Cálculo I – Agrupamento 4
Pré–requisitos sobre funções reais de variável real

Isabel Brás

Universidade de Aveiro
11 de Setembro de 2019

1 O texto e linhas orientadores para o seu uso

Este texto foi idealizado e concebido com o objetivo que fazer uma resenha tão concisa quanto possível de alguns dos conceitos e propriedades sobre funções reais de variável reais já conhecidas dos estudantes. Procurando, adicionalmente, fazer uma uniformização nos conceitos e notações a utilizar durante o semestre. Alertamos que se trata de uma ínfima parte do que é suposto ser a formação matemática pré-existente do estudante. Recomendamos a sua leitura na primeira semana de aulas e o seu uso, como material de consulta, sempre que sobre algum dos aspetos abordados houver dúvida. O estudante não deverá sentir muitas dificuldades na compreensão deste texto e na execução das tarefas/exercícios nele propostos. Caso sinta dificuldades, deve contactar o seu professor, o quanto antes, usando as aulas de orientação tutorial (OT).

2 Definições e propriedades básicas

Definição 1 *Uma função real de variável real f é uma correspondência que a cada elemento de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ faz corresponder um e um só elemento de $\mathbb{R}$. A D chamamos o* **domínio** *de f e a $\mathbb{R}$ o conjunto de chegada de f. O domínio de f é, geralmente, denotado por D_f. A notação*

$$f\colon D_f \to \mathbb{R} \tag{1}$$

é usada para indicar que f é uma função real de domínio D_f (contido em $\mathbb{R}$).

Face à definição anterior uma função f real de variável real fica totalmente (e bem) definida se se indicar o seu domínio e a lei de transformação (a correspondência) para os elementos do domínio. Usualmente, x é a variável usada para representar os elementos de D_f e, nesse caso, $f(x)$ é o elemento em $\mathbb{R}$ que corresponde a x, por f. Deste modo, a notação (1) é por vezes estendida e toma a forma:

$$\begin{aligned} f\colon D_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Na maioria dos casos $f(x)$ é dado por uma expressão analítica. É frequente definir uma função f usando uma expressão analítica sem indicação expressa do seu domínio, deve, nesses casos, considerar como domínio de f o domínio da expressão analítica.

Exemplo 1 A função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ é a função real de domínio $\mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$ que a cada x corresponde $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, isto é,

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_0^+\backslash\{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1} \end{aligned}$$

Note que, outras funções podem ser definidas com a mesma expressão analítica desde que se especifique outro domínio que estará necessariamente contido em $\mathbb{R}_0^+\backslash\{1\}$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} g\colon]1,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}\ ; \end{aligned}$$

g é chamada a restrição de f a $]1,+\infty[$. ∎

Frisamos, novamente, que a notação $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ é usada para denotar uma função f real de domínio D_f contido em $\mathbb{R}$.

Definição 2 *O contradomínio de $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ é conjunto das imagens de f e denota-se por CD_f,* i.e., *$CD_f = \{y \in \mathbb{R}\colon y = f(x) \wedge x \in D_f\}$.*

O contradomínio de uma função nem sempre é um conjunto fácil de determinar. No entanto, para algumas funções a sua identificação é bastante simples. Por exemplo, o contradomínio da função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$ é $[-1,+\infty[$. Casos mais complexos trataremos durante o semestre.

Definição 3 *A $x \in D_f$, caso exista, tal que $f(x) = 0$ chamamos* **zero** *de f.*

Definição 4 *Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função.*

1. *Se, para todo o $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, f diz-se* **injetiva**.
2. *Se, para todo o $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in D_f$ tal que $f(x) = y$, f diz-se **sobrejetiva**.*
3. *Se f for injetiva e sobrejetiva diz-se **bijetiva**.*

Definição 5 *Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $S \subseteq D_f$, não vazio.*

1. *f é **crescente** em S, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo o $x_1, x_2 \in S$.*
2. *f é **estritamente crescente** em S, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo o $x_1, x_2 \in S$.*
3. *f é **decrescente** em S, se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo o $x_1, x_2 \in S$.*
4. *f é **estritamente decrescente** em S, se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo o $x_1, x_2 \in S$.*
5. *Se f é crescente ou decrescente em S, f diz-se **monótona** em S.*
6. *Se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em S, f diz-se **estritamente monótona** em S.*

Caso alguma das monotonias se verifique em $S = D_f$, pode omitir-se a referência ao conjunto S. Assim, diz-se apenas que f é crescente, decrescente, estritamente crescente, estritamente decrescente, monótona ou estritamente monótona (consoante o caso).

3 Inversa de uma função (função invertível)

Definição 6 *Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. A função*

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & CD_f & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & x \end{array}$$

onde x é tal que $f(x) = y$, é designada por **função inversa de** *f.*

Dizemos que uma função é **invertível** *se admite inversa.*

Uma classe de funções onde é fácil concluir da sua invertibilidade é a das funções estritamente monótonas. De facto, se $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona, então f é invertível.

Algumas propriedades básicas das funções invertíveis
Sendo $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ invertível:

1. O contradomínio de f^{-1} é D_f;

2. $\forall x \in D_f \quad f^{-1} \circ f(x) = x$;

3. $\forall y \in CD_f \quad f \circ f^{-1}(y) = y$;

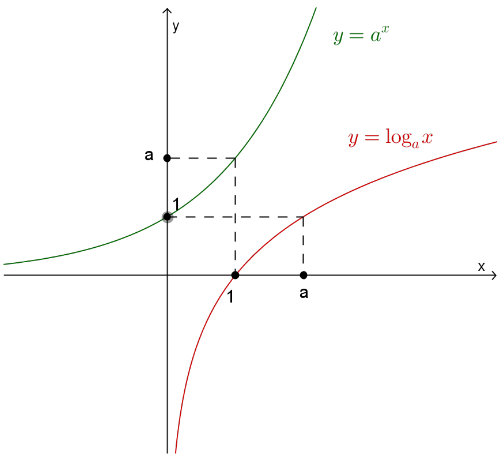
4. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Função exponencial e função logarítmica como inversas Para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ as funções $f(x) = a^x$, $D_f = \mathbb{R}$, e $g(x) = log_a x$, $D_g = \mathbb{R}^+$ são inversas uma da outra. Na verdade,

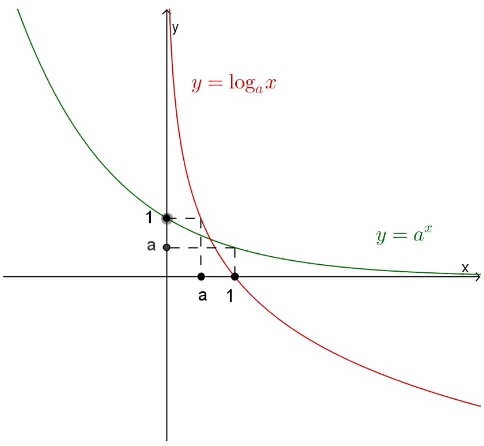
$$y = log_a x \text{ se e só se } a^y = x, \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \text{ e para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Caso $a = e$ (e número de Neper) estas funções designam-se por funções exponenciais e logarítmicas naturais. A notação que usaremos para o logaritmo natural é $\ln x$.

Ilustração gráfica das funções exponencial e logarítmica de base a:



(Caso $a > 1$)



(Caso $0 < a < 1$)

4 Limites e Continuidade

4.1 Limites

Definição 7 (Limite de uma função num ponto segundo Heine) *Sejam $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$, $f : D_f \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação*[1] *de D_f. Diz-se que ℓ é o limite de f quando x tende para a se para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $D_f \setminus \{a\}$ convergente para a, a correspondente sucessão das imagens $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ℓ. Nesse caso, escreve-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*
Se a é um ponto isolado de D_f, por definição, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

A definição anterior assenta no conceito de convergência de uma sucessão de números reais. Este conceito e outros relacionados com sucessões também são admitidos como adquiridos. Serão especialmente importantes na parte final do semestre, apesar de neste texto estarem ausentes, por opção. Analogamente, omitimos, as noções de limite com x a tender para $+\infty$ (ou $-\infty$) e as definições de limites laterais. Estes conceitos de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ são lecionados no Ensino Secundário, e para obter as respetivas definições basta fazer ligeiras alterações na Definição 6.

Em relação aos limites de funções deve ter bem presentes as suas regras (propriedades) e técnicas de cálculo.

Proposicão 1 (propriedades operatórias) *Sejam $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, então*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$;

2. $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x)) = \alpha\ell_1$, *para todo o* $\alpha \in \mathbb{R}$;

3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) = \ell_1\ell_2$;

4. *Se* $\ell_2 \neq 0$ *então* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

As propriedades de 1. a 4. mantêm-se se a for $+\infty$ (ou $-\infty$) e as funções tiverem domínios que permitam ter sucessões de pontos a tender para $+\infty$ (ou $-\infty$). Quando algum dos limites l_1 ou l_2 é infinito as regras da Proposição 1 têm uma leitura especifica e originam em alguns casos indeterminações(situações onde o cálculo do limite exige outros procedimentos). Assim, usando uma notação um pouco simplificada,(e de certo modo abusiva, mas muito conveniente), listamos essas regras adicionais:

- $1/(+\infty) = 0$ e $1/(-\infty) = 0$.
- $1/(0^+) = +\infty$ e $1/(0^-) = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ e $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, $+\infty + \alpha = +\infty = \alpha + (+\infty)$ e $-\infty + \alpha = -\infty = \alpha + (-\infty)$;
- $(+\infty)\times(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)\times(-\infty) = +\infty$ e $(+\infty)\times(-\infty) = -\infty = (-\infty)\times(+\infty)$;
- para todo o $\alpha > 0$, $\alpha \times (+\infty) = +\infty = (+\infty) \times \alpha$ e $\alpha \times (-\infty) = -\infty = (-\infty) \times \alpha$;

[1] $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $S \subseteq \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de a contém pelo menos um ponto de S distinto de a, isto é, se, $\forall\varepsilon > 0, (V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap S \neq \emptyset$; Onde $V_\varepsilon(a) :=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

- para todo o $\alpha < 0$, $\alpha \times (+\infty) = -\infty = (+\infty) \times \alpha$ e $\alpha \times (-\infty) = +\infty = (-\infty) \times \alpha$.
- $0^{+\infty} = 0$ e $0^{-\infty} = +\infty$

As convenções anteriores não abrangem os casos de **indeterminação**:

$$+\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \infty/\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

No cálculo de limites pode usar os limites notáveis seguintes (no entanto, quando aprender a Regra de Cauchy, pode obtê-los com facilidade):

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$, para qualquer $p \in \mathbb{R}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$

Teorema 1 *(lei do enquadramento)*
Sejam f, g e h funções r.v.r. e a um ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g \cap D_h$. Se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)\,,\ \textit{para todo o } x \in (V_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D\,,\ \textit{e}\ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell\,,$$

então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Corolario 1 *(limite do produto dum infinitésimo por uma função limitada)*
Sejam $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada em $(V_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D_g$, para algum $\delta > 0$, então, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

4.2 Continuidade

Definição 8 *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in D_f$. f é contínua em a se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Caso contrário, dizemos que f é descontínua em a.*
Nalguns casos, por exemplo em pontos fronteiros[2] de D_f, poderá apenas fazer sentido considerar a continuidade lateral:

1. *Se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dizemos que f é contínua à direita em a ;*
2. *Se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ dizemos que f é contínua à esquerda em a.*

f é contínua em $[a, b]$ se é contínua em $]a, b[$ e se é contínua à direita em a e à esquerda em b.

[2] $a \in S$ é um ponto fronteiro de $S \subseteq \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de a contém pontos de S e pontos de $\mathbb{R} \setminus S$, isto é, se, $\forall \varepsilon > 0, (V_\varepsilon(a)) \cap S \neq \emptyset \wedge (V_\varepsilon(a)) \cap \mathbb{R} \setminus S \neq \emptyset$;

Teorema 2 (Teorema dos valores intermédios ou Teorema de Bolzano)
Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \neq f(b)$, então, para todo o y entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = y$.

Corolario 2 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Proposicão 2 (Propriedades das funções contínuas)

1. *Sejam f e g duas funções contínuas num ponto a. Então*

   (a) *$f + g$ é contínua em a;*

   (b) *fg é contínua em a;*

   (c) *αf é contínua em a, para $\alpha \in \mathbb{R}$*

   (d) *Se $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a.*

2. *Sejam f e g funções tais que a função composta $g \circ f$ está definida. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.*

Recordar ainda que:

- Se f é contínua em a, então é limitada numa vizinhança de a;
- Se f é contínua em a e $f(a) > 0$, então f é positiva numa vizinhança de a.
- Se f é contínua em a e $f(a) < 0$, então f é negativa numa vizinhança de a.

5 Derivadas

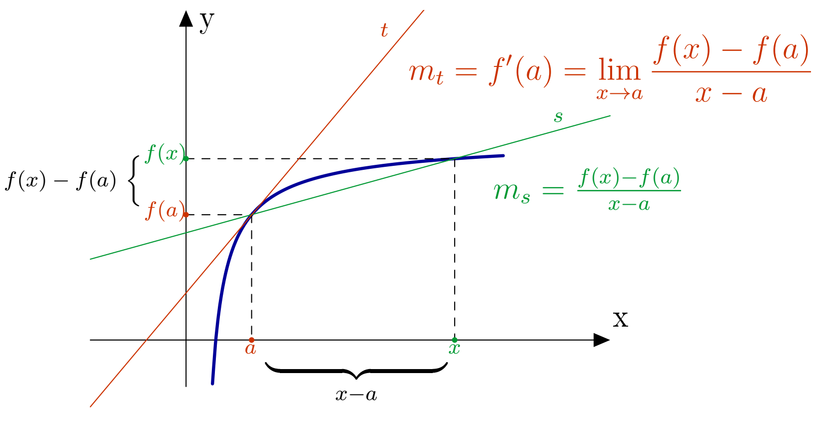
5.1 Diferenciabilidade, função derivada, derivadas de ordem superior

Definição 9 *Sejam $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior[3] de D_f. Caso exista o limite*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \textit{(podendo ser } +\infty \textit{ ou } -\infty\textit{)},$$

a $f'(a)$ chama-se derivada da função f no ponto a. Neste caso, f diz-se derivável em a. Se $f'(a)$ for um número real dizemos que f é diferenciável em a.

Na figura seguinte faz-se a interpretação geométrica do conceito de derivada de uma função f num ponto a:



[3] $a \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de $S \subseteq \mathbb{R}$ se existir uma vizinhança de a contida em S, *i.e.*, se, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a) \subset S$.

Caso $f'(a)$ seja finita, $f'(a)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Quando $f'(a) = +\infty$ ou $f'(a) = -\infty$, essa reta tangente é $x = a$.

Se na Definição 9, considerarmos o limite lateral à direita (neste caso o ponto a necessita de ser apenas ponto de acumulação de D_f à direita) obtemos, caso o limite exista, a derivada lateral à direita de f em $x = a$. Ou seja, chama-se derivada lateral de f à direita de a ao limite

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ caso exista.}$$

A derivada lateral à esquerda em a tem definição análoga, *i.e*, trata-se do seguinte limite

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ caso exista.}$$

Proposicão 3 *Sejam $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Então f é diferenciável em a sse existem $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$, são finitas e $f'_-(a) = f'_+(a)$.*

Recorde que, se f é diferenciável em $a \in D_f$, então f é contínua em a.

Seja $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Seja D' conjunto dos pontos onde f é diferenciável. Chamamos função derivada de f à função:

$$\begin{array}{rccc} f': & D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

A f' também é usual chamar função derivada de primeira ordem de f. A partir de f' podemos determinar a sua função derivada, f'', definida nos pontos onde f' é diferenciável, tal que

$$f''(x) = (f')'(x),$$

f'' é a chamada função derivada de ordem dois ou função derivada de segunda ordem de f.

Dada a função derivada de ordem $n-1$ de f, $f^{(n-1)}$, a função derivada de ordem n é a função $f^{(n)}$, cujo domínio é o conjunto de pontos onde $f^{(n-1)}$ é diferenciável e $f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$.

5.2 Regras de derivação

Derivada de algumas funções elementares

Sejam c, $p \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

- $(c)' = 0$
- $(x^p)' = px^{p-1}$, $x > 0$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$

Derivadas e Operações Algébricas
Sejam f e g duas funções diferenciáveis em a. Então

- $f+g$ é diferenciável em a e $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$
- $f-g$ é diferenciável em a e $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$
- $f\cdot g$ é diferenciável em a e $(f\cdot g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$
- αf, com $\alpha\in\mathbb{R}$, é diferenciável em a e $(\alpha f)'(a)=\alpha f'(a)$
- Se $g(a)\neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

Derivada da função composta (regra da cadeia)
Sejam $f\colon D_f\to\mathbb{R}$ e $g\colon D_g\to\mathbb{R}$ duas funções tais que $g\circ f$ está definida.
Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $f(a)$, então $g\circ f$ é diferenciável em a e

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)\ .$$

6 Exercícios

1. Considere as funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x)=\sqrt{\frac{2x-4}{-x^2+3x}}$ e $g(x)=3-\sqrt{x+1}$.
   (a) Determine os domínios das funções f e g.
   (b) Determine os zeros das funções f e g.
   (c) Indique o contradomínio de g.
   (d) Defina as funções $f+g$ e $\frac{f}{g}$.

2. Sendo f, g e h definidas, respetivamente, por $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$ e $h(x)=\frac{1}{x-1}$, determine os domínios e as expressões analíticas de de $g\circ f$, $f\circ g$, $h\circ f$ e $f\circ h$.

3. Tendo em conta que a função logarítmica de base a é inversa da função exponencial de base a, $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, use as propriedades da exponencial para provar as seguintes propriedades dos logaritmos:
   Para todos $x,y\in\mathbb{R}^+$ e todo $\alpha\in\mathbb{R}$,
   (a) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$,
   (b) $\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$,
   (c) $\log_a(x^\alpha)=\alpha\log_a x$,
   (d) $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$, onde $b\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.

4. Calcule, caso existam, os limites seguintes:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-1}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-1}{5x^2-x}$;
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$; (g) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$;
   (h) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{|x-3|}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^x}{3^{x+1}+2^{x-3}}$; (j) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{\mathrm{e}^{2t-4}-1}{t-2}$; (k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^3\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2}$;
   (l) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\,\mathrm{e}^x$; (m) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\mathrm{sen}\,x}$; (n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)$.

5. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & se \quad x \neq 0 \\ m^2 - 1 & se \quad x = 0 \end{cases}.$$

Determine, caso exista, $m \in \mathbb{R}$ por forma que f seja contínua em $x = 0$.

6. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da f.r.v.r definida pela respetiva expressão analítica:

(a) $f(x) = (x-1)(x^2+3x)$; (b) $f(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$; (c) $f(x) = \log_3(\operatorname{tg} x)$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}}$; (e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$; (f) $f(x) = x^2 - \dfrac{\ln(x^2)}{x}$.

7. Sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \geq 0 \\ x^2 \operatorname{sen} x & se \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & se \quad x \neq 1 \\ 1 & se \quad x = 1 \end{cases}.$$

(a) Verifique se f é diferenciável em $x = 0$. Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

(b) Calcule, caso exista, $g'(0)$;

(c) Calcule, caso exista, $(g \circ f)'(0)$.

8. Sejam f e g duas f.r.v.r. tais que $f(x) = xg(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se g é contínua em $x = 0$, então f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = g(0)$.

7 Nota Final

Esta resenha foi escrita tendo como base textos anteriores da u.c. de Cálculo I, nomeadamente o de V. Santos, Cálculo I– Cálculo com funções de uma variável, 2009. Aliás, se sentir necessidade de detalhar algum dos tópicos aqui contemplados pode consultar esse texto, pp. 11–61 e pp. 88–101.

A Soluções dos Exercícios

1. (a) $D_f =]-\infty, 0[\cup [2, 3[$; $D_g = [-1, +\infty[$; (b) $x = 2$ é zero de f e $x = 8$ é zero de g. (c) $]-\infty, 3]$; (d) $D_{f+g} = [-1, 0[\cup [2, 3[$ e $(f+g)(x) = \sqrt{\frac{2x-4}{-x^2+3x}} + 3 - \sqrt{x+1}$;

   $D_{\frac{f}{g}} = [-1, 0[\cup [2, 3[$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{\frac{2x-4}{-x^2+3x}}}{3-\sqrt{x+1}}$.

2. $D_{g \circ f} = \mathbb{R}_0^+$ e $(g \circ f)(x) = x$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ e $(f \circ g)(x) = |x|$; $D_{h \circ f} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ e $(h \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$; e $D_{f \circ h} =]1, +\infty[$ e $(f \circ h)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

3. —

4. (a) 0; (b) $+\infty$; (c) não existe; (d) $\frac{3}{5}$; (e) 0; (f) -1; (g) 32; (h) não existe; (i) $\frac{1}{3}$; (j) 2; (k) $+\infty$; (l) 0; (m) $-\infty$; (n) 1;

5. Para todo o $m \in \mathbb{R}$, f é descontínua em $x = 0$.

6. (a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
   (b) $f'(x) = 3^{\operatorname{tg} x} \frac{\ln 3}{\cos^2 x}$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
   (c) $f'(x) = \frac{1}{\ln 3 \cos x \sin x}$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
   (d) $f'(x) = \frac{6x^2(\sqrt{x}-1)-\sqrt{x^5}}{2(\sqrt{x}-1)^2} \mathrm{e}^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$;
   (e) $f'(x) = \frac{1}{1-\sin x}$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
   (f) $f'(x) = \frac{2x^3-2+\ln(x^2)}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. (a) 0; (b) -1; (c) 0.

8. —