

Krožnica in ostale stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Sara Bizjak in Urša Blažič

4. januar 2021

1 Uvod

V seminarski nalogi so predstavljene krožnice in ostale stožnice v racionalni Bézierjevi obliki. Med tem ko so stožnice na splošno omenjene le v grobem, pa se v krožnice bolj poglobimo in jih podamo natančneje.

Najprej se na splošno seznanimo z racionalnimi Bézierjevimi krivuljami in jih poslošimo na stožnice. Iz stožnic preidemo na krožnico in si jo natančneje pogledamo. Ugotovimo, kako lahko dobimo sklenjeno krožnico z racionalno krivuljo čim nižje stopnje in jo konstruiramo.

2 Racionalne Bézierjeve krivulje

Racionalna Bézierjeva krivulja stopnje n v \mathbb{R}^d je projekcija polinomske Bézierjeve krivulje stopnje n v \mathbb{R}^{d+1} na hiperravnino $w = 1$, kjer točko v \mathbb{R}^{d+1} označimo z

$$(\mathbf{x}, w) = (x_1, x_2, \dots, x_d, w).$$

Projekcija je definirana kot

$$(\mathbf{x}, w) \mapsto \left(\frac{1}{w}\mathbf{x}, 1\right).$$

Točke oblike $\lambda(\mathbf{x}, w)$ za $\lambda \neq 0$ se preslikajo v isto točko na projektivni ravnini, točke z $w = 0$ pa predstavljajo točke v neskončnosti.

Definicija. *Racionalna Bézierjeva krivulja* stopnje n je podana s parametrizacijo $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, določeno s predpisom

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)},$$

kjer so \mathbf{b}_i kontrolne točke krivulje, $w_i \in \mathbb{R}^d$ uteži, B_i^n pa i -ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n .

Krivuljo lahko brez škode za splošnost reparametriziramo tako, da sta w_0 in w_n enaka 1. Taki obliki pravimo *standardna oblika* racionalne Bézierjeve krivulje. Ostale uteži so prosti

parametri, ki vplivajo na obliko krivulje – s povečanjem enega izmed w_i se krivulja približa ustreznemu \mathbf{b}_i . Racionalne Bézierjeve krivulje s pozitivnimi uteži imajo podobne lastnosti kot polinomske.

Povzeto po [3].

3 Stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Stožnice bomo zapisali s pomočjo krivulje stopnje 2, zato bo kontrolni poligon sestavljen iz treh kontrolni točk. Ker lahko izberemo uteži v standardni obliki, velja:

$$w_0 = w_2 = 1$$

in

$$w_1 = w,$$

kjer je w_1 prosta utež.

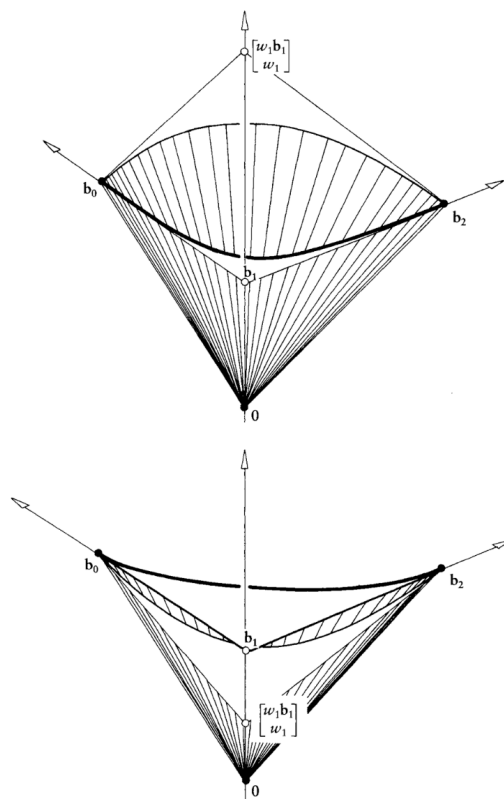
Stožnice lahko zapišemo v racionalni Bézierjevi obliki kot

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 \cdot B_0^2 + w \cdot \mathbf{b}_1 \cdot B_1^2 + \mathbf{b}_2 \cdot B_2^2}{B_0^2 + w \cdot B_1^2 + B_2^2}, \quad t \in [0, 1],$$

kjer so $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$ kontrolne točke krivulje, w utež, vezana na kontrolno točko \mathbf{b}_1 , B_i^2 , $i = 0, 1, 2$, pa Bernsteinovi bazni polinomi:

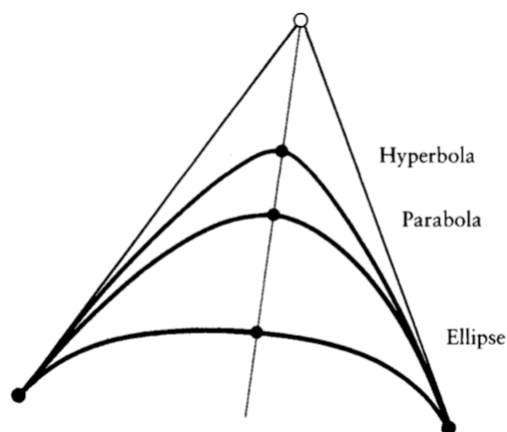
$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1 - t)^2 \\ B_1^2(t) &= 2t \cdot (1 - t) \\ B_2^2(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Ker uteži, kot že omenjeno, izbiramo v standardni obliki, je srednja utež w_1 prosti parameter, ki vpliva na obliko krivulje. Če utež w_1 povečujemo, se krivulja približuje kontrolni točki \mathbf{b}_1 , kot je prikazano na sliki 1.



Slika 1: Krivulji na obeh slikah sta v standardni obliki, torej velja $w_0 = w_2 = 1$. Sliki prikazujeta večanje uteži w_1 , to je približevanje krivulje h kontrolni točki b_1 . Slika je povzeta po [2].

Spreminjanje uteži w_1 in vpliv na obliko krivulje lahko klasificiramo v tri skupine. Če je $w_1 < 1$, ima krivulja obliko elipse, če je $w_1 = 1$, je krivulja parabola, za $w_1 > 1$ pa dobimo hiperbolo. Omenjeni trije tipi krivulj so prikazani na sliki 2.



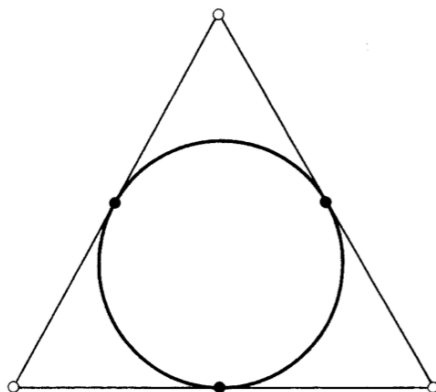
Slika 2: Klasifikacije krivulje glede na spreminjanje srednje uteži w_1 pri predpostavki, da velja $w_0 = w_2 = 1$. Slika je povzeta po [2].

Ena izmed najpomembnejših stožnic je krog, zato mu v nadaljevanju posvetimo več pozornosti.

4 Krožnica v racionalni Bézierjevi obliki

4.1 Motivacija

Naj kvadratična krivulja z utežjo $w_1 < 1$ opiše krožni lok. Ker je krog simetričen, mora kontrolni poligon tvoriti enakostranični trikotnik. Če poznamo kot v trikotniku, označimo ga z α , lahko določimo utež w_1 kot $w_1 = \cos\alpha$. Celoten krog lahko tedaj predstavimo kot zlepek večih takih krožnih lokov.



Slika 3: Celoten krog lahko sestavimo iz treh racionalnih kvadratičnih Bézierjevih krivulj. Slika je povzeta po [2].

Na sliki 3 je prikazan primer, ko je kot α velik 60 stopinj, torej velja $w_1 = \frac{1}{2}$. V tem primeru je krog sestavljen iz treh enakih krožnih lokov.

Namesto, da krožnico opisujemo z zlepkom krivulj, bi jo želeli opisati z eno samo racionalno krivuljo čim nižje stopnje.

Nadalje si najprej oglejmo formalno definicijo krožnice v racionalni Bézierjevi obliki in problem iskanja racionalne krivulje čim nižje stopnje, ki opiše krožnico, reducirajmo na lažjega.

4.2 Formulacija krožnice v racionalni Bézierjevi obliki

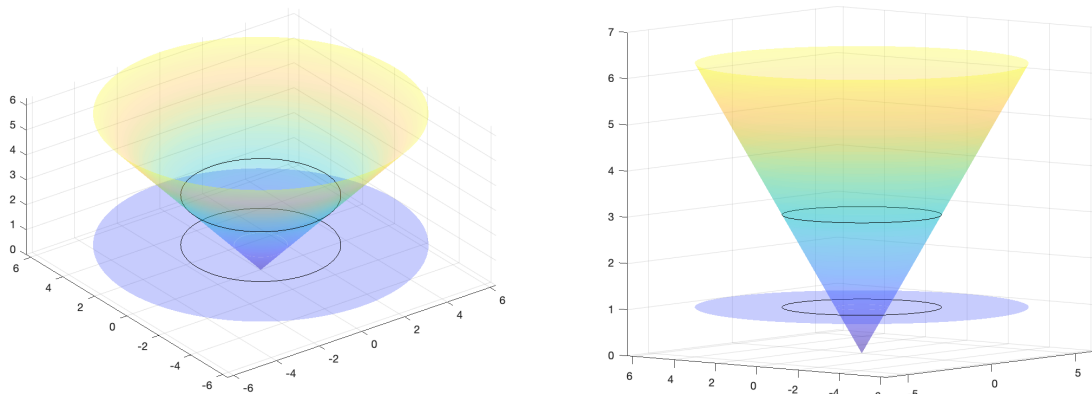
Krožnico lahko opišemo kot racionalno Bézierjevo krivuljo $\mathbf{C}(t) = (X(t), Y(t))$ s pomočjo projekcije krivulje $\tilde{\mathbf{C}}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$ na ravnino $w = 1$. Enačbo krožnice v \mathbb{R}^2 lahko zapišemo kot

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = 1.$$

Koordinate točk zamenjamo s koordinatami prostora \mathbb{R}^3 , ki smo jih dobili s projekcijo na ravnino $w = 1$.

$$\left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 = 1$$
$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

Zadnja enačba predstavlja enačbo stožca. Vidimo, da racionalna krivulja $C(t)$ eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje $\tilde{C}(t)$ (ki leži na stožcu) na ravnino $w = 1$.



Slika 4: Krožnico lahko dobimo kot projekcijo krivulje, ki leži na stožcu, na ravnino $w = 1$.

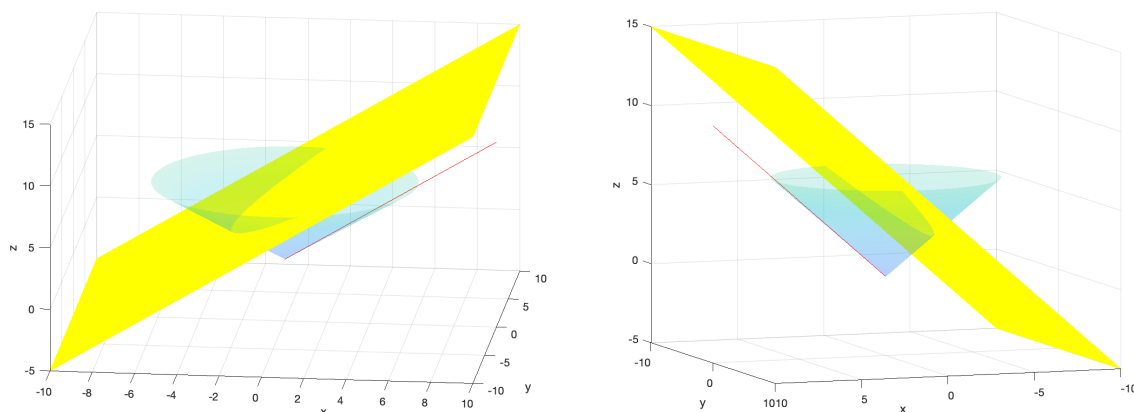
Iskanje racionalne krivulje čim nižje stopnje, ki eksaktno opiše celotno krožnico, lahko torej prevedemo na problem iskanja krivulje, ki leži na stožcu.

V naslednjih podpoglavjih bomo preučili Bézierjeve krivulje, ki tvorijo celoten krog. Še posebej nas bodo zanimala take krivulje, ki imajo same pozitivne uteži, saj bo take krivulje tudi lažje implementirati.

Začeli bomo s kvadratično Bézierjevo krivuljo in nadaljevali s krivuljami z naraščajočim polinomskim redom.

4.3 Kvadratična krivulja

Pokazali bomo, da racionalna kvadratična krivulja ne more opisati celotne krožnice. Do tega nas privede enostaven razmislek. Vse neracionalne kvadratične Bézierjeve krivulje so parabole, vse parabole pa dobimo kot presek stožca z ravnino, ki je vzporedna eni od nosilk stožca.



Slika 5: Presek stožca z ravnino, ki je vzporedna njegovi nosilki. Na sliki je ravnina obarvana z rumeno barvo, nosilka pa z rdečo.

Ko ravnino, s katero presekamo stožec, premikamo proti nosilki stožca, opazimo, da bo krožni lok v projekciji na ravnino opisal vedno večji kot, torej smo vedno bližje polnemu krogu. Ko pa se ravnina, s katero stožec sekamo, in nosilka stožca ujameta, je njun presek premica, ki se v projekciji slika v eno točko. Krožnice zato ne moremo zapisati s kvadratično racionalno krivuljo.

Opazimo pa, da lahko s parabolo zapišemo krožne loka, ki jih opišemo z naslednjim kontrolnim poligonom:

$$\tilde{P}_0 = (\cos \theta, -\sin \theta, 1)$$

$$\tilde{P}_1 = (1, 0, \cos \theta)$$

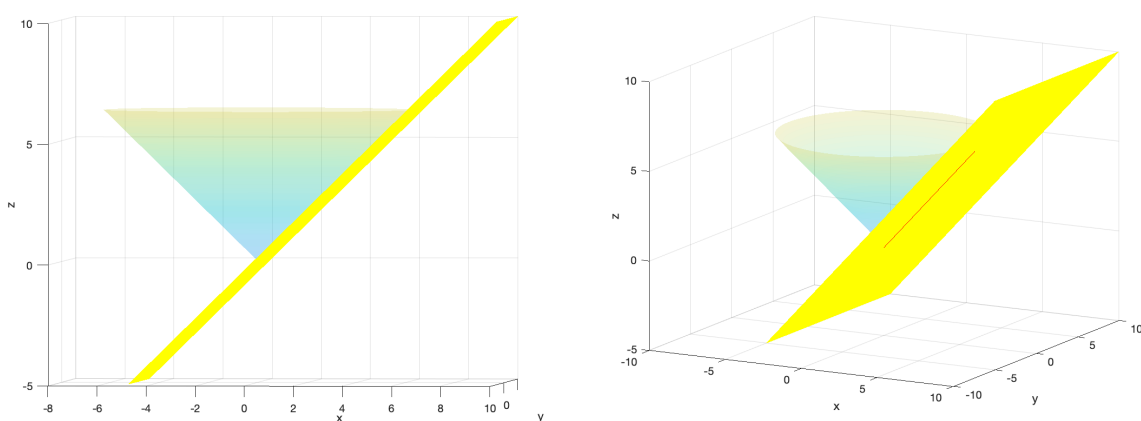
$$\tilde{P}_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 1),$$

kjer je θ polovični kot krožnega loka.

4.4 Kubična krivulja

Pokazali bomo, da tudi racionalna kubična krivulja ne more opisati celotne krožnice.

Denimo, da jo lahko, in da je krivulja $\tilde{C}(t)$, ko jo preslikamo na ravnino $w = 1$, torej $C(t)$, krožnica. Za kontrolni poligon izberemo štiri kontrolne točke, označimo jih b_0, b_1, b_2, b_3 . Ker gre krivulja skozi prvo in zadnjo kontrolno točko, ju izberemo na stožcu. Vemo, da so racionalne kubične krivulje sklenjene, zato se bosta ti dve kontrolni točki ob projekciji na ravnino $w = 1$ preslikali v isto točko. Zato lahko za prvo in zadnjo kontrolno točko b_0 in b_3 izberemo kar isto točko, ki že leži na ravnini $w = 1$. Ker krivulja $\tilde{C}(t)$ leži na stožcu, mora tangetna na krivuljo v točki b_0 (in hkrati tudi b_3) ležati na tangetni ravnini stožca v tej isti točki. Iz tega sledi, da tudi kontrolni točki b_1 in b_2 ležita na tangetni ravnini. Vemo, da je presek tangetne ravnine s stožcem premica, torej je krivulja $C(t)$ točka. Tako pridemo do zaključka, da tudi kubične krivulje ne morejo opisati celotne krožnice.



Slika 6: Presek stožca s tangentno ravnino. Presek je premica, ki je enaka eni od nosilk stožca.

4.5 Krivulja 4. stopnje

Da bomo dobili vse krivulje, v enačbo za stožec $\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$ vstavimo ???

Bernsteinove bazne polinome $B_i^8(t)$, $i = 0, \dots, 8$ enačimo z 0 in dobimo devet enačb. Brez škode za splošnost vzamemo $\tilde{\mathbf{P}}_0 = \tilde{\mathbf{P}}_4 = (1, 0, 1)$. Ker $\tilde{\mathbf{P}}_1$ in $\tilde{\mathbf{P}}_3$ ležita v tangentni ravnini $\tilde{\mathbf{P}}_0$, velja $\tilde{x}_1 = w_1$ in $\tilde{x}_3 = w_3$ (saj imamo ravnino $x = w$). Devet enačb se nam tako reducira v pet enačb:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3 &= -\tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_3 &= -\tilde{x}_1 \\ 3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_2 &= 0 \\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1w_2 &= 0 \\ 9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + 9\tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Iz zadnjih treh enačb dobimo dve možni rešitvi

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \alpha \\ \tilde{x}_2 &= -\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3} \\ \tilde{y}_2 &= \frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= -\alpha \\ \tilde{x}_2 &= -\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3} \\ \tilde{y}_2 &= -\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha\end{aligned}$$

kjer je $\alpha = (\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

Dobimo naslednje kontrolne točke, ki tvorijo kontrolni poligon:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_0 &= (1, 0, 1) \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 &= (-\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha, w_2) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1) \\ \tilde{\mathbf{P}}_4 &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

Ker mora biti α pozitivno število, mora veljati

$$w_2 > -\frac{1}{3}$$

in

$$-\left(\frac{3w_2+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \tilde{x}_1 < \left(\frac{3w_2+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vidimo, da zaradi \tilde{P}_1 in \tilde{P}_3 nikoli ne dobimo Bézierjeve krivulje 4. stopnje z vsemi pozitivnimi utežmi.

Če izberemo $\tilde{x}_1 = 0$, dobimo

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1) \\ \tilde{P}_1 &= (0, \pm(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0) \\ \tilde{P}_2 &= (-\frac{2}{3} - w_2, 0, w_2) \\ \tilde{P}_3 &= (0, \mp(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0) \\ \tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

V tem primeru nimamo več negativnih uteži, dobimo pa dve uteži, ki sta enaki 0. Povedali smo že, da točka z $w = 0$ pri projekciji na ravnino $w = 1$ predstavlja točko v neskončnosti. Torej, imamo dve točki v neskončnosti, tega pa pri implementaciji ne želimo.

Kako bi se znebili negativnih uteži? Tako, da dani krivulji dvignemo stopnjo.

Pogoji, da ima taka krivulja same pozitivne uteži, so

$$-\frac{1}{4} < \tilde{x}_1 < \frac{1}{4}$$

in

$$-\frac{3}{2}w_2 < \tilde{x}_1 < \frac{3}{2}w_2.$$

TUKI BI BLO FAJN DAT ŠE KAK PRIMER - SO V ČLANKU

5 Kubični Bézierjev krožni lok

Radi bi poiskali vse kubične Bézierjeve krožne loke. Da dobimo pogoje za kontrolne točke Bézierjeve krivulje, podobno kot prej krivuljo vstavimo v enačbo stožca

$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0.$$

Ko enačimo koeficiente $B_i^6(t)$, $i = 0 \dots 6$ z 0 dobimo sedem enačb.

Spomnimo se, da smo pri kvadratični krivulji izbrali za prvo in zadnjo točko dve točki, ki ležita na krožnici, srednjo točko pa na polovičnem kotu med njima. Tudi tu lahko predpostavimo, da sta prva in zadnja točka na krožnici:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (\cos \theta, -\sin \theta, 1) \\ \tilde{P}_3 &= (\cos \theta, \sin \theta, 1),\end{aligned}$$

kjer je θ polovični kot krožnega loka. S tem se nam sedem enačb poenostavi v pet enačb:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \tilde{x}_1 \cos \theta - \tilde{y}_1 \sin \theta \\
w_2 &= \tilde{x}_2 \cos \theta + \tilde{y}_2 \sin \theta \\
3\tilde{x}_1^2 \sin^2 \theta + 3\tilde{y}_1^2 \cos^2 \theta - 4\tilde{y}_2 \sin \theta + 6\tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \sin \theta \cos \theta &= 0 \\
9\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \sin^2 \theta + 9\tilde{y}_1 \tilde{x}_2 \cos \theta \sin \theta - 9\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \cos \theta \sin \theta + \\
+ 9(1 + \sin^2 \theta) \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 - 2 \sin^2 \theta &= 0 \\
3\tilde{x}_2^2 \sin^2 \theta + 3\tilde{y}_2^2 \cos^2 \theta + 4\tilde{y}_1 \sin \theta - 6\tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sin \theta \cos \theta &= 0
\end{aligned}$$

PRIMER ZA $\theta = \pi/2$???

Ker je kot θ spremenljivka, je iz zgornjega sistema enačb težko dobiti eksplicitno rešitev. Zato si bomo v nadaljevanju ogledali drugačen pristop za iskanje kubičnih Bézierjevih krožnih lokov, pomagali si bomo z spodnjim izrekom.

Izrek. Če je krivulja

$$C(t) = \frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))}{W(t)}$$

omejena za $t \in [-\infty, \infty]$ in so $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)$ in $W(t)$ polinomi brez skupnih deliteljev, potem noben izmed $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)$ in $W(t)$ ni lihe stopnje.

Dokaz. Najdemo ga v [1]. □

Iz izreka sledi, da so edini možni kubični Bézierjevi krožni loki oblike

$$C(t) = \frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}{W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))},$$

kjer je

$$\frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))}{W(t)}$$

kvadratični krožni lok.

Za kontrolni poligon kvadratičnega krožnega loka izberemo

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= (\cos \theta, -\sin \theta, 1) \\
\tilde{P}_1 &= (\sqrt{w_2}, 0, \sqrt{w_2} \cos \theta) \\
\tilde{P}_2 &= (w_2 \cos \theta, w_2 \sin \theta, w_2),
\end{aligned}$$

kjer je θ polovični kot krožnega loka. Tu so kontrolne točke izbrane podobno kot v 4.3, kjer je sedaj w_2 prosta utež. Za w'_0 in w'_3 mora veljati

$$\begin{aligned}
w'_0 &= a \\
w'_3 &= bw_2
\end{aligned}$$

Brez škode za splošnost lahko uteži postavimo v standardno obliko, torej sta w'_0 in w'_3 enaki 1. Iz tega sledi

$$a = 1 \quad \text{in} \quad w_2 = \frac{1}{b}.$$

Iz tega sledi, da so kontrolne točke kubičnega Bézierjevega krožnega loka enake

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_0 &= (\cos \theta, -\sin \theta, 1) \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 &= \left(\left(\frac{2}{3\sqrt{b}} + \frac{b \cos \theta}{3} \right), -\frac{b \sin \theta}{3}, \left(\frac{2 \cos \theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3} \right) \right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 &= \left(\left(\frac{\cos \theta}{3b} + \frac{2\sqrt{b}}{3} \right), \frac{\sin \theta}{3b}, \left(\frac{2\sqrt{b} \cos \theta}{3} + \frac{1}{3b} \right) \right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3 &= (\cos \theta, \sin \theta, 1),\end{aligned}$$

Ker želimo imeti nenegativne uteži, mora veljati še

$$\frac{2 \cos \theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3} \geq 0$$

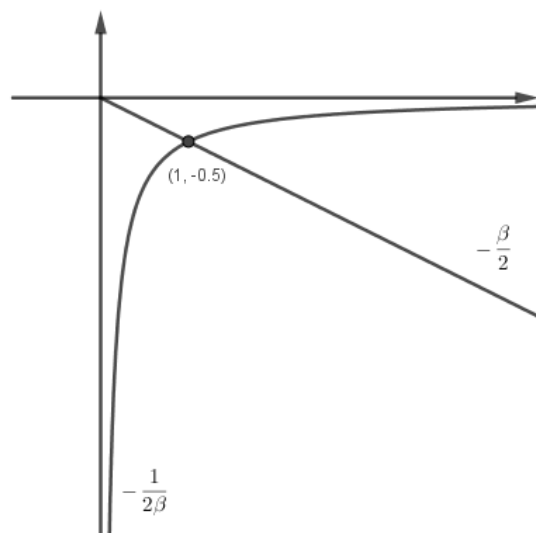
in

$$\frac{2\sqrt{b} \cos \theta}{3} + \frac{1}{3b} \geq 0.$$

Iz tega sledi

$$\cos \theta \geq -\frac{b^{3/2}}{2} \quad \text{in} \quad \cos \theta \geq -\frac{1}{2b^{3/2}}.$$

Označimo $\beta = b^{3/2}$ in si oglejmo funkciji $y = -\frac{\beta}{2}$ in $y = -\frac{1}{2\beta}$.



Slika 7: Grafa funkcij $y = -\frac{\beta}{2}$ in $y = -\frac{1}{2\beta}$ Slika je povzeta po [1].

Maksimalen kot θ dosežemo pri $b = 1$, in sicer $\theta = 120^\circ$. Ker je θ polovični kot krožnega loka,

je maksimalen krožni lok, ki ga lahko opišemo s kubično Bézierjevo krivuljo z nenegativnimi utežmi enak 240° .

Literatura

- [1] J. J. Chou, *Higher order Bezier circles*, Computer-Aided Design **27** (4) (1995) 303–309
- [2] G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD*, A Practical Guide, 5th ed., Morgan Kaufmann, 2002, poglavje 12.7
- [3] M. Knez, J. Grošelj, *Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje*, ... (2020)