

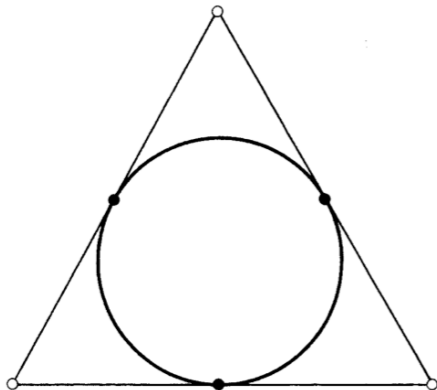
KROŽNICA IN OSTALE STOŽNICE V RACIONALNI BÉZIERJEVI OBLIKI

Sara Bizjak in Urša Blažič

Fakulteta za matematiko in fiziko

14. januar 2021

MOTIVACIJA



SLIKA: Krog, sestavljen iz treh racionalnih kvadratičnih Bézierjevih krivulj.

RACIONALNA BÉZIERJEVA KRIVULJA

stopnje n v \mathbb{R}^d je projekcija polinomske Bézierjeve krivulje stopnje n v \mathbb{R}^{d+1} na hiperravnino $w = 1$, kjer točko v \mathbb{R}^{d+1} označimo z

$$(\mathbf{x}, w) = (x_1, x_2, \dots, x_d, w).$$

Projekcija je definirana kot

$$(\mathbf{x}, w) \mapsto \left(\frac{1}{w}\mathbf{x}, 1\right).$$

DEFINICIJA

Racionalna Bézierjeva krivulja stopnje n je podana s parametrizacijo $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, določeno s predpisom

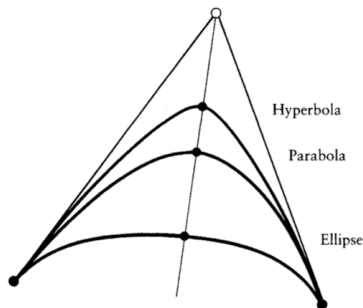
$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

STOŽNICE V RACIONALNI BÉZIERJEVI OBLIKI

Za uteži velja: $w_0 = w_2 = 1$ in $w_1 = w$.

Stožnice lahko zapišemo v racionalni Bézierjevi obliki kot

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 \cdot B_0^2 + w \cdot \mathbf{b}_1 \cdot B_1^2 + \mathbf{b}_2 \cdot B_2^2}{B_0^2 + w \cdot B_1^2 + B_2^2}, \quad t \in [0, 1].$$



KROŽNICA V RACIONALNI BÉZIERJEVI OBLIKI

Krožnico lahko opišemo kot racionalno Bézierjevo krivuljo

$$\mathbf{C}(t) = (X(t), Y(t))$$

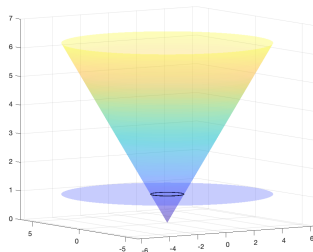
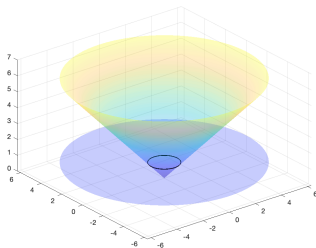
s pomočjo projekcije krivulje

$$\tilde{\mathbf{C}}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$$

na ravnino $w = 1$.

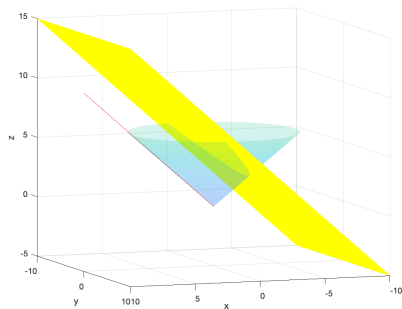
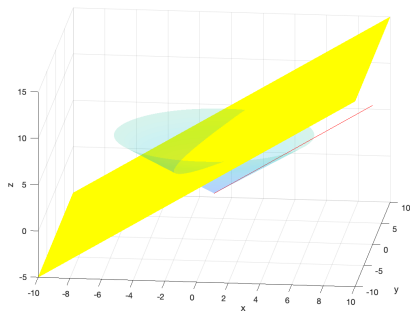
$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

KROŽNICA V RACIONALNI BÉZIERJEVI OBLIKI



SLIKA: Krožnico lahko dobimo kot projekcijo krivulje, ki leži na stožcu, na ravnino $w = 1$.

KVADRATIČNA KRIVULJA



SLIKA: Presek stožca z ravnino, ki je vzporedna njegovi nosilki. Na sliki je ravnina obarvana z rumeno barvo, nosilka pa z rdečo.

KVADRATIČNA KRIVULJA

S parabolo lahko zapišemo krožne loke, ki jih opišemo z naslednjim kontrolnim poligonom:

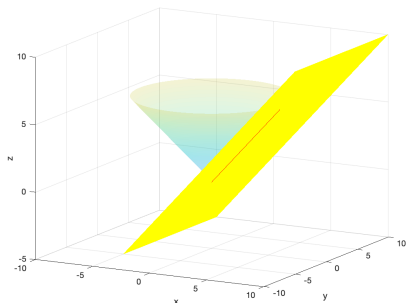
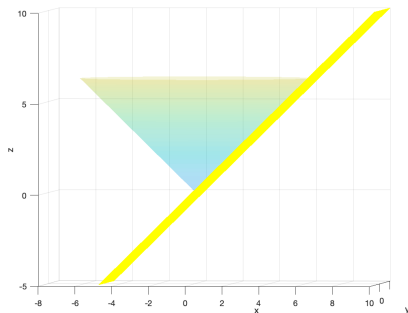
$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = (\cos \theta, -\sin \theta, 1)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = (1, 0, \cos \theta)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 1),$$

kjer je θ polovični kot krožnega loka.

KUBIČNA KRIVULJA



SLIKA: Presek stožca s tangentno ravnino. Presek je premica, ki je enaka eni od nosilk stožca.

KRIVULJA 4. STOPNJE

Enačbe:

$$\tilde{y}_3 = -\tilde{y}_1$$

$$\tilde{x}_3 = -\tilde{x}_1$$

$$3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_2 = 0$$

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1w_2 = 0$$

$$9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + 9\tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 = 0$$

KRIVULJA 4. STOPNJE

Kontrolne točke:

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = (1, 0, 1)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = \left(-\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha, w_2\right)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_3 = (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_4 = (1, 0, 1)$$

kjer je $\alpha = \left(\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

KRIVULJA 4. STOPNJE

Kontrolne točka za $\tilde{x}_1 = 0$:

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = (1, 0, 1)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = (0, \pm(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = (-\frac{2}{3} - w_2, 0, w_2)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_3 = (0, \mp(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_4 = (1, 0, 1)$$