POROČILO SEMINARSKE NALOGE

STATISTIKA

Sara Bizjak

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

JULIJ 2020

1. NALOGA

Podatki so vzeti iz datoteke `Kibergard`, kjer se nahajajo informacije o 43.886 družinah, ki stanujejo v mestu Kibergard. Za vsako družino so zabeleženi naslednji podatki:

- Tip družine (od 1 do 3)
- Število članov družine
- Število otrok v družini
- Skupni dohodek družine
- Mestna četrt, v kateri stanuje družina (od 1 do 4)
- Stopnja izobrazbe in vodje gospodinjstva (od 31 do 46: opisi v datoteki z navodili)

Nalogo sem reševala s pomočjo programa R. Koda, uporabljena za generiranje enostavnih slučajnih vzorcev in izračune, je priložena na koncu poročila pod naslovom *Dodatek A*, dostopna pa je tudi v priloženi datoteki *naloga1.R*.

<u>Primer a</u>
Vzamemo enostavni slučajni vzorec 200 družin in na njegovi podlagi ocenimo delež družin v Kibergardu, v katerih vodja gospodinjstva nima srednješolske izobrazbe (niti poklicne niti splošne mature). Opisan delež znaša $p = 0.195$.

<u>Primer b</u>
Ocenimo standardno napako in postavimo 95% interval zaupanja.
Standardno napako za delež izračunamo po formuli (na strani 210 v knjigi *John A. Rice: Mathematical Statistics and Data Analysis*):

$$\hat{se}(p) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)},$$

kjer so $p = 0.195$, $n = 200$, $N = 43.886$.
Dobimo rezultat $\hat{se}(p) = 0.02795203$.
Interval zaupanja je enak: $[0.140215, 0.249785]$.

<u>Primer c</u>
Vzorčni delež in ocenjeno standardno napako primerjamo s populacijskim deležem in pravo standardno napako.

- Vzorčni delež: 0.195
- Populacijski delež: 0.2115025
- Razlika obeh deležev: 0.01650253
- Ocenjena standardna napaka (iz vzorca): $0,02802185$
- Prava standardna napaka (iz celotne populacije): 0.02881085
- Razlika med ocenjeno in pravo standardno napako: 0.0008588181

Ker velja $0.2115025 \in [0.140215, 0.249785]$, interval zaupanja pokrije populacijski delež.

<u>Primer d</u>
GRAF
Izmed 100 intervalov zaupanja vzorcev po 200 jih 97 pokrije populacijski delež.

<u>Primer e</u>
Standardni odklon vzorčnih deležev za 100 prej dobljenih vzorcev je enak 0.02881085. Prava standardna napaka za vzorec velikosti 200 pa je 0.02888282. Razlikujeta se za $7.196778 \cdot 10^{-5}$.

<u>Primer f</u>
GRAF
Izmed 100 intervalov zaupanja vzorcev po 800 jih vseh 100 pokrije poulacijski delež.

2. NALOGA

Sklepi in izpeljave, ki jih bom uporabila pri vseh podnalogah, sledijo dokazu izreka v knjigi *John A. Rice: Mathematical Statistics and Data Analysis* (stran 232, 233).
Naredimo raziskavo na populaciji, ki ima K stratumov z velikostmi $N_1, N_2, \ldots, N_K$. Denimo, da lahko izberemo vzorec velikosti n.

<u>Primer a</u>
Denimo, da so stroški raziskave enaki $C = C_0 + nC_1$, kjer je n število enot v vzorcu (C_0 je začetni stršek, C_1 pa je nadaljnji strošek na enoto). Pri danih sredstvih za raziskavo v višini C poiščemo velikosti podvzorcev

$n_1, n_2, \ldots, n_K$, pri katerih je varianca standardne cenilke populacijskega povprečja minimalna.

Če imamo stratume velikosti $N_1, N_2, \ldots, N_K$, se moramo odločiti, kako velike vzorce bomo izbrali iz posameznih stratumov. Izbiramo tako, da bo standardna napaka cenilke $\overline{X}$ čim manjša. Poiščemo torej take $n_1, n_2, \ldots, n_K$, kjer $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_K$, da bo

$$\mathrm{var}(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{K} W_k^2 \left(\frac{\sigma_k^2}{n_k}\right) \left(\frac{N_k - n_k}{N_k - 1}\right)$$

čim manjša. Ker so v večini praktičnih situacij korekturni faktorji $\frac{N_k - n_k}{N_k - 1} \approx 1$, jih lahko zanemarimo. Rešujemo torej problem vezanega ekstrema:

$$f(n_1, n_2, \ldots, n_K) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\sigma_k^2}{n_k} W_k^2$$

$$\text{z vezjo } C = C_0 + nC_1.$$

Sestavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_K, \lambda) = f(n_1, n_2, \ldots, n_K) + \lambda(C_0 + \sum_{k=1}^{K} n_k C_1 - C).$$

Zapišemo parcialne odvode funkcije F in jih enačimo z 0.

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = -\frac{\sigma_i^2}{n_i^2}\, W_i^2 + \lambda\, C_1 = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, K.$$

Izrazimo n_i in dobimo sistem enačb

$$n_i = \frac{W_i \sigma_i}{\sqrt{\lambda\, C_1}} \tag{1}$$

Da določimo λ, naredimo vsoto enačbe (1) po i, $i = 1, 2, \ldots, K$.

$$n = \frac{1}{\sqrt{\lambda\, C_1}} \sum_{k=1}^{K} W_k \sigma_k$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^{K} W_k \sigma_k}{n\sqrt{C_1}} \tag{2}$$

Če združimo (1) in (2), dobimo:

$$n_i = n\ \frac{W_i\sigma_i}{\sum_{k=1}^K W_k\sigma_k}.$$

Rezultat je enak, kot če bi iskali minimalno varianco brez danega začetnega pogoja – ni pomembno, kakšne $n_1, n_2, \ldots, n_K$ izberemo. Stroški raziskave C bodo vedno enaki, ker je cena C_1 vedno enaka.

<u>PRIMER B</u>

Sedaj se lahko stroški opažanja spreminjajo od stratuma do strauma. Če je n_k število enot iz $k-$tega stratuma, ki so zajete v vzorec, naj bodo stroški raziskave enaki:

$$C = C_0 + \sum_{k=1}^{K} n_k C_k.$$

Pri danih sredstvih za raziskavo v višini C poiščemo tiste velikosti podvzorcev, pri katerih je varianca cenilke populacijskega povprečja minimalna. Rešujemo podoben primer kot prej, le da sedaj nimamo več fiksne C_1, ampak se spreminja z vsakim stratumom. Z enakim razmislekom kot prej sestavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_K, \lambda) = f(n_1, n_2, \ldots, n_K) + \lambda(C_0 + \sum_{k=1}^{K} n_k C_k - C).$$

Zapišemo parcialne odvode funkcije F in jih enačimo z 0.

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = -\frac{\sigma_i^2}{n_i^2}\ W_i^2 + \lambda\ C_i = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, K.$$

Izrazimo n_i in dobimo sistem enačb

$$n_i = \frac{W_i\sigma_i}{\sqrt{\lambda\ C_i}} \tag{3}$$

Da določimo λ, naredimo vsoto enačbe (3) po i, $i = 1, 2, \ldots, K$.

$$n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=1}^{K} \frac{W_k\sigma_k}{\sqrt{C_k}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} \frac{W_k\sigma_k}{\sqrt{C_k}} \tag{4}$$

Če združimo (3) in (4), dobimo:

$$n_i = \frac{n}{\sqrt{C_i}} \; \frac{W_i\sigma_i}{\sum_{k=1}^{K} \frac{W_k\sigma_k}{\sqrt{C_k}}}.$$

Primer c

Naj se stroški raziskave izražajo na enak način kot v prejšnji točki, predpisano pa imamo natančnost raziskave, torej varianco cenilke. Poiščemo tiste vrednosti podvzorcev, pri katerih bodo stroški najmanjši.
Želimo torej minimizirati stroške pri pogoju $\mathrm{var}(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{K} \frac{W_k^2\sigma_k^2}{n_k}$. Označimo $\mathrm{var}(\overline{X}) = V$, kjer je V predpisana vrednost.
Rešujemo torej vezani ekstrem za funkcijo:

$$f(n_1, n_2, \ldots, n_K) = C_0 + \sum_{k=1}^{K} n_k C_k$$

$$\text{z vezjo } \sum_{k=1}^{K} \frac{W_k^2\sigma_k^2}{n_k} - V.$$

Sestavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_K, \lambda) = C_0 + \sum_{k=1}^{K} n_k C_k + \lambda \left(\sum_{k=1}^{K} \frac{W_k^2\sigma_k^2}{n_k} - V \right)$$

Zapišemo parcialne odvode funkcije F in jih enačimo z 0.

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = C_i - \lambda \, \frac{W_i^2\sigma_i^2}{n_i^2} = 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, K.$$

Izrazimo n_i in dobimo sistem enačb

$$n_i = \sqrt{\frac{\lambda}{C_i}} \, W_i\sigma_i \tag{5}$$

Da določimo λ, naredimo vsoto enačbe (5) po i, $i = 1, 2, \ldots, K$.

$$n = \sqrt{\lambda} \sum_{k=1}^{K} \frac{W_k\sigma_k}{\sqrt{C_k}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{K} \frac{W_k\sigma_k}{\sqrt{C_k}}} \tag{6}$$

Če združimo (5) in (6), dobimo:

$$n_i = \frac{n}{\sqrt{C_i}} \frac{W_i \sigma_i}{\sum_{k=1}^{K} \frac{W_k \sigma_k}{\sqrt{C_k}}}.$$

3. NALOGA

Opazimo n neodvisnih realizacij zvezne porazdelitve z gostoto:

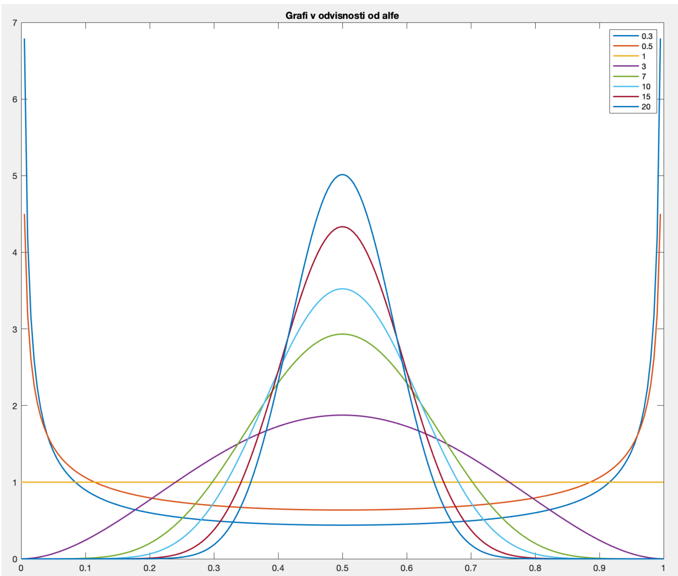
$$f(x \mid \alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2\alpha)}{(\Gamma(\alpha))^2} \left[x(1-x)\right]^{\alpha-1} & ;\ 0 < x < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer,} \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 0$ neznam parameter. Če je X slučajna spremenljivka s to gostoto, se da izračunati:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}\,, \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{1}{4(2\alpha+1)}.$$

Primer A

Določimo obliko porazdelitve v odvisnosti od α. Vidimo, da je funkcija



Slika 1: Grafi podane funkcije za različne α.

$f(x \mid \alpha)$ simetrična glede na $x = \frac{1}{2}$ in ima v tej točki ekstrem ne glede na vrednost α. Opazimo tudi, da je funkcija za $\alpha = 1$ kar vodoravna premica. Za $\alpha < 1$ je funkcija konveksna, za $\alpha > 1$ pa konkavna. Z večanjem α postaja funkcija vse bolj strma in *"ožja"*.

PRIMER B

Ocenimo α po metodi momentov.

Iz podane pričakovane vrednosti in variance lahko izračunamo vrednosti prvega in drugega momenta.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathrm{var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = \frac{1}{4(2\alpha+1)} + \frac{1}{4}.$$

Iz enačbe drugega momenta izrazimo α.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4(2\alpha+1)} + \frac{1}{4} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\
\frac{1}{4(2\alpha+1)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2\alpha+1} &= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1 \\
2\alpha+1 &= \frac{1}{\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1} \\
\Rightarrow \hat{\alpha} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1} - 1\right).
\end{aligned}$$

PRIMER C

Poiščemo enačbo, ki določa cenilko po metodi največjega verjetja. Pogledamo, kdaj ta cenilka obstaja.

$$L_1(\alpha \mid x_1) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2}\, x_1^{\alpha-1}(1-x_1)^{\alpha-1}$$

$$l_1(\alpha \mid x_1) = \ln(\mathrm{L}_1(\alpha|x_1))$$

$$\Rightarrow l_1(\alpha \mid x_1) = \ln(\Gamma(2\alpha)) - 2\ln(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\ln(x_1) + (\alpha-1)\ln(x_1-1)$$

$$l(\alpha \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{l}_1(\alpha|x_1)$$

$$\Rightarrow l(\alpha \mid x) = n \cdot \ln(\Gamma(2\alpha)) - 2n \cdot \ln(\Gamma(\alpha)) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i - 1)$$

Funkcijo $l(\alpha \mid x)$ odvajamo po α.

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = n \cdot \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \cdot 2\Gamma'(2\alpha) - 2n \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma'(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i - 1)$$

Cenilka bo obstaja natanko tedaj, ko bo imela enačba

$$\frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \cdot \Gamma'(2\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma'(\alpha) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_i(x_i - 1)}\right)$$

rešitev.

<u>Primer d</u>

Poiščemo asimptotično varianco cenilke po metodi največjega verjetja.
Za asimptotično varianco bomo potrebovali Fischerjevo informacijo za cenilko, saj velja

$$\mathrm{var}(\hat{\alpha}) \approx \frac{1}{n \cdot I_1(\hat{\alpha})},$$

kjer (iz predavanj)

$$I_1(\hat{\alpha}) = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ l_1(\alpha \mid x_1)}{\partial \alpha^2}\right] \tag{7}$$

V $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$ vstavimo $n = 1$ in izračunamo še drugi odvod. Dobimo:

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial \alpha^2} = \frac{4\ \Gamma''(2\alpha)\ \Gamma(2\alpha) - 4\ \Gamma'(2\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha)^2} - \frac{2\ \Gamma''(\alpha)\ \Gamma(\alpha) - 2\Gamma'(\alpha)^2}{\Gamma(\alpha)^2}$$

Pričakovana vrednost drugega odvoda je kar enaka drugemu odvodu, ker v njem ne nastopa slučajna spremenljivka X in je torej konstanta. Zato lahko takoj zapišemo varianco, ki je enaka

$$\mathrm{var}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{2\ \Gamma''(\alpha)\ \Gamma(\alpha) - 2\Gamma'(\alpha)^2}{\Gamma(\alpha)^2} - \frac{4\ \Gamma''(2\alpha)\ \Gamma(2\alpha) - 4\ \Gamma'(2\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha)^2}} .$$

4. NALOGA

5. NALOGA

X in Y sta slučajni spremenljivki, za kateri velja:

- $\mathrm{E}(X) = \mu_x$,

- $\mathrm{E}(Y) = \mu_y$,
- $\mathrm{var}(X) = \sigma_x^2$,
- $\mathrm{var}(Y) = \sigma_y^2$,
- $\mathrm{cov}(X, Y) = \sigma_{x,y}$.

Opazimo X in želimo napovedati Y.

PRIMER A

Poiščemo napoved, ki je oblike $\hat{Y} = \alpha + \beta \cdot X$, kjer α in β izberemo tako, da je srednja kvadratična napaka $\mathrm{E}\left[\left(Y - \hat{Y}\right)^2\right]$ minimalna.
Uporabimo namig

$$\mathrm{E}\left[\left(Y - \hat{Y}\right)^2\right] = \left[\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(\hat{Y})\right]^2 + \mathrm{var}(Y - \hat{Y}). \tag{8}$$

Ker sta oba člena desne strani enačbe večja od 0, je dovolj, da poiščemo vrednosti α in β, ki minimizirata ta dva člena – potem bo najmanjša možna tudi njuna vsota.
Poglejmo si najprej prvi člen enačbe. Vrednost enačbe

$$\left[\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(\hat{Y})\right]^2 = [\mu_y - \alpha - \beta\mu_x]^2$$

bo najmanjša, ko bo $\mu_y - \alpha - \beta \cdot \mu_x = 0$. To pa bo res natanko takrat, ko bo $\alpha = \mu_y - \beta\mu_x$.
Poglejmo si še drugi člen enačbe. Vidimo, da je

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Y - \hat{Y}) &= \mathrm{var}(Y - \alpha - \beta X) = \mathrm{var}(Y - \beta X) = \mathrm{var}(Y) - 2\beta\mathrm{cov}(X, Y) + \beta^2\mathrm{var}(X) \\ &= \sigma_y^2 - 2\beta\sigma_{x,y} + \beta^2\sigma_x^2 \end{aligned}$$

funkcija spremenljivke β. Za izračun minimuma enačbo najprej odvajamo po β in enačimo z 0.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathrm{var}(Y - \hat{Y})) = -2\sigma_{x,y} + 2\beta\sigma_x^2 = 0$$

To bo res, ko bo $\beta = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$.
Vrednosti α in β, pri katerih bo izraz $\mathrm{E}\left[\left(Y - \hat{Y})\right)^2\right]$ minimalen, sta

$$\alpha = \mu_y - \mu_x\frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \qquad \text{in} \qquad \beta = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$$

Primer b

Pokažemo, da se pri tako izbranih koeficientih *determinacijski koeficient* (kvadrat korelacijskega koeficienta) izraža v obliki

$$r_{x,y}^2 = 1 - \frac{\mathrm{var}(Y - \hat{Y})}{\mathrm{var}(Y)}.$$

Spomnimo se najprej formule za *korelacijski koeficient*:

$$\mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}} = r_{x,y}.$$

Ker je determinacijski koeficient enak kvadratu korelacije, je enak

$$r_{x,y}^2 = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)^2}{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}.$$

Dobimo enakost

$$1 - \frac{\mathrm{var}(Y - \hat{Y})}{\mathrm{var}(Y)} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)^2}{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}$$

in če upoštevamo še vrednosti α in β iz prvega dela naloge:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\mathrm{var}(Y - \hat{Y})}{\mathrm{var}(Y)} &= \frac{\mathrm{var}(Y) - \mathrm{var}(Y - \hat{Y})}{\mathrm{var}(Y)} = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_y^2 + \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2}}{\sigma_y^2} \\ &= \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)^2}{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)} = r_{x,y}^2. \end{aligned}$$

Pokazali smo, da je determinacijski koeficient res enak $1 - \frac{\mathrm{var}(Y - \hat{Y})}{\mathrm{var}(Y)}$.