Álgebra Linear e Geometria Analítica

Vetores, Retas e Planos

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Produto interno em $\mathbb{R}^n$

Dados os vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- o produto interno (ou produto escalar) de X e Y é o escalar real

$$X \cdot Y = X^T Y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Nota: Pode também utilizar-se a notação $X|Y$ ou $\langle X, Y \rangle$.

- o comprimento ou norma de X é

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^n$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $X \cdot X \geq 0$;
2. $X \cdot X = 0 \iff X = 0$;
3. $X \cdot Y = Y \cdot X$;
4. i. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$,

   ii. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;
5. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;
6. $\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|X\|$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade triangular

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$|X \cdot Y| \leq \|X\|\|Y\|.$$

Teorema (Desigualdade Triangular)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Ângulo entre vetores

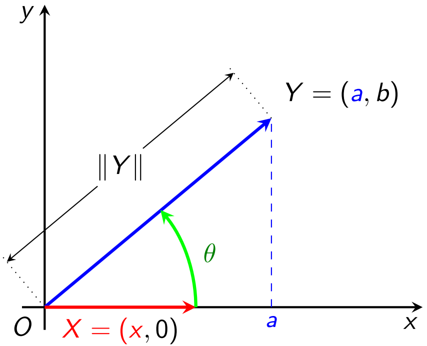
Em $\mathbb{R}^2$, sejam $X = (x, 0)$, $x > 0$

e $Y = (a, b) \neq (0, 0)$

vetores não nulos. Temos:

- $X \cdot Y = xa$ e $\|X\| = x$
- $\dfrac{X \cdot Y}{\|X\|} = a = \|Y\| \cos(\theta)$

Logo, $\cos(\theta) = \dfrac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}$, $\theta \in [0, \pi]$



Em geral, para $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$, o ângulo entre os vetores X e Y é

$$\theta = \angle(X, Y) = \arccos \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|} = \arccos\left(\frac{X}{\|X\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|}\right).$$

Nota: pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $\left|\frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}\right| \leq 1$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Vetores ortogonais, colineares, com mesmo sentido e unitários

- Dados os vetores $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$
  - X e Y são ortogonais ou perpendiculares, $X \perp Y$,
    se $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e. se $X \cdot Y = 0$.
  - X e Y são colineares ou paralelos ou têm a mesma direção,
    se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, i.e. se $|X \cdot Y| = \|X\|\|Y\|$.
    - X e Y têm o mesmo sentido,
      se $\theta = 0$, i.e. se $X \cdot Y = \|X\|\|Y\|$.
    - X e Y têm sentido oposto ou contrário,
      se $\theta = \pi$, i.e. se $X \cdot Y = -\|X\|\|Y\|$.

Por convenção, se $X = 0$ ou $Y = 0$, então X e Y são colineares e ortogonais.

- Um vetor unitário é um vetor de norma igual a 1.

Se $X \neq 0$, o vetor

$$U = \frac{1}{\|X\|} X$$

é um vetor unitário com a mesma direção e sentido de X.

Produto externo em $\mathbb{R}^3$

Dados os vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

- o produto externo (ou produto vetorial) de X e Y é o vetor de $\mathbb{R}^3$

$$X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nota: Para determinar o produto externo pode utilizar-se COMO AUXILIAR DE CÁLCULO o seguinte "determinante simbólico"

$$X \times Y \leftrightsquigarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{aligned} i &= (1,0,0) \\ j &= (0,1,0) \\ k &= (0,0,1) \end{aligned}$$

fazendo o seu desenvolvimento pela primeira linha.

Propriedades do produto externo em $\mathbb{R}^3$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e O o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$

1. $X \times Y = -(Y \times X)$;
2. i. $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$,
   ii. $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$;
3. $\alpha(X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y)$;
4. $X \times X = O$;
5. $X \times O = O \times X = O$;
6. Fórmulas de Lagrange
   i. $(X \times Y) \times Z = (Z \cdot X)Y - (Z \cdot Y)X$,
   ii. $X \times (Y \times Z) = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z$.
7. Identidade de Jacobi
   $X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) = O$.

Produto misto e consequências das propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^3$

Se $X = (x_1, x_2, x_3),\ \ Y = (y_1, y_2, y_3),\ \ Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(X \times Y) \cdot Z \ = \ X \cdot (Y \times Z) \ = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

diz-se o produto misto de X, Y e Z.

Consequências das propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^3$

1. Como $(X \times Y) \cdot X = (X \times Y) \cdot Y = 0$, então

$$X \times Y \text{ é um vetor ortogonal a } X \text{ e a } Y.$$

2. $\|X \times Y\| = \|X\|\|Y\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre X e Y.

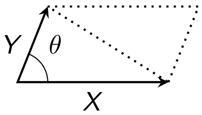
Exercício: Mostre que $Y \cdot (Z \times X) = (X \times Y) \cdot Z$.

Aplicações do produto externo e do produto misto

Sejam $X,\ Y,\ Z \in \mathbb{R}^3$, então

- a área do paralelogramo com lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\diamondsuit} = \|X \times Y\|$$

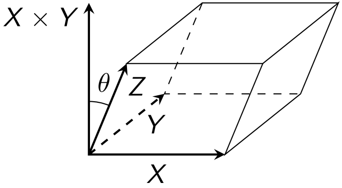


- a área do triangulo com dois dos seus lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\triangle} = \frac{\|X \times Y\|}{2}$$

- o volume do paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores X, Y, Z é

$$V = |(X \times Y) \cdot Z|$$



Exercício: Verifique os exercícios 7 e 9 da Folha de exercícios n°3.

Retas em $\mathbb{R}^3$

Dada uma reta $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto P e tem vetor diretor v, temos

$$X \in \mathcal{R} \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v.$$

Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a partir da qual se obtêm as equações paramétricas de $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

sendo $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Eliminando o parâmetro α do anterior sistema, obtém-se um sistema de grau 1 com 3 incógnitas e 2 equações, ditas as equações cartesianas de $\mathcal{R}$.

Planos em $\mathbb{R}^3$ – Equações vetoriais e paramétricas

Dado um plano $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto P e tem vetores diretores u e v (não colineares),

$$X \in \mathcal{P} \iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v.$$

Uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ é

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

a partir da qual se obtêm as equações paramétricas de $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

com $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Eliminando os parâmetros α e β do anterior sistema, obtém-se uma equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dita equação (cartesiana) geral do plano $\mathcal{P}$.

Verifica-se que $w = (a, b, c)$ é um vetor não nulo ortogonal a $\mathcal{P}$. De facto, dois pontos arbitrários deste plano, $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1$, satisfazem

$$ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = 0, 1,$$

donde

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

ou seja, para qualquer vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$ do plano $\mathcal{P}$, tem-se

$$w \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0.$$

Posição relativa de dois planos

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 2×4 do sistema constituído pelas equações gerais dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ de $\mathbb{R}^3$.

Então os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são:

- coincidentes, se $\operatorname{car}([A|B]) = \operatorname{car}(A) = 1$, a sua interseção é o plano $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P}'$);
- concorrentes, se $\operatorname{car}([A|B]) = \operatorname{car}(A) = 2$, intersectam-se numa reta;
- estritamente paralelos, se $\operatorname{car}([A|B]) > \operatorname{car}(A) = 1$, a sua interseção é o conjunto vazio.

Posição relativa de uma reta e um plano

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 3×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas da reta $\mathcal{R}$ e pela equação geral do plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$.

Então a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$ são:

- tais que $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}(A) = 2$, a sua interseção é a reta $\mathcal{R}$;
- concorrentes, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}(A) = 3$, intersetam-se num ponto;
- estritamente paralelos, se $\text{car}\,([A|B]) > \text{car}(A) = 2$, a sua interseção é o conjunto vazio.

Posição relativa de duas retas

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 4×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas das retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ de $\mathbb{R}^3$.

Então as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são:

- coincidentes, se $\text{car}\left([A|B]\right) = \text{car}(A) = 2$, a sua interseção é a reta $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{R}'$);
- concorrentes, se $\text{car}\left([A|B]\right) = \text{car}(A) = 3$, intersectam-se num ponto;
- estritamente paralelas, se $\text{car}\left([A|B]\right) = 3 > \text{car}(A) = 2$, a sua interseção é o conjunto vazio e as retas são complanares;
- enviezadas, se $\text{car}\left([A|B]\right) = 4 > \text{car}(A) = 3$, a sua interseção é o conjunto vazio e as retas são <u>não</u> complanares.

Distâncias

A distância entre dois pontos P e Q de $\mathbb{R}^n$ é

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Em particular, para $Q(x_1,\ldots,x_n)$ e $P(y_1,\ldots,y_n)$, tem-se

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

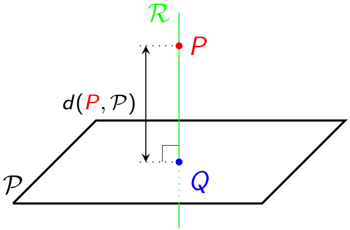
Dados um ponto, reta ou plano $\mathcal{F}$ e um ponto, reta ou plano $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^3$, a distância entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é

$$d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \min\{\, d(P,Q) : \; P\in\mathcal{F},\; Q\in\mathcal{G}\}\,.$$

Nota: Se $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$, então $d(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$. De seguida, analisamos os casos em que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são disjuntos.

Distância de um ponto a um plano

Dados um plano $\mathcal{P}$ e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, existe uma única reta $\mathcal{R}$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e contendo o ponto P.



A distância do ponto P ao plano $\mathcal{P}$ é

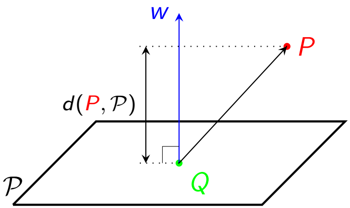
$$d(P, \mathcal{P}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da reta $\mathcal{R}$ com o plano $\mathcal{P}$.

Distância de um ponto a um plano (equação geral)

Dados um plano $\mathcal{P}$ e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, sejam $Q \in \mathcal{P}$ e w um vetor não nulo ortogonal ao plano $\mathcal{P}$. Então,

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot w|}{\|w\|}.$$

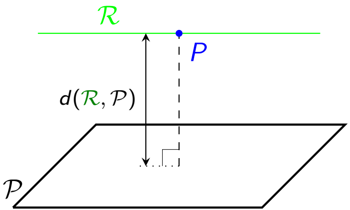


Sendo $P(x_0, y_0, z_0)$ e $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral do plano $\mathcal{P}$, tem-se

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aplicação: Distância de uma reta a um plano

Uma reta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$ disjuntos são estritamente paralelos.

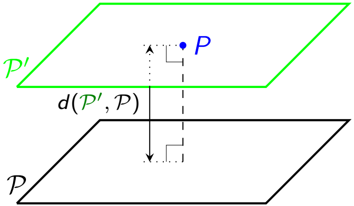


Nesse caso, a distância da reta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$ é

$$d(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \qquad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}.$$

Aplicação: Distância entre planos

Dois planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ disjuntos são estritamente paralelos.



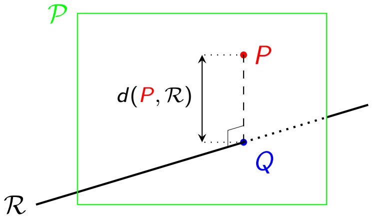
A distância entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é

$$d(\mathcal{P}', \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \qquad \text{para qualquer } P \in \mathcal{P}'.$$

Nota: Nos dois casos antes descritos, distância reta/plano ou plano/plano, o estudo reduz-se ao cálculo da distância de um ponto a um plano.

Distância de um ponto a uma reta

Dada uma reta $\mathcal{R}$ e um ponto $P \notin \mathcal{R}$, existe um único plano $\mathcal{P}$ perpendicular a $\mathcal{R}$ e que contém P.



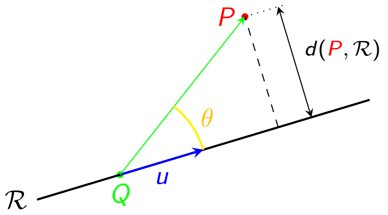
A distância do ponto P à reta $\mathcal{R}$ é

$$d(P, \mathcal{R}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da reta $\mathcal{R}$ com o plano $\mathcal{P}$.

Distância de um ponto a uma reta (equação vetorial)

Dada uma reta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto Q e que tem vetor diretor u,



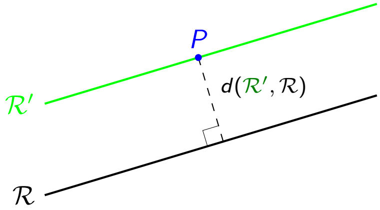
e um ponto $P \notin \mathcal{R}$, tem-se que

$$d(P, \mathcal{R}) = \|\overrightarrow{QP}\| \, |\sin(\theta)| = \frac{\|u \times \overrightarrow{QP}\|}{\|u\|},$$

sendo θ o ângulo entre os vetores u e $\overrightarrow{QP}$.

Aplicação: Distância entre retas paralelas

Duas retas disjuntas de $\mathbb{R}^3$ são estritamente paralelas ou enviezadas.

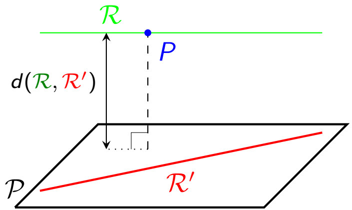


A distância entre retas estritamente paralelas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ é

$$d(\mathcal{R}', \mathcal{R}) = d(P, \mathcal{R}), \qquad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}'.$$

Aplicação: Distância entre retas enviezadas

Dadas retas enviezadas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, existe um único plano $\mathcal{P}$ estritamente paralelo a $\mathcal{R}$ e que contém $\mathcal{R}'$.

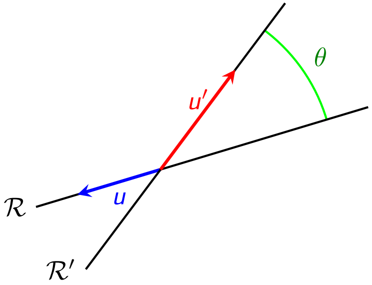


A distância entre retas enviezadas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ é

$$d(\mathcal{R},\mathcal{R}') = d(\mathcal{R},\mathcal{P}) = d(P,\mathcal{P}), \qquad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}.$$

Aplicação: Ângulo entre retas

Dadas duas retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ de vetores diretores u e u', respetivamente,

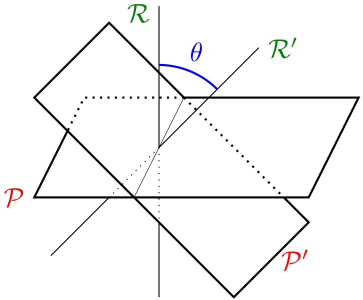


o ângulo entre as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ é

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \theta = \arccos \frac{|u \cdot u'|}{\|u\|\|u'\|}$$

com $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\theta = 0$ se e só se as retas são paralelas.

Aplicação: Ângulo entre planos

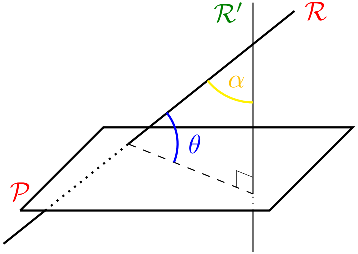


O ângulo entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é

$$\angle(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \theta = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}'),$$

sendo $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ retas perpendiculares aos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, respetivamente.

Aplicação: Ângulo entre uma reta e um plano



$\theta = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{P})$

$\alpha = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$

são ângulos complementares

$(\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha)$

O ângulo entre uma reta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$ é

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \theta = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \operatorname{arcsin} \frac{|u \cdot w|}{\|u\|\|w\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

onde $\mathcal{R}'$ é uma reta ortogonal ao plano $\mathcal{P}$, u um vetor diretor da reta $\mathcal{R}$ e w um vetor ortogonal ao plano $\mathcal{P}$.