exp: $L=\{c_1, R_1^2, f_1^1, f_1^2\}$ $\quad I = (\mathbb{Z}, -1, =, x^2, x_1^2+x_2^2)$

	x	y	z
v	۲	-۵	

$R_1^2(f_1^2(c_1, x), f_1^1(y))$

$$v(f_1^2(c_1,x)) = (f_1^2)^I(\underbrace{v(c_1)}_{c^I=-1}, \underbrace{v(x)}_{2}) = (-1)^2+2^2 = 5$$

$$v(f_1^1(y)) = (f_1^1)^I(\underbrace{v(y)}_{-5}) = (-5)^2 = 25$$

$$R_1^2(v(t_1), v(t_2)) = 5 = 25 \quad X$$

پس v در این فرمول صدق نمی‌کند!

آیا جانشانی $t=f_1^2(x_1,x_3)$ به جای x_1 مجاز است؟

$$\underbrace{\forall x_4\, R_1^1(f_1^1(x_4))}_{\text{در اینجا مجاز است}} \longrightarrow \underbrace{\forall x_3\, R_1^3(x_1,x_2,x_3)}_{\text{به این پوزیشن توجه می‌کنیم}}$$

پس این جانشانی مجاز نیست.

نکته: روی پابندها نمی‌توانیم ترم جانشین کنیم، فقط متغیر! فقط می‌توانیم متغیر جانشین کنیم.

حکم ۲۳.۳: فرض کنید $A(x_i)$ فرمولی از L باشد که x_i در آن آزاد است و فرض کنید t ترمی باشد که جانشانی آن به جای x_i در $A(x_i)$ مجاز است. فرض کنید v یک مقداردهی و v' یک مقداردهی x_i-هم‌ارز با v باشد بطوری که $v'(x_i) = v(t)$.
در این صورت v در $A(t)$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر v' در $A(x_i)$ صدق کند.

$A(x) = \forall y\, R_1^2(x,y) \longleftarrow L=\{c_1, f_1^2, R_1^2, \dots\}$

and we have $t = f_1^2(x, c_1)$

t به جای x

replace: $\overset{A(t)}{A(t/x)} = \forall y\, R_1^2(f_1^2(x,c_1), y)$

$$v'(x) = v(f_1^2(x,c_1)) = (f_1^2)^I(v(x), c_1^I) \in D_I$$

subject: date:

حکم ۳-۲۶ : اگر در یک تعبیر خاص مانند I ، فرمول های A و $A \to B$ درست باشند یعنی $I \models A$ و $I \models A \to B$ آنگاه B هم درست است یعنی $I \models B$

حکم ۳-۲۷ : فرض کنید A فرمولی از $\mathcal{L}$ و I تعبیری دلخواه از $\mathcal{L}$ باشند. در این صورت $I \models A$ اگر و تنها اگر $I \models \forall x A$ که x متغیری دلخواه است.

به عبارتی :
$$I \models A(x_1 x_2 \dots x_n) \longleftrightarrow I \models \forall x_1 A(x_1 \dots x_n)$$
$$\longleftrightarrow I \models \forall x_2 \forall x_1 A(x_1 \dots x_n)$$
$$I \models \forall x_n \forall x_{n-1} \dots \forall x_1 A(x_1 \dots x_n)$$

اثبات :
$$I \models A \longrightarrow I \models \forall x A$$

فرض کنید $I \models A$ در این صورت هر مقداردهی دلخواه $\mathcal{U}$ از I در A صدق می کند. $\square$
نشان می دهیم $I \models \forall x A$. باید ثابت کنیم هر مقداردهی دلخواه $\mathcal{U}^*$ در $\forall x A$ صدق می کند و این اتفاق زمانی رخ می دهد که هر مقداردهی دلخواه $\mathcal{U}^{**}$ که x- هم ارز $\mathcal{U}^*$ در A صدق کند.
طبق فرض $\square$ هر مقداردهی دلخواه از جمله $\mathcal{U}^{**}$ در A صدق می کند.

برعکس : فرض کنید $I \models \forall x A$ نشان می دهیم $I \models A$

فرض کنید $\mathcal{U}$ یک مقداردهی دلخواه باشد. باید نشان دهیم $\mathcal{U}$ در A صدق می کند. طبق فرض، پس هر مقداردهی $\mathcal{U}'$ که x- هم ارز $\mathcal{U}$ است در A صدق می کند. در حالت خاص $\mathcal{U}'$ می تواند خود $\mathcal{U}$ باشد.

تعریف: گوییم فرمول A از زبان $\mathcal{L}$ منطقاً معتبر است اگر و تنها اگر به ازای هر تعبیر I از $\mathcal{L}$: $I \models A$
تعریف : یک فرمول را راستگوی محمولی گویند اگر نمونه ی جانشین شده ی یک راستگوی گزاره ای باشد.

راستگوی گزاره ای : $p \vee \neg p$
$$\forall x R_1^2(x,y) \vee \neg \forall x R_1^2(x,y)$$

subject: date:

آیا هر راستگوی معمولی منطقاً معتبر است؟ بله (حکم ۳۱.۳)

logically valid

آیا هر فرمول منطقاً معتبر یک راستگوی معمولی است؟ خیر

به ازای هر I $\quad I \models \underbrace{\forall x R_1^2(x,y) \rightarrow \exists x R_1^2(x,y)}_{p \rightarrow q}$

تعریف: یک فرمول را closed یا جمله (sentence) گوییم اگر هیچ متغیر آزادی نداشته باشد.

exp: $\forall x R_1^1(x)$, $\forall x R_1^2(x,y)$

حکم ۳.۳۳: فرض کنید I تعبیری از L باشد و A فرمولی از L باشد. همچنین اگر u و w مقداردهی‌هایی باشند به طوری که به ازای هر متغیر آزاد x در A داشته باشیم $u(x) = w(x)$ ، u در A صدق می‌کند اگر و تنها اگر w در A صدق کند.

نتیجه: اگر A یک فرمول بسته باشد:

۱) اگر همه صدق کنند: $I \models A$

۲) هیچکدام از مقداردهی‌ها صدق نکنند: $I \models \neg A$

پس در نتیجه به ازای هر تعبیر I از L، هر فرمول بسته‌ی A از L: $\begin{cases} I \models A \\ I \models \neg A \end{cases}$