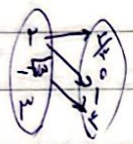
sabject: فصل ۳ date:

منطق غیرصوری محمولات

Relation / predicate: محمول



$R_1 = \{(2, \frac{2}{3}), (2,1), (-\sqrt{5}, 4)\} \subseteq A \times B$

$R_2 \subseteq A \times A = A^2$ رابطه‌ی ۲ تایی روی A

$\longrightarrow R \subseteq A^n$ یک رابطه‌ی n تایی روی A

$$| = \left\{ \begin{array}{l} (1,1)(1,2)(1,3)\ldots \\ (2,2)(2,4)(2,6)\ldots \\ (3,3)(3,6)(3,9)\ldots \\ \vdots \end{array} \right\} \subseteq N^2 \qquad x|y \longleftrightarrow (\exists k)(y=kx)$$

$E \subseteq N^1 \quad E = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\} \quad E(x)$ رابطه‌ی یک مکانی

۰ عددی زوج است (عبارت معادل): $0 \in E \longleftrightarrow E(0)$ برقرار است

$R_1(2, \frac{2}{3}) \longrightarrow (2, \frac{2}{3}) \in R_1$

$\underline{\iota} \quad 2 R_1 \frac{2}{3}$

$k \subseteq N^1$ رابطه‌ی یک مکانی روی مجموعه اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم.

$k(x_0)$ آیا $k(x_0)$ برقرار است؟ در حال حاضر نمی‌دانیم چون k را نداریم.

$\mathcal{M} : \exists x \quad x+1=0$ (f, c, R, c)

$\hookrightarrow R(f(x, c_1), c_2)$

حال اگر داشته باشیم: ① $\exists x \ R(f(x,c_1), c_2)$

② $(N, R^I := 0, f^I : + : D^2 \longrightarrow D, c_1^I : 1 \in D, c_2^I : 0 \in D)$

$R^I \subseteq N^2$

حال از ① و ② داریم: $(\exists x \in N)(x+1=0)$

حال می‌توانیم بگوییم این عبارت درست نیست.

subject: date:

$\forall x R(f(x,c_1),c_2) \longrightarrow \exists x R(f(x,c_1),c_2)$ این عبارت درست است.

منطقاً معتبر است (logically valid)

$$\underbrace{[\exists x R(f(x,c_1),c_2)]}_{p} \longrightarrow \vee \neg \underbrace{[\exists x R(f(x,c_1),c_2)]}_{\neg p}$$

صورتی جانشین شده‌ی راستگوی گزاره ای (راستگوی معمولی)

زبان:

universal

$$L. \begin{cases} x_1, x_2, \dots \longrightarrow \text{متغیر دسته} \quad f_1^1, f_2^1, \dots \\ \wedge, \vee, \neg, \longrightarrow, (\,,\,) \\ \forall, \exists, \quad R_1^1, R_2^1, R_3^1, \dots \quad c_1, c_2, \dots \\ R_1^2, R_2^2, R_3^2, \dots \end{cases}$$

مشترک بین تمام زبان های local

local

$$L_{\mathbb{N}} = \begin{cases} x_1, x_2, \dots, \vee, \wedge, \neg, \longrightarrow, (\,,\,), \forall, \exists \\ R_1^2, c_1, f_1^2, f_2^2, f_1^1 \end{cases}$$

R_1^2: تساوی

c_1: عضو ابتدای اعداد طبیعی.

f_1^2: جمع

f_2^2: ضرب

$f_1^1 \longrightarrow s(x) = x+1$

مدل: درستی یا غلطی آن را می‌توان مشخص کرد.

فرض کنیم داریم: $\forall x\,(0 \leq x^2+2) \longrightarrow$ این رابطه روی اعداد طبیعی برقرار است.

تعبیر

$\longrightarrow \forall x: R_1^2(c_1, f_1^2(f_2^2(x,x), f_1^1(f_1^1(c_1)))) \longrightarrow$ مدل

$\longrightarrow \leq(0, +(\times(x,x), \underbrace{s(\underbrace{s(0)}_{1})}_{2})) \longrightarrow$ successor

subject: date:

Definition of term:

یک ترم به صورت استقرایی به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۱) هر نماد ثابت و هر متغیر صوری یک ترم است.

(۲) اگر f^n یک نماد عملی n مکانی باشد و $t_1 \dots t_n$ ترم باشند در این صورت $f^n(t_1, \dots t_n)$ یک ترم است.

(۳) f_1^2 ترم نیست چون تابع ۲ مکانی یک ورودی گرفته است.

تعریف فرمول صوری (مرتبه اول):

فرض کنید ما یک زبان مرتبه اول باشد. یک فرمول از زبان L به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) اگر R^n یک نماد محمولی n مکانی باشد و $t_1 \dots t_n$ ترم باشند در این صورت $R^n(t_1 \dots t_n)$ یک فرمول اتمی است.

$0 \leqslant \underbrace{x^2+2}_{term}$

$\leqslant (t_1, t_2)$

(۲) اگر φ و ψ فرمول های صوری باشند در این صورت $\varphi \to \psi$ و $\varphi \vee \psi$ و $\varphi \wedge \psi$ ، $\neg\varphi$ فرمول اند.

$(0 \leqslant x^2+2) \wedge (x+4 > x+5)$

(۳) اگر φ یک فرمول صوری باشد $\exists x \varphi$ و $\forall x \varphi$ یک فرمول است.

$\exists x \forall y \left[\underbrace{\sqrt{x}+2 = \text{Arctan}(x)}_{\varphi}\right]$

تاثیری ندارند!

$\forall x (x^2+3=\sqrt{x}) \longrightarrow$ bounded variable (متغیر پایبند)

$\forall x (y^2+3=0) \longrightarrow$ free variable

جانشانی ترم به جای متغیرهای پایبند تنها در صورتی مجاز است که یک متغیر جدید باشد. $x \longrightarrow y$

به جای متغیرهای آزاد می‌توان ترم جانشین کرد به شرط آنکه آزاد تبدیل به پایبند نشود.

subject: date:

تعریف تعبیر: فرض کنید L یک زبان محمولی باشد، در این صورت یک تعبیر I از L به صورت زیر تعریف می شود.

برای هر نماد ثابت — برای هر نماد محمولی n مکانی

$I = (D_I ,\ c \in L \quad c^I \in D_I ,\ L$ در زبان $R^n : (R^n)^I \subseteq D_I^n$

$, \quad f^n : (f^n)^I : D_I^n \longrightarrow D_I$

برای هر تابع n مکانی در L

example: $L_1 = \{c_1, c_2, f_1^1, f_1^2, R_1^2\}$

یک تعبیر از زبان L_1: $I = (D_I = \mathbb{Z},\ c_1^I = -5,\ c_2^I = 1 \in \mathbb{Z},\ (f_1^1)^I : s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$

$\boxed{s(n) = n+1}$

$\varphi(y) = \forall x \ (y^2 - 5) \mid 1 + (x^2-5)^2$

به جای x می توانیم z بگذاریم چون متغیر ~~[illegible]~~ پابند است.

آخری مهم است متغیر آزاد است

$\forall y \varphi(y) = \forall y \ (\forall x \ (y^2-5) \mid 1 + (x^2-5)^2))$

متغیر آزاد مثل متغیری رفتار می کند که روی آن سور عمومی قرار گرفته است.

تعریف ۲.۰.۳: فرض کنید φ یک فرمول محمولی از زبان L و I تعبیری برای L باشد. ~~[illegible]~~ در تعبیر یک مقداردهی υ از I، در فرمول φ ~~[illegible]~~ را به صورت استقرایی به شکل زیر تعریف می کنیم:

$R^n(t_1 \ldots t_n)$

L → فرمول: $\begin{cases} R^n(t_1 \ldots t_n) \\ \varphi \wedge \varphi \\ \forall x \varphi \end{cases}$

L → تعبیر

$\upsilon : \mathrm{Term} \longrightarrow D_I$

$\upsilon(x) \in D_I$

$\upsilon(c) \in D_I = c^I$

$\upsilon(f^n(t_1 \ldots t_n)) = (f^n)^I \ (\upsilon(t_1) \ldots \upsilon(t_n))$

exp: $L_N = \{c_1, f_1^1, f_1^2, f_2^2, R_1^2\} \longrightarrow I = \{N, 1, s, +, \times, <\}$

subject: date:

$$\upsilon(\underbrace{f_1^2(f_1^1(c_1)}_{t_1},\underbrace{f_2^2(x,y)}_{t_2})) \longrightarrow \upsilon(t_1)+\upsilon(t_2)$$

$$\bullet\ (f_1^1)^I + (c_1^I) + (f_2^2)^I(\upsilon(x),\upsilon(y))$$

$$\hookrightarrow s(1) + \upsilon(x) \times \upsilon(y)$$

تعریف ۲۰.۳: صدق پذیری . هر مقدار دهی υ روی I در φ صدق کند! $I \longmapsto \varphi \longrightarrow$

$L_N = \{c_1, f_1^1, f_1^2, f_2^2, R_1^2\}$ ← فرمول $\varphi : \exists x\ R_1^2(f_1^1(c_1), f_2^2(x,y))$

← تعبیر

$$I = \begin{bmatrix} D_I = \mathbb{N},\ c_1^I : 1 \in N,\ (f_1^1)^I : s : N \to N \\ ,(R_1^2)^I \subseteq N^2,\ (f_1^2)^I = + : N^2 \to N \\ (f_2^2)^I = \times : N^2 \to N \end{bmatrix}$$

نکته‌ی مهم مقدار دهی مقداری است که به متغیرها می دهیم. به constant symbol ما کاری نداریم.

$\rightsquigarrow \upsilon : Terms \longrightarrow D_I$

1) $\upsilon(x) \in D_I$

2) $\upsilon(c) \in c^I$

3) $\upsilon(f^n(t_1 \dots t_n)) = (f^n)^I(\upsilon(t_1) \dots \upsilon(t_n))$

υ در $\forall x\ \underbrace{\varphi(x)}$ صدق می کند اگر و تنها اگر به ازای هر υ' که x-هم ارز υ است، υ' در $\varphi(x)$ صدق کند.

فرض کنید L یک زبان صوری است. I تعبیری از L باشد و υ یک مقدار دهی روی I. صدق مقدار دهی υ در φ به صورت استقرایی به شکل زیر تعریف می شود:

(۱) υ در $R^n(t_1 \dots t_n)$ صدق می کند $(R^n)^I(\upsilon(t_1) \dots \upsilon(t_n))$ برقرار باشد.

(۲) υ در $\neg A$ صدق می کند اگر در A صدق نکند.

(۳) υ در $A \wedge B$ صدق می کند اگر هم در A و هم در B صدق کند.

(۴) υ در $\forall x A$ صدق می کند اگر به ازای هر υ' که x- هم ارز با υ است، υ' در A صدق کند.

(۵) υ در $\exists x A$ صدق می کند اگر υ' x هم ارز υ وجود داشته باشد که در A صدق کند.

Scanned with CamScanner

exp: $L=\{c_1, R_1^2, f_1^1, f_1^2\}$ $I=(\mathbb{Z}, -1, =, x^2, x_1^2+x_2^2)$

$$R_1^2(f_1^2(c_1,x), f_1^1(y))$$

	x	y	$\mathbb{Z}$
v	2	-5	

$$v(f_1^2(c_1,x)) = (f_1^2)^I(\underbrace{v(c_1)}_{c^I=-1}, \underbrace{v(x)}_{2}) = (-1)^2+2^2=5$$

$$v(f_1^1(y)) = (f_1^1)^I(\underbrace{v(y)}_{-5}) = (-5)^2 = 25$$

$R_1^2(v(t_1), v(t_2)) = 5 = 25$ ✗   پس v در این مدل صدق نمی‌کند!

آیا جانشانی $t=f_1^2(x_1,x_3)$ به جای x_1 مجاز است؟

$$\underbrace{\forall x_2\ R_1^1(f_1^1(x_2))}_{\text{در اینجا مجاز است}} \longrightarrow \underbrace{\forall x_3\ R_1^3(x_1,x_2,x_3)}_{\text{به این پوزیشن توجه می‌کنیم.}}$$

پس این جانشانی مجاز نیست

نکته: روی پارامترها نمی‌توانیم ترم جانشین کنیم، فقط متغیر! فقط می‌توانیم متغیر جانشین کنیم.

حکم ۲۳.۳: فرض کنید $A(x_i)$ فرمولی از L باشد که x_i در آن آزاد است و فرض کنید t ترمی باشد که جانشانی آن به جای x_i در $A(x_i)$ مجاز است. فرض کنید v یک مقداردهی و v' یک مقداردهی x_i-هم ارز با v باشد بطوری که $v(t)=v'(x_i)$.
در این صورت v در $A(t)$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر v' در $A(x_i)$ صدق کند.

$A(x) = \forall y\ R_1^2(x,y)$ —— $L=\{c_1, f_1^2, R_1^2, \dots\}$

and we have $t = f_1^2(x, c_1)$

replace: $\overset{A(t)}{A(t/x)} \overset{t\ \text{به جای}\ x}{=} \forall y\ R_1^2(f_1^2(x,c_1), y)$

$$v'(x) = v(f_1^2(x,c_1)) = (f_1^2)^I(v(x), c_1^I) \in D_I$$

subject: date:

حکم ۳.۲۶: اگر در یک تعبیر خاص مانند I ، فرمول های A و $A \to B$ درست باشند
یعنی $I \models A$ و $I \models A \to B$ آنگاه B هم درست است یعنی $I \models B$

حکم ۳.۲۷: فرض کنید A فرمولی از L و I تعبیری دلخواه از L باشند. در این صورت $I \models A$ اگر و تنها اگر $I \models \forall x A$ که x متغیری دلخواه است.

به عبارتی: $I \models A(x_1 x_2 \cdots x_n) \longleftrightarrow I \models \forall x_1 A(x_1 \cdots x_n)$

$$\longleftrightarrow I \models \forall x_2 \forall x_1 A(x_1 \cdots x_n)$$

$$I \models \forall x_n \forall x_{n-1} \cdots \forall x_1 A(x_1 \cdots x_n)$$

اثبات: $I \models A \longrightarrow I \models \forall x A$

فرض کنید $I \models A$ در این صورت هر مقدار دهی دلخواه v از I در A صدق می کند. □
نشان می دهیم $I \models \forall x A$. باید ثابت کنیم هر مقدار دهی دلخواه v^* در $\forall x A$ صدق می کند و این اتفاق زمانی رخ می دهد که هر مقدار دهی دلخواه v^{**} که x- هم ارز v^* در A صدق کند.
طبق فرض □ هر مقدار دهی دلخواه از جمله v^{**} در A صدق می کند.

برعکس: فرض کنید $I \models \forall x A$ نشان می دهیم $I \models A$

فرض کنید v یک مقدار دهی دلخواه باشد. باید نشان دهیم v در A صدق می کند. طبق فرض، پس هر مقدار دهی v' که x- هم ارز v است در A صدق می کند. در حالت خاص v' می تواند خود v باشد.

تعریف: گوییم فرمول A از زبان L منطقاً معتبر است اگر و تنها اگر به ازای هر تعبیر I از L: $I \models A$
تعریف: یک فرمول را راستگوی محمولی گویند اگر نمونه ی جانشین شده ی یک راستگوی گزاره ای باشد.

راستگوی گزاره ای: $p \vee \neg p$

$$\hookrightarrow \forall x R_1^2(x,y) \vee \neg \forall x R_1^2(x,y)$$

در تعبیری مانند I یک ارزش گذاری v در فرمول $\exists x A$ صدق می کند اگر و تنها اگر اقلاً یک مقدار دهی v' که x- هم ارز v باشد وجود داشته باشد که در A صدق کند.

subject: date:

آیا هر راستگوی عمومی منطقاً معتبر است؟ بله (حکم ۳.۳۱)

logically valid

آیا هر فرمول منطقاً معتبر یک راستگوی عمومی است؟ خیر

به ازای هر I $\quad I \models \underbrace{\forall x \, R_1^2(x,y) \rightarrow \exists x \, R_1^2(x,y)}_{p \rightarrow q}$

تعریف: یک فرمول را closed یا جمله (sentence) گوییم هرگاه هیچ متغیر آزادی نداشته باشد.

exp: $\forall x \, R_1^1(x)$, $\forall x \, R_1^2(x,y)$

حکم ۳.۳۳: فرض کنید I تعبیری از L باشد، A فرمولی از L باشد و v و w مقداردهی هایی باشند به طوری که به ازای هر متغیر آزاد x در A داشته باشیم $v(x) = w(x)$

v در A صدق می کند اگر و تنها اگر w در A صدق کند.

نتیجه: اگر A یک فرمول بسته باشد:

۱) اگر همه صدق کنند: $I \models A$

۲) هیچکدام از مقداردهی ها صدق نکنند: $I \models \neg A$

پس در نتیجه به ازای هر تعبیر I از L، هر فرمول بسته ی A از L:
$\begin{cases} I \models A \\ I \models \neg A \end{cases}$

اصول موضوعه‌ی منطق محمولات مرتبه‌ی اول FOL (در کتاب با $k_{\mathcal{L}}$ نشان می‌دهیم) روی زبان $\mathcal{L}$:

1) $A \to (B \to A)$

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

4) $\forall x\, A \to A$ (x در A آزاد نباشد)

5) $\forall x\, A(x) \to A(t)$ (جانشانی t به جای x مجاز باشد)

6) $\forall x\, (A \to B) \to (A \to \forall x B)$ (x در A آزاد نباشد)

اصل ۶ را extend می‌کنیم: (x در B آزاد نیست) $\forall x\, (A \to B) \to (\exists x A \to B)$

قواعد استنتاج:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ mp \qquad \frac{A}{\forall x A}\ G\ \text{(generalization)}$$

حکم ۲.۴: هر ۶ اصل موضوع منطقاً معتبر هستند.

حکم ۳.۴: اگر A فرمولی از $\mathcal{L}$ باشد (فرمول صوری راستگو)، در این صورت A قضیه‌ای از $k_{\mathcal{L}}$ است.

فرض کنید φ نمونه‌ی جانشین شده‌ی فرمول گزاره‌ای A باشد که A راستگوی گزاره‌ای است.

$\varphi: \forall x R_1^1(x) \to \forall x R_1^1(x)$

$A: p \to p$

چون A راستگوی گزاره‌ای است طبق قضیه‌ی تمامیت گزاره‌ای، A در $\mathcal{L}$ اثبات می‌شود. یعنی دنباله‌ی برهان $A_1A_2 \ldots A_n = A$ موجود است. حال دنباله‌ی برهان $B_1 \ldots B_n = \varphi$ را ~~...~~ که هر یک از B_i ها نمونه‌ی جانشین شده‌ی A_iها هستند (مشابه با نحوه‌ی بدست آمدن φ از روی A) در این صورت φ قضیه‌ای از k^* می‌باشد که شامل $k_1, k_2, \ldots, k_3$ و قاعده‌ی mp است.

حال به وضوح چون k توسیعی از k^* می‌باشد، φ قضیه‌ای از k است.

sabject: date:

حکم ۴.۵ (قضیه‌ی صحت): هر قضیه‌ی K_L منطقاً معتبر است.

قضیه: K_L سازگار است.

اگر K_L ناسازگار باشد فرمول چون φ موجود است که

$\vdash_{K_L} \varphi$ و $\vdash_{K_L} \neg\varphi$ $\xrightarrow[\text{صحت}]{\text{طبق قضیه}}$ φ و $\neg\varphi$ منطقاً معتبر هستند. $\times$

آیا می‌توان از A مثالی زد که $A \to \forall x A$ منطقاً معتبر نباشد؟

$\forall x A \to A$ منطقاً معتبر است اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.

کافیست یک I ارائه کنیم تا نشان دهیم منطقاً معتبر نیست ← $R_1^1(x) \to \forall x R_1^1(x)$

قضیه‌ی استنتاج را در این حالت نداریم!

$$G \ \frac{A}{\forall x A} \longrightarrow \{A\} \vdash^{(G)} \forall x A \not\Longrightarrow \vdash A\, x A$$

قضیه‌ی استنتاج برقرار است تنها در صورتی که در قاعده‌ی G، متغیر آزاد را در بالای خط اثبات نداشته باشیم.

حکم ۸.۴ (قضیه‌ی استنتاج برای K_L)

فرض کنید A و B فرمول‌هایی از L باشند و $\Gamma \cup \{A\} \vdash_K B$ و در این اثبات از قاعده‌ی تعمیم (G) نسبت به متغیری که در A آزاد است استفاده نکنیم در این صورت $\Gamma \vdash A \to B$ (و برعکس)

اگر A متغیر آزاد نداشته باشد، قضیه همواره برقرار است.

اگر $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ و A فرمول بسته باشد $\Gamma \vdash A \to B$ $A = \forall x R_1^1(x)$

sabject: date:

مثال ۴-۱۲: ثابت کنید.

$\vdash_k (A \to \forall x B) \to \forall x (A \to B)$

$\underbrace{(A \to \forall x B)}_{A} \vdash_k \underbrace{\forall x (A \to B)}_{B}$

اگر بتوانیم از قضیه‌ی استنتاج استفاده کنیم داریم:
x در فرمول A آزاد نیست پس در A و $\forall x B$ آزاد نیست. پس مشکلی برای استفاده از قضیه‌ی استنتاج وجود ندارد.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{e2}{A \to \forall x B} \quad \overbrace{\forall x B \to B}^{k_0}}{A \to B}\,(\text{cut})\ \text{تعدی}}{\forall x (A \to B)}\, G$$

Sequent: $\vdash p \to p$

$\Rightarrow p \to p$

$(A \to \forall x B) \vdash_k \forall x (A \to B)$

$A \to \forall x B \Longrightarrow \forall x (A \to B)$

در این روش اثبات not نداریم پس هرجا بجای $\bot$ ، $\neg A \equiv A \to \bot$ را اعمال می‌کنیم

exp: $\neg B \to (B \to A)$

$\Longrightarrow (B \to \bot) \to (B \to A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{logical axiom}}{B \Rightarrow A,\ B}\,(R\to) \qquad \dfrac{}{}\,L\bot}{\emptyset \Longrightarrow (B \to A),\ B \qquad \bot \Longrightarrow (B \to A)}\,(R\to),\ (L\to)}{\emptyset,\ (B \to \bot) \Longrightarrow (B \to A)}\,(R\to)}{\Longrightarrow (B \to \bot) \to (B \to A)}$$

subject: ۴۳، ۴۹، ۴۷
کتاب

date:

سورهای Sequential logic :

$A \vee B, \Gamma \Longrightarrow \Gamma, A \longrightarrow B$

اولویت $\longleftarrow$ ($\boxed{RA}$ $L\exists$) ($L\forall, R\exists$)

$\forall x A, \Gamma \longrightarrow \forall x A, \Delta$

حکم ۴-۲۵ :

A در x آزاد نیست $\left\{ \begin{array}{l} \forall x(A \to B) \equiv A \to \forall x B \\ \exists x(A \to B) \equiv A \to \exists x B \end{array} \right.$

سور روی B پخش می‌شود.

B در x آزاد نیست $\left\{ \begin{array}{l} \forall x(A \to B) \equiv \exists x A \to B \\ \exists x(A \to B) \equiv \forall x A \to B \ * \end{array} \right.$

سور عمومی به وجود و برعکس تبدیل می‌شود.

$\hookrightarrow$ provably equivalent

چهارمین عبارت را اثبات می‌کنیم.

$L\forall$ $\dfrac{A(t/x), \forall x A \Rightarrow B, A(y/x) \qquad B(y/x), \forall x A, A(t/x) \Rightarrow B}{}$ $L\forall$ axiom

$\dfrac{\emptyset, \forall x A \Rightarrow B, A(y/x) \qquad B(y/x), \forall x A \Rightarrow B}{A(y/x) \to B(y/x), \forall x A \Longrightarrow B}$ $L\to$ / $L\forall$

$\dfrac{}{A(y/x) \to B(y/x)}$ $L\to$ / $R\to$

اولویت

$\dfrac{(A \to B)(y/x) \Longrightarrow \forall x A \longrightarrow B}{\emptyset, \exists x(A \to B) \Longrightarrow \forall x A \to B}$ $L\exists$ / $R\to$

$r\to$

آزاد نیست B در x $\Rightarrow \exists x(A \to B) \longrightarrow (\forall x A \to B)$

1- we can take y as t and the end of proof.
2- we can take x as t (better!)

مثال ص ۱۰۵ :

$\dfrac{\forall x(A \to B), A(y/x) \Longrightarrow \exists x B, B(t/x), A(t/x)}{}$ $L\to$

$\dfrac{(A \to B)(t/x), \forall x(A \to B), A(y/x) \Longrightarrow \exists x B, B(t/x)}{}$ ($L\forall$) $R\exists$

در مرحله‌ی قبلی انجام دادیم!

$\dfrac{\forall x(A \to B), A(y/x) \Longrightarrow \exists x B, B(t/x)}{}$ $L\forall$, ($R\exists$)

y نمی‌تواند x باشد $\dfrac{\forall x(A \to B), A(y/x) \Longrightarrow \exists x B}{}$ $L\forall$, ($L\exists$), $R\exists$

$\dfrac{\forall x(A \to B), \exists x A \Longrightarrow \exists x B}{}$ $L\forall$ / ($R\to$)

$\dfrac{\forall x(A \to B) \Longrightarrow \exists x A \to \exists x B}{\Longrightarrow \forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)}$ ($R\to$)

sabject: date:

تعریف ۴-۱۴ : اگر A و B فرمول هایی از زبان L باشند، $\vdash_{K_L} A\leftrightarrow B$ ، در این صورت گوییم A

$\hookrightarrow (A\to B)\wedge(B\to A)$

و B بطور قابل اثباتی هم ارز هستند. (provably equivalant)

صورت نرمال پیشوندی: $(A_1^1(x_1)\to \forall x_1 A_1^2(x_1,x_2))\to(\exists x_2 A_1^1(x_2)\to \exists x_3 A_1^2(x_2,x_3))$

$A_1^1(x_1)\to\forall x_4 A_1^2(x_4,x_2)$

$\forall x_4(A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_4,x_2))\to(\exists x_2 A_1^1(x_2)\to\exists x_3 A_1^2(x_2,x_3))$

$\exists x_3(\exists x_2 A_1^1(x_2)\to A_1^2(x_2,x_3))$

$\exists x_3(\exists x_5 A_1^1(x_5)\to A_1^2(x_2,x_3))$

$\forall x_4(A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_4,x_2))\to\exists x_3\forall x_5(A_1^1(x_5)\to A_1^2(x_2,x_3))$

$\exists x_3(\forall x_4(A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_4,x_2))\to\forall x_5(A_1^1(x_5)\to A_1^2(x_2,x_3)))$

$\exists x_3\exists x_4(A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_4,x_2))\to\forall x_5(A_1^1(x_5)\to A_1^2(x_2,x_3)))$

$\exists x_3\exists x_4\forall x_5((A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_4,x_2))\to((A_1^1(x_5)\to A_1^2(x_2,x_3)))$