, v)$- ճանապարհ:

Նկատենք, որ $\alpha$ բինար հարաբերությունը բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին.

- ռեֆլեքսիվություն, այսինքն ցանկացած $v \in V$ համար $u\alpha v$,
- սիմետրիկություն, այսինքն ցանկացած $u$, $v \in V$ համար, եթե $u\alpha v$, ապա $v\alpha u$,
- տրանզիտիվություն, այսինքն ցանկացած $u, v, w \in V$ համար, եթե $u\alpha v$ և $v\alpha w$ ապա $u\alpha w$:

Դիտարկենք $G$ գրաֆի $G_j = G[V_j]$ ենթագրաֆները, $1 \leq j \leq p$: $G$ գրաֆի $G_1, \dots, G_p$ ենթագրաֆներն ընդունված է անվանել $G$ գրաֆի կապակցվածություն կամ կապակցված բաղադրիչներ

**Դիտողություն 1.3.1:** $G$ գրաֆը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունի կապակցվածության մեկ բաղադրիչ

**Դիտողություն 1.3.2:** Կամայական $G$ գրաֆում գոյություն ունի ամենաերկար ճանապարհ:

Եթե $G = (V, E)$-ն կապակցված $(n, m)$-գրաֆ է, ապա $cyc(G) = m - n + 1$ թիվը կանվանենք $G$ գրաֆի ցիկլոմատիկ թիվ: Ստորև կապացուցենք կապակցված գրաֆների ցիկլոմատիկ թվին առնչվող մեկ թեորեմ:

**Թեորեմ 1.3.1:** Կապակցված $G = (V, E)$ գրաֆի համար $cyc(G) \geq 0$ : Ավելին,

1. $cyc(G) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $G$ գրաֆում ցիկլ չկա,
2. $cyc(G) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $G$ գրաֆում կա ճիշտ մեկ ցիկլ:

## 1.4 Երկկողմանի գրաֆներ և ծառեր

$G = (V, E)$ գրաֆն անվանեցինք երկկողմանի, եթե $V$ բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների $V_1$ և $V_2$-ի այնպես, որ $G$ գրաֆի ցանկացած կող կից է մեկ գագաթի $V_1$ -ից և մեկ գագաթի$V_2$-ից:

**Թեորեմ 1.4.1(Դ. Քյոնինգ):** Որպեսզի $G = (V, E)$ գրաֆը լինի երկկողմանի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն չպարունակի կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ:

Դիցուք $G$ -ն գրաֆ է: $G$ գրաֆի կցության $B(\mathrm{G})$ մատրիցը կանվանենք տոտալ ունիմոդուլյար մատրից, եթե այդ մատրիցի յուրաքանչյուր քառակուսային ենթամատրիցի որոշիչը հավասար է 0, 1 կամ − 1-ի: Այժմ տանք երկկողմանի գրաֆների մեկ այլ նկարագրում:

**Թեորեմ 1.4.2:** Որպեսզի $G = (V, E)$գրաֆը լինի երկկողմանի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կցության $B(\mathrm{G})$ մատրիցը լինի տոտալ ունիմոդուլյար:

**Թեորեմ 1.4.3(Պ. Էրդյոշ):** Կամայական $G$ գրաֆ պարունակում է կմախքային երկկողմանի $H$ ենթագրաֆ, որում$|E(H)| \geq \frac{|E(G)|}{2}$:

**Սահմանում 1.4.1:** Ցիկլ չպարունակող կապակցված գրաֆը կանվանենք ծառ:

**Սահմանում 1.4.2:** Ցիկլ չպարունակող գրաֆը կանվանենք անտառ:

Նկատենք, որ անտառն այնպիսի գրաֆ է, որի կապակցվածության բոլոր բաղադրիչներն իրենցից ներկայացնում են ծառեր: Ավելին, կամայական անտառ երկկողմանի գրաֆ է:

**Թեորեմ 1.4.4:** $G = (V, E)$ $(n, m)$ -գրաֆի համար հետևյալ պայմանները իրար համարժեք են.

1. $G$ -ն ծառ է,
2. $G$ գրաֆում ցանկացած երկու գագաթ միացված են ճիշտ մեկ ճանապարհով,
3. $G$ -ն կապակցված է և $m = n - 1$,
4. $G$ -ն չունի ցիկլ և $m = n - 1$,

$G$ -ն չունի ցիկլ և $G$ -ի ցանկացած երկու ոչ հարևան $u$ և $v$ գագաթների համար $G$+ $uv$ գրաֆն ունի ճիշտ մեկ ցիկլ:

**Հետևանք 1.4.1:** Եթե $T$ = $(V, E)$ ն ծառ է, որում | $V$ | ≥ 2, ապա T-ն պարունակում է առնվազն երկու կախված գագաթ:

**Թեորեմ 1.4.5:** Դիցուք $T$ -ն ծառ է, որում | $E(T)$ | = $k$, և $G = (V, E)$-ն գրաֆ է, որում $\delta(G) \geq k$: Այդ դեպքում $G$ գրաֆը պարունակում է $T$ ծառին իզոմորֆ ենթագրաֆ:

**Թեորեմ 1.4.6 (Կեյլի):** $\{ 1,2, \dots, n \}$ բազմությունը որպես գագաթների բազմություն ունեցող ծառերի քանակը հավասար է $n^{n-2}$:

**Թեորեմ 1.4.7:** Եթե $G$ -ն կապակցված գրաֆ է, ապա այն պարունակում է կմախքային ծառ (ծառ հանդիսացող կմախքային ենթագրաֆ):

**Թեորեմ 1.4.8 (Կիրխհոֆ):** Ցանկացած կապակցված $G$ գրաֆի համար նրա լապլասյանի բոլոր հանրահաշվական լրացումները իրար հավասար են և նրանց ընդհանուր արժեքը հավասար է $G$ գրաֆի կմախքային ծառերի քանակին:

**Թեորեմ 1.4.9 (Ժորդան):** Ցանկացած ծառի կենտրոնը բաղկացած է ոչ ավելի քան երկու գագաթից:

# ԳԼՈՒԽ 2. Գրաֆների ներկումներ

## 2.1 Գրաֆների գագաթային ներկումներ

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է:

**Սահմանում 2.1.1:** $G$ գրաֆի գագաթային $k$ -ներկում կոչվում է $\alpha: V(G) \to \{1, \dots, k\}$ արտապատկերումը, իսկ՝ $1, \dots, k$ թվերը կոչվում են գույներ:

**Սահմանում 2.1.2:** $G$ գրաֆի$\alpha$գագաթային $k$-ներկումը կոչվում է ճիշտ գագաթային$k$-ներկում, եթե ցանկացած $uv \in E(G$ի համար ստույգ է $\alpha(u) \neq \alpha(v$ պայմանը: Այլ կերպ ասած, ճիշտ գագաթային ներկումն այնպիսի ներկում է, որի դեպքում հարևան գագաթները ներկվում են տարբեր գույներով:

**Սահմանում 2.1.3:** $G$ գրաֆը կոչվում է $k$ -ներկելի, եթե գոյություն ունի $G$ գրաֆի ճիշտ գագաթային $k$ -ներկում: Այն նվազագույն $k$ -ն, որի դեպքում $G$ -ն $k$ -ներկելի է, կոչվում է $G$ գրաֆի քրոմատիկ թիվ: $k$ $\chi(G)$-ով նշանակենք $G$ գրաֆի քրոմատիկ թիվը:

Նկատենք, որ $\chi(G)1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $G$ գրաֆի բոլոր գագաթները մեկուսացված են և $\chi(G)$= 2 այն և միայն այն դեպքում, երբ $G$ -ն առնվազն մեկ կող ունեցող երկկողմանի գրաֆ է: Քանի որ կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլը, ըստ թեորեմ 1.4.1-ի, չի հանդիսանում երկկողմանի գրաֆ, ուստի այն ճիշտ ներկելու համար անհրաժեշտ է առնվազն երեք գույն: Մյուս կողմից հեշտ է կառուցել կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլի ճիշտ գագաթային 3-ներկում: Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալը. ցանկացած $n \geq 3$ -ի համար տեղի ունի

$$\chi^{(C_n)} = \begin{cases} 2, \textit{եթէ} n - \textit{ը զույգ է} \\ 3, \textit{եթէ} n - \textit{ը կենտ է} \end{cases}$$

հավասարությունը:

Այժմ դիտարկենք լրիվ գրաֆները: Քանի որ $K_n$ լրիվ գրաֆի ցանկացած երկու գագաթ հարևան են, ապա $\chi^{(K_n)} = n$:

**Սահմանում 2.1.4:** $G$ գրաֆի $\omega(G)$ խտությունը այն ամենամեծ $n$ թիվն է, որի համար $G$ գրաֆն ունի $n$ գագաթ ունեցող լրիվ ենթագրաֆ:

**Թեորեմ 2.1.1:** Ցանկացած $G$ գրաֆի համար տեղի ունի

$$\omega(G) \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$$

անհավասարությունը:

Ապացույց: Քանի որ $G$ -ն պարունակում է $\omega(G)$ գագաթ ունեցող լրիվ ենթագրաֆ, ուստի այդ ենթագրաֆի գագաթները պետք է ներկվեն տարբեր գույներով և, հետևաբար, $\chi(G) \ge \omega(G)$:

**Հիպոթեզ(Ռիդ):** Ցանկացած $G$ գրաֆի համար տեղի ունի

$$\chi(G) \le \left\lceil \frac{\boldsymbol{\omega(G) + \Delta(G) + 1}}{\mathbf{2}} \right\rceil$$

անհավասարությունը:

**Թեորեմ 2.1.2:** Ցանկացած $G$ գրաֆի համար տեղի ունի

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \le \chi(G) \le |V(G)| - \alpha(G) + 1$$

անհավասարությունը:

Ապացույց: Դիտարկենք $G$ գրաֆի որևէ ճիշտ գագաթային $\chi(G)$ներկում: Պարզ է, որ

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{\chi(G)} \text{ և } V_i \cap V_j = \varnothing, \text{ երբ } 1 \le i \ne j \le \chi(G),$$

որտեղ $V_i$-ն $i$-րդ գույնով ներկված գագաթների բազմությունն է ($1 \le i \le \chi(G)$): Քանի որ ներկումը ճիշտ գագաթային $\chi(G)$-ներկում է, ուստի յուրաքանչյուր $i$-ի համար $V_i$-ն անկախ բազմություն է ($1 \le i \le \chi(G)$): Հետևաբար, ցանկացած $i$-ի համար ($1 \le i \le \chi(G)$) ստույգ է$|V_i| \le \alpha(G)$անհավասարությունը: Այսպիսով,

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \le \chi(G) \cdot \alpha(G)$$

ուստի $\chi(G) \ge \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$:

Ներկման պարզագույն ալգորիթմ

Վերցնենքն $G$ գրաֆը և նրա գագաթների $v_1, v_2, \dots, v_n$հաջորդականությունը: Հերթով ներկենք $G$ գրաֆի $v_1, v_2, \dots, v_n$գագաթները, վերագրելով $v_i$ գագաթին այն ամենափոքր գույնը, որը չի մասնակցում այդ գագաթին հարևան ներկված գագաթների վրա:

Ալգորիթմի նկարագրությունից հետևում է, որ նրա աշխատանքի արդյունքում ստացվում է $G$ գրաֆի ճիշտ գագաթային ներկում: Ավելին, նկատենք, որ կիրառելով այս ալգորիթմը ցանկացած $G$ գրաֆի և նրա գագաթների որևէ հաջորդականության համար, հեշտ է ստանալ թեորեմ 2.1.1-ում բերված $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$գնահատականը: Իրոք, քանի որ $G$ գրաֆի գագաթների հաջորդականության մեջ ցանկացած գագաթ ունի ամենաշատը $\leq \Delta(G)$ հատ ներկված հարևան գագաթներ, ապա ներկման պարզագույն ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում օգտագործվող գույների քանակը մեծ չէ $(\Delta(G) + 1$-ից:

**Թեորեմ 2.1.3:** Եթե $G$ -ն միջակայքերի գրաֆ է, ապա $\chi(G) = \omega(G)$:

Ապացույց: Քանի որ $G$ -ն միջակայքերի գրաֆ է, ապա իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմության վրա գոյություն ունի $\mathfrak{F} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$փակ հատվածների ընտանիք, որի հատումների $\mathbb{R}\ \Omega$ $(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$ գրաֆը $G$ -ն է:

**Թեորեմ 2.1.4:** Եթե $G$ -ն գրաֆ է, որի աստիճանային հավաքածուն $d = (d_1, \dots, d_n) -$ ն է, որտեղ $d_1 \geq \dots \geq d_n$, ապա$\chi(G) \leq 1 + max_{1\leq i\leq n}\min\{d_i, i-1\}$:

**Սահմանում 2.1.5:** Եթե $G$ գրաֆի համար տեղի ունի $\chi(G) = k$ հավասարությունը, ապա $G$ գրաֆը կոչվում է $k$ -քրոմատիկ գրաֆ:

**Սահմանում 2.1.6:** Եթե $k$ գրաֆի համար տեղի ունի $\chi(G) = k$ հավասարությունը, սակայն $G$ գրաֆի $G$ -ից տարբեր ցանկացած $H$ ենթագրաֆի համար տեղի ունի $\chi(H) < k$ անհավասարությունը, ապա $G$ գրաֆը կոչվում է $k$ -կրիտիկական գրաֆ:

**Թեորեմ 2.1.5:** Ցանկացած $G$ գրաֆի համար տեղի ունի

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{H\subseteq G} \delta(H)$$

անհավասարությունը:

**Թեորեմ 2.1.6(Բրուքս):** Եթե $G$ -ն կապակցված գրաֆ է, որը լրիվ գրաֆ կամ կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ չէ, ապա տեղի ունի $\chi(G) \leq \Delta(G)$ անհավասարությունը:

**Հատկություն 1:** $G'$ գրաֆի ցանկացած ճիշտ գագաթային$\Delta(G)$-ներկման դեպքում $v$ գագաթի հարևան գագաթների գույները զույգ առ զույգ տարբեր են:

**Հատկություն 2:** $v_i$ և $v_j$ գագաթները պատկանում են $G_{ij}$ գրաֆի միևնույն կապակցված բաղադրիչին. $(1 \leq i \neq j \leq \Delta)$:

**Հատկություն 3:** $C_{ij}$ -ն $v_i$ և $v_j$ գագաթները միացնող պարզ ճանապարհ է ($1 \leq i \neq j \leq \Delta$):

**Հատկություն 4:** $C_{ij}$ և $C_{ik}$ պարզ ճանապարհներն ունեն միայն $v_i$ ընդհանուր գագաթ ($i, j, k = 1,2, \dots, \Delta, i \neq j \neq k \neq i$)

Դիցուք $G$ -ն գրաֆ է և $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$: Սահմանենք $G$ գրաֆի Միցելսկու $\mu(G)$գրաֆը հետևյալ կերպ. $V(\mu(G)) = \{\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{w\}$

**Թեորեմ 2.1.7:** Եթե $G$ -ն եռանկյուն չպարունակող $k$-քրոմատիկ գրաֆ է, ապա $\mu(G)$-ն եռանկյուն չպարունակող $(k+1)$-քրոմատիկ գրաֆ է:

**Թեորեմ 2.1.8:** $n$ գագաթ ունեցող ցանկացած $G$ գրաֆի և նրա $\overline{G}$ լրացման համար տեղի ունեն

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

$$n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

անհավասարությունները:

**Թեորեմ 2.1.9(Ա. Կորշունով):** $n$ գագաթ ունեցող համարյա բոլոր $G$ գրաֆների համար տեղի ունի

$$\chi(G) \sim \frac{n}{2\log_2 n}$$

առնչությունը:

## 2.2. Գրաֆների կողային ներկումներ

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է:

**Սահմանում 2.2.1:** $G$ գրաֆի կողային $k$ -ներկում կոչվում է $\alpha: E(G) \to \{1, \dots, k\}$ արտապատկերումը, իսկ՝ $1, \dots, k$ թվերը կոչվում են գույներ:

**Սահմանում 2.2.2:** $G$ գրաֆի $\alpha$ կողային $k$ -ներկումը կոչվում է ճիշտ կողային $k$ -ներկում, եթե ցանկացած $e$, $e' \in E(G)$ հարևան կողերի համար ստույգ է $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ պայմանը: Այլ կերպ ասած, ճիշտ կողային ներկումն այնպիսի ներկում է, որի դեպքում հարևան կողերը ներկվում են տարբեր գույներով:

**Սահմանում 2.2.3:** $G$ գրաֆը կոչվում է կողային $k$ -ներկելի, եթե գոյություն ունի $G$ գրաֆի ճիշտ կողային $k$ -ներկում: Այն նվազագույն $k$ -ն, որի դեպքում $G$ -ն կողային $k$ -

ներկելի է կոչվում է $G$ գրաֆի քրոմատիկ ինդեքս: $\chi'(G)$-ով նշանակենք $G$ գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսը:

Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած $G$ գրաֆի համար տեղի ունի $\chi'(G) = \chi(L(G))$ հավասարությունը: Այստեղից, հաշվի առնելով $\Delta(L(G)) \leq 2(\Delta(G) - 1)$ անհավասարությունը և համաձայն թեորեմ 2.1.1-ի, ստանում ենք հետևյալը.

$$\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big) \leq \Delta\big(L(G)\big) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1:$$

Այս վերին գնահատականը հասանելի է պարզ ցիկլերի դեպքում: Իրոք, քանի որ $L(C_n) \cong C_n$ , երբ $n \geq 3$, ուստի $\chi'(C_n) = \chi(C_n)$: Այսպիսով, ստանում ենք, որ ցանկացած $n \geq 3$ -ի համար տեղի ունի

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, \text{եթե } n - \text{ը զույգ է} \\ 3 \text{ եթե } n - \text{ը կենտ է} \end{cases}$$

հավասարությունը:

Պարզվում է, քրոմատիկ ինդեքսի ճշգրիտ արժեքը հայտնի է նաև երկկողմանի և լրիվ գրաֆների դեպքում:

**Թեորեմ 2.2.1 (Դ.Քյոնիգ):** Եթե $G$ -ն երկկողմանի գրաֆ է, ապա $\chi'(G) = \Delta(G)$ :

**Թեորեմ 2.2.2 (Վ.Վիզինգ):** Ցանկացած $n \geq 2$ -ի համար տեղի ունի

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n - 1, \text{եթե } n - \text{ը զույգ է} \\ n \text{ եթե } n - \text{ը կենտ է} \end{cases}$$

հավասարությունը:

**Թեորեմ 2.2.3 (Վ.Վիզինգ):** Կամայական $G$ գրաֆի համար տեղի ունի

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

անհավասարությունը:

Թեորեմ 2.2.2-ը ցույց է տալիս, որ թեորեմ 2.2.3-ի գնահատականները հնարավոր չէ լավացնել:

Վիզինգի թեորեմը հնարավորություն է տալիս բոլոր գրաֆների բազմությունը տրոհել երկու ենթաբազմությունների:

**Սահմանում 2.2.4:** $G$ գրաֆը կոչվում է առաջին դասի գրաֆ, եթե $\chi'(G) = \Delta(G)$, հակառակ դեպքում՝ երկրորդ դասի գրաֆ:

**Թեորեմ 2.2.4:** Եթե $P$ -ն Պետերսենի գրաֆ է, ապա $\chi'(P) = 4$:

**Թեորեմ 2.2.5 (Վ.Վիզինգ):** Եթե $G$ -ն $r$ -համասեռ ($r \in \mathbb{N}$) գրաֆ է և $|V(G)|$ն կենտ է, ապա $\chi'(G) = r + 1$ :

**Սահմանում 2.2.5:** $G$ գրաֆը կոչվում է գերլցված, եթե $|E(G)| > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \Delta(G)$ :

Նկատենք, որ գերլցված գրաֆները ունեն կենտ քանակությամբ գագաթներ և երկրորդ դասից են:

**Հիպոթեզ 2.2.1:** Դիցուք $G$ -ն $n$ գագաթ պարունակող գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) \geq \frac{n}{3}$ :

Այդ դեպքում $G$ -ն երկրորդ դասից է այն և միայն այն դեպքում, երբ $G$ -ն ունի $H$ գերլցված ենթագրաֆ, որի համար $\Delta(H) = \Delta(G)$:

Նշենք նաև առանց ապացույցի, որ հայտնի է համարյա բոլոր գրաֆների քրոմատիկ ինդեքսի արժեքը:

**Թեորեմ 2.2.6 (Պ. Էրդյոշ, Ռ. Վիլսոն):** Համարյա բոլոր գրաֆները առաջին դասից են:

**Հիպոթեզ 2.2.2 (Վ. Վիզինգ):** Եթե $G$ -ն հարթ գրաֆ է, որի համար $6 \leq \Delta(G) \leq 7$, ապա $\chi'(G) = \Delta(G)$:

Այս հիպոթեզի $\Delta(G) = 7$ դեպքը հաստատվել է 2000 թվականին Ժանգի կողմից, իսկ $\Delta(G) = 6$ դեպքը մնում է բաց:

**Թեորեմ 2.2.7 (Վ.Վիզինգ):** Եթե $G$ -ն հարթ գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) \geq 10$, ապա $\chi'(G) = \Delta(G)$:

Այս պարագրաֆի վերջում նշենք նաև, որ հատուկ հետքրքրություն է ներկայացնում մուլտիգրաֆների քրոմատիկ ինդեքս գտնելու խնդիրը:

## 2.3. Գրաֆների տոտալ ներկումներ