

# **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

## **Matrizes e Sistemas de Equações Lineares**

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

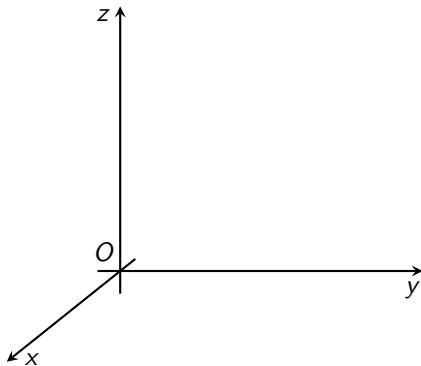
# Geometria analítica em $\mathbb{R}^3$ : Referenciais em $\mathbb{R}^3$

Fixamos um sistema de coordenadas:

$O \rightarrow$  origem

$\left. \begin{array}{l} Ox \\ Oy \\ Oz \end{array} \right\} \rightarrow$  eixos coordenados

$\left. \begin{array}{l} xOy \\ xOz \\ yOz \end{array} \right\} \rightarrow$  planos coordenados



# Pontos e vetores em $\mathbb{R}^3$

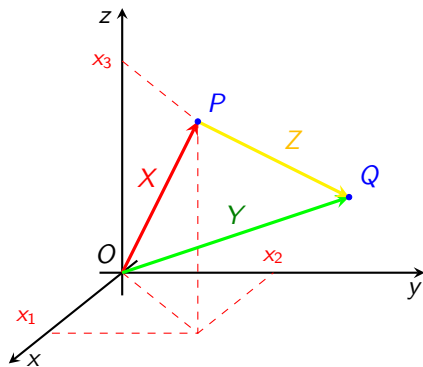
$x_1, x_2, x_3 \rightarrow$  coordenadas do ponto  $P$

Associamos ao segmento de reta orientado  $\overrightarrow{OP}$  o vetor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3 \rightarrow$  coordenadas do ponto  $Q$  e  
seja  $Y$  o vetor associado a  $\overrightarrow{OQ}$

Ao segmento de reta orientado  $\overrightarrow{PQ}$  fica associado o vetor  $Z = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{bmatrix}$



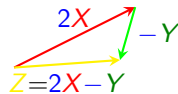
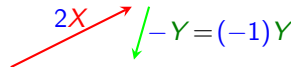
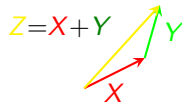
# Adição, multiplicação por escalar e combinação linear

Sejam  $X$  e  $Y$  vetores em  $\mathbb{R}^3$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  escalares

$$\text{Adição: } Z = X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Multiplicação por escalar: } \alpha X = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Combinação linear: } Z = \alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}$$



# Vetores em $\mathbb{R}^n$

Os vetores em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  generalizam-se a vetores em  $\mathbb{R}^n$ :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Chamam-se **componentes** do vetor  $X$  aos números reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Notação alternativa:  $X = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Operações em  $\mathbb{R}^n$**  (tal como em  $\mathbb{R}^3$ ):

- adição de vetores:  $X + Y + Z$
- multiplicação de um vetor por um escalar:  $2X, -Y, \alpha Z$
- combinação linear de vetores:  $2X - Y + \alpha Z$

# Matrizes em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

Os vetores em  $\mathbb{R}^n$  generalizam-se a vetores em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  a que chamamos **MATRIZES**.

Sendo  $a_{ij}$  números reais (para todos os índices  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ ) considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dizemos que  $A$  é uma **matriz** com  $m$  linhas e  $n$  colunas, tem  $m \times n$  elementos  
diz-se matriz  $m \times n$ , de ordem  $m \times n$ , de dimensão  $m \times n$

# Matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{linha } i$$

$\uparrow$   
coluna  $j$

$a_{ij}$  é o elemento ou entrada  $(i, j)$  da matriz  $A$

Notação abreviada:  $A = A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$

# Matriz nula, matriz coluna e matriz linha

**Matriz nula** ( $m \times n$ ), cujas entradas são todas iguais a 0, denota-se por

$O$  (ou  $O_{m \times n}$ ).

**Matriz linha** ( $1 \times n$ )

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

**Matriz coluna** ( $m \times 1$ )

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$



# Matriz quadrada de ordem $n$

matriz com o mesmo número de linhas e de colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*diagonal principal*

# Matriz diagonal e matriz identidade

Uma matriz **quadrada**  $A = [a_{ij}]$  diz-se **diagonal** se  $a_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ , ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chama-se a **matriz identidade de ordem  $n$**  e denota-se por  **$I$**  (ou  **$I_n$** ) a uma matriz **diagonal**  $n \times n$  com

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$$

# Matriz triangular

Uma matriz **quadrada**  $A = [a_{ij}]$  é

**triangular superior** se  $a_{ij} = 0$ , para  $i > j$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

**triangular inferior** se  $a_{ij} = 0$ , para  $i < j$ .

# Transposta de uma matriz

A **transposta** da matriz  $m \times n$   $A = [a_{ij}]$  é a matriz  $n \times m$

$$A^T = [a_{ji}]$$

obtida por troca da posição relativa das linhas pelas colunas da matriz  $A$ , por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Propriedade:

$$(A^T)^T = A.$$

Uma matriz  $A$  diz-se **simétrica** se  $A = A^T$ . (Nota: toda a matriz simétrica é quadrada.)

# Igualdade, adição e multiplicação por escalar de matrizes

Sejam  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  matrizes  $m \times n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

As matrizes  $A$  e  $B$  são iguais,  $A = B$ , se

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

A soma de  $A$  e  $B$  é a matriz  $m \times n$   $A + B = C = [c_{ij}]$  tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

O produto de  $A$  pelo escalar  $\alpha$  é a matriz  $m \times n$   $\alpha A = D = [d_{ij}]$  tal que

$$d_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

A matriz  $m \times n$   $A$  é uma combinação linear das matrizes  $A_1, \dots, A_k$   $m \times n$  se

$$A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

# Propriedades da adição e da multiplicação por escalar

## Propriedades da adição de matrizes

- ▶ comutativa:  $A + B = B + A$ ,
- ▶ associativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,
- ▶ admite elemento neutro:  $A + O = O + A = A$ ,
- ▶  $A$  possui simétrico aditivo:  $A + (-A) = (-A) + A = O$ ,
- ▶  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,

para quaisquer matrizes  $m \times n$   $A, B, C$ .

## Propriedades da multiplicação por escalar de matrizes

- ▶ associativa:  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ ,
- ▶ distributiva:  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ,
- ▶ distributiva:  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ,
- ▶  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ,

para quaisquer matrizes  $m \times n$   $A, B$ , e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

# Multiplicação de matrizes – caso 1

Multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna

$$\text{Dadas } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o produto da matriz linha  $A$  pela matriz coluna  $B$  é

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Operação bem definida só se  $A$  e  $B$  possuem igual número de elementos!

# Multiplicação de matrizes – caso 2

Caso geral: multiplicação de  $A$  matriz  $m \times n$  e  $B$  matriz  $n \times p$  sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

o produto de  $A$  por  $B$  é a matriz  $m \times p$   $AB = [c_{ij}]$  cuja entrada  $(i, j)$  resulta da multiplicação da linha  $i$  de  $A$  pela coluna  $j$  de  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$



# Propriedades da multiplicação de matrizes

- ▶ associativa:  $(AB)C = A(BC)$ ,
- ▶ distributiva à esquerda e à direita, em relação à adição:

$$(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B \quad \text{e} \quad A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B},$$

- ▶ admite **elemento neutro** à esquerda e à direita:  $I_m A = A = A I_n$ ,
- ▶  $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ ,
- ▶  $(AB)^T = B^T A^T$ ,

para quaisquer matrizes  $A, \tilde{A} \ m \times n$ ,  $B, \tilde{B} \ n \times p$ ,  $C \ p \times q$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Nota importante:** A multiplicação de matrizes não é comutativa!

# Potência de uma matriz quadrada

Sejam  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $p \in \mathbb{N}$ .

A **potência  $p$**  de  $A$  é a matriz  $n \times n$  dada por

$$A^p = A A^{p-1},$$

em que  $A^0 = I_n$ , por convenção.

**Propriedades da potência de matrizes**

- ▶  $(A^p)^q = A^{pq}$
- ▶  $A^p A^q = A^{p+q}$

**Nota:** Em geral  $(AB)^p \neq A^p B^p$ .

# Sistema de $m$ equações lineares com $n$ incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matriz dos  
coeficientes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

coluna das  
incógnitas

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

coluna dos  
termos independentes

# Forma matricial de um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

em que  $\mathbf{A}$  é a **matriz** ( $m \times n$ ) dos **coeficientes** do sistema,

$\mathbf{X}$  é a **coluna** ( $n \times 1$ ) das incógnitas,

$\mathbf{B}$  é a **coluna** ( $m \times 1$ ) dos **termos independentes** e

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A} | \mathbf{B}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

é uma matriz  $m \times (n + 1)$  e é a **matriz ampliada, aumentada ou completa** do sistema.

# Matriz escalonada por linhas

A primeira entrada **não nula** de cada linha é designada por **pivot**.

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & a_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3, \dots \neq 0$$

- ▶ Abaixo de **cada pivot** só ocorrem **zeros**,
- ▶ Dadas duas linhas não nulas consecutivas, o **pivot da linha  $i + 1$**  está numa coluna à **direita da coluna que contém o pivot da linha  $i$** ,
- ▶ As **linhas nulas**, caso existam, ocorrem **só na parte inferior** da matriz.

# Matriz escalonada por linhas reduzida

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & * & \dots & 0 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ A matriz está na forma **escalonada por linhas**,
- ▶ Os **pivots** são **todos iguais a 1**,
- ▶ **Acima** de cada pivot **só** ocorrem **zeros**.

# Operações elementares

## Operações elementares nas linhas de uma matriz

1. Troca da posição relativa de duas linhas, p.e.  $i$  e  $j$ :  $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplicação de uma linha, p.e.  $i$ , por um escalar  $\alpha \neq 0$ :  $L_i := \alpha L_i$
3. Substituição de uma linha, p.e.  $i$ , pela que dela se obtém adicionando-lhe outra linha, p.e.  $j$ , multiplicada por um escalar  $\beta \in \mathbb{R}$ :  $L_i := L_i + \beta L_j$

## Matrizes equivalentes por linhas

Duas matrizes  $A$  e  $C$  são **equivalentes por linhas** e escreve-se

$$A \sim C$$

se  $C$  resulta de  $A$  por aplicação de uma sequência finita de operações elementares nas linhas de  $A$ .

# Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 1

## Teorema

Toda a matriz  $m \times n$  é equivalente por linhas a uma matriz escalonada por linhas (reduzida).

## Exemplo ilustrativo do teorema anterior

**Passo 1:** Encontrar, na 1.<sup>a</sup> coluna não nula, o 1º elemento não nulo **pivot**.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$



# Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 2

Passo 2: Trocar linhas para colocar o pivot como 1.º elemento da coluna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

Passo 3: Operar com as linhas para obter zeros abaixo do pivot.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$L_4 := L_4 - L_1$

# Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 3

**Passo 4:** Considerar a **submatriz** que se obtém eliminando a 1.<sup>a</sup> linha e aplicar os passos 1 a 4 até esgotar as linhas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

⋮

**Fim Passo 4:** Obtém-se uma **matriz escalonada por linhas** equivalente a  $A$ .

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 4

**Passo 5:** Multiplicar as linhas não nulas pelos inversos dos pivots de modo a obter pivots iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$L_1 := \frac{1}{2} L_1$$
$$L_2 := \frac{1}{2} L_2$$
$$L_3 := \frac{1}{2} L_3$$

# Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 5

**Passo 6:** Operar com as linhas de modo a obter zeros acima dos pivots.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$L_2 := L_2 - \frac{3}{2}L_3$$

$$L_1 := L_1 - L_2$$

$$L_1 := L_1 + \frac{5}{2}L_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se uma matriz escalonada por linhas reduzida equivalente a  $A$ .

# Aplicação à resolução de sistemas

## Teorema

Se as matrizes ampliadas de dois sistemas lineares são  $[A|B]$  e  $[C|D]$ , tais que

$$[A|B] \sim [C|D],$$

então os dois sistemas têm o mesmo conjunto de soluções.

**Nota:** Se  $B = D = 0$ , basta que  $A \sim C$  para que os sistemas possuam o mesmo conjunto de soluções.

# Métodos de eliminação

## Método de eliminação de Gauss

1. Dado o sistema  $AX = B$ , formar a sua matriz ampliada  $[A | B]$ .
2. Transformar  $[A | B]$  numa **forma escalonada por linhas**  $[C | D]$ .
3. Escrever o sistema  $CX = D$ , ignorando as linhas nulas, e resolver por substituição ascendente.

## Método de eliminação de Gauss-Jordan

1. Dado o sistema  $AX = B$ , formar a sua matriz ampliada  $[A | B]$ .
2. Transformar  $[A | B]$  numa **forma escalonada por linhas reduzida**  $[E | F]$ .
3. Escrever o sistema  $EX = F$ , ignorando as linhas nulas, e resolver.

# Classificação de sistemas

Um sistema linear representado matricialmente por  $AX = B$ , tal que

$$[A | B] \sim [C | D],$$

com a matriz  $[C | D]$  escalonada por linhas, classifica-se em

- ▶ impossível se não possui solução;
- ▶ possível e determinado se possui uma única solução (todas as colunas de  $C$  têm pivot e não há pivot na coluna  $D$ );
- ▶ possível e indeterminado se possui uma infinidade de soluções (sendo o grau de indeterminação do sistema = n.º de incógnitas livres = n.º de colunas de  $C$  sem pivot).

# Caraterística e classificação de sistemas

A **caraterística** da matriz  $A$ ,  $\text{car}(A)$ , é o número de pivots de uma matriz  $C$  escalonada por linhas equivalente, por linhas, a  $A$ .

O sistema linear  $AX = B$  com  $A$   $m \times n$  e  $B$   $m \times 1$  é

1. **impossível**  $\Leftrightarrow \text{car}(A) < \text{car}([A|B]);$
2. **possível e determinado**  $\Leftrightarrow \text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = n;$
3. **possível e indeterminado**  
de grau  $n - \text{car}(A)$   $\Leftrightarrow \text{car}(A) = \text{car}([A|B]) < n.$



# Espaço das colunas de uma matriz

O **espaço das colunas** de uma matriz  $A$   $m \times n$ ,  $\mathcal{C}(A)$ , é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas  $C_1, \dots, C_n$  de  $A$ ,

$$\mathcal{C}(A) = \{ \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}.$$

Observa que, se  $X = [\alpha_1 \dots \alpha_n]^T$ , então  $AX = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n$ , logo

$$\mathcal{C}(A) = \{ AX \in \mathbb{R}^m : X \in \mathbb{R}^n \}.$$

## Teorema

Dada  $A$   $m \times n$  e  $B$   $m \times 1$ , temos

$$B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B \text{ é um sistema possível.}$$

# Espaço das linhas de uma matriz

O **espaço das linhas** de uma matriz  $A$   $m \times n$ ,  $\mathcal{L}(A)$ , é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas  $L_1^T, \dots, L_m^T$  que resultam da transposta das linhas  $L_1, \dots, L_m$  de  $A$ ,

$$\mathcal{L}(A) = \{ \alpha_1 L_1^T + \dots + \alpha_m L_m^T, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \}.$$

**Proposição** Se  $A \sim C$ , então  $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(C)$ .

Como  $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A^T)$ , temos

$$B \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow A^T X = B \text{ é um sistema possível.}$$

# Sistema homogéneo e nulidade

Um sistema diz-se **homogéneo** se os termos independentes são todos nulos:

$$AX = 0.$$

Todo o sistema **homogéneo** é **possível** pois possui pelo menos a solução nula, dita **solução trivial**. Mas pode ter outras soluções, ditas não triviais, se o sistema for indeterminado.

Se  $A$  é  $m \times n$  e  $m < n$ , então  $AX = 0$  admite uma **solução não trivial**.

A **nulidade** de  $A$   $m \times n$ ,  $\text{nul}(A)$ , é o número de incógnitas livres do sistema  $AX = 0$ , temos

$$\text{nul}(A) = n - \text{car}(A)$$

e é também o grau de indeterminação do sistema.

# Espaço nulo de uma matriz

O **espaço nulo** de  $A$ ,  $\mathcal{N}(A)$ , é o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo associado a  $A$   $m \times n$ ,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}.$$

O **espaço nulo** de  $A$ ,  $\mathcal{N}(A)$ , pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de  $n - \text{car}(A)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ , facilmente obtidos usando colunas da forma escalonada reduzida de  $A$ .

## Teorema

Dada  $A$   $m \times n$  e  $B$   $m \times 1$ , se o sistema  $AX = B$  é possível e se  $\overline{X}$  é uma sua solução, então o conjunto de soluções do sistema é

$$\{\overline{X} + Y : Y \in \mathcal{N}(A)\}.$$

# Inversa de uma matriz quadrada

Uma matriz  $A$   $n \times n$  diz-se **invertível** se existe  $B$   $n \times n$  tal que

$$AB = BA = I_n$$

À única matriz  $B$  satisfazendo a relação anterior chama-se **inversa** de  $A$  e denota-se por  $A^{-1}$ .  
Caso contrário (não existe  $B$ ),  $A$  diz-se **singular** ou **não invertível**.

## Teorema

Se  $A$   $n \times n$  é invertível, então a inversa de  $A$  é **única**.

## Teorema

Se  $A$ ,  $B$   $n \times n$  e  $BA = I_n$ , então  $AB = I_n$ .

# Propriedades da inversa e método para obter a inversa

## Propriedades

Para quaisquer  $A, B$   $n \times n$  invertíveis e  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
3.  $(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}$ ;
4.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

## Método prático para determinar a inversa

$$\begin{array}{c} [A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}] \\ \uparrow \end{array}$$

método de eliminação de Gauss-Jordan

## Teorema

$A$   $n \times n$  é **invertível** se e só se  $A$  é equivalente por linhas a  $I_n$ .

# Critérios de invertibilidade de uma matriz

**Teorema** Dada  $A \ n \times n$ , são equivalentes as afirmações

1.  $A$  é invertível
2.  $A \sim I_n$
3.  $\text{car}(A) = n$
4.  $\text{nul}(A) = 0$
5.  $AX = 0$  possui apenas a solução trivial
6.  $\mathcal{N}(A) = \{0\}$
7.  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$
8.  $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^n$
9.  $AX = B$  tem uma única solução  $X = A^{-1}B$  para cada  $B \ n \times 1$