زبان L را در نظر بگیرید. گوییم K^* توسیعی از K_L است اگر به ازای هر فرمول φ از L :

$$\vdash_{K_L} \varphi \Longrightarrow \vdash_{K^*_L} \varphi \ .$$

فرض کنید L^* زبانی شامل زبان L باشد. در این صورت گوییم $K^*_{L^*}$ توسیع از K_L است اگر به ازای هر فرمول φ از L :

$$\vdash_{K_L} \varphi \Longrightarrow \vdash_{K^*_{L^*}} \varphi$$

یک دستگاه صوری K^*_L سازگار است اگر فرمولی چون B از L موجود نباشد که :
به عبارتی : $\vdash_{K^*_L} B$ و $\vdash_{K^*_L} \neg B$

اگر K^* یک توسیع سازگار K باشد آنگاه فرمولی چون A موجود است که $\nvdash_{K^*} A$.

قضیه‌ی نحوه‌ی ساخت توسیع سازگار: فرض کنید K^* توسیع سازگاری از K باشد و A فرمولی باشد که $\nvdash_{K^*} A$. در این صورت $K^{**} = K^* \cup \{\neg A\}$ سازگار است.

مثال: یک توسیع از K_L ارائه دهید. $L_2 = \{c_1, f_1^1, f_1^2, f_2^2, R_1^2\}$

اثبات پذیری $\Longleftrightarrow$ منطقاً معتبر بودن

فرمولی پیدا می‌کنیم که منطقاً معتبر نباشد و not آن را add می‌کنیم!

توسیع ایده‌آل: فرمولی پیدا کنیم که نه خودش نه نقیضش منطقاً معتبر نباشند.

تعریف تمام بودن: یک توسیع K^* از K را تمام گوییم اگر به ازای هر فرمول بسته‌ی A که $\vdash_{K^*} \neg A$ یا $\vdash_{K^*} A$ و توجه داریم که برای داشتن سازگاری باید یکی از آنها اتفاق بیفتد. پس هر دستگاه سازگار، تمام نیز هست.

زبان L را در نظر بگیرید. گوییم K^* توسیعی از K_L است اگر به ازای هر فرمول φ از L:

$$\vdash_{K_L} \varphi \Rightarrow \vdash_{K^*_L} \varphi$$

فرض کنید L^* زبانی شامل زبان L باشد. در این صورت گوییم $K^*_{L^*}$ توسیعی از K_L است اگر به ازای هر فرمول φ از L:

$$\vdash_{K_L} \varphi \Rightarrow \vdash_{K^*_{L^*}} \varphi$$

یک دستگاه صوری K^*_L سازگار است اگر فرمولی چون B از L موجود نباشد که:

$\vdash_{K^*_L} B$ و $\vdash_{K^*_L} \neg B$

به عبارتی:
اگر K^* یک توسیع سازگار K باشد آنگاه فرمولی چون A موجود است که $\nvdash_{K^*} A$.

تفسیری نحوه‌ی ساخت توسیع سازگار: فرض کنید K^* توسیع سازگاری از K باشد و A فرمولی باشد که $\nvdash_{K^*} A$. در این صورت $K^{**} = K^* \cup \{\neg A\}$ سازگار است.

مثال: یک توسیع از K_L ارائه دهید. $L = \{c_1, f_1^1, f_1^2, f_2^2, R_1^2\}$

اثبات پذیری $\Longleftrightarrow$ منطقاً معتبر بودن

فرمولی پیدا می‌کنیم که منطقاً معتبر نباشد و not آن را add می‌کنیم!

توسیع الید: فرمولی پیدا کنیم که نه خودش نه نقیضش منطقاً معتبر نباشند.

تعریف تمام بودن: یک توسیع K^* از K را تمام گوییم اگر به ازای هر فرمول بسته‌ی A که $\vdash_{K^*} \neg A$ یا $\vdash_{K^*} A$ و توجه داریم که برای داشتن سازگاری باید یکی از آنها اتفاق بیفتد. پس هر دستگاه سازگاری تمام نیز هست.

سازگار

حکم ۴-۳۷: فرض کنید S یک دستگاه مرتبه اول باشد و A فرمول بسته ای باشد. $\nvdash_S A$. در این صورت $S^* = S \cup \{\neg A\}$ سازگار است.

نکته: آیا K سازگار است؟ ✓

آیا K تمام است؟ مثال نقض ← $\left\{\begin{array}{l} \forall x\, R_1^1(x) \\ \neg \forall x\, R_1^1(x) \end{array}\right.$ ← هیچ‌کدام منطقاً معتبر نیستند پس K تمام نیست.

$$\exists x\, \neg R_1^1(x)$$

حکم ۴.۳۹: فرض کنید S یک دستگاه مرتبه‌ی اول سازگار باشد. در این صورت S دارای یک توسیع سازگار تمام است.

لم وجود مدل: (حکم ۴.۴۰): فرض کنید S توسیع سازگاری از K_L باشد. در این صورت تعبیری از L موجود است که هر قضیه‌ی S در آن درست است. (یعنی به ازای هر فرمول A:

$$\vdash_S A \Rightarrow I \models A \Big)$$

$\boxed{\text{اثبات مهم نیست!}}$

حکم ۴.۴۱ (قضیه‌ی تمامیت): اگر A منطقاً معتبر باشد در این صورت قضیه‌ای از K است.

تعریف الگو (Model): فرض کنید Γ مجموعه ای از فرمول های مرتبه اول (از L) باشند. در این صورت گوییم تعبیر I از L یک مدل Γ است اگر به ازای هر $A \in \Gamma$ داشته باشیم: $I \models A$

یک مدل برای یک دستگاه مرتبه اول S_L تعبیری چون I از L است به طوری که برای هر فرمول φ از L:

$$\vdash_{S_L} \varphi \Rightarrow I \models \varphi$$

نکته: یک دستگاه زمانی مدل دارد که سازگار باشد.

تمرین: ثابت کنید دستگاه K دارای حداقل ۲ مدل است. (۴۵ - ۴)

حکم ۴ - ۴۳: فرض کنید S یک دستگاه مرتبه‌ی اول باشد و فرض کنید I تعبیری است که هر اصل موضوعه‌ی S در آن درست باشد. در این صورت I مدلی از S است.

حکم ۴ - ۴۴: یک دستگاه مرتبه‌ی اول سازگار است اگر و تنها اگر مدل داشته باشد.

حکم ۴ - ۴۶: فرض کنید S یک دستگاه مرتبه‌ی اول سازگار باشد و A فرمول بسته‌ای باشد که در هر مدل S درست است. در این صورت A قضیه‌ای از S است.

اثبات: فرض خلف می‌کنیم A فرمول بسته‌ای است که در هر مدل S درست است ولی قضیه‌ای از S نیست یعنی $\nvdash_S A$. در این صورت $S^* = S \cup \{\neg A\}$ (طبق حکم ۴ - ۳۷) سازگار است (یعنی مدل دارد.) طبق ۴ - ۴۴، S^* مدلی چون M دارد.

توجه: ① $\vdash_{S^*} \neg A$ ② از طرفی M مدل S^* است $\Longleftarrow$ $M \models_{S^*} \neg A$

$\longrightarrow M \not\models_{S^*} A \Longrightarrow$ M مدل S نیز است و A در آن درست نیست ✗

پس فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

sabject: date:

قضیه‌ی فشردگی: اگر هر زیر مجموعه‌ی متناهی از مجموعه‌ی اصول موضوعه یک دستگاه مرتبه اول دارای یک مدل باشد، در این صورت خود ک نیز مدل دارد.

فرض کنید Γ یک مجموعه‌ی نامتناهی از فرمول های روی زبان L باشد. در این صورت Γ مدل دارد اگر هر زیر مجموعه‌ی متناهی Γ مدل داشته باشد. (صورت دیگر قضیه ی فشردگی)

اثبات مهم و ساده