

Poročilo projekta

Matematično modeliranje

SARA BIZJAK

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

avgust 2019

Kazalo

1	PREDSTAVITEV PROBLEMA	2
2	MATEMATIČNO OZADJE	2
3	REŠITEV PROBLEMA	3
3.1	MATLABOVE DATOTEKE	4
4	PRIMERI GIBANJA	5
4.1	PRIMER 1	5
4.2	PRIMER 2	6
4.3	PRIMER 3	6
4.4	PRIMER 4	7
4.5	PRIMER 5	7
5	ZAKLJUČEK	8

1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

Rešujemo problem otroka, ki se sprehaja po ravnem igrišču na mivki, za seboj pa vleče na vrvico privezano igračo tako, da je vrvica vseskozi napeta. Otrokovo gibanje opišemo s parametrično krivuljo. Program izračuna sled gibanja igrače po mivki in izriše animacijo.

2 MATEMATIČNO OZADJE

Rešujemo primer naloge, kjer gibanje igrače določimo z rešitvijo diferencialne enačbe.

Ker lahko za rešitev diferencialne enačbe v Matlabu uporabimo že vgrajeno funkcijo `ode45`, bomo reševanje diferencialnih enačb izpustili. Ponovimo samo nekaj osnovnih pojmov.

Ker imamo podatek o hitrosti, rešujemo DE prvega reda.

Enačbi, v kateri nastopa neznana funkcija in njen odvod, pravimo **diferencialna enačba prvega reda**. Najsplošnejša oblika diferencialne enačbe prvega reda je

$$F(x, y, dy) = 0,$$

kjer je F dana funkcija treh spremenljivk, $y = y(x)$ pa je neznana funkcija. Smiselno je zahtevati, da je definicijsko območje neznane funkcije odprt interval, sicer imamo težave z računanjem njenih odvodov. Pogosto lahko iz $F(x, y, dy) = 0$ izrazimo dy kot funkcijo x in y . V tem primeru pravimo, da smo diferencialno enačbo prevedli na **standardno obliko**.

Vgrajena Matlabova funkcija za reševanje diferencialnih enačb izgleda takole:

$$[X, Y] = \text{ode45}(\text{odefun}, [x0, b], y0).$$

3 REŠITEV PROBLEMA

Poznamo parametrizacijo krivulje, po kateri se premika otrok. Ker je vrvica med otrokom in igračo vedno napeta, vemo, da imata v vsakem trenutku isto hitrost, oz. sta vedno enako oddaljena. Igrača se vedno giba v smeri otroka. Torej poznamo smer in velikost hitrosti igrače, njene pozicije oz. krivuljo gibanja pa dobimo kot rešitev diferencialne enačbe.

Z $x(t)$ in $y(t)$ je označena parametrizacija otroka, z $x_i(t)$ in $y_i(t)$ pa igrače. Odvodi so označeni kot $dx(t)$, $dy(t)$, $dx_i(t)$ in $dy_i(t)$. Poznamo parametrizacijo otroka, torej $x(t)$ in $y(t)$. Vemo, da vektor hitrosti igrače kaže v smeri proti otroku (po vrvici). Torej velja

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= x(t) - x_i(t) \\ dy_i(t) &= y(t) - y_i(t). \end{aligned}$$

Vemo tudi, da sta hitrost otroka in hitrost igrače po velikosti enaki, torej velja

$$\|(dx_i(t), dy_i(t))\| = \|(dx(t), dy(t))\|.$$

Ker poznamo smer igrače in velikost hitrosti, lahko ugotovimo njeno parametrizacijo oziroma gibanje. Vektor smeri normiramo in ga pomnožimo z normo hitrosti otroka, saj se velikosti hitrosti ujemata.

$$\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{\left\| \begin{bmatrix} dx(t) \\ dy(t) \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} \right\|} \quad (1)$$

Da ohranjamo razdaljo oz. napeto vrvico med otrokom in igračo, račun (1) pomnožimo še s kotom med hitrostjo otroka in daljico, ki povezuje igračo in otroka. Velikost kota dobimo s skalarnim produktom, in sicer

$$\varphi = \frac{\begin{bmatrix} dx(t), dy(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} dx(t) \\ dy(t) \end{bmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right\|}. \quad (2)$$

Če pomnožimo (1) in (2), dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} dx_i(t) \\ dy_i(t) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} dx(t), dy(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right)}{\left\| \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right\|^2}. \quad (3)$$

Sistem (3) sovpada s funkcijo, ki jo vstavimo v Matlabovo vgrajeno funkcijo za reševanje diferencialnih enačb `ode45`.

$$odefun = @(t, P) \frac{\begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} dx(t), dy(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right)}{\left\| \begin{bmatrix} x(t) - x_i(t) \\ y(t) - y_i(t) \end{bmatrix} \right\|^2},$$

$$kjer \ P = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}.$$

Pri reševanju je predpostavljeno, da je vrstica dolga toliko, kot je začetna oddaljenost igrace in otroka. Igrača svoje gibanje vedno začne v koordinatnem izhodišču, torej v točki (0, 0), kar je tudi nastavljen začetni pogoj pri reševanju diferencialne enačbe.

3.1 Matlabove datoteke

Rešitev diferencialne enačbe izračunamo s funkcijo v datoteki `igraca.m`. Datoteki `risi_otrok.m` in `risi_igraca.m` izriseta krivuljo, po kateri se gibata otrok oziroma igraca. Gibanje izrišemo s pomočjo `animacija.m`. Vse skupaj poženemo z datoteko `test.m`, kjer sta določena parametrizacija krivulje, po kateri se giba otrok, in njen odvod.

4 PRIMERI GIBANJA

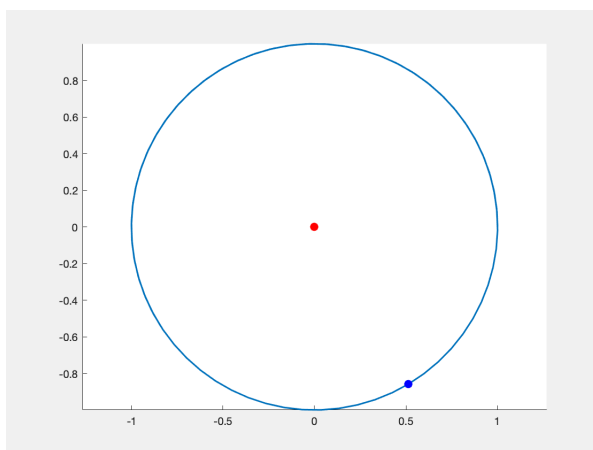
Poglejmo si nekaj primerov gibanja. Modra barva krivulje označuje gibanje otroka, rdeča pa igrače.

4.1 Primer 1

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t), \\y(t) &= \sin(t).\end{aligned}$$

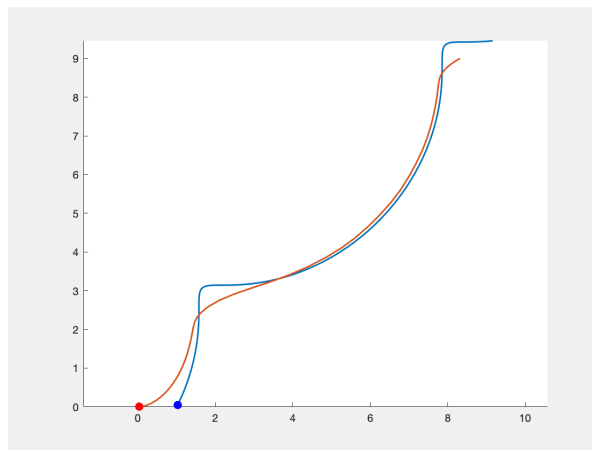
Če se otrok premika v krogu, igrača pa je na začetku v središču kroga (torej je vrstica dolga enako kot radij - predpostavka), ostane igrača ves čas na istem mestu.



4.2 Primer 2

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

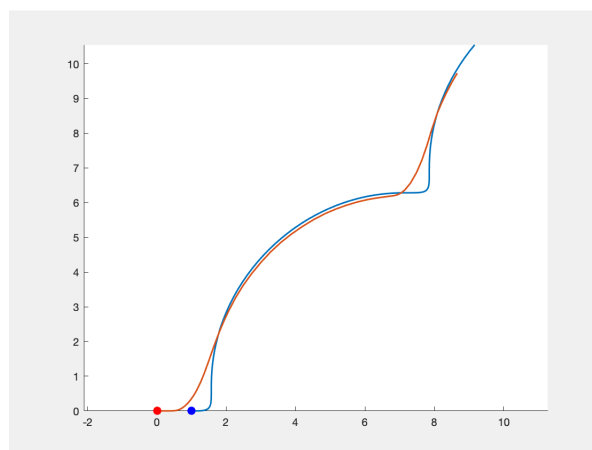
$$\begin{aligned}x(t) &= t + \cos(t), \\y(t) &= t + \sin(t).\end{aligned}$$



4.3 Primer 3

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

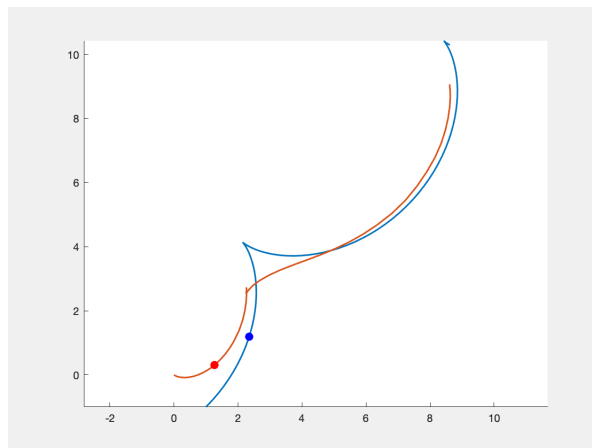
$$\begin{aligned}x(t) &= t + \cos(t), \\y(t) &= t - \sin(t).\end{aligned}$$



4.4 Primer 4

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

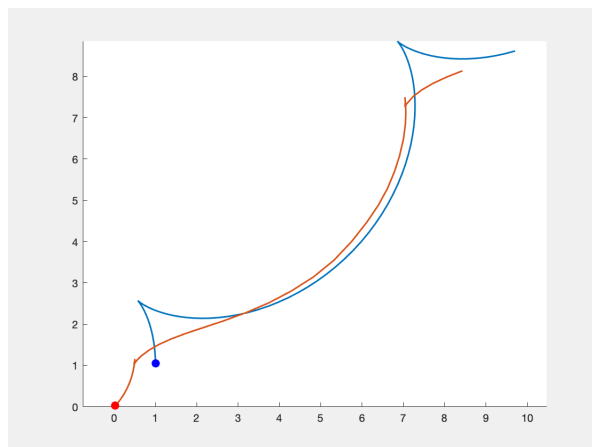
$$\begin{aligned}x(t) &= t + \cos(t) + \sin(t), \\y(t) &= t + \sin(t) - \cos(t).\end{aligned}$$



4.5 Primer 5

Gibanje otroka po krivulji s parametrizacijo:

$$\begin{aligned}x(t) &= t + \cos(t) - \sin(t), \\y(t) &= t + \sin(t) + \cos(t).\end{aligned}$$



5 ZAKLJUČEK

Literatura

- [1] J. Cimprič: Diferencialne enačbe, FMF, skripta, dostopno na <https://www.fmf.uni-lj.si/~cimpric/skripta/del6.pdf>.