פרק 3
גרפים
תרגילים

3.5 עץ בינארי הוא עץ שיש לו שורש ולכל צומת שלו יש לכל היותר שני ילדים.
הראו באינדוקציה שבכל עץ בינארי, מספר הצמתים שיש להם שני ילדים, קטן ממספר העלים בדיוק באחד.

3.5 עץ בינארי הוא עץ שיש לו שורש ולכל צומת שלו יש לכל היותר שני ילדים.
הראו באינדוקציה שבכל עץ בינארי, מספר הצמתים שיש להם שני ילדים, קטן ממספר העלים בדיוק באחד.

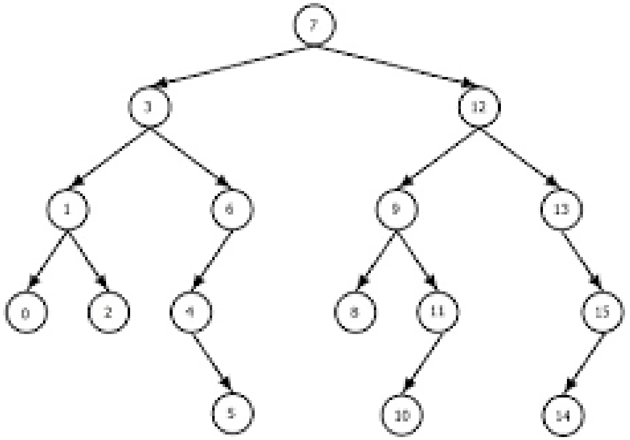
נוכיח באינדוקציה על גודל הגרף.

הטענה נכונה עבור עץ בינארי בגודל 1 : מספר הצמתים עם שני בנים – 0, מספר העלים – 1.

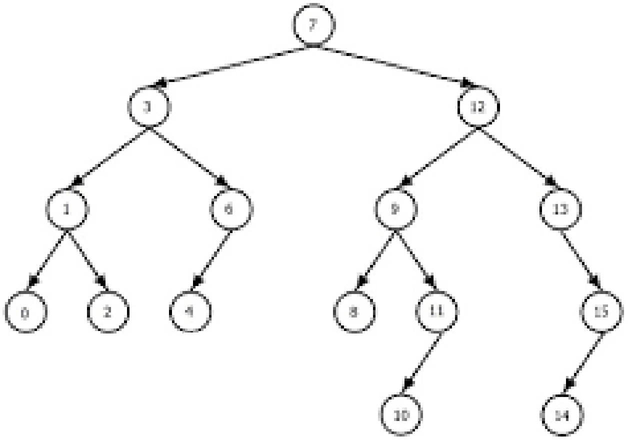
נניח שהטענה נכונה עבור עץ בגודל K, ונוכיח שהוא נכון עבור עץ בגודל K + 1.

אם יש עץ בינארי בגודל K + 1, הוא התקבל מעץ בגודל K בדיוק באחת מתוך שתי דרכים :

1. הוספת עלה שהוא בן יחיד – מספר העלים ומספר הצמתים שיש להם שני בנים הוא בדיוק אותו דבר כמו בעץ בגודל K. לכן אם הטענה היתה נכונה עבור עץ בגודל K, היא תהיה נכונה גם עבור עץ בגודל K + 1.

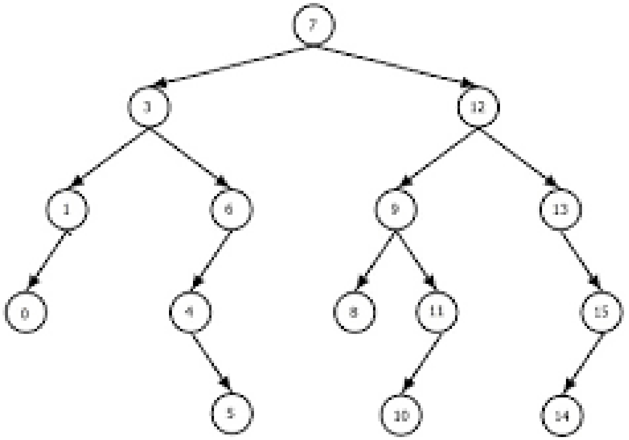


עץ בינארי בגודל k + 1



התקבל מעץ בינארי בגודל K ע"י הוספת עלה שהוא בן יחיד.

2. הוספת עלה שיש לו אח – מספר העלים עלה ב-1, וגם מספר הצמתים שיש להם שני בנים עלה ב-1. לכן אם הטענה היתה נכונה עבור עץ בגודל K, היא תהיה נכונה גם עבור עץ בגודל K + 1.



התקבל מעץ בינארי בגודל K ע"י הוספת עלה שהוא אח לצומת אחר.

3.6 נתון גרף קשיר $G=(V,E)$ וצומת מסוים $u \in V$. נניח שאנו בונים עץ סריקה־לעומק שהשורש שלו הוא u ומקבלים עץ T שכולל את כל צומתי G. כעת נבנה עץ סריקה־לרוחב שהשורש שלו הוא u ונניח שנקבל את אותו עץ T. הוכיחו ש־$G=T$. (במלים אחרות, אם T הוא עץ שהשורש שלו הוא u, והוא מתקבל גם כעץ הסריקה־לעומק וגם כעץ הסריקה־לרוחב, אזי G אינו יכול להכיל קשתות כלשהן שאינן שייכות ל־T.)

3.6 נתון גרף קשיר $G=(V,E)$ וצומת מסוים $u \in V$. נניח שאנו בונים עץ סריקה־לעומק שהשורש שלו הוא u ומקבלים עץ T שכולל את כל צומתי G. כעת נבנה עץ סריקה־לרוחב שהשורש שלו הוא u ונניח שנקבל את אותו עץ T. הוכיחו ש־$G=T$. (במלים אחרות, אם T הוא עץ שהשורש שלו הוא u, והוא מתקבל גם כעץ הסריקה־לעומק וגם כעץ הסריקה־לרוחב, אזי G אינו יכול להכיל קשתות כלשהן שאינן שייכות ל־T.)

נוכיח על דרך השלילה.

רעיון ההוכחה : נניח שהגרף G אינו עץ, כלומר יש בו קשת e שאינה מופיע בעץ T. בעץ ה- BFS זו תהיה קשת חוצה, בעץ ה- DFS - קשת אחורה, אך קשת לא יכולה להיות גם זה וגם זה.

נביט על העץ T כעל עץ DFS.

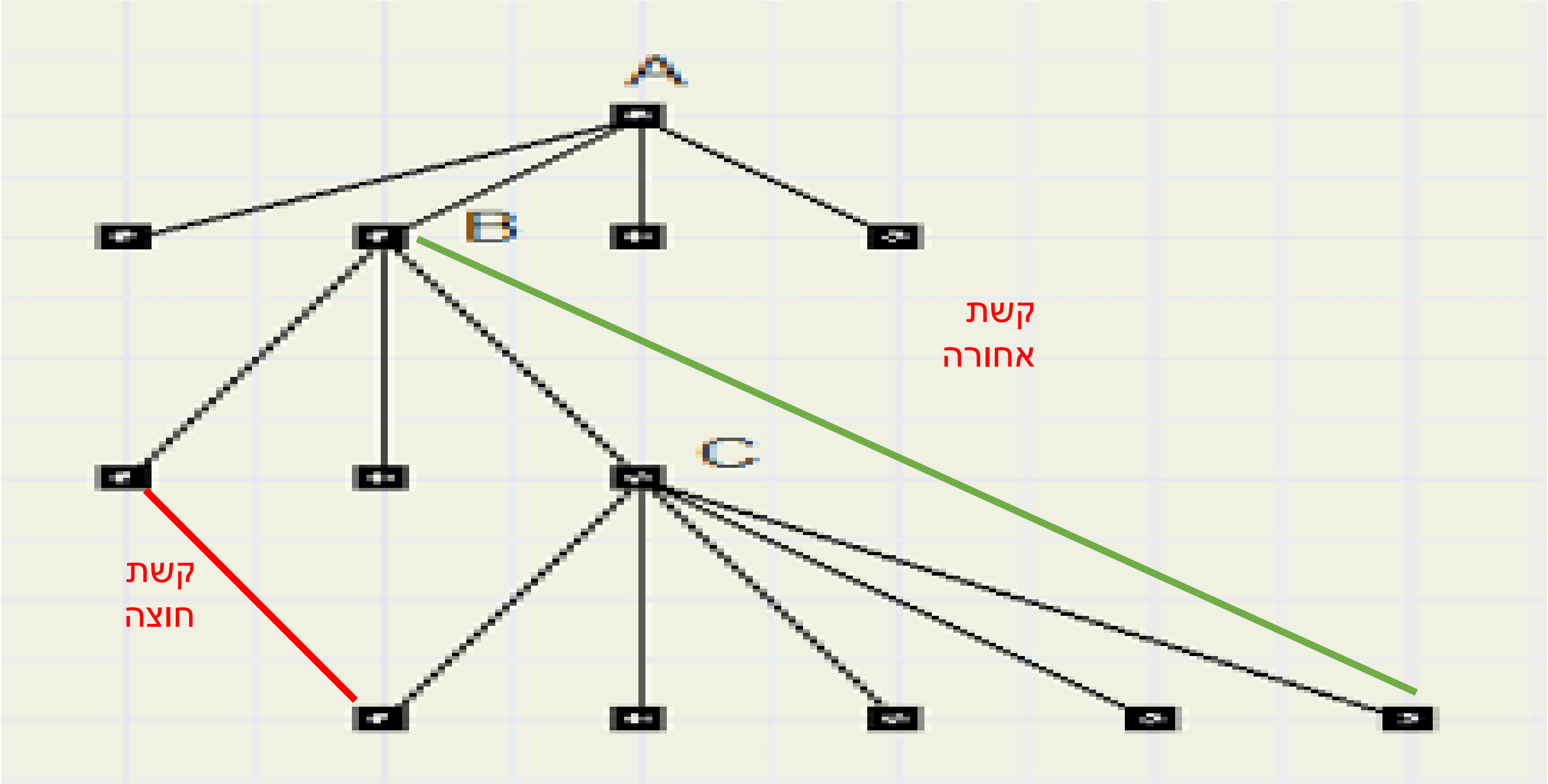
קשתות הגרף שאינו מופיעות בעץ ה-DFS הן בהכרח קשתות אחורה (תכונה של עץ DFS), ולא קשתות חוצות.

לכן הקשת e היא קשת אחורה שמחברת בין צומת לבין אב קדמון שלו (אך לא בין צומת לבין אבא מיידי שלו, כיון שלא תיתכנה קשתות מקבילות בגרף בלתי מכוון.)

נביט עתה על העץ T כעל עץ BFS.

כל קשתות הגרף בהכרח מחברות בעץ ה-BFS בין צמתים שנמצאים או באותה שיכבה או בשכבות סמוכות זו לזו (תכונה של עץ BFS).

אבל זאת סתירה למסקנה אליה הגענו כשהבטנו בקשת e (שהיא כזכור קשת מהגרף G) כקשת מתוך עץ ה- DFS : שהיא מחברת בין שני צמתים שנמצאים בשכבות שאינן סמוכות זו לזו.



סתירה ! לכן הגרף G הוא עץ, כלומר העץ T.

3.9 אינטואיטיבית נראה שהקשר בין שני צמתים המרוחקים זה מזה ברשת התקשורת – כלומר, מפרידות ביניהם 'קפיצות' רבות – קלוש יותר מאשר הקשר בין שני צמתים קרובים. כמה מן התוצאות האלגוריתמיות מבוססות, במידה מסוימת, על דרכים שונות לבטא באופן מדויק את הרעיון הזה. הנה אחת העוסקת ברגישותם של מסלולים למחיקת צמתים.

נניח שגרף בלתי־מכוון $G=(V,E)$ מכיל שני צמתים, s ו־t, שהמרחק ביניהם גדול ממש מ־$n/2$. הראו שחייב להיות צומת כלשהו, v, השונה מ־s ומ־t, שמחיקתו מ־G תהרוס את כל המסלולים בין s ל־t. (במלים אחרות, הגרף המתקבל מ־G בעקבות מחיקת v אינו מכיל מסלול כלשהו מ־s אל t.) הציגו אלגוריתם המוצא צומת v כזה תוך פרק הזמן $O(m+n)$.

3.9 אינטואיטיבית נראה שהקשר בין שני צמתים המרוחקים זה מזה ברשת התקשורת - כלומר, מפרידות ביניהם 'קפיצות' רבות - קלוש יותר מאשר הקשר בין שני צמתים קרובים. כמה מן התוצאות האלגוריתמיות מבוססות, במידה מסוימת, על דרכים שונות לבטא באופן מדויק את הרעיון הזה. הנה אחת העוסקת ברגישותם של מסלולים למחיקת צמתים.

נניח שגרף בלתי־מכוון $G = (V, E)$ מכיל שני צמתים, s ו־t, שהמרחק ביניהם גדול ממש מ־$n/2$. הראו שחייב להיות צומת כלשהו, v, השונה מ־s ומ־t, שמחיקתו מ־G תהרוס את כל המסלולים בין s ל־t. (במלים אחרות, הגרף המתקבל מ־G בעקבות מחיקת v אינו מכיל מסלול כלשהו מ־s אל t.) הציגו אלגוריתם המוצא צומת v כזה תוך פרק הזמן $O(m + n)$.

נריץ BFS החל מצומת s. נניח שהצומת t שוכן בשיכבה d של BFS זה. לפי הנתון d > n/2.

נניח שבכל אחד מ-d השכבות של עץ ה-BFS יש לפחות שני צמתים (חוץ אולי משיכבה d, שבה ייתכן ששוכן רק הצומת t, אך לצורך החישוב אפשר לצרף אליו את הצומת s השייך לשיכבה 0.)

אם כך בכל d השכבות יש לפחות 2*d צמתים, אך כאמור d > n/2. קיבלנו שמספר הצמתים בכל d השכבות גדול מ-n, וזה לא ייתכן.

מכאן שבעץ ה-BFS יש לפחות שיכבה אחת שבה יש בדיוק צומת אחד, נקרא לו v.

ידוע שלא ייתכן שקשת בגרף המקורי תחבר בין שני צמתים שנמצאים בשתי שכבות שאינן סמוכות זו לזו (תכונה של BFS).

מכאן שכל מסלול בין s ל-t חייב לעבור בצומת v, ולכן מחיקתו מהגרף תנתק כל מסלול בין s ל-t.

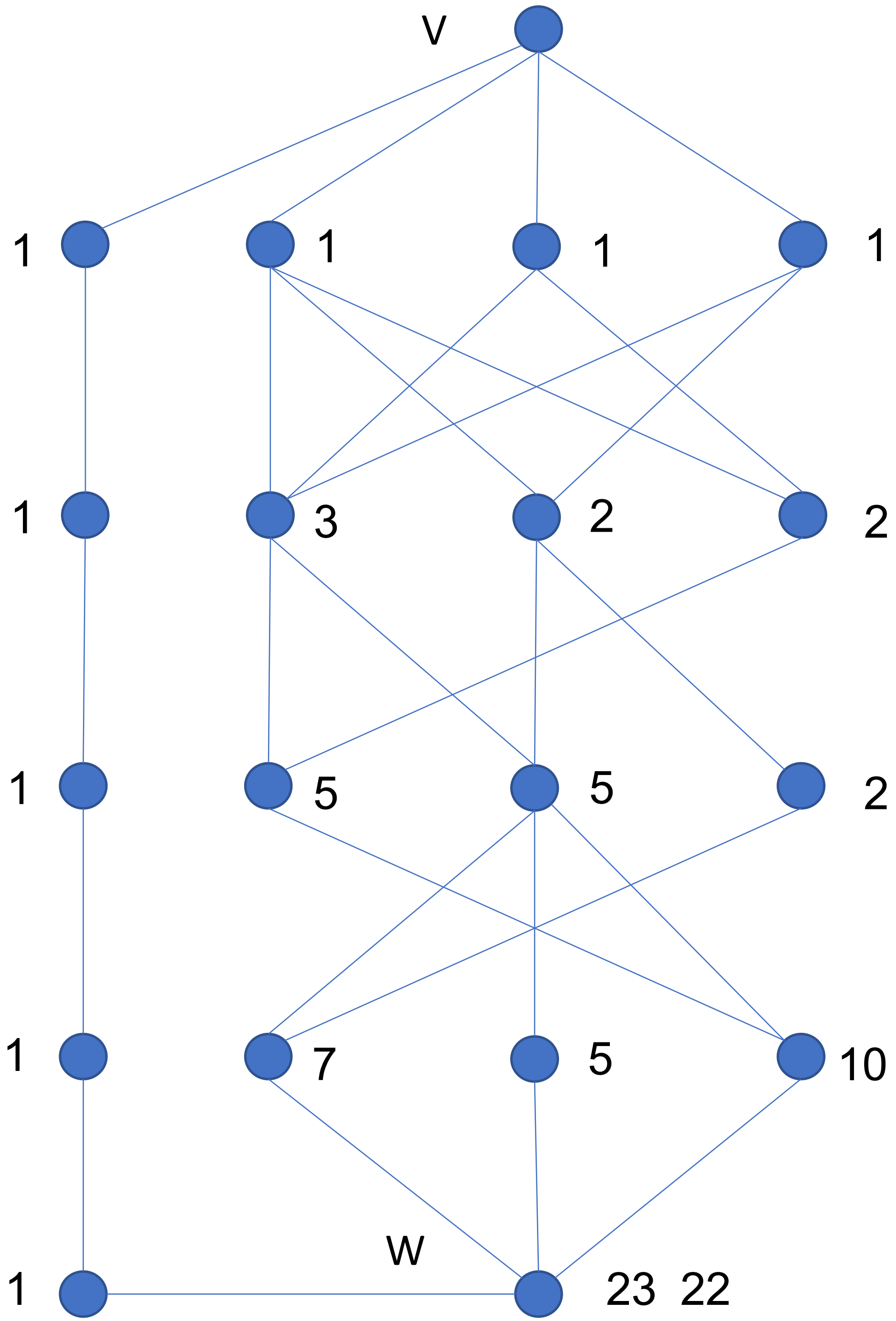
סיבוכיות : של BFS - O(m + n)

3.10 כמה מן המוזיאונים לאומנות ברחבי ארה"ב הציגו עבודות של אמן ששמו **מרק לומברדי** (1951–2000); עבודותיו בנויות מקבוצה של גרפים מורכבים ועתירי פרטים. בגרפים אלה מקודדים, על־סמך כמות נכבדה של מחקר, היחסים בין אנשים שהיו מעורבים בשערוריות פוליטיות גדולות, בכמה עשורים של השנים האחרונות: הצמתים בעבודותיו מקבילים למשתתפים וכל קשת מצביעה על יחסים מסוג מסוים בין זוג משתתפים. וכך, אם מתקרבים לציורים ומתבוננים בהם בעיון, אפשר לעקוב אחר מסלולים מעוררי דאגה המובילים מפקיד ממשל אמריקני בכיר, לשותף עסקי לשעבר, לבנק בשוויצריה, לסוחר נשק מפוקפק.

תמונות כאלה הן דוגמאות מאלפות **לרשתות חברתיות** שבהן, כפי שראינו בסעיף 3.1, צמתים מייצגים אנשים וארגונים, ואילו הקשתות מייצגות יחסים מכל מיני סוגים. לאחרונה הוסבה תשומת־לב רבה לעובדה שרשתות חברתיות שופעות מסלולים קצרים כאלה, שכן חוקרים החלו לתהות על משמעותם. במקרה של הגרפים של מרק לומברדי, הם מרמזים עד כמה קצרה קבוצת הצעדים שיכולה להוביל מן המכובד אל הידוע לשמצה.

מובן שמסלול מקרי יחיד בין הצמתים v ו־w ברשת כזאת עשוי להיות חסר משמעות; אבל ריבוי מסלולים קצרים בין v ל־w הרבה יותר משכנע. לכן, בנוסף לבעיית החישוב של מסלול v-w יחיד, קצר ביותר, בגרף G, חוקרי רשתות חברתיות התמודדו גם עם הבעיה של קביעת **מספר המסלולים** v-w הקצרים ביותר.

מתברר שבעיה זו ניתנת לפתרון יעיל. נניח שנתון לנו גרף בלתי־מכוון $G=(V,E)$ ושני צמתים, v ו־w, ב־G. הציגו אלגוריתם שיחשב את מספר המסלולים v–w הקצרים ביותר ב־G. (האלגוריתם אינו צריך לפרט את כל המסלולים אלא רק לציין את מספרם.) זמן הריצה של האלגוריתם הזה צריך להיות $O(m+n)$ עבור גרף שיש לו n צמתים ו־m קשתות.



מתברר שבעיה זו ניתנת לפתרון יעיל. נניח שנתון לנו גרף בלתי־מכוון $G=(V,E)$ ושני צמתים, v ו־w, ב־G. הציגו אלגוריתם שיחשב את מספר המסלולים v–w הקצרים ביותר ב־G. (האלגוריתם אינו צריך לפרט את כל המסלולים אלא רק לציין את מספרם.) זמן הריצה של האלגוריתם הזה צריך להיות $O(m+n)$ עבור גרף שיש לו n צמתים ו־m קשתות.

נפתור את הבעייה הכללית של מציאת מספר המסלולים הקצרים ביותר בין v לבין כל הצמתים בגרף.

נריץ BFS החל מצומת v. אחת מתכונות ה-BFS היא שהוא מוצא את המסלולים הקצרים ביותר (בספירת קשתות) בין הצומת בו התחלנו לבין כל צומת אחר בגרף.

נגדיר S(x) להיות מספר המסלולים הקצרים ביותר בין v לבין הצומת x.

עבור כל צומת שנמצא בשיכבה הראשונה, זו שסמוכה ל-v, ברור ש- S(x) = 1.

עבור כל צומת אחר y שנמצא בשיכבה j מתקיים שהמסלול הקצר ביותר בין v לבינו הוא מהצורה הבאה : קודם כל מסלול בין v לבין צומת כלשהו x שנמצא בשיכבה j-1, ואז עוד קשת נוספת שמחברת בין x לבין y.

לכן S(y) הוא הסכום של כל S(x) עבור כל ה-x-ים שנמצאים בשיכבה אחת מעל זו שבה נמצא y.

את הסכומים הללו אפשר לחלחל במורד השכבות תוך כדי ביצוע ה-BFS, ולכן הסיבוכיות הינה בדיוק הסיבוכיות של BFS.

שאלה ב

<u>הכוונת צלעות</u>. הציגו אלגוריתם שמכריע, בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, האם ניתן לכוון כל אחת מהצלעות, כך שבגרף המכוון שמתקבל, **<u>דרגת הכניסה</u>** של כל קדקוד תהיה **<u>גדולה מאפס</u>**. (לכל צלע $\{u,v\}\in E$ ניתן לבחור כיוון יחיד: (u,v) או לחלופין (v,u)). כשהתשובה חיובית, על האלגוריתם להחזיר הכוונה של הצלעות - המקיימת את הנדרש.

תשובה ב

הכוונת צלעות. הציגו אלגוריתם שמכריע, בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, האם ניתן לכוון כל אחת מהצלעות, כך שבגרף המכוון שמתקבל, **דרגת הכניסה** של כל קדקוד תהיה **גדולה מאפס**. (לכל צלע $\{u,v\}\in E$ ניתן לבחור כיוון יחיד: (u,v) או לחלופין (v,u)). כשהתשובה חיובית, על האלגוריתם להחזיר הכוונה של הצלעות - המקיימת את הנדרש. נדרשת תשובה קצרה ומדויקת של עד 8 משפטים.

רעיון האלגוריתם:

כיוון הגרף כאשר לכל צומת יש דרגת כניסה גדולה מ-0 יתקיים כאשר בגרף יש לפחות מעגל אחד. נתחיל מצומת כלשהי ונכוון את הקשתות באמצעות סריקת BFS.

תיאור האלגוריתם:

נבחר קודקוד $v \in V$ כלשהו ונתחיל ממנו סריקת DFS של הגרף. נסמן את העץ שקיבלנו ב T.

אם כל הקשתות ב T הן קשתות עץ (ללא קשתות חוזרות) – הרי שלא קיים מעגל, ולכן נחזיר False.

אחרת, קיימת קשת חוזרת $e = \{u,v\} \in E$ שהיא חלק ממעגל בגרף.

נכוון אותה כ-(u,v).

נתחיל סריקת BFS מהצומת v ונכוון את כל הקשתות – פרט לקשת שכבר נתנו לה כיוון (u, v) – כך שכל קשת תכוון מרמה i לרמה i+1.

בכל קביעת כיוון של קשת – נדפיס את הכיוון שנקבע.

כל הקשתות שה-BFS לא התקדם דרכן תקבלנה כיוון שרירותי.

בסוף ריצת ה-BFS נחזיר True.

נכונות האלגוריתם:

T הוא תוצאה של סריקת DFS ולכן יש לו 2 סוגי קשתות: קשתות עץ וקשתות חוזרות.
אם כל הקשתות הן קשתות עץ אזי G הוא עץ, וכפי שהוכחנו – מספר הקשתות בו הוא n-1, וזהו גם סכום דרגות הכניסה של כל הצמתים.
נניח בשלילה שניתן לכוון את כל קשתות הגרף כנדרש בשאלה.
אם כך הרי שסכום דרגות הכניסה של כל הצמתים הינו לפחות מספר הצמתים, כלומר n.
סתירה ! לכן אם G הוא עץ, לא ניתן לבצע כיוון כמבוקש.

אם הגרף אינו עץ , אזי האלגוריתם שהוצג גורם לכך שלכל צומת תהיה קשת שנכנסת אליה : לצומת שנבחר להיות זה שממנו יתחיל ה-BFS נכנסת הקשת הראשונה שקיבלה כיוון. שאר הצמתים יקבלו קשת שנכנסת אליהם תוך כדי התקדמות ה-BFS, שמגיע לכל צמתי הגרף. כך דרגת הכניסה של כל צומת בגרף תהיה לפחות 1.

סיבוכיות :

O(m + n) – BFS ואז DFS

שאלה ו

א. יהי G גרף לא מכוון, לא קשיר, עם שני רכיבי קשירות. הוכיחו כי הגרף המשלים הוא קשיר, והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.
הסברים : **<u>הגרף המשלים</u>** הינו גרף עם אותם צמתים כמו הגרף המקורי, אך קשתות אחרות : עבור כל שני צמתים u, v בגרף המקורי, אם היתה ביניהם קשר בגרף המקורי, בגרף המשלים לא תהיה ביניהם קשת. אם בגרף המקורי לא היתה ביניהם קשת, בגרף המשלים תהיה ביניהם קשת.
<u>קוטר של גרף</u> הינו המרחק המקסימלי בין שני צמתים כלשהם בגרף. המרחק בין שני צמתים הוא אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם.

ב. יהי G גרף לא מכוון עם b קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות (n-1)/2. הוכיחו כי G קשיר וכי הקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

תשובה ו

א. יהי G גרף לא מכוון, לא קשיר, עם שני רכיבי קשירות. הוכיחו כי הגרף המשלים הוא קשיר, והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.
הסברים: **הגרף המשלים** הינו גרף עם אותם צמתים כמו הגרף המקורי, אך קשתות אחרות: עבור כל שני צמתים u, v בגרף המקורי, אם היתה ביניהם קשר בגרף המקורי, בגרף המשלים לא תהיה ביניהם קשת. אם בגרף המקורי לא היתה ביניהם קשת, בגרף המשלים תהיה ביניהם קשת.
קוטר של גרף הינו המרחק המקסימלי בין שני צמתים כלשהם בגרף. המרחק בין שני צמתים הוא אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם.

נוכיח כי הקוטר של הגרף המשלים הוא לכל היותר 2, כלומר שבין כל שני צמתים בו יש מסלול באורך 2 קשתות לכל היותר. מזה כמובן ינבע שהוא קשיר.

נבחר שני קודקודים בגרף, u ו-v.

אפשרות אחת: הם שייכים לשני רכיבי קשירות שונים.

מכאן שבגרף המקורי לא היתה ביניהם צלע, לכן בגרף המשלים יש ביניהם צלע ישירה, כלומר מסלול באורך 1.

אפשרות שנייה: u ו-v שייכים לאותו רכיב קשירות. אזי יש צומת w שבגרף המקורי היה שייך לרכיב הקשירות השני, ולכן בגרף המשלים יש צלע ישירה הן בין u לבין w, והן בין v לבין w. כלומר בין v ל-u יש מסלול באורך 2 בדיוק.

ב. יהי G גרף לא מכוון עם b קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות (n-1)/2. הוכיחו כי G קשיר וכי הקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

נניח בשלילה כי קוטר הגרף הוא לפחות 3, כלומר קיימים שני קודקודים - נקרא להם u ו-v שהמרחק המינימלי ביניהם הוא 3.

נסמן את קבוצות השכנים של שני הצמתים הללו ב-N(u) ו-N(v).

האם ייתכן צומת ששייך לשתי הקבוצות הללו ? אם היה כזה, הרי שהיה מסלול באורך 2 בין u ו-v, בסתירה לכך שהמרחק המינימלי ביניהם הוא 3. לכן שתי קבוצות השכנים הינן זרות זו לזו.

מהנתון בשאלה, גודלה של כל קבוצת שכנים הוא לפחות (n-1)/2.

נסכום את הצמתים שונים יש בגרף: לפחות u ו-v ו-N(u) ו-N(v). כלומר לפחות 1+1+(n-1)/2+(n-1)/2.

אך הסכום הזה הוא n+1, מה שלא ייתכן. הגענו לסתירה.

שאלה ז

G הוא גרף מכוון ו- G' הוא גרף תשתית לא מכוון של G, כלומר מכיל אותם צמתים כמו G ויש לו קשתות בין צמתים שהיו ביניהם קשתות ב-G.

הוכח כי הגרף G הוא קשיר חזק אמ"מ :

1. גרף התשתית G' הוא קשיר וכן
2. כל קשת ב- G שייכת למעגל מכוון.

תשובה ז

G הוא גרף מכוון ו- G′ הוא גרף תשתית לא מכוון של G, כלומר מכיל אותם צמתים כמו G ויש לו קשתות בין צמתים שהיו ביניהם קשתות ב-G.

הוכח כי הגרף G הוא קשיר חזק אמ"מ :

1. גרף התשתית G' הוא קשיר וכן
2. כל קשת ב- G שייכת למעגל מכוון.

כיוון ראשון - נניח ש-G קשיר חזק, ונוכיח ש-G' קשיר (שזה מובן מאליו) ושכל קשת ב-G שייכת למעגל מכוון.

נלך על דרך השלילה, ונניח שיש קשת e=(u,v) ב-G, שאינה שייכת למעגל מכוון.

כיון ש-G קשיר חזק, יש מסלול מכוון מ-v ל-u. המסלול הזה ביחד עם הקשת e מהווה מעגל מכוון.

סתירה להנחה שהקשת לא שייכת למעגל מכוון.

כיוון שני - נניח ש-G' קשיר ושכל קשת ב-G שייכת למעגל מכוון, ונוכיח ש-G קשיר חזק.

נניח על דרך השלילה ש-G אינו קשיר חזק, למשל יש בו צומת u שאי אפשר להגיע ממנו עם כיוון הקשתות לצומת מסויים v.

כיון שהגרף G' קשיר, יש מסלול בין u ל-v. נוכיח שהמסלול הזה ב-G' משרה מסלול מכוון ב-G בין שני הצמתים הללו.

המסלול הזה מכיל קשתות משני סוגים : האחד, קשתות שבמהלך ההליכה שלנו מ-u ל-v אנו מתקדמים עם הכיוון המקורי של הקשת ב-G. הקשתות הללו הן "לטובתנו".

הבעייה קיימת רק רק עם הסוג השני של קשתות - אלו שבמהלך ההליכה שלנו מ-u ל-v אנו מתקדמים נגד הכיוון המקורי של הקשת ב-G.

נניח שיש קשת כזו x->y, ואנו רוצים להגיע דווקא מ-y ל-x כדי להשלים מסלול מכוון בין u ל-v.

אבל הנחנו שכל קשת ב-G שייכת למסלול מכוון. לכן יש ב-G מסלול מ-y ל-x שאפשר לתפור אותו (ואת דומיו) + הקשתות מהסוג הראשון כדי לקבל מסלול עם כיוון הקשתות מ-u ל-v.

סתירה להנחה שאי אפשר להגיע מ-u ל-v.

שאלה ח

נתון גרף G, קשיר. הוכיחו או הפריכו :

א. כל עץ פורש של G יכול להתקבל כעץ DFS בהרצת DFS מסויימת על הגרף G.

ב. לכל עצי ה-DFS של G אותו מספר של עלים.

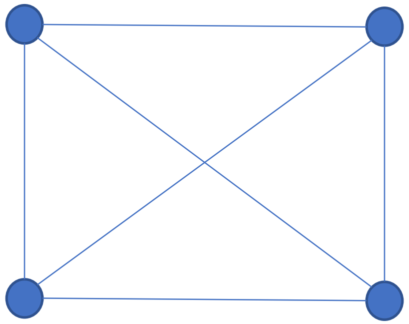
תשובה ח

נתון גרף G, קשיר. הוכיחו או הפריכו :

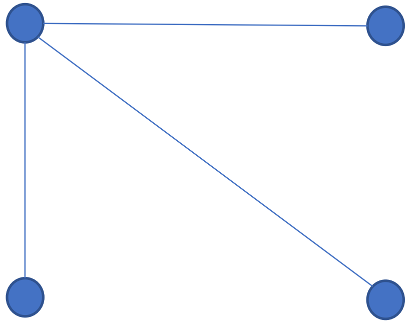
א. כל עץ פורש של G יכול להתקבל כעץ DFS בהרצת DFS מסויימת על הגרף G.

הטענה לא נכונה.

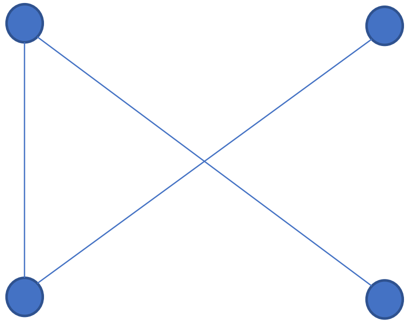
דוגמה מפריכה :



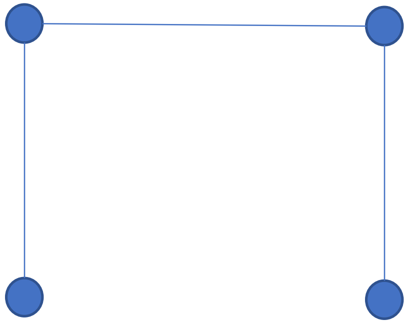
דוגמה לעץ פורש.



אך כל עץ DFS יהיה שרוך, למשל



או

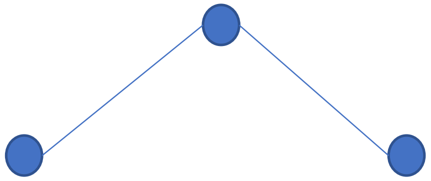


ב. לכל עצי ה-DFS של G אותו מספר של עלים.

הטענה לא נכונה. מספר העלים עשוי להשתנות כתלות בצומת ממנו מתחילים את ה-DFS.

דוגמה מפריכה :

אם מתחילים בצומת המרכזי



אם מתחילים בצומת צדדי

שאלה ט

שאלה 2 - BFS מול DFS (25 נק'). יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון, ויהי $s \in V$. נסמן ב- T_{BFS} עץ BFS של G שמושרש ב- s, ונסמן ב- T_{DFS} עץ DFS של G שמושרש ב- s. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הנפרדות הבאות:

(א) לכל T_{BFS} ולכל T_{DFS} מתקיים שהעומק של T_{BFS} קטן או שווה לעומק של T_{DFS}.

(ב) לכל T_{BFS} ולכל T_{DFS} מספר העלים של T_{BFS} גדול או שווה למספר העלים של T_{DFS}.

תשובה ט

שאלה 2 - BFS מול DFS (25 נק'). יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון, ויהי $s \in V$. נסמן ב- T_{BFS} עץ BFS של G שמושרש ב- s, ונסמן ב- T_{DFS} עץ DFS של G שמושרש ב- s. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הנפרדות הבאות:

(א) לכל T_{BFS} ולכל T_{DFS} מתקיים שהעומק של T_{BFS} קטן או שווה לעומק של T_{DFS}.

הטענה נכונה.

נניח בשלילה שעץ ה-BFS עמוק יותר מעץ ה-DFS. כלומר יש צומת שנמצא בשיכבה העמוקה ביותר של ה-BFS, ובמרחק קצר יותר מהשורש בעץ ה-DFS.

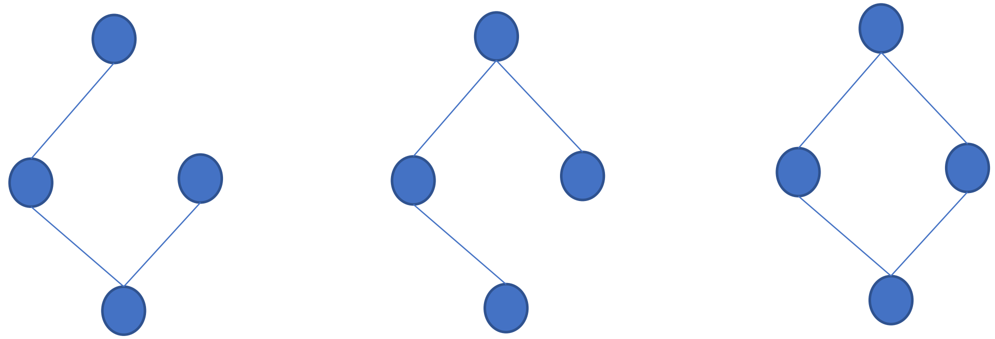
אך זו סתירה לכך שעץ ה- BFS הוא עץ המרחקים הקצרים ביותר.

(ב) לכל T_{BFS} ולכל T_{DFS} מספר העלים של T_{BFS} גדול או שווה למספר העלים של T_{DFS}.

הטענה לא נכונה.

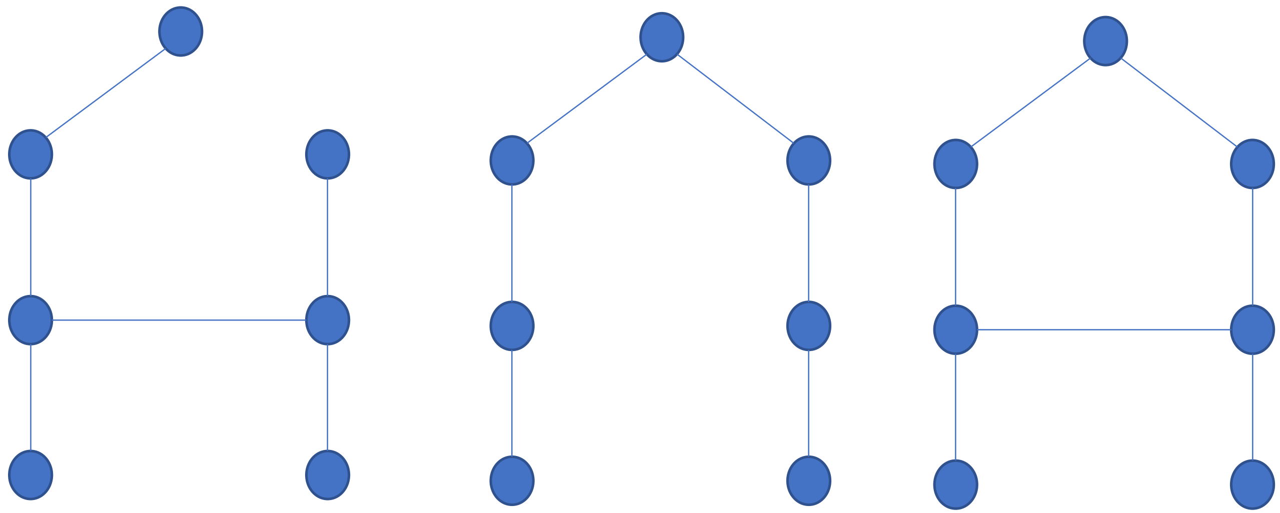
דוגמה 1

גרף | עץ BFS - 2 עלים | עץ DFS – עלה יחיד



דוגמה 2

גרף | עץ BFS - 2 עלים | עץ DFS אפשרי – 3 עלים



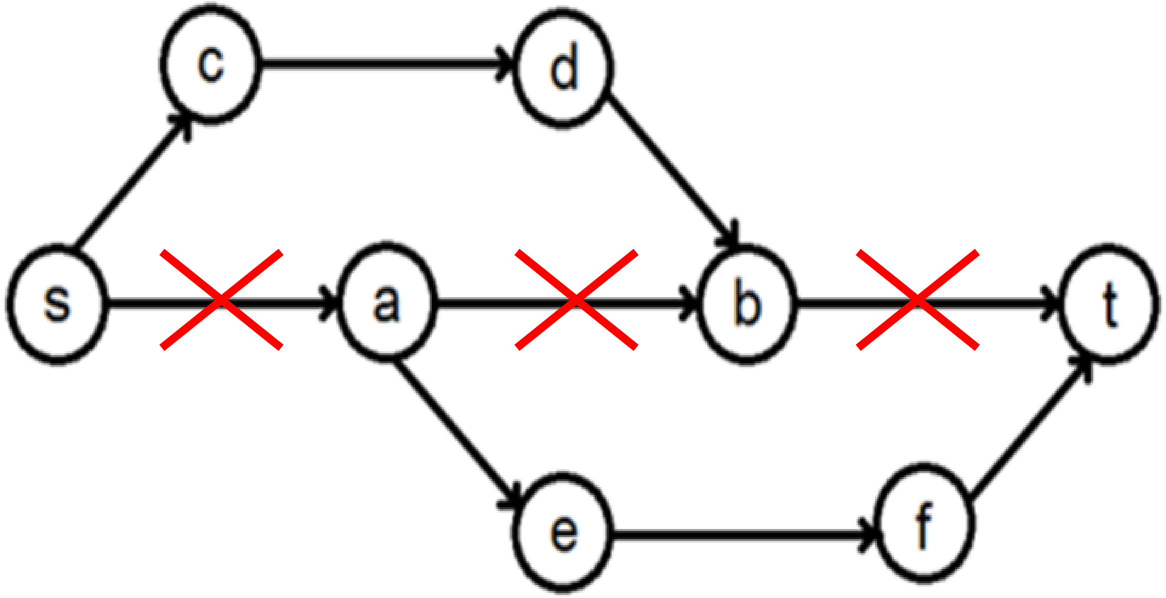
שאלה י

נתון גרף לא מכוון G עם מקור s ויעד t. ברצוננו למצוא אוסף גדול ככל האפשר של מסלולים זרים בצלעות מ- s ל- t. (שני מסלולים הינם זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת). נביט באלגוריתם הבא: מתחילים עם הגרף G. באיטרציה i מריצים BFS על הגרף הנוכחי למציאת מסלול P_i מ- s ל- t. אם נמצא מסלול P_i באיטרציה הנוכחית, אז מוחקים את כל הצלעות של P_i מהגרף וממשיכים לאיטרציה הבא. אם לא נמצא מסלול P_i באיטרציה הנוכחית, אז עוצרים ומחזירים כפלט את כל המסלולים $P_1,\ldots,P_{i-1}$, שנמצאו באיטרציות קודמות. הוכיחו/הפריכו את הטענה הבאה: האלגוריתם מוצא אוסף גדול ככל האפשר של מסלולים זרים בצלעות מ- s ל- t.

תשובה י

נתון גרף לא מכוון G עם מקור s ויעד t. ברצוננו למצוא אוסף גדול ככל האפשר של מסלולים זרים בצלעות מ- s ל- t. (שני מסלולים הינם זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת). נביט באלגוריתם הבא: מתחילים עם הגרף G. באיטרציה i מריצים BFS על הגרף הנוכחי למציאת מסלול P_i מ- s ל- t. אם נמצא מסלול P_i באיטרציה הנוכחית, אז מוחקים את כל הצלעות של P_i מהגרף וממשיכים לאיטרציה הבאה. אם לא נמצא מסלול P_i באיטרציה הנוכחית, אז עוצרים ומחזירים כפלט את כל המסלולים $P_1,\dots,P_{i-1}$, שנמצאו באיטרציות קודמות. הוכיחו/הפריכו את הטענה הבאה: האלגוריתם מוצא אוסף גדול ככל האפשר של מסלולים זרים בצלעות מ- s ל- t.

הטענה לא נכונה. הנה דוגמה מפריכה :



BFS ימצא את sabt כמסלול יחיד שהוא הקצר ביותר בין s ל-t, וימחק אותו.

עתה לא יהיה יותר אף מסלול נוסף בין s ל-t, כלומר נישאר עם מסלול אחד בלבד.

אך יש שני מסלולים זרים בקשתות : scdbt ו-saeft
כלומר האלגוריתם אינו מבצע את המבוקש.