

# Krožnica in ostale stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Sara Bizjak in Urša Blažič

7. januar 2021

## 1 Uvod

V tem članku so predstavljene krožnice in ostale stožnice v racionalni Bézierjevi obliki. Racionalne Bézierjeve krivulje so v kontekstu stožnic pomembne predvsem zato, ker – v nasprotju s polinomskimi Bézierjevimi krivuljami – krožnico opišejo eksaktno.

Najprej se na splošno seznanimo z racionalnimi Bézierjevimi krivuljami in njihovimi lastnostmi, ki jih v naslednjem poglavju posplošimo na stožnice. Iz stožnic preidemo na krožnico in jo natančneje formuliramo. Ugotovimo, kako lahko dobimo sklenjeno krožnico z racionalno krivuljo čim nižje stopnje in jo konstruiramo. Za konec naredimo še pregled kubičnih Bézierjevih krožnih lokov.

Formulacija racionalne Bézierjeve krivulje je povzeta po [3], glavni članek za celotno obravnavo pa je [1].

## 2 Racionalne Bézierjeve krivulje

Racionalna Bézierjeva krivulja stopnje  $n$  v  $\mathbb{R}^d$  je projekcija polinomske Bézierjeve krivulje stopnje  $n$  v  $\mathbb{R}^{d+1}$  na hiperravnino  $w = 1$ , kjer točko v  $\mathbb{R}^{d+1}$  označimo z

$$(\mathbf{x}, w) = (x_1, x_2, \dots, x_d, w).$$

Projekcija je definirana kot

$$(\mathbf{x}, w) \mapsto \left(\frac{1}{w}\mathbf{x}, 1\right).$$

Točke oblike  $\lambda(\mathbf{x}, w)$  za  $\lambda \neq 0$  se preslikajo v isto točko na projektivni ravnini, točke z  $w = 0$  pa predstavljajo točke v neskončnosti.

**Definicija.** *Racionalna Bézierjeva krivulja stopnje  $n$  je podana s parametrizacijo  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , določeno s predpisom*

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)},$$

kjer so  $\mathbf{b}_i$  kontrolne točke krivulje,  $w_i \in \mathbb{R}^d$  uteži,  $B_i^n$  pa  $i$ -ti Bernsteinov bazni polinom stopnje  $n$ .

Krivuljo lahko brez škode za splošnost reparametriziramo tako, da sta  $w_0$  in  $w_n$  enaka 1. Taki obliki pravimo *standardna oblika* racionalne Bézierjeve krivulje. Ostale uteži so prosti parametri, ki vplivajo na obliko krivulje – s povečanjem enega izmed  $w_i$  se krivulja približa ustreznemu  $\mathbf{b}_i$ . Racionalne Bézierjeve krivulje s pozitivnimi utežmi imajo podobne lastnosti kot polinomske.

### 3 Stožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Stožnice bomo zapisali s pomočjo krivulje stopnje 2, zato bo kontrolni poligon sestavljen iz treh kontrolnih točk. Ker lahko izberemo uteži v standardni obliki, velja:

$$w_0 = w_2 = 1$$

in

$$w_1 = w,$$

kjer je  $w_1$  prosta utež.

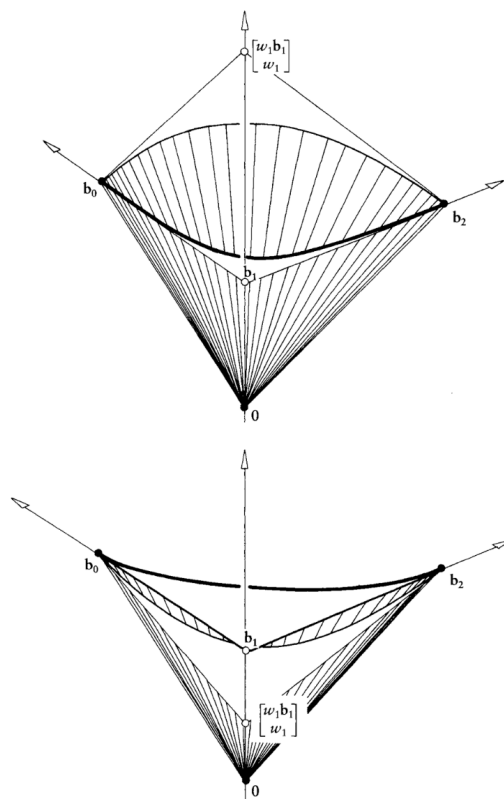
Stožnice lahko zapišemo v racionalni Bézierjevi obliki kot

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 \cdot B_0^2 + w \cdot \mathbf{b}_1 \cdot B_1^2 + \mathbf{b}_2 \cdot B_2^2}{B_0^2 + w \cdot B_1^2 + B_2^2}, \quad t \in [0, 1],$$

kjer so  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$  kontrolne točke krivulje,  $w$  utež, vezana na kontrolno točko  $\mathbf{b}_1$ ,  $B_i^2$ ,  $i = 0, 1, 2$ , pa Bernsteinovi bazni polinomi:

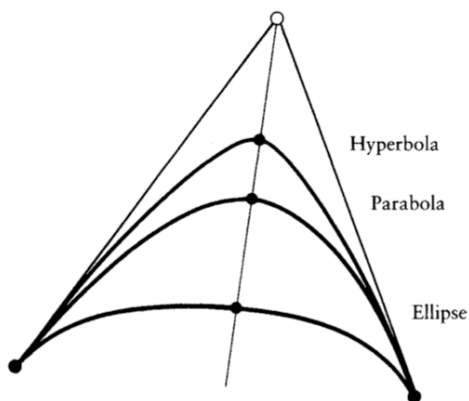
$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1 - t)^2 \\ B_1^2(t) &= 2t \cdot (1 - t) \\ B_2^2(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Ker uteži, kot že omenjeno, izbiramo v standardni obliki, je srednja utež  $w_1$  prosti parameter, ki vpliva na obliko krivulje. Če utež  $w_1$  povečujemo, se krivulja približuje kontrolni točki  $\mathbf{b}_1$ , kot je prikazano na sliki 1.



Slika 1: Krivulji na obeh slikah sta v standardni obliki, torej velja  $w_0 = w_2 = 1$ . Sliki prikazujeta večanje uteži  $w_1$ , to je približevanje krivulje h kontrolni točki  $b_1$ . Slika je povzeta po [2].

Spreminjanje uteži  $w_1$  in vpliv na obliko krivulje lahko klasificiramo v tri skupine. Če je  $w_1 < 1$ , ima krivulja obliko elipse, če je  $w_1 = 1$ , je krivulja parabola, za  $w_1 > 1$  pa dobimo hiperbolo. Omenjeni trije tipi krivulj so prikazani na sliki 2.



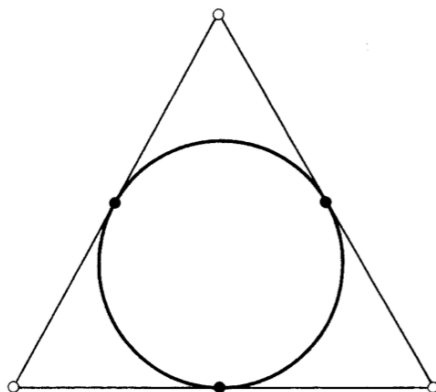
Slika 2: Klasifikacije krivulje glede na spreminjanje srednje uteži  $w_1$  pri predpostavki, da velja  $w_0 = w_2 = 1$ . Slika je povzeta po [2].

Ena izmed najpomembnejših stožnic je krožnica, zato ji v nadaljevanju posvetimo več pozornosti.

## 4 Krožnica v racionalni Bézierjevi obliki

### 4.1 Motivacija

Naj kvadratična krivulja z utežjo  $w_1 < 1$  opiše krožni lok. Ker je krog simetričen, mora kontrolni poligon tvoriti pravilni  $n$ -kotnik. Če poznamo kot  $\alpha$  v liku, označimo ga z  $\alpha$ , lahko določimo utež  $w_1$  kot  $w_1 = \cos\alpha$ . Celoten krog lahko tedaj predstavimo kot zlepek večih takih krožnih lokov.



Slika 3: Celoten krog lahko sestavimo iz treh racionalnih kvadratičnih Bézierjevih krivulj. Slika je povzeta po [2].

Na sliki 3 je prikazan primer, ko je kontrolni poligon enakostranični trikotnik – to pomeni, da je kot  $\alpha$  velik 60 stopinj in  $w_1 = \frac{1}{2}$ . V tem primeru je krog sestavljen iz treh enakih krožnih lokov.

Namesto, da krožnico opisujemo z zlepkom krivulj, bi jo želeli opisati z eno samo racionalno krivuljo čim nižje stopnje.

Nadalje si pogledjmo formalno definicijo krožnice v racionalni Bézierjevi obliki in problem iskanja racionalne krivulje čim nižje stopnje, ki opiše krožnico, reducirajmo na lažjega.

### 4.2 Formulacija krožnice v racionalni Bézierjevi obliki

Krožnico lahko opišemo kot racionalno Bézierjevo krivuljo  $\mathbf{C}(t) = (X(t), Y(t))$  s pomočjo projekcije krivulje  $\tilde{\mathbf{C}}(t) = (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), W(t))$  na ravnino  $w = 1$ . Enačbo krožnice v  $\mathbb{R}^2$  lahko zapišemo kot

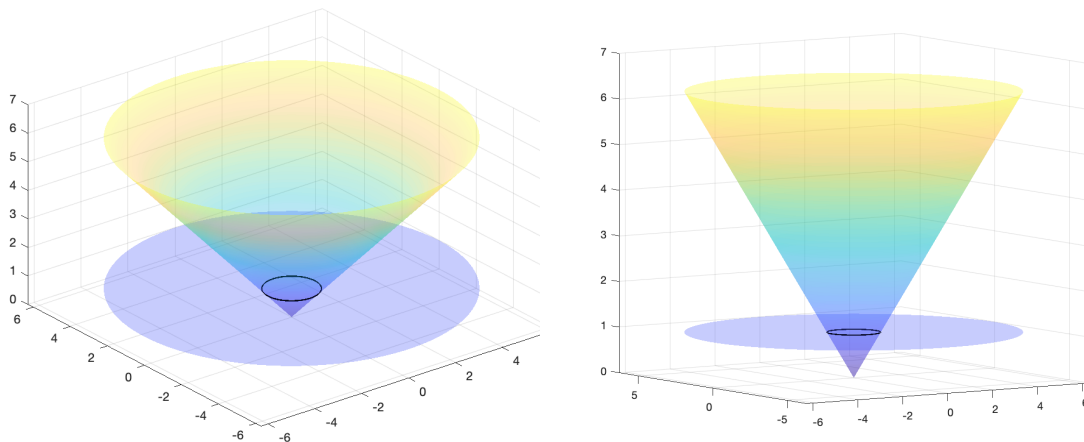
$$X(t)^2 + Y(t)^2 = 1.$$

Koordinate točk zamenjamo s koordinatami prostora  $\mathbb{R}^3$ , ki smo jih dobili s projekcijo na ravnino  $w = 1$ .

$$\left(\frac{\tilde{X}(t)}{W(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}(t)}{W(t)}\right)^2 = 1$$

$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$$

Zadnja enačba predstavlja enačbo stožca. Vidimo, da racionalna krivulja  $\mathbf{C}(t)$  eksaktno opiše krožnico kot projekcijo krivulje  $\tilde{\mathbf{C}}(t)$  (ki leži na stožcu) na ravnino  $w = 1$ .



Slika 4: Krožnico lahko dobimo kot projekcijo krivulje, ki leži na stožcu, na ravnino  $w = 1$ .

Iskanje racionalne krivulje čim nižje stopnje, ki eksaktno opiše celotno krožnico, lahko torej prevedemo na problem iskanja krivulje, ki leži na stožcu.

V naslednjih podpoglavjih bomo preučili Bézierjeve krivulje, ki tvorijo celoten krog. Še posebej nas bodo zanimala take krivulje, ki imajo same pozitivne uteži, saj bo take krivulje tudi lažje implementirati. Začeli bomo s kvadratično Bézierjevo krivuljo in nadaljevali s krivuljami z naraščajočim polinomskim redom.

### 4.3 Kvadratična krivulja

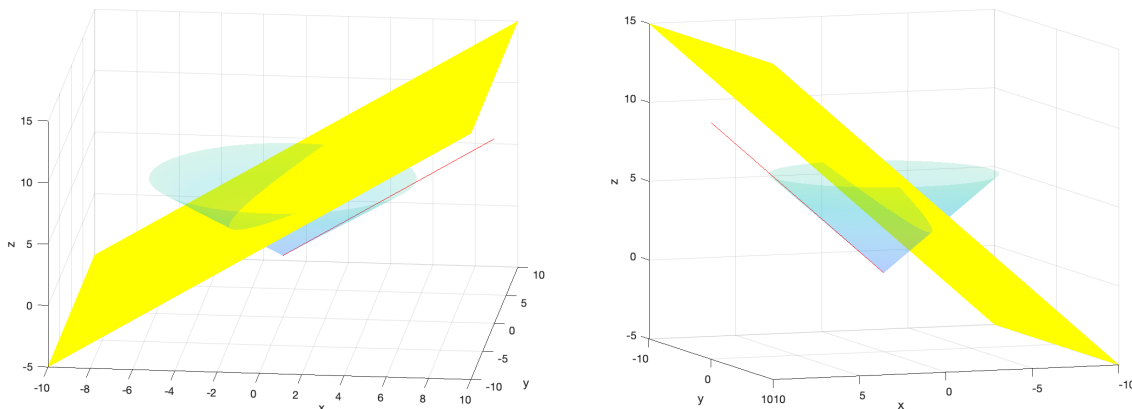
Pokazali bomo, da racionalna kvadratična krivulja ne more opisati celotne krožnice. Do tega nas privede enostaven razmislek. Vse neracionalne kvadratične Bézierjeve krivulje so parabole, vse parabole pa dobimo kot presek stožca z ravnino, ki je vzporedna eni od nosilk stožca. Ko ravnino, s katero presekamo stožec, premikamo proti nosilki stožca, opazimo, da bo krožni lok v projekciji na ravnino opisal vedno večji kot, torej smo vedno bližje polnemu krogu. Ko pa se ravnina, s katero stožec sekamo, in nosilka stožca ujameta, je njun presek premica, ki se v projekciji slika v eno točko. Krožnice zato ne moremo zapisati s kvadratično racionalno krivuljo. Opazimo pa, da lahko s parabolo zapišemo krožne loke, ki jih opišemo z naslednjim kontrolnim polinomom:

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = (\cos \theta, -\sin \theta, 1)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = (1, 0, \cos \theta)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 1),$$

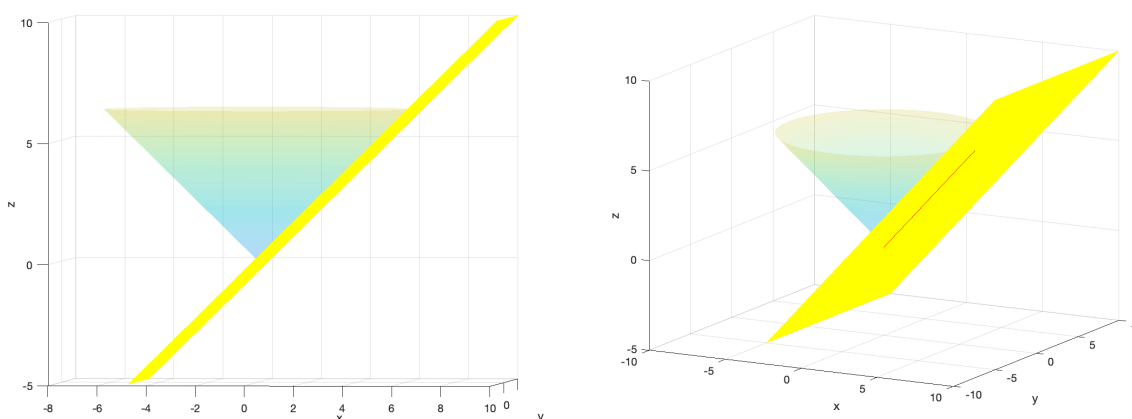
kjer je  $\theta$  polovični kot krožnega loka.



Slika 5: Presek stožca z ravnino, ki je vzporedna njegovi nosilki. Na sliki je ravnina obarvana z rumeno barvo, nosilka pa z rdečo.

#### 4.4 Kubična krivulja

Pokazali bomo, da tudi racionalna kubična krivulja ne more opisati celotne krožnice. Denimo, da jo lahko, in da je krivulja  $\tilde{C}(t)$ , ko jo preslikamo na ravnino  $w = 1$ , torej  $C(t)$ , krožnica. Za kontrolni poligon izberemo štiri kontrolne točke, označimo jih  $b_0, b_1, b_2, b_3$ . Ker gre krivulja skozi prvo in zadnjo kontrolno točko, ju izberemo na stožcu. Vemo, da so racionalne kubične krivulje sklenjene, zato se bosta ti dve kontrolni točki ob projekciji na ravnino  $w = 1$  preslikali v isto točko. Zato lahko za prvo in zadnjo kontrolno točko  $b_0$  in  $b_3$  izberemo kar isto točko, ki že leži na ravnini  $w = 1$ . Ker krivulja  $\tilde{C}(t)$  leži na stožcu, mora tangetna na krivuljo v točki  $b_0$  (in hkrati tudi  $b_3$ ) ležati na tangetni ravnini stožca v tej isti točki. Iz tega sledi, da tudi kontrolni točki  $b_1$  in  $b_2$  ležita na tangetni ravnini. Vemo, da je presek tangetne ravnine s stožcem premica, torej je krivulja  $C(t)$  točka. Tako pridemo do zaključka, da tudi kubične krivulje ne morejo opisati celotne krožnice.



Slika 6: Presek stožca s tangentno ravnino. Presek je premica, ki je enaka eni od nosilk stožca.

#### 4.5 Krivulja 4. stopnje

Da bomo dobili vse krivulje, v enačbo za stožec  $\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0$  vstavimo

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t) &= \tilde{x}_0 \cdot B_0^4(t) + \tilde{x}_1 \cdot B_1^4(t) + \tilde{x}_2 \cdot B_2^4(t) + \tilde{x}_3 \cdot B_3^4(t) + \tilde{x}_4 \cdot B_4^4(t) \\ \tilde{Y}(t) &= \tilde{y}_0 \cdot B_0^4(t) + \tilde{y}_1 \cdot B_1^4(t) + \tilde{y}_2 \cdot B_2^4(t) + \tilde{y}_3 \cdot B_3^4(t) + \tilde{y}_4 \cdot B_4^4(t)\end{aligned}$$

V enačbi sta  $\tilde{X}(t)$  in  $\tilde{Y}(t)$  kvadrirana, zato bomo morali med seboj množiti Bernsteinove bazne polinome. Izpeljemo lahko, da velja

$$B_i^n(t) \cdot B_j^m(t) = \frac{\binom{n}{i} \cdot \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j}^{n+m}(t).$$

Ker smo med seboj množili Bernsteinove bazne polinome stopnje 4, dobimo Bernsteinove bazne polinome stopnje 8. Ker so baza prostora, bo enakost veljala, ko bo seštevek koeficientov pred  $i$ -tim baznim polinomom enak 0. Iz tega dobimo devet enačb. Brez škode za splošnost vzamemo  $\tilde{\mathbf{b}}_0 = \tilde{\mathbf{b}}_4 = (1, 0, 1)$ . Ker  $\tilde{\mathbf{b}}_1$  in  $\tilde{\mathbf{b}}_3$  ležita v tangentni ravnini  $\tilde{\mathbf{b}}_0$ , velja  $\tilde{x}_1 = w_1$  in  $\tilde{x}_3 = w_3$  (saj imamo ravnino  $x = w$ ). Devet enačb se nam tako reducira v pet enačb:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3 &= -\tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_3 &= -\tilde{x}_1 \\ 3\tilde{x}_2 + 4\tilde{y}_1^2 - 3w_2 &= 0 \\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{y}_1\tilde{y}_2 - \tilde{x}_1w_2 &= 0 \\ 9\tilde{x}_2^2 - 8\tilde{y}_1^2 + 9\tilde{y}_2^2 - 9w_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Iz zadnjih treh enačb dobimo dve možni rešitvi

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \alpha \\ \tilde{x}_2 &= -\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3} \\ \tilde{y}_2 &= \frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= -\alpha \\ \tilde{x}_2 &= -\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3} \\ \tilde{y}_2 &= -\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha,\end{aligned}$$

kjer je  $\alpha = \left(\frac{3w_2}{2} - \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Dobimo naslednje kontrolne točke, ki tvorijo kontrolni poligon:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_0 &= (1, 0, 1) \\ \tilde{\mathbf{b}}_1 &= (\tilde{x}_1, \pm\alpha, \tilde{x}_1) \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 &= \left(-\frac{3w_2 - 4\tilde{x}_1^2 + 2}{3}, \pm\frac{4}{3}\tilde{x}_1\alpha, w_2\right) \\ \tilde{\mathbf{b}}_3 &= (-\tilde{x}_1, \mp\alpha, -\tilde{x}_1) \\ \tilde{\mathbf{b}}_4 &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

Ker mora biti  $\alpha$  pozitivno število, mora veljati

$$w_2 > -\frac{1}{3}$$

in

$$-\left(\frac{3w_2 + 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \tilde{x}_1 < \left(\frac{3w_2 + 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vidimo, da zaradi  $\tilde{\mathbf{b}}_1$  in  $\tilde{\mathbf{b}}_3$  nikoli ne dobimo Bézierjeve krivulje 4. stopnje z vsemi pozitivnimi utežmi.

Če izberemo  $\tilde{x}_1 = 0$ , dobimo

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_0 &= (1, 0, 1) \\ \tilde{\mathbf{b}}_1 &= (0, \pm(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0) \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 &= (-\frac{2}{3} - w_2, 0, w_2) \\ \tilde{\mathbf{b}}_3 &= (0, \mp(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_2)^{1/2}, 0) \\ \tilde{\mathbf{b}}_4 &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

V tem primeru nimamo več negativnih uteži, dobimo pa dve uteži, ki sta enaki 0. Povedali smo že, da točka z utežjo 0 pri projekciji na ravnino  $w = 1$  predstavlja točko v neskončnosti. Imamo torej dve točki v neskončnosti, tega pa pri implementaciji ne želimo, zato bi se negativnim utežem radi izognili. Negativnih uteži se lahko znebimo tako, da dani krivulji dvignemo stopnjo. Pogoji, da ima taka krivulja same pozitivne uteži, so

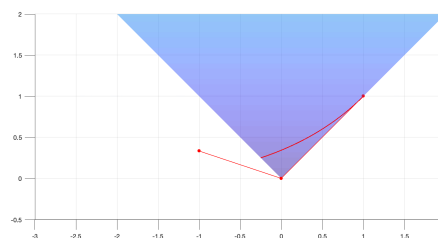
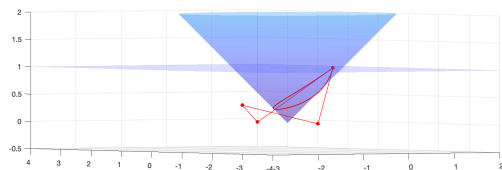
$$-\frac{1}{4} < \tilde{x}_1 < \frac{1}{4}$$

in

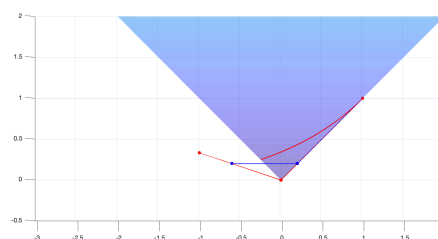
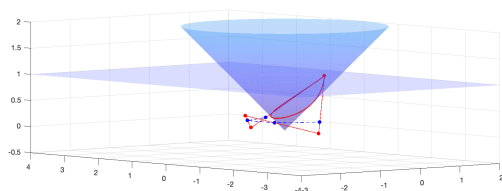
$$-\frac{3}{2}w_2 < \tilde{x}_1 < \frac{3}{2}w_2.$$

Poglejmo si, kako zgoraj opisano deluje na primeru.

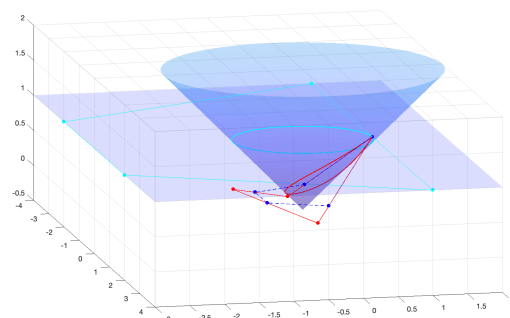
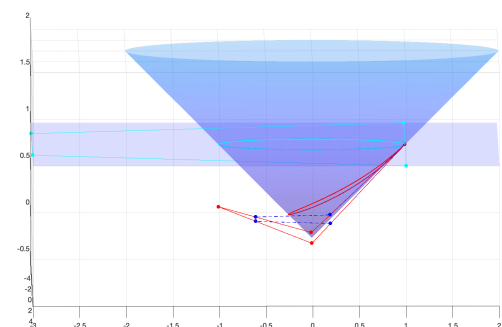




Slika 7: Primer krivulje 4. stopnje z dvema utežema enakima 0.



Slika 8: Primer iste krivulje kot na sliki 7, le da je njena stopnja dvignjena. Krivulja ima vse uteži pozitivne. S temno modro barvo je označen poligon krivulje z dvignjeno stopnjo.



Slika 9: Primer iste krivulje kot na slikah 7 in 8. S svetlo modro barvo sta označena projicirana krivulja na ravnino  $w = 1$  in njen kontrolni poligon.

## 5 Kubični Bézierjev krožni lok

Zanima nas, kakšne krožne loke lahko opišemo s kubično racionalno Bézierjevo krivuljo pri pogoju, da so vse uteži nenegativne. Da dobimo pogoje za kontrolne točke Bézierjeve krivulje, krivuljo vstavimo v enačbo stožca

$$\tilde{X}(t)^2 + \tilde{Y}(t)^2 - W(t)^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t) &= \tilde{x}_0 \cdot B_0^3(t) + \tilde{x}_1 \cdot B_1^3(t) + \tilde{x}_2 \cdot B_2^3(t) + \tilde{x}_3 \cdot B_3^3(t) = \\ &= \tilde{x}_0 \cdot (1-t)^3 + \tilde{x}_1 \cdot 3t(1-t)^2 + \tilde{x}_2 \cdot 3t^2(1-t) + \tilde{x}_3 \cdot t^3 \\ \tilde{Y}(t) &= \tilde{y}_0 \cdot B_0^3(t) + \tilde{y}_1 \cdot B_1^3(t) + \tilde{y}_2 \cdot B_2^3(t) + \tilde{y}_3 \cdot B_3^3(t) = \\ &= \tilde{y}_0 \cdot (1-t)^3 + \tilde{y}_1 \cdot 3t(1-t)^2 + \tilde{y}_2 \cdot 3t^2(1-t) + \tilde{y}_3 \cdot t^3\end{aligned}$$

$\tilde{X}(t)$  in  $\tilde{Y}(t)$  kvadriramo, zato moramo množiti Bernsteinove bazne polinome:

$$B_i^n(t) \cdot B_j^m(t) = \frac{\binom{n}{i} \cdot \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j}^{n+m}(t).$$

Iz tega dobimo sedem enačb.

Spomnimo se, da smo pri kvadratični krivulji izbrali za prvo in zadnjo točko dve točki, ki ležita na krožnici, srednjo točko pa na polovičnem kotu med njima. Tudi tu lahko predpostavimo, da sta prva in zadnja točka na krožnici:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_0 &= (\cos \theta, -\sin \theta, 1) \\ \tilde{\mathbf{b}}_3 &= (\cos \theta, \sin \theta, 1),\end{aligned}$$

kjer je  $\theta$  polovični kot krožnega loka. S tem se nam sedem enačb poenostavi v pet enačb:

$$\begin{aligned}w_1 &= \tilde{x}_1 \cos \theta - \tilde{y}_1 \sin \theta \\ w_2 &= \tilde{x}_2 \cos \theta + \tilde{y}_2 \sin \theta \\ 3\tilde{x}_1^2 \sin^2 \theta + 3\tilde{y}_1^2 \cos^2 \theta - 4\tilde{y}_2 \sin \theta + 6\tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ 9\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \sin^2 \theta + 9\tilde{y}_1 \tilde{x}_2 \cos \theta \sin \theta - 9\tilde{x}_1 \tilde{y}_2 \cos \theta \sin \theta + \\ &+ 9(1 + \sin^2 \theta) \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 - 2 \sin^2 \theta = 0 \\ 3\tilde{x}_2^2 \sin^2 \theta + 3\tilde{y}_2^2 \cos^2 \theta + 4\tilde{y}_1 \sin \theta - 6\tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \sin \theta \cos \theta &= 0\end{aligned}$$

**Zgled.** Pogledjmo si, kaj je rešitev sistema, če vzamemo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Dobimo naslednje kontrolne točke:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{b}}_0 &= (0, -1, 1) \\
\tilde{\mathbf{b}}_1 &= \left(\frac{2\alpha}{3}, -\frac{1}{3\alpha^2}, \frac{1}{3\alpha^2}\right) \\
\tilde{\mathbf{b}}_2 &= \left(\frac{2}{3\alpha}, \frac{\alpha^2}{3}, \frac{\alpha^2}{3}\right) \\
\tilde{\mathbf{b}}_3 &= (0, 1, 1)
\end{aligned}$$

kjer je  $\alpha = \frac{3x_1}{2}$ .

Kontrolne točke v 2D so  $\mathbf{b}_0 = (0, -1)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (2\alpha^3, -1)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (\frac{2}{\alpha^3}, 1)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (0, 1)$ .

Ker je kot  $\theta$  spremenljivka, je iz zgornjega sistema enačb težko dobiti eksplicitno rešitev. Zato si bomo v nadaljevanju ogledali drugačen pristop za iskanje kubičnih Bézierjevih krožnih lokov, pomagali si bomo s spodnjim izrekom.

**Izrek.** Če je krivulja

$$\mathbf{C}(t) = \frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))}{W(t)}$$

omejena za  $t \in [-\infty, \infty]$  in so  $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)$  in  $W(t)$  polinomi brez skupnih deliteljev, potem noben izmed  $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)$  in  $W(t)$  ni lihe stopnje.

*Dokaz.* Dokaz je dostopen v članku [1]. □

Iz izreka sledi, da so edini možni kubični Bézierjevi krožni loki oblike

$$\mathbf{C}(t) = \frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))}{W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t))},$$

kjer je

$$\frac{(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))}{W(t)}$$

kvadratični krožni lok.

Za kontrolni poligon kvadratičnega krožnega loka izberemo

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{b}}_0 &= (\cos \theta, -\sin \theta, 1) \\
\tilde{\mathbf{b}}_1 &= (\sqrt{w_2}, 0, \sqrt{w_2} \cos \theta) \\
\tilde{\mathbf{b}}_2 &= (w_2 \cos \theta, w_2 \sin \theta, w_2),
\end{aligned}$$

kjer je  $\theta$  polovični kot krožnega loka. Tu so kontrolne točke izbrane podobno kot v 4.3, kjer je  $w_2$  sedaj prosta utež.

Imenovalec kubične krivulje je enak

$$W(t)(aB_0^1(t) + bB_1^1(t)) = aB_0^3(t) + \left(\frac{2}{3}a\sqrt{w_2}\cos\theta + \frac{b}{3}\right)B_1^3(t) + \left(\frac{aw_2}{3} + \frac{2}{3}b\sqrt{w_2}\cos\theta\right)B_2^3(t) + bw_2B_3^3(t)$$

Za  $w'_0$  in  $w'_3$  mora veljati

$$\begin{aligned}w'_0 &= a \\w'_3 &= bw_2\end{aligned}$$

Brez škode za splošnost lahko uteži postavimo v standardno obliko, tedaj sta  $w'_0$  in  $w'_3$  enaki 1. Iz tega sledi

$$a = 1 \quad \text{in} \quad w_2 = \frac{1}{b}.$$

Iz tega sledi, da so kontrolne točke kubičnega Bézierjevega krožnega loka enake

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_0 &= (\cos\theta, -\sin\theta, 1) \\ \tilde{\mathbf{b}}_1 &= \left(\left(\frac{2}{3\sqrt{b}} + \frac{b\cos\theta}{3}\right), -\frac{b\sin\theta}{3}, \left(\frac{2\cos\theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3}\right)\right) \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 &= \left(\left(\frac{\cos\theta}{3b} + \frac{2\sqrt{b}}{3}\right), \frac{\sin\theta}{3b}, \left(\frac{2\sqrt{b}\cos\theta}{3} + \frac{1}{3b}\right)\right) \\ \tilde{\mathbf{b}}_3 &= (\cos\theta, \sin\theta, 1),\end{aligned}$$

Ker želimo imeti nenegativne uteži, mora veljati še

$$\frac{2\cos\theta}{3\sqrt{b}} + \frac{b}{3} \geq 0$$

in

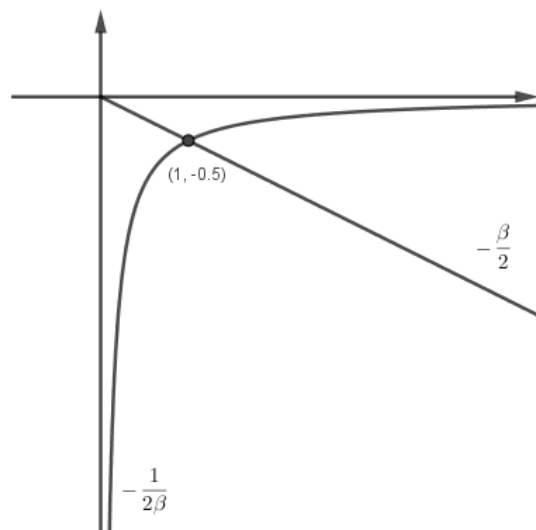
$$\frac{2\sqrt{b}\cos\theta}{3} + \frac{1}{3b} \geq 0.$$

Iz tega sledi

$$\cos\theta \geq -\frac{b^{3/2}}{2} \quad \text{in} \quad \cos\theta \geq -\frac{1}{2b^{3/2}}.$$

Označimo  $\beta = b^{3/2}$  in si oglejmo funkciji  $y = -\frac{\beta}{2}$  in  $y = -\frac{1}{2\beta}$ .

Maksimalen kot  $\theta$  dosežemo pri  $b = 1$ , in sicer  $\theta = 120^\circ$ . Ker je  $\theta$  polovični kot krožnega loka, je maksimalen krožni lok, ki ga lahko opišemo s kubično Bézierjevo krivuljo z nenegativnimi utežmi, enak  $240^\circ$ .



Slika 10: Grafa funkcij  $y = -\frac{\beta}{2}$  in  $y = -\frac{1}{2\beta}$ . Slika je povzeta po [1].

## 6 Zaključek

Obravnavali smo krožnico in krožni lok, ki smo ju predstavili kot racionalno Bézierjevo krivuljo. Pri iskanju najmanjše stopnje take krivulje, ki eksaktno opiše krožnico, je bil problem pretvorjen na iskanje polinomske krivulje (v  $\mathbb{R}^3$ ), ki leži na stožcu. Pokazali smo, da je najmanjša stopnja krivulje, ki opiše sklenjen krožni lok, stopnja 4, vendar taka krivulja nima vseh uteži pozitivnih. Da smo pridobili le pozitivne uteži, smo dvignili stopnjo krivulje – torej najnižja stopnja krivulje, s katero lahko eksaktno opišemo krožnico in ima pozitivne uteži, je stopnja 5. Iz tega je sledila geometrijska interpretacija dviga stopnje krivulje in njene projekcije iz stožca na ravnino  $w = 1$ , tako da smo dobili krožnico s pripadajočim kontrolnim poligonom. Nadalje smo si ogledali še kubične Bézierjeve krožne loke in ugotovili, da je največji kot, ki ga z njimi lahko opišemo, velik 240 stopinj.

## Literatura

- [1] J. J. Chou, *Higher order Bezier circles*, Computer-Aided Design **27** (4) (1995) 303–309
- [2] G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD*, A Practical Guide, 5th ed., Morgan Kaufmann, 2002, poglavje 12.7
- [3] Lastni zapiski po predavanjih profesorice M. Knez pri predmetu *Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje*, šolsko leto 2020/2021.