

Krožnica in ostale stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Sara Bizjak in Urša Blažič

3. januar 2021

1 Uvod

V seminarski nalogi so predstavljene krožnice in ostale stožnice v racionalni Bézierjevi obliki. Med tem ko so stožnice na splošno omenjene le v grobem, pa se v krožnice bolj poglobimo in jih podamo natančneje.

Najprej se na splošno seznanimo z racionalnimi Bézierjevimi krivuljami in jih poslošimo na stožnice. Iz stožnic preidemo na krožnico in si jo natančneje pogledamo. Ugotovimo, kako lahko dobimo sklenjeno krožnico z racionalno krivuljo čim nižje stopnje in jo konstruiramo.

2 Racionalne Bézierjeve krivulje

Racionalna Bézierjeva krivulja stopnje n v \mathbb{R}^d je projekcija polinomske Bézierjeve krivulje stopnje n v \mathbb{R}^{d+1} na hiperravnino $w = 1$, kjer točko v \mathbb{R}^{d+1} označimo z

$$(\mathbf{x}, w) = (x_1, x_2, \dots, x_d, w).$$

Projekcija je definirana kot

$$(\mathbf{x}, w) \mapsto \left(\frac{1}{w}\mathbf{x}, 1\right).$$

Točke oblike $\lambda(\mathbf{x}, w)$ za $\lambda \neq 0$ se preslikajo v isto točko na projektivni ravnini, točke z $w = 0$ pa predstavljajo točke v neskončnosti.

Definicija. *Racionalna Bézierjeva krivulja* stopnje n je podana s parametrizacijo $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, določeno s predpisom

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)},$$

kjer so \mathbf{b}_i kontrolne točke krivulje, $w_i \in \mathbb{R}^d$ uteži, B_i^n pa i -ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n .

Krivuljo lahko brez škode za splošnost reparametriziramo tako, da sta w_0 in w_n enaka 1. Taki obliki pravimo *standardna oblika* racionalne Bézierjeve krivulje. Ostale uteži so prosti

parametri, ki vplivajo na obliko krivulje – s povečanjem enega izmed w_i se krivulja približa ustreznemu \mathbf{b}_i . Racionalne Bézierjeve krivulje s pozitivnimi uteži imajo podobne lastnosti kot polinomske.

3 Stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Stožnice bomo zapisali s pomočjo krivulje stopnje 2, zato bo kontrolni poligon sestavljen iz treh kontrolni točk. Ker lahko izberemo uteži v standardni obliki, velja:

$$w_0 = w_2 = 1$$

in

$$w_1 = w,$$

kjer je w_1 prosta utež.

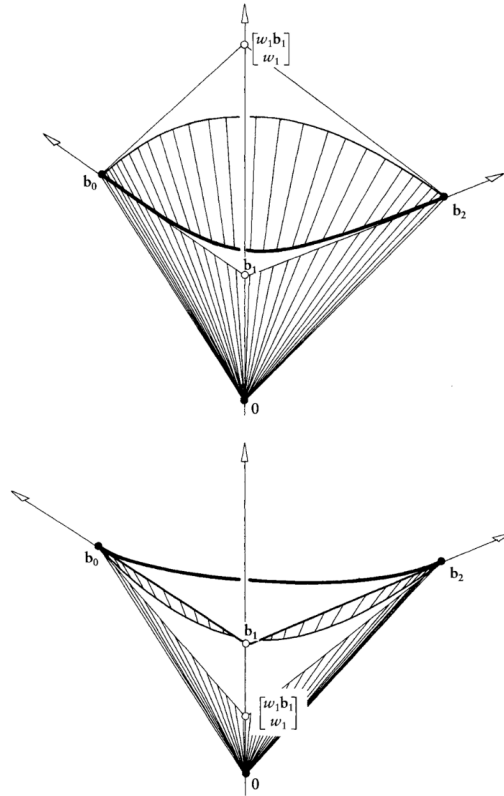
Stožnice lahko zapišemo v racionalni Bézierjevi obliki kot

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 \cdot B_0^2 + w \cdot \mathbf{b}_1 \cdot B_1^2 + \mathbf{b}_2 \cdot B_2^2}{B_0^2 + w \cdot B_1^2 + B_2^2} \quad t \in [0, 1],$$

kjer so $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$ kontrolne točke krivulje, w utež, vezana na kontrolno točko \mathbf{b}_1 , B_i^2 , $i = 0, 1, 2$, pa Bernsteinovi bazni polinomi:

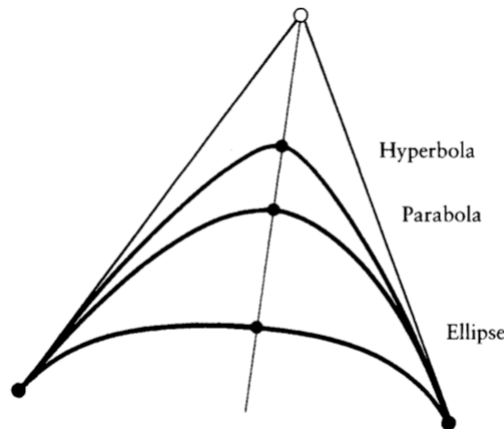
$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1 - t)^2 \\ B_1^2(t) &= 2t \cdot (1 - t) \\ B_2^2(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Ker uteži, kot že omenjeno, izbiramo v standardni obliki, je srednja utež w_1 prosti parameter, ki vpliva na obliko krivulje. Če utež w_1 povečujemo, se krivulja približuje kontrolni točki \mathbf{b}_1 kot je prikazano na sliki 3.



Slika 1: Krivulji na obeh slikah sta v standardni obliki, torej velja $w_0 = w_2 = 1$. Sliki prikazujeta večanje uteži w_1 , to je približevanje krivulje k kontrolni točki b_1 . Slika je povzeta po [2].

Spreminjanje uteži w_1 in vpliv na obliko krivulje lahko klasificiramo v tri skupine. Če je $w_1 < 1$, ima krivulja obliko elipse, če je $w_1 = 1$ je krivulja parabola, za $w_1 > 1$ pa dobimo hiperbolo. Omenjeni trije tipi krivulj so prikazani na sliki 3.



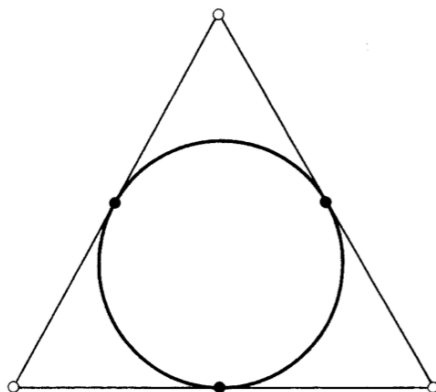
Slika 2: Klasifikacije krivulje glede na spreminjanje srednje uteži w_1 pri predpostavki, da velja $w_0 = w_2 = 1$. Slika je povzeta po [2].

Ena izmed najpomembnejših stožnic je krog, zato mu v nadaljevanju posvetimo več pozornosti.

4 Krožnica v racionalni Bézierjevi obliki

4.1 Motivacija

Naj kvadratična krivulja z utežjo $w_1 < 1$ opiše krožni lok. Ker je krog simetričen, mora kontrolni poligon tvoriti enakostranični trikotnik. Če poznamo kot v trikotniku, označimo ga z α , lahko določimo utež w_1 kot $w_1 = \cos\alpha$. Celoten krog lahko tedaj predstavimo kot zlepek večih takih krožnih lokov.



Slika 3: Celoten krog lahko sestavimo iz treh racionalnih kvadratičnih Bézierjevih krivulj. Slika je povzeta po [2].

Na sliki 4.1 je prikazan primer, ko je kot α velik 60 stopinj, torej velja $w_1 = \frac{1}{2}$. V tem primeru je krog sestavljen iz treh enakih krožnih lokov.

Namesto, da krožnico opisujemo z zlepkom krivulj, bi jo želeli opisati z eno samo racionalno krivuljo čim nižje stopnje.

Nadalje si najprej oglejmo formalno definicijo krožnice v racionalni Bézierjevi obliki in problem iskanja racionalne krivulje čim nižje stopnje, ki opiše krožnico, reducirajmo na lažjega.

4.2 Formulacija krožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Krožnico lahko opišemo kot racionalno Bézierjevo krivuljo $C(t) = (X(t), Y(t))$ s pomočjo projekcije krivulje $\tilde{C}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$ na ravnino $w = 1$. Enačbo krožnice v \mathbb{R}^2 lahko zapišemo kot

$$X(t)^2 + Y(t)^2 = 1$$

Koordinate točk zamenjamo s koordinatami prostora \mathbb{R}^3 , ki smo jih dobili s projekcijo na ravnino $w = 1$.

$$\left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 = 1$$
$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

Zadnja enačba predstavlja enačbo stožca. Vidimo, da racionalna krivulja $C(t)$ eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje $\tilde{C}(t)$ (ki leži na stožcu) na ravnino $w = 1$.

SLIKA stožca

Iskanje racionalne krivulje čim nižje stopnje, ki eksaktno opiše celotno krožnico, lahko torej prevedemo na problem iskanja krivulje, ki leži na stožcu.

4.3 Kvadratična krivulja

Pokazali bomo, da racionalna kvadratična krivulja ne more opisati celotne krožnice. Vse neracionalne kvadratične Bézierjeve krivulje so parabole, vse parabole pa dobimo kot presek stožca z ravnino, ki je vzporedna eni od nosilk stožca. Ko ravnino, s katero presekamo stožec, premikamo proti nosilki stožca, opazimo, da bo krožni lok v projekciji na ravnino opisal vedno večji kot, torej smo vedno bližje polnemu krogu. Ko pa naredimo presek ravnine z nosilko stožca, je presek premica, ki se v projekciji slika v eno točko. Krožnice zato ne moremo zapisati s kvadratično racionalno krivuljo.

Opazimo, da lahko s parabolo zapišemo krožne loke, ki jih lahko opišemo z naslednjim kontrolnim polinomom:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (\cos(\theta), -\sin(\theta), 1) \\ \tilde{P}_1 &= (1, 0, \cos(\theta)) \\ \tilde{P}_2 &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 1),\end{aligned}$$

kjer je θ polovični kot krožnega loka. Če izberemo samo pozitivne uteži ($\cos \theta > 0$), je $C(t)$ manj kot 180° , če pa je srednja utež enaka 0 ($\cos \theta = 0$), je $C(t)$ točno 180° . ??

4.4 Kubična krivulja

Pokazali bomo, da tudi racionalna kubična krivulja ne more opisati celotne krožnice.

Za kontrolni poligon potrebujemo štiri kontrolne točke. S krivuljo interpoliramo prvo in zadnjo kontrolno točko, izberemo ju na stožcu. ????

4.5 Krivulja 4. stopnje

Da bomo dobili vse krivulje, v enačbo za stožec $\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$ vstavimo ???

Bernsteinove bazne polinome $B_i^8(t)$, $i = 0, \dots, 8$ enačimo z 0 in dobimo devet enačb. Brez škode za splošnost vzamemo $\tilde{P}_0 = \tilde{P}_4 = (1, 0, 1)$. Ker \tilde{P}_1 in \tilde{P}_3 ležita v tangentni ravnini \tilde{P}_0 , velja

$\tilde{x}_1 = w_1$ in $\tilde{x}_3 = w_3$ (saj imamo ravnino $x = w$). Devet enačb se nam tako reducira v pet enačb:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3 &= -\tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_3 &= -\tilde{x}_1 \\ 3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_2 &= 0 \\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1w_2 &= 0 \\ 9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + 9\tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Iz zadnjih treh enačb dobimo dve možni rešitvi

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \alpha \\ \tilde{x}_2 &= -\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3} \\ \tilde{y}_2 &= \frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= -\alpha \\ \tilde{x}_2 &= -\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3} \\ \tilde{y}_2 &= -\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha\end{aligned}$$

kjer je $\alpha = (\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

Dobimo naslednje kontrolne točke, ki tvorijo kontrolni poligon:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_0 &= (1, 0, 1) \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1) \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 &= (-\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha, w_2) \\ \tilde{\mathbf{P}}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1) \\ \tilde{\mathbf{P}}_4 &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

Ker mora biti α pozitivno število, mora veljati

$$w_2 > -\frac{1}{3}$$

in

$$-\left(\frac{3w_2 + 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \tilde{x}_1 < \left(\frac{3w_2 + 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vidimo, da zaradi $\tilde{\mathbf{P}}_1$ in $\tilde{\mathbf{P}}_3$ nikoli ne dobimo kvartične Bézierjeve krivulje z vsemi pozitivnimi

utežmi.

Če izberemo $\tilde{x}_1 = 0$, dobimo

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= (1, 0, 1) \\ \tilde{P}_1 &= (0, \pm(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0) \\ \tilde{P}_2 &= (-\frac{2}{3} - w_2, 0, w_2) \\ \tilde{P}_3 &= (0, \mp(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0) \\ \tilde{P}_4 &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

V tem primeru nimamo več negativnih uteži, dobimo pa dve uteži, ki sta enaki 0. Povedali smo že, da točka z $w = 0$ pri projekciji na ravnino $w = 1$ predstavlja točko v neskončnosti. Torej, imamo dve točki v neskončnosti, tega pa pri implementaciji ne želimo.

Kako bi se znebili negativnih uteži? Tako, da dani krivulji dvignemo stopnjo.

Pogoji, da ima taka krivulja same pozitivne uteži, so

$$-\frac{1}{4} < \tilde{x}_1 < \frac{1}{4}$$

in

$$-\frac{3}{2}w_2 < \tilde{x}_1 < \frac{3}{2}w_2.$$

TUKI BI BLO FAJN DAT ŠE KAK PRIMER - SO V ČLANKU

5 Kubični Bézierjev krožni lok

Literatura

- [1] J. J. Chou, *Higher order Bezier circles*, Computer-Aided Design **27** (4) (1995) 303–309
- [2] G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD*, A Practical Guide, 5th ed., Morgan Kaufmann, 2002, poglavje 12.7
- [3] M. Knez, J. Grošelj, *Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje*, ... (2020)