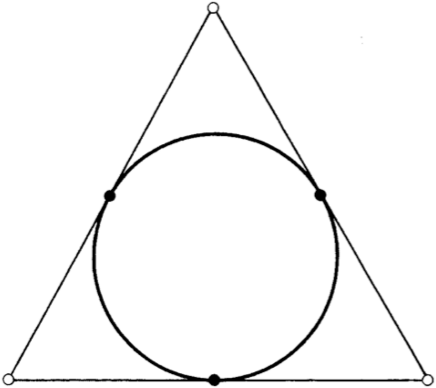
Krožnica in ostale stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Sara Bizjak in Urša Blažič

Fakulteta za matematiko in fiziko

5. januar 2021

Motivacija



Slika: Krog, sestavljen iz treh racionalnih kvadratičnih Bézierjevih krivulj.

Racionalna Bézierjeva krivulja

stopnje n v $\mathbb{R}^d$ je projekcija polinomske Bézierjeve krivulje stopnje n v $\mathbb{R}^{d+1}$ na hiperravnino $w = 1$, kjer točko v $\mathbb{R}^{d+1}$ označimo z

$$(\boldsymbol{x}, w) = (x_1, x_2, \ldots, x_d, w).$$

Projekcija je definirana kot

$$(\boldsymbol{x}, w) \mapsto (\frac{1}{w}\boldsymbol{x}, 1).$$

Definicija

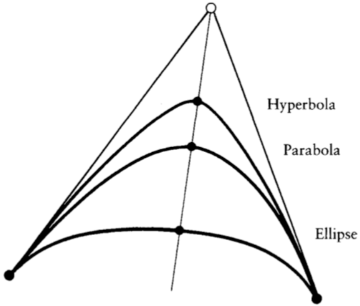
Racionalna Bézierjeva krivulja stopnje n je podana s parametrizacijo $\boldsymbol{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, določeno s predpisom

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \boldsymbol{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}.$$

Stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Za uteži velja: $w_0 = w_2 = 1$ in $w_1 = w$.
Stožnice lahko zapišemo v racionalni Bézierjevi obliki kot

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{\boldsymbol{b}_0 \cdot B_0^2 + w \cdot \boldsymbol{b}_1 \cdot B_1^2 + \boldsymbol{b}_2 \cdot B_2^2}{B_0^2 + w \cdot B_1^2 + B_2^2}, \quad t \in [0, 1].$$



Krožnica v racionalni Bézierjevi obliki

Krožnico lahko opišemo kot racionalno Bézierjevo krivuljo

$$\boldsymbol{C}(t) = (X(t), Y(t))$$

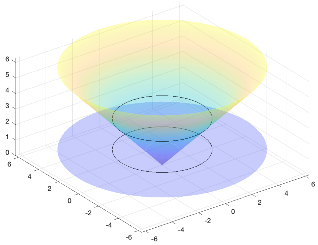
s pomočjo projekcije krivulje

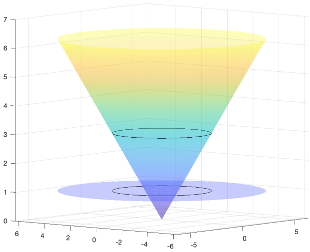
$$\tilde{\boldsymbol{C}}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y(t)}, W(t))$$

na ravnino $w = 1$.

$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

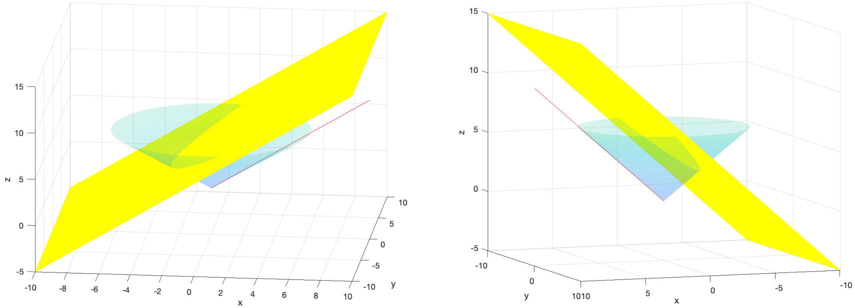
Krožnica v racionalni Bézierjevi obliki





Slika: Krožnico lahko dobimo kot projekcijo krivulje, ki leži na stožcu, na ravnino $w = 1$.

Kvadratična krivulja



Slika: Presek stožca z ravnino, ki je vzporedna njegovi nosilki. Na sliki je ravnina obarvana z rumeno barvo, nosilka pa z rdečo.

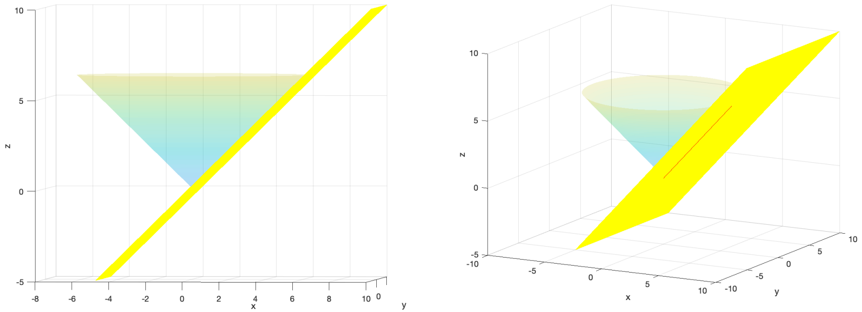
Kvadratična krivulja

S parabolo lahko zapišemo krožne loke, ki jih opišemo z naslednjim kontrolnim poligonom:

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_0 = (\cos\theta, -\sin\theta, 1)$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}_1 = (1, 0, \cos\theta)$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}_2 = (\cos\theta, \sin\theta, 1),$$

kjer je θ polovični kot krožnega loka.

Kubična krivulja



Slika: Presek stožca s tangentno ravnino. Presek je premica, ki je enaka eni od nosilk stožca.

Krivulja 4. stopnje

Enačbe:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3 &= -\tilde{y}_1\\ \tilde{x}_3 &= -\tilde{x}_1\\ 3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_2 &= 0\\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1 w_2 &= 0\\ 9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + 9\tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Krivulja 4. stopnje

Kontrolne točke:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{b}}_0 &= (1, 0, 1) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_2 &= (-\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha, w_2) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_4 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}
$$

kjer je $\alpha = (\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

Krivulja 4. stopnje

Kontrolne točka za $\tilde{x}_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{b}}_0 &= (1, 0, 1) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_1 &= (0, \pm(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} w_2)^{1/2}, 0) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_2 &= (-\frac{2}{3} - w_2, 0, w_2) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_3 &= (0, \mp(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} w_2)^{1/2}, 0) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_4 &= (1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Kubični Bézierjevi loki

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \tilde{x}_1 \cos\theta - \tilde{y}_1 \sin\theta \\
w_2 &= \tilde{x}_2 \cos\theta + \tilde{y}_2 \sin\theta \\
3\tilde{x}_1{}^2 \sin^2\theta + 3\tilde{y}_1{}^2 \cos^2\theta - 4\tilde{y}_2 \sin\theta + 6\tilde{x}_1\tilde{y}_1 \sin\theta\cos\theta &= 0 \\
9\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \sin^2\theta + 9\tilde{y}_1\tilde{x}_2 \cos\theta\sin\theta - 9\tilde{x}_1\tilde{y}_2 \cos\theta\sin\theta + \\
+9(1+\sin^2\theta)\tilde{y}_1\tilde{y}_2 - 2\sin^2\theta &= 0 \\
3\tilde{x}_2{}^2 \sin^2\theta + 3\tilde{y}_2{}^2 \cos^2\theta + 4\tilde{y}_1 \sin\theta - 6\tilde{x}_2\tilde{y}_2 \sin\theta\cos\theta &= 0
\end{aligned}
$$

Edini možni kubični Bézierjevi krožni loki so oblike

$$\boldsymbol{C}(t) = \frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}{W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))},$$

kjer je

$$\frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))}{W(t)}$$

kvadratični krožni lok. Za kontrolni poligon kvadratičnega krožnega loka izberemo

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{b}}_0 &= (\cos\theta, -\sin\theta, 1)\\ \tilde{\boldsymbol{b}}_1 &= (\sqrt{w_2}, 0, \sqrt{w_2}\cos\theta)\\ \tilde{\boldsymbol{b}}_2 &= (w_2\cos\theta, w_2\sin\theta, w_2),\end{aligned}$$

kjer je θ polovični kot krožnega loka.

Kontrolne točke kubičnega Bézierjevega krožnega loka:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{b}}_0 &= (\cos\theta, -\sin\theta, 1) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_1 &= \left(\left(\frac{2}{3\sqrt{b}} + \frac{b\cos\theta}{3}\right), -\frac{b\sin\theta}{3}, \left(\frac{2\cos\theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3}\right)\right) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_2 &= \left(\left(\frac{\cos\theta}{3b} + \frac{2\sqrt{b}}{3}\right), \frac{\sin\theta}{3b}, \left(\frac{2\sqrt{b}\cos\theta}{3} + \frac{1}{3b}\right)\right) \\
\tilde{\boldsymbol{b}}_3 &= (\cos\theta, \sin\theta, 1),
\end{aligned}
$$

Nenegativne uteži:

$$
\cos\theta \geq -\frac{b^{3/2}}{2} \quad \text{in} \quad \cos\theta \geq -\frac{1}{2b^{3/2}}
$$