Poročilo projekta

Matematično modeliranje

Sara Bizjak

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

Avgust 2019

Kazalo

1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

Rešujemo problem otroka, ki se sprehaja po ravnem igrišču na mivki, za seboj pa vleče na vrvico privezano igračo tako, da je vrvica vseskozi napeta. Otrokovo gibanje opišemo s parametrično krivuljo. Program izračuna sled gibanja igrače po mivki in izriše animacijo.

2 MATEMATIČNO OZADJE

Rešujemo primer naloge, kjer gibanje igrače določimo z rešitvijo diferencialne enačbe.
Ker lahko za rešitev diferencialne enačbe v Matlabu uporabimo že vgrajeno funkcijo `ode45`, bomo reševanje diferencialnih enačb izpustili. Ponovimo samo nekaj osnovnih pojmov.
Ker imamo podatek o hitrosti, rešujemo DE prvega reda.

Enačbi, v kateri nastopa neznana funkcija in njen odvod, pravimo **diferencialna enačba prvega reda**. Najsplošnejša oblika diferencialne enačbe prvega reda je

$$F(x, y, dy) = 0,$$

kjer je F dana funkcija treh spremenljiv, $y = y(x)$ pa je neznana funkcija. Smiselno je zahtevati, da je definicijsko območje neznane funkcije odprt interval, sicer imamo težave z računanjem njenih odvodov. Pogosto lahko iz $F(x, y, dy) = 0$ izrazimo dy kot dunkcijo x in y. V tem primeru pravimo, da smo diferencialno enačbo prevedli na **standardno obliko**.

Vgrajena Matlabova funkcija za reševanje diferencialnih enačb izgleda takole:

$$[X, Y] = ode45(odefun, [x0, b], y0)$$

3 REŠITEV PROBLEMA

Poznamo parametrizacijo krivulje, po kateri se giba otrok. Ker je vrvica med otrokom in igračo vedno napeta, vemo, da imata v vsakem trenutku isto hitrost, oz. sta vedno enako oddaljena. Igrača se vedno giba v smeri otroka. Torej poznamo smer in velikost hitrosti igrače, njene pozicije oz. krivuljo gibanja pa dobimo kot rešitev diferencialne enačbe.

Z $x(t)$ in $y(y)$ je označena parametrizacija otroka, z $x_i(t)$ in $y_i(t)$ pa igrače. Odvodi so označeni kot $dx(t)$, $dy(t)$, $dx_i(t)$ in $dy_i(t)$.
Poznamo parametrizacijo otroka, torej $x(t)$ in $y(t)$. Vemo, da vektor hitrosti igrače kaže v smeri proti otroku (po vrvici). Torej velja

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= x(t) - x_i(t) \\ dy_i(t) &= y(t) - y_i(t). \end{aligned}$$

Vemo tudi, da sta hitrost otroka in hitrost igrače po velikosti enaki, torej velja

$$\|(dx_i(t), dy_i(t))\| = \|(dx(t), dy(t))\|.$$

Ker poznamo smer igrače in velikost hitrosti, lahko ugotovimo njeno parametrizacijo oziroma gibanje. Vektor smeri normiramo in ga pomnožimo z normo hitrosti otroka, saj se velikosti hitrosti ujemata.

$$\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{\left\| \begin{bmatrix} dx(t) \\ dy(t) \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} \right\|} \tag{1}$$

Da ohranjamo razdaljo oz. napeto vrvico med otrokom in igračo, račun (1) pomnožimo še s kotom med hitrostjo otroka in daljico, ki povezuje igračo in otroka. Velikost kota dobimo s skalarnim produktom, in sicer

$$\varphi = \frac{\begin{bmatrix} dx(t), & dy(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} dx(t) \\ dy(t) \end{bmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right\|}. \tag{2}$$

Če pomnožimo (1) in (2) dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} dx_i(t) \\ dy_i(t) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} dx(t), & dy(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right)}{\left\| \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right\|^2}. \tag{3}$$

Sistem (3) sovpada s funkcijo, ki jo ustavimo v Matlabovo vgrajeno funkcijo za reševanje diferencialnih enačb `ode45`.

$$odefun = @(t,\ P)\ \frac{\begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} dx(t), & dy(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right)}{\left\| \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right\|^2},$$

$$kjer\ P = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}.$$

Pri reševanju je predpostavljeno, da je vrvica dolga toliko, kot je začetna oddaljenost igrače in otroka. Igrača svoje gibanje vedno začne v koordinatnem izhodišču, torej v točki (0, 0), kar je tudi začetni pogoj pri reševanju nastavljene diferencialne enačbe.

3.1 Matlabove datoteke

Rešitev diferencialne enačbe izračunamo s funkcijo v datoteki `igraca.m`. Datoteki `risi_otrok.m` in `risi_igraca.m` izriseta krivuljo, po kateri se gibata otrok oziroma igrača, ti dve funkciji pa kličemo v `animacija.m`, ki gibanje s pomočjo premikajoče se pikice še izrišeta. Vse skupaj poženemo z datoteko `test.m`, kjer je tudi določena parametrizacija krivulje, po kateri se giba otrok in izračunan odvod.

4 PRIMERI GIBANJA

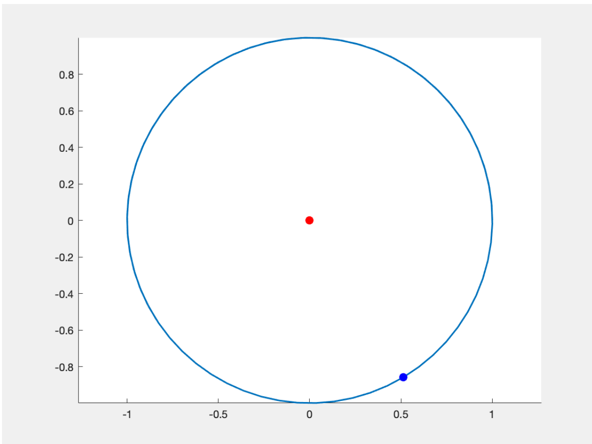
Poglejmo si nekaj primerov gibanja. Modra barva krivulje označuje gibanje otroka, rdeča pa igrače.

4.1 Primer 1

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

$$x(t) = cos(t),$$
$$y(t) = sin(t).$$

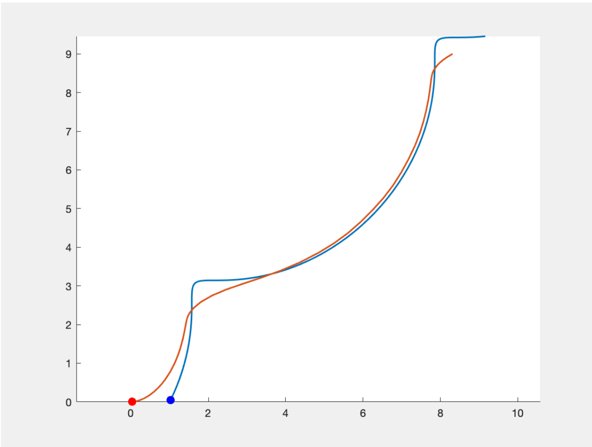
Če se otrok premika v krogu, igrača pa je na začetku v središču kroga (torej je vrvica dolga enako kot radij - predpostavka), ostane igrača ves čas na istem mestu.



4.2 Primer 2

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

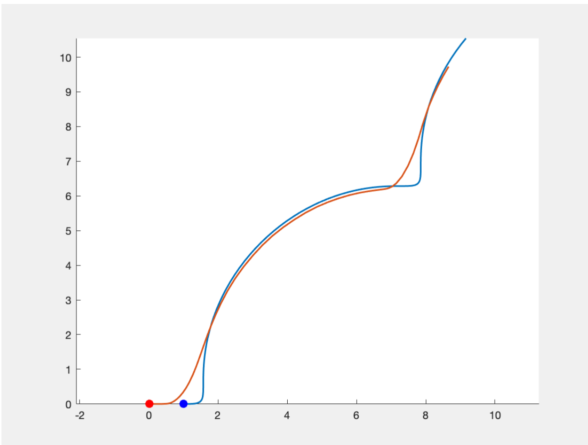
$$x(t) = t + cos(t),$$
$$y(t) = t + sin(t).$$



4.3 Primer 3

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

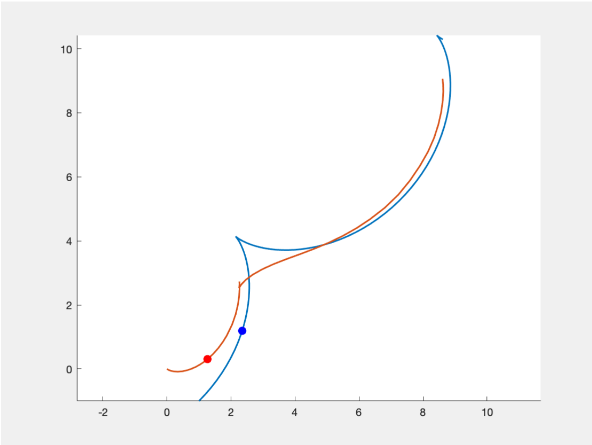
$$x(t) = t + cos(t),$$
$$y(t) = t - sin(t).$$



4.4 Primer 4

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

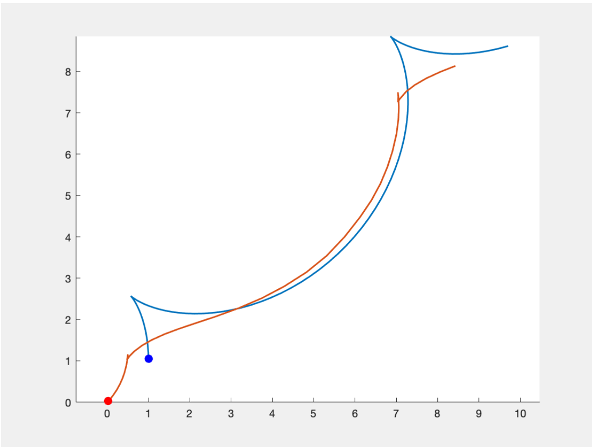
$$x(t) = t + cos(t) + sin(t),$$
$$y(t) = t + sin(t) - cos(t).$$



4.5 Primer 5

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

$$x(t) = t + cos(t) - sin(t),$$
$$y(t) = t + sin(t) + cos(t).$$



5 ZAKLJUČEK

Literatura

[1] J Cimprič: Diferencialne enačbe, FMF, skripta, dostopno na https://www.fmf.uni-lj.si/ cimpric/skripta/del6.pdf.