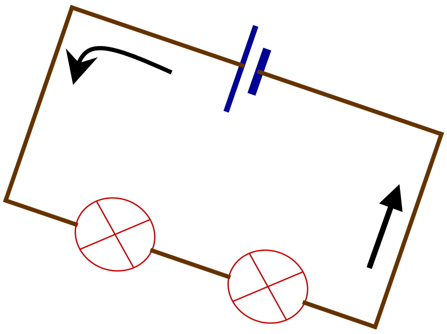
Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 1: Fundamentos (parte 1)



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Corrente, tensão eléctricas;**
- **Condutores e isoladores e resistência eléctrica;**
- **Esquemas eléctricos;**
- **Circuitos em série e em paralelo;**
- **Elementos de circuitos;**
- **Polaridades e sentidos de referência;**
- **Potência.**

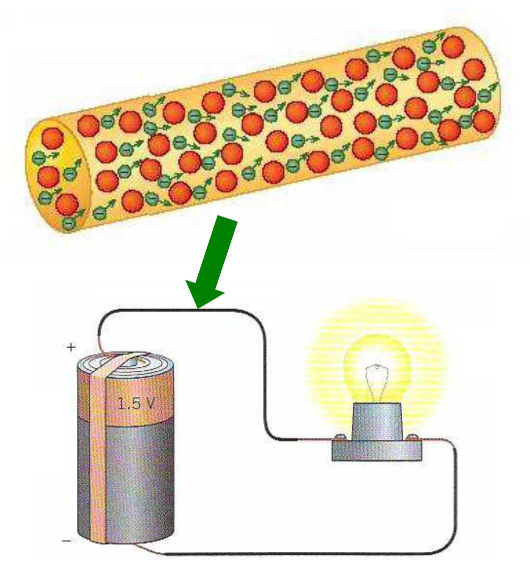
Corrente, tensão e resistência

Corrente eléctrica, *I*

- **É o movimento orientado de cargas eléctricas (electrões num metal, iões positivos ou negativos numa solução condutora);**

- **Define-se como a quantidade de carga eléctrica transferida por unidade de tempo;**

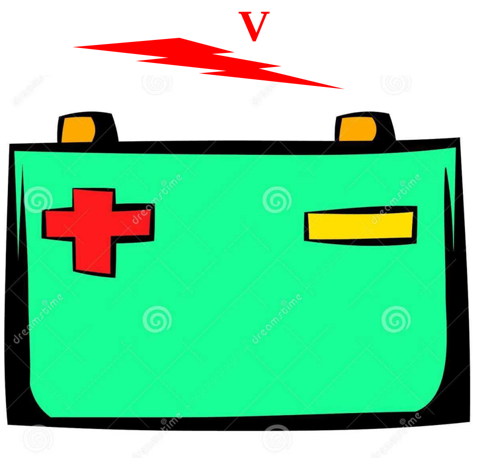
$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \textbf{ou} \quad I=\frac{dq(t)}{dt}$$



- **Sendo a carga, Q, medida em Coulomb, a unidade da corrente eletrica é C/s, que se chama Ampére.**

$$1\,Coulomb/seg=1\ Ampére$$

Diferença de potencial ou Tensão, *V*



- **Podemos imaginar que a Tensão é a 'força' que impele as cargas eléctricos a movimenta-rem-se (tal como a pressão é o que impele a água a fluir numa canalização);**

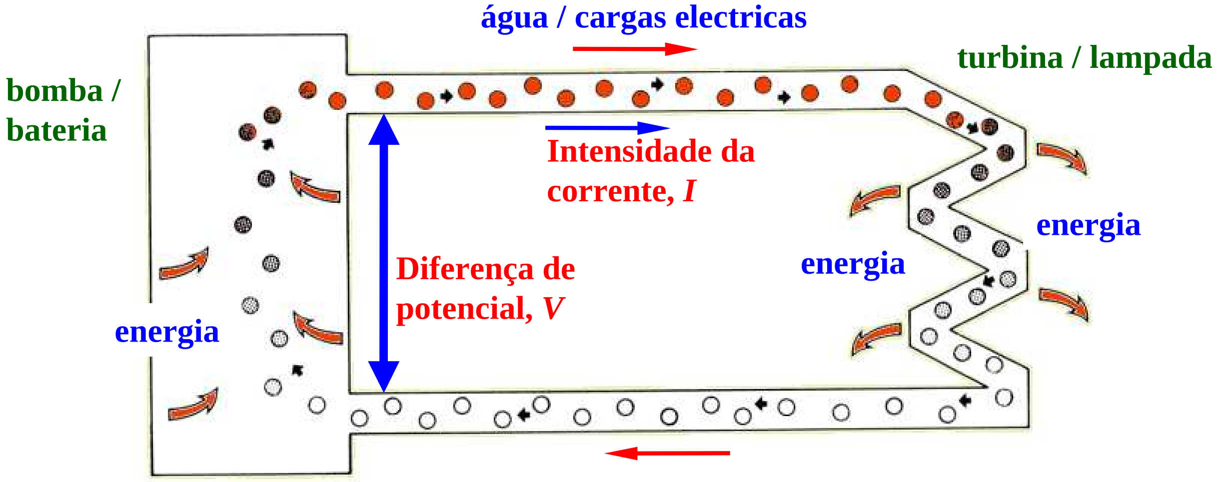
- **Numa bateria, um conjunto de reacções quí-micas dão origem a uma diferença de potencial entre os dois pólos;**

- **A Tensão está relacionada com a energia; É uma medida do trabalho (energia), W, necessário para deslocar uma carga de *1 Coulomb* de um terminal para o outro.**

$$V = \frac{W}{Q} \quad \text{ou} \quad V = \frac{dw}{dq} \qquad 1\,Joule/1\,Coulomb = 1\,Volt$$

Circuito eléctrico - analogia hidraulica

- **Bomba hidraulica – *energia mecânica* bombeia a *água* para cima, criando a diferença de pressão necessária para manter o fluxo;**
- **Bateria - *energia química* armazenada bombeia *as cargas* através da bateria, criando a diferença de potencial**

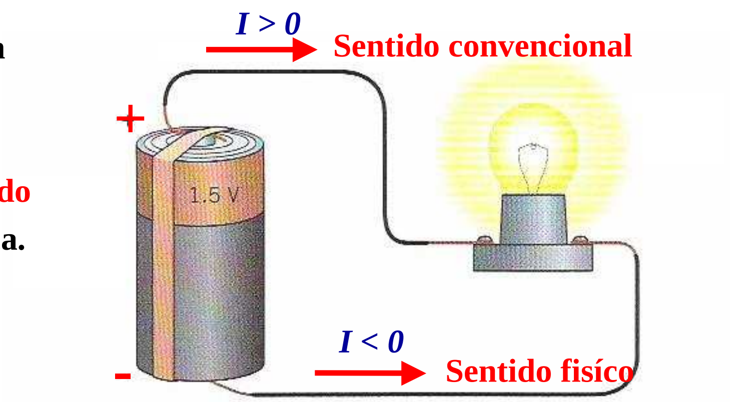


Corrente eléctrica - sentido fisíco e sentido convencional

● **Nos condutores metálicos os electrões flúem do terminal negativo para o terminal positivo da bateria – este é o sentido fisíco da corrente eléctrico;**

● **Mas como *I = carga/unidade de tempo*, se a carga é negativa, então *I* tem sinal negativo;**

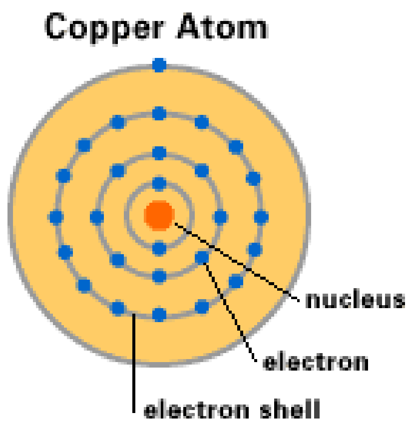
● **Assim, para trabalharmos com correntes positivas, considera-se que a corrente flúi do terminal positivo para o negativo – o sentido convencional da corrente eléctrica.**



Condutores e isoladores eléctricos

● **O número de electrões de valência dos átomos dos materiais determina as suas propriedades condutoras ou isoladoras:**

- **> 4 electrões de valência ⇒ isolador;**
- **< 4 electrões de valência ⇒ condutor**
- **4 electrões de valência ⇒ semicondutor**



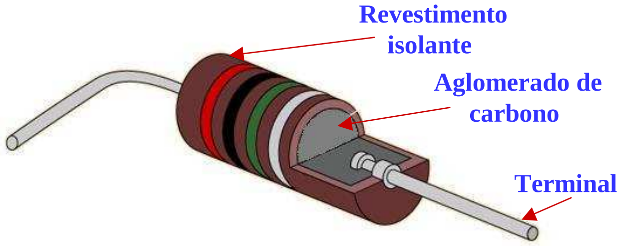
● **Bons condutores: ouro, prata, cobre, alumínio, etc.**

● **Isoladores: borracha, plástico, papel, mica, etc.**

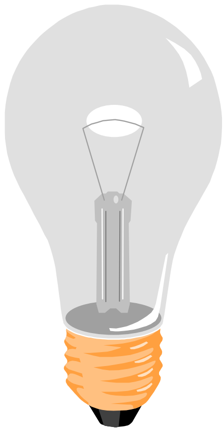
● **A resistência eléctrica é uma medida da oposição que o material oferece à passagem da corrente eléctrica; Medida em *Ohm (Ω)*.**

Resistência eléctrica

- **Aos componentes projectados para terem um valor especifico de resistência, chamamos Resistências;**

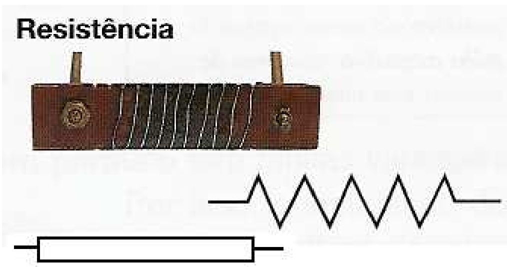


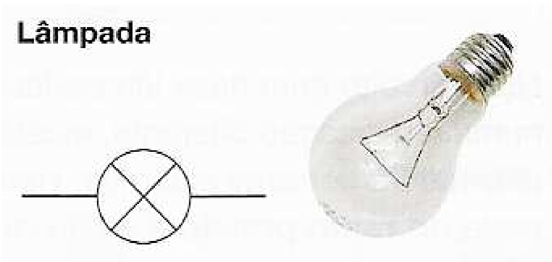
- **O filamento de uma lâmpada de incandescência é uma resistência (de tungsténio) que transforma a energia eléctrica em luz e calor.**



- **Ao inverso da resistência chamamos Conductância. Medida em *Siemen (S)*.**

Esquemas eléctricos - simbolos

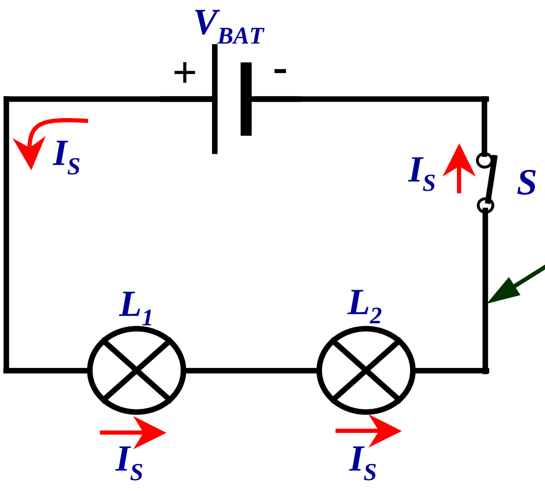




Circuitos série e paralelo

Circuitos eléctricos – série e paralelo

- **Circuito série:**
  - **Um único caminho de corrente;**
  - **A corrente é igual nas duas lâmpadas.**



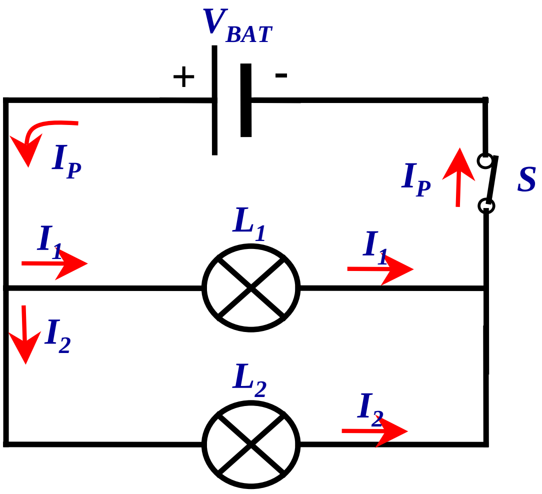
Conductores são ideais:

têm resistência electrica nula;

são superficies equipotenciais.

Circuitos eléctricos – série e paralelo

- **Circuito paralelo:**
  - **Múltiplos caminhos de corrente;**
  - **A tensão é a mesma nas duas lâmpadas: V_{BAT}.**



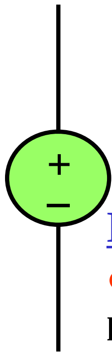
Elementos de circuito

Elementos de circuito

- **É importante distinguir entre:**
  - **Os dispositivos físicos de um circuito;**
  - **Os modelos matemáticos usados para analisar o comportamento desses dispositivos;**

Dispositivo físico:

- **Corrente fornecida é limitada;**
- **Tensão diminui com o tempo.**



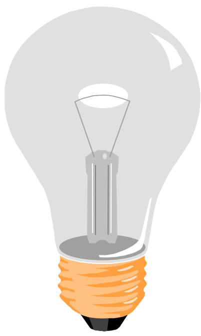
V = 1.5V

Modelo matemático:

- **Fornece corrente sem limite;**
- **Tensão constante.**

Elementos de circuito

220V / 60W



Dispositivo físico:

- **Resistência varia com a temperatura;**
- **Resistência varia com a frequência.**

R = 807Ω

Resistência

Modelo matemático:

- **Valor constante;**
- **Resistência pura.**

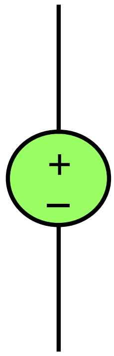
- **Aos modelos matemáticos chamamos elementos de circuito.**

Elementos de circuito básicos

Fonte independente de tensão

- **Tensão aos seus terminais é independente da corrente que a atravessa;**
- **É uma fonte ideal: pode fornecer uma corrente (e portanto energia) ilimitada.**

V_S



$$V_S \text{ pode ser } = \begin{cases} 12\ V \\ 50t\ \ V \\ 325\cos(314t)\ \ V \\ \ldots \end{cases}$$

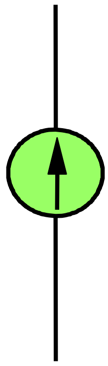
- **Se V_S = *constante*, então temos uma fonte DC.**

Elementos de circuito básicos

Fonte independente de corrente

- **Corrente que a atravessa é independente da tensão aos seus terminais;**
- **É uma fonte ideal: pode apresentar uma tensão aos terminais (e portanto pode fornecer uma quantidade de energia) ilimitada.**

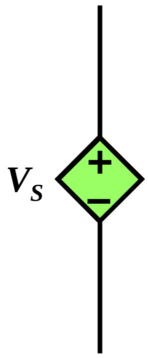
I_S



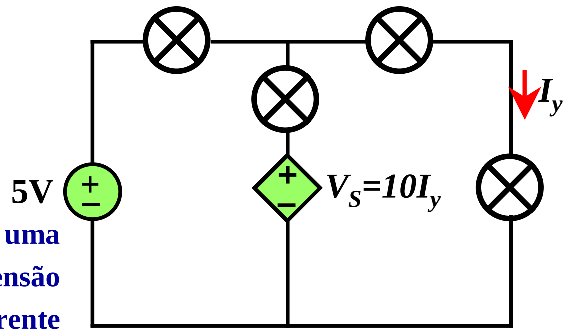
$$I_S \text{ pode ser } = \begin{cases} 5\ A \\ 10t^2\ \ A \\ 6.7\sin(314t)\ \ A \\ \ldots \end{cases}$$

- **Se I_S = *constante*, então temos uma fonte DC.**

Elementos de circuito básicos

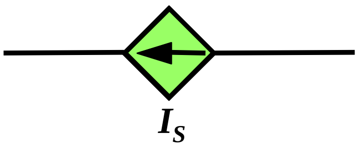


- **Fonte dependente (ou controlada) de tensão: O valor da tensão da fonte depende de uma outra grandeza no circuito (e.g. tensão ou corrente);**



Exemplo de circuito com uma fonte dependente de tensão controlada por corrente

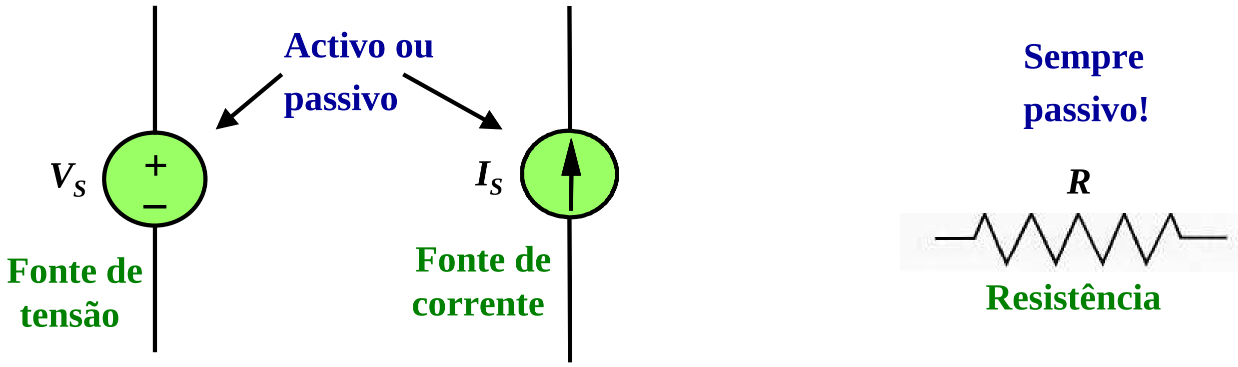
- **Fonte dependente (ou controlada) de corrente: O valor da corrente da fonte depende de uma outra grandeza no circuito (e.g. tensão ou corrente).**



Elementos de circuito activos e passivos

Um elemento de circuito pode também classificar-se como <u>activo</u> ou <u>passivo</u>

- **Activo:** se pode fornecer energia ao circuito (e.g. fonte);
- **Passivo:** se não pode fornecer energia ao circuito (e.g. resistência).

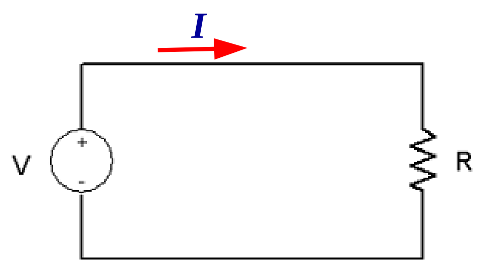


Polaridades / sentidos de referência

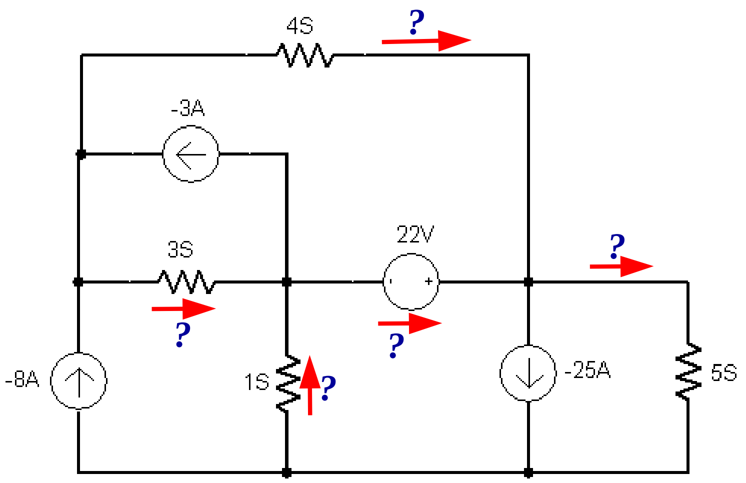
Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Sentido das correntes num circuito

- **Como veremos, para analisar um circuito é importante assumir previamente um sentido para a(s) corrente(s);**



- **… mas o sentido das correntes em todos os ramos de um circuito nem sempre é evidente à priori**

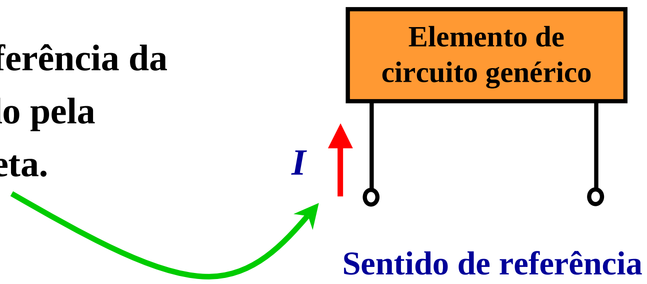


Sentido de referência e sentido real da corrente

- **Quando não sabemos o sentido das correntes, assumimos sentidos de referência;**

- **Temos então:**
  - **Sentido de Referência: é um sentido convencionado (arbitrário) da corrente para efeitos de análise do circuito;**
  - **Sentido Real: indica o sentido real da corrente (em geral, é desconhecido à partida).**

- **O sentido de referência da corrente é indicado pela colocação duma seta.**

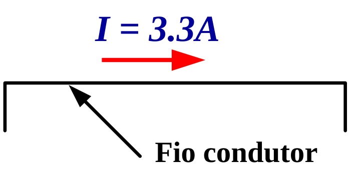


Sentido de referência e sentido real da corrente

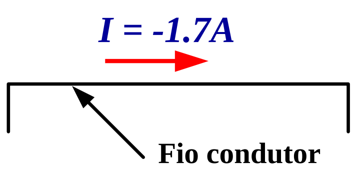
- **A análise é feita tendo por base os sentidos de referência arbitrados;**

- **O sentido real da corrente fica determinado assim que sabemos o valor da corrente.**

> ➢ **O sentido real é igual ao de referência se a corrente é positiva.**

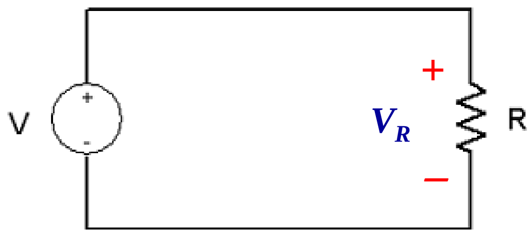


> ➢ **O sentido real é ao contrário do de referência se a corrente é negativa.**

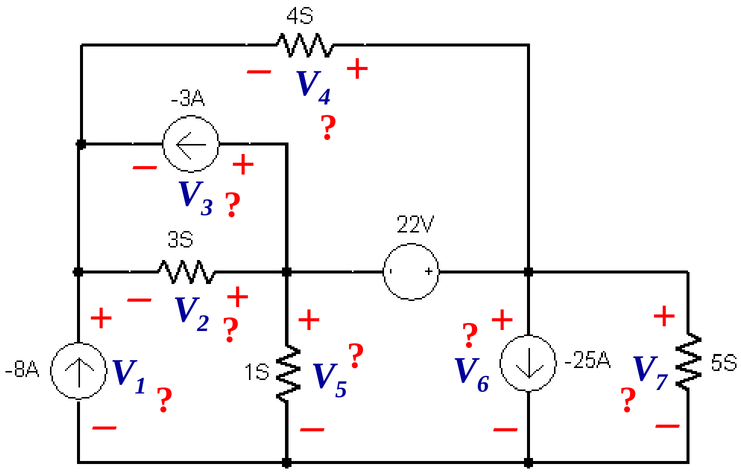


Polaridade das tensões

- **Para analisar um circuito é também essencial assumir previamente uma polaridade (+ e –) para as tensões aos terminais dos vários elementos;**



- **… mas as polaridades em todos os elementos de um circuito nem sempre são evidente à priori**

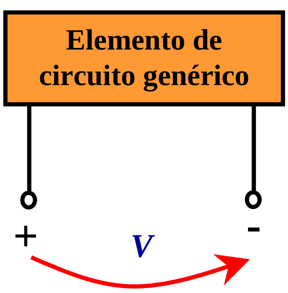


Polaridade de referência e polaridade real

- **Quando não sabemos a polaridade das tensões, assumimos polaridades de referência;**

- **Temos então:**
  - **Polaridade de Referência: é uma polaridade convencionada (arbitrária) para efeitos de análise do circuito;**
  - **Polaridade Real: indica o sentido real da polaridade (em geral, é desconhecido à partida).**

- **A polaridade de referência é indicada pela colocação dos sinais (+) e (-), <u>ou</u> através duma seta entre os terminais, que aponta no sentido do potencial mais baixo.**



Polaridade de referência

Polaridade de referência e polaridade real

- A análise é feita tendo por base as polaridades de referência arbitradas;

- As polaridades reais das tensões ficam determinada assim que sabemos os seus valores.

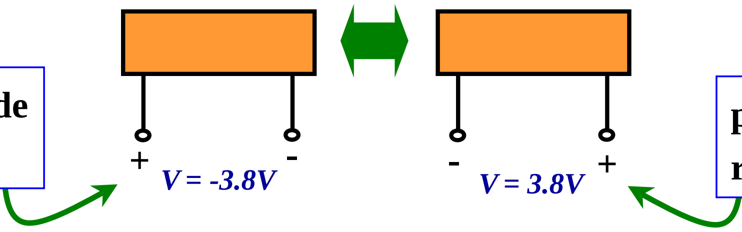
> ➢ A polaridade real é igual à de referência se a tensão é positiva;

> ➢ A polaridade real é ao contrário da de referência se a tensão é negativa;

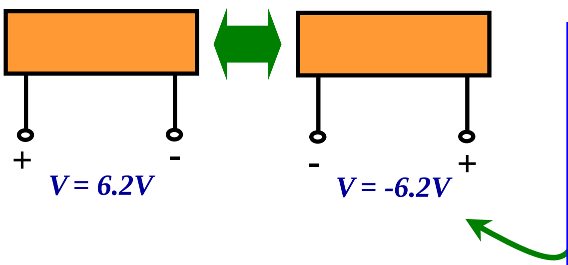
Polaridades equivalentes

- Situações equivalentes:

polaridade de referência



polaridade real



Nada nos impede de usar a polaridade de referência mesmo que esta seja ao contrário da polaridade real – temos é de usar o valor algébrico correcto da tensão!

Potência em circuitos eléctricos

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Potência

- **A potência (em *Watt*) define-se como o trabalho (energia), *W*, por unidade de tempo;**

$$P = \frac{dw}{dt} \qquad 1\,Watt = 1\,Joule/seg$$

- **A potência é, então, a taxa à qual a energia é fornecida (por um elemento de circuito activo) ou dissipada (por um elemento passivo).**

Uma lampada de
10W
absorve (dissipa, consome, …)
10J
por cada segundo em que está ligada

Potência

- **Podemos exprimir a potência como:**

$$P=\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dq}\,x\,\frac{dq}{dt}=V\,.I \qquad 1\,Watt=1\,J/C \quad x \quad 1\,C/s$$

- **Ou seja, para um dado elemento de circuito, a potência é proporcional:**
  - **À Energia necessária para transferir 1 Coulomb através do elemento, ou seja, à tensão (V);**
  - **Ao número de Coulombs transferidos durante 1 Segundo através do elemento, ou seja, a corrente (I).**

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Potência

- **Num circuito eléctrico há elementos que fornecem potência e outros que absorvem potência;**

- **A Lei da Conservação da Energia garante que o total da potência fornecida iguala a totalidade da potência absorvida:**

$$\sum_i P_i^{fornecida}=\sum_j P_j^{absorvida}$$

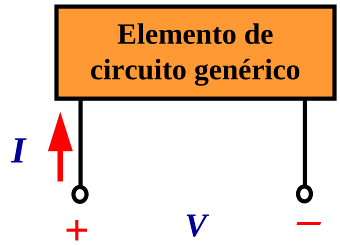
Potência: absorvida ou fornecida?

- **Na análise de um circuito, por vezes precisamos de saber se um dado elemento fornece ou absorve potência;**

- **Uma maneira de determinar isso, passa pela adopção da Convenção de Sinal de Elemento Passivo (CSEP):**

C S E P

A polaridade de referência da tensão e o sentido de referência da corrente são escolhidos de forma a que a corrente entre pelo terminal positivo.

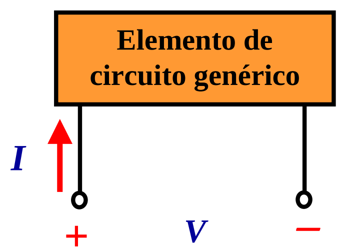


Potência: absorvida ou fornecida?

- **Adoptada a CSEP, assim que determinarmos os valores da tensão, V, e da corrente, I, é fácil saber se o elemento fornece ou absorve potência:**

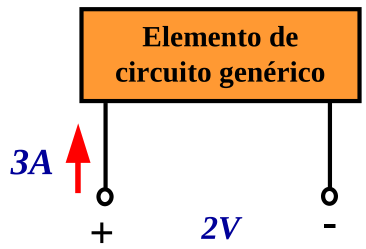
  - **se $P = V \times I > 0 \Rightarrow$ a potência é absorvida, sendo dada por $P_{absorvida} = V \times I$;**

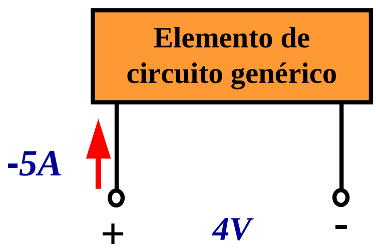
  - **se $P = V \times I < 0 \Rightarrow$ a potência é fornecida, sendo dada por $P_{fornecida} = |V \times I|$**



Potência: absorvida/fornecida, exemplos

- **Polaridades e sentidos das correntes já são dados de acordo com a CSEP**





$P = 2 \times 3 = 6W$

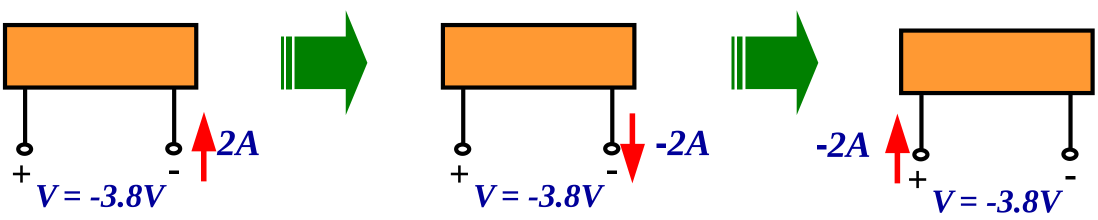
$P = 4 \times (-5) = -20W$

***P* é absorvida**

***P* é fornecida**

Potência: absorvida/fornecida, exemplos

- **A polaridade da tensão e o sentido da corrente podem ter de ser alterados de forma a satisfazer a CSEP:**



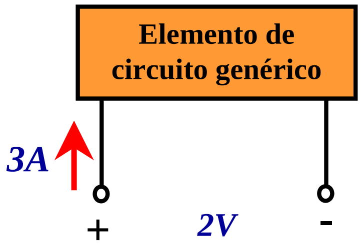
$P = (-3.8) \times (-2) = 7.6W$

***P* é absorvida**

Potência: absorvida/fornecida

- **Para qualquer elemento de circuito:**

$$P_{\text{absorvida}} = -P_{\text{fornecida}}$$

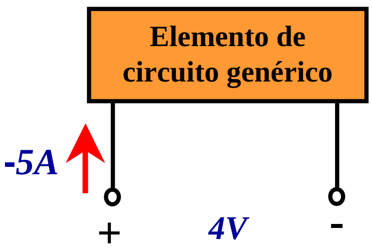


P = 2.3 = 6W
***P* absorvida**

Elemento absorve *6W*, o que é o mesmo que dizer que fornece *-6W*

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Potência: absorvida/fornecida



P = 4.(-5) = -20W
***P* fornecida**

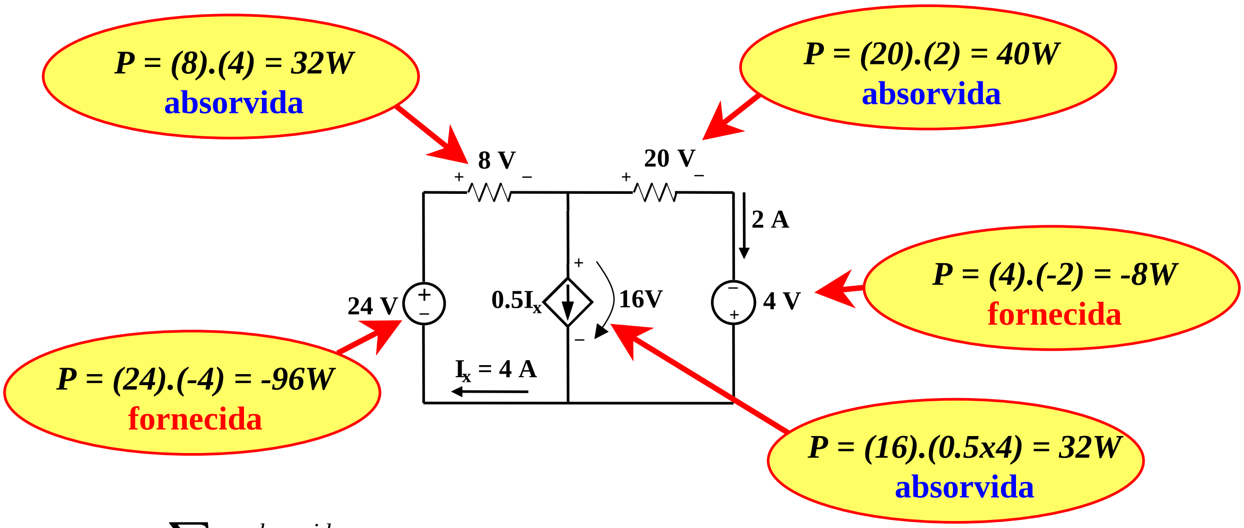
Elemento absorve *-20W*, o que é o mesmo que dizer que fornece *20W*

- **Mas, na realidade, absorve ou fornece?**

Resposta: a resposta é ditada pelo valor da potência, absorvida ou fornecida, que for positivo.

Potência: Exemplo de cálculo

Calcular a potência absorvida/fornecida por cada elemento de circuito.

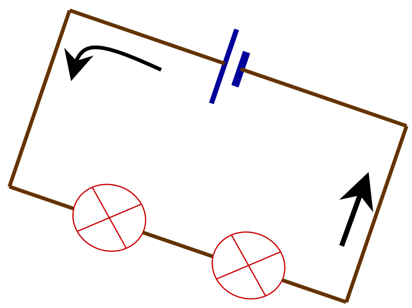


$$\sum_j P_j^{absorvida} = 32 + 40 + 32 = 104W$$

$$\sum_i P_i^{fornecida} = 96 + 8 = 104W$$

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 1: Fundamentos (parte 2)



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Lei de Ohm;**
- **Resistividade;**
- **Potência dissipada numa resistência;**
- **Lei das correntes e lei das tensões de Kirchhoff;**
- **Análise de circuitos simples (um só *loop* / um par de nós);**
- **Combinação de fontes e de resistências;**
- **Divisores de tensão e de corrente.**

Lei de Ohm

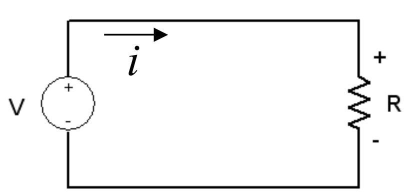
George Simon Ohm, físico alemão
(16-03-1789, 06-07-1854)

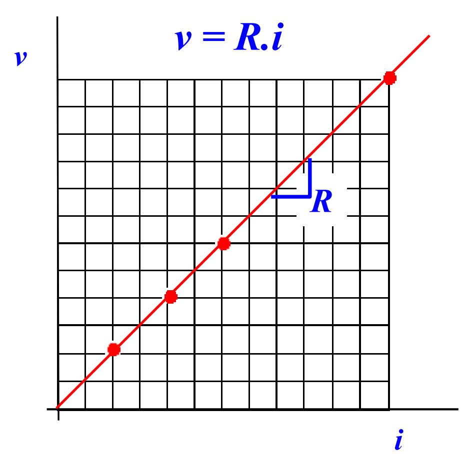
Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Lei de Ohm

- **Lei fundamental da electricidade enunciada pela primeira vez, em 1827, pelo físico alemão Georg Simon Ohm:**

"Para todo o *condutor linear*, existe uma razão constante entre a tensão *v* aos seus terminais e a corrente *i* que o atravessa"



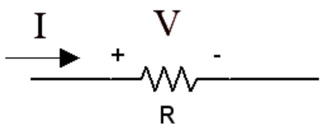


- **A constante de proporcionalidade é a Resistência, R.**

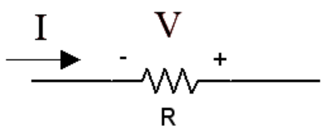
- **A resistência é uma medida da oposição que o condutor eléctrico oferece à passagem da corrente; Medida em *Ohm* (Ω);**

Lei de Ohm e os sinais da tensão e corrente

- **A expressão dada da Lei de Ohm é válida para uma resistência desde que se respeite a CSEP:**



$$v = R.i$$

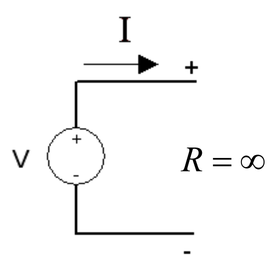


$$v = -R.i$$

Circuito aberto e curto-circuito

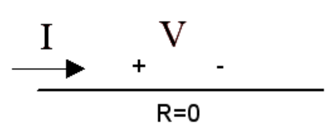
- **Num circuito aberto,**

$$\boldsymbol{R = \infty \quad \Rightarrow \quad i = v/R = 0}$$



- **Num curto-circuito,**

$$\boldsymbol{R = 0 \quad \Rightarrow \quad v = R.i = 0}$$

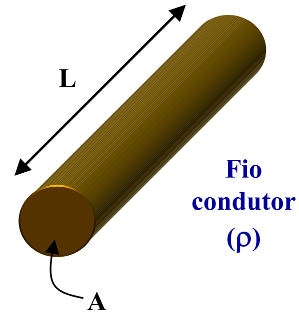


Nota: Nos circuitos que iremos estudar, os fios de ligação entre elementos são considerados ideais: apresentam $R = 0\Omega$.

Resistência e resistividade de materiais

- **Os condutores reais apresentam uma resistência eléctrica que pode ser determinada por:**

$$R = \rho \frac{L}{A}$$



ρ - Resistividade do material, em Ωm;
L – comprimento, em m;
A – Área da secção, em m^2.

Material	$\rho\ (\Omega m)$
prata (Ag)	1.6×10^{-8}
cobre (Cu)	1.7×10^{-8}
ouro (Au)	2.2×10^{-8}
alumínio (Al)	2.7×10^{-8}
tungsténio (W)	5.5×10^{-8}

Potência dissipada numa resistência

- **A resistência é o elemento passivo mais simples;**
- **A potência dissipada ou absorvida por uma resistência é sempre positiva;**

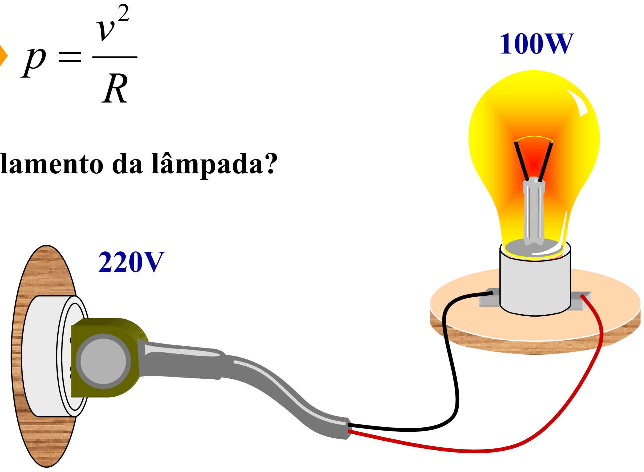
$$p = v.i = (R.i).i \Rightarrow p = R.i^2$$

$$p = v.i = v\left(\frac{v}{R}\right) \Rightarrow p = \frac{v^2}{R}$$

- **Qual é o valor da resistência do filamento da lâmpada?**

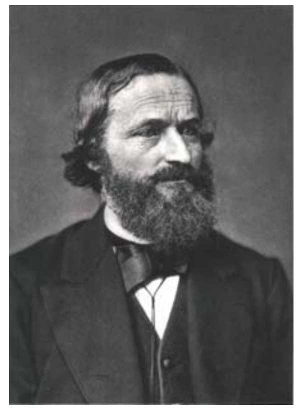
$$p = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{v^2}{p}$$

$$R = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$$



Leis de Kirchhoff

lei das correntes



Gustav Robert Kirchhoff, físico alemão
(12-03-1824, 17-10-1887)

Pressupostos e definições

Na análise que se segue consideramos:

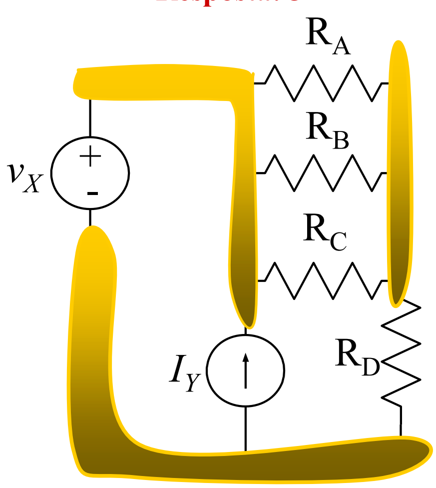
- **Nó –** **Ponto de ligação de dois ou mais elementos;**
- **Ramo –** **Caminho no circuito que liga dois nós.**
- **Caminho fechado ou *loop* –** **Qualquer caminho através do circuito que começa e termina no mesmo nó;**
- **Malha –** ***Loop* que não contém outros *loops* dentro dele.**

Nós

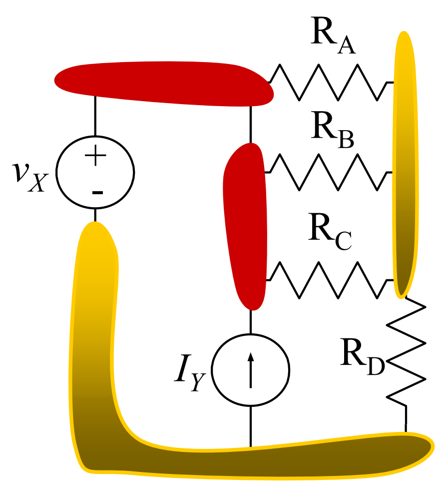
- **Para analisar um circuito é importante <u>identificar os nós</u> desse circuito.**

Quantos nós?

Resposta: 3



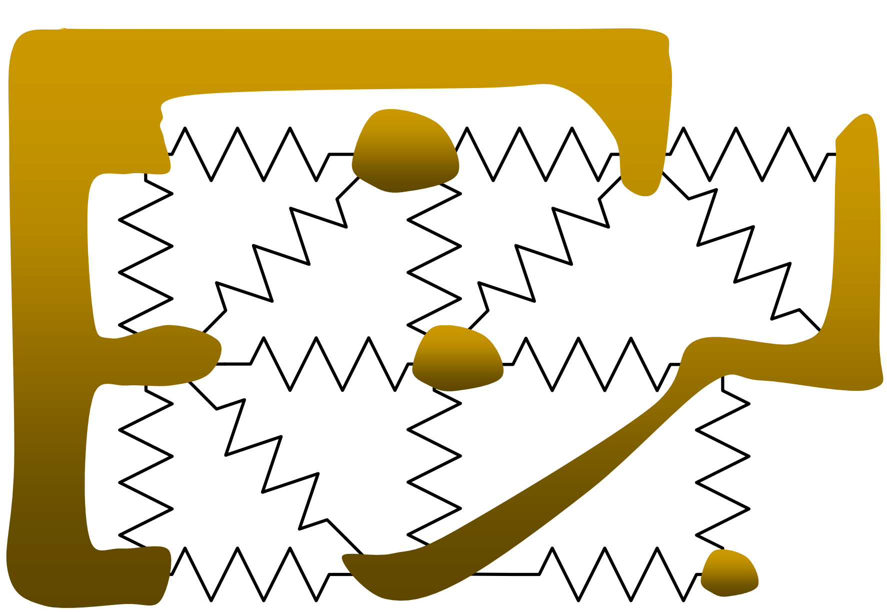
Dois pontos de ligação ligados por um fio constituem o mesmo nó



Nós

Quantos nós tem este circuito?

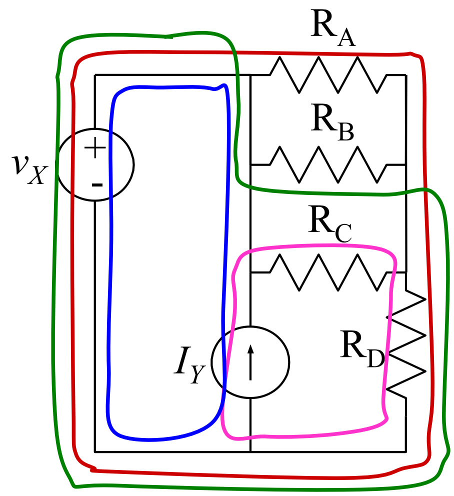
Resposta: 5



Caminhos fechados ou *loops*

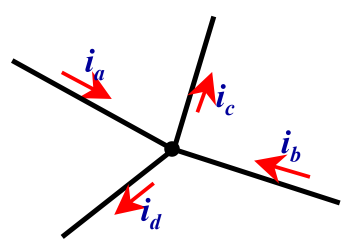
- **Para analisar um circuito é importante <u>identificar *loops*</u> nesse circuito (embora não seja preciso identificar todos os *loops* possíveis).**

- **Alguns desses *loops* são:**



Lei das Correntes de Kirchhoff – 1ª lei: KCL

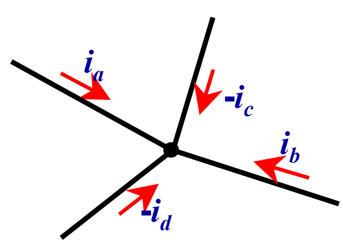
- **"A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó"**



$$i_a + i_b = i_c + i_d$$

- **É uma consequência da Lei da Conservação da Carga: a carga não se pode perder nem criar num nó;**

- **Alternativamente pode ser enunciada como:**
"A soma algébrica das correntes que entram num nó é zero"

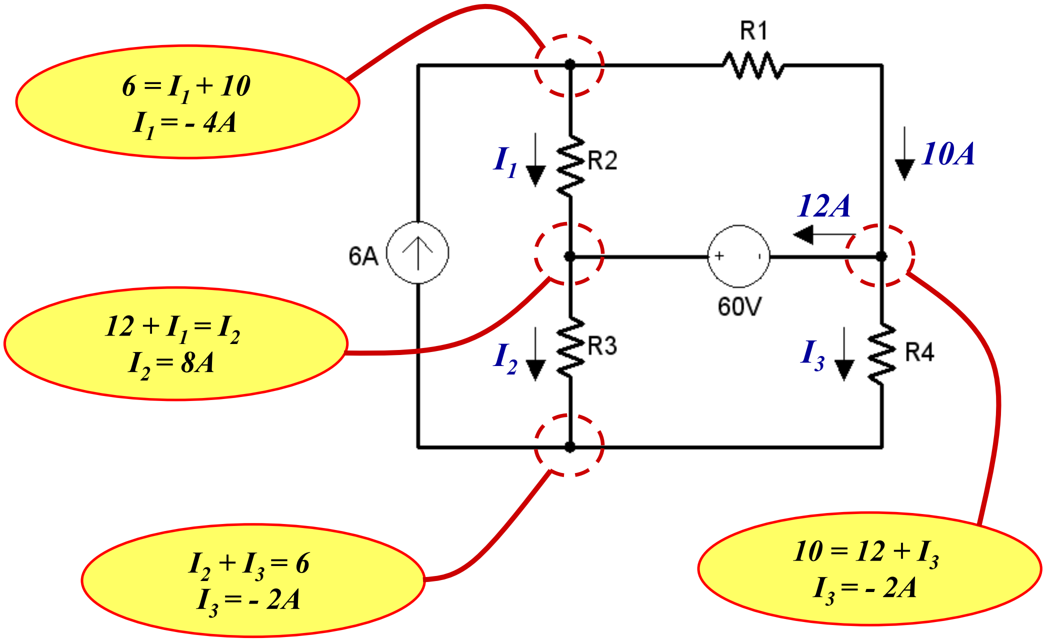


$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$$

$$i_a + i_b - i_c - i_d = 0$$

Lei das Correntes de Kirchhoff – 1ª lei: KCL

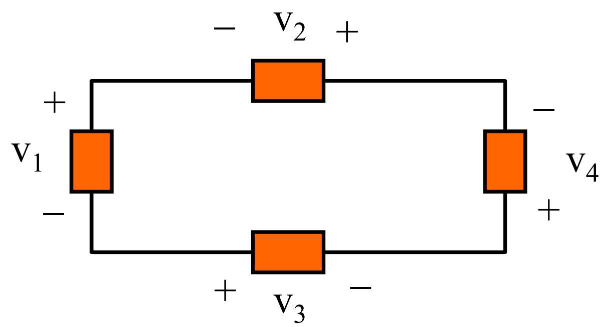
Calcular I_1, I_2 e I_3.



Leis de Kirchhoff

lei das tensões

Lei das Tensões de Kirchhoff – 2ª lei: KVL



- **"A soma algébrica das tensões ao longo de um caminho fechado (*loop*) é zero"**

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

- **É uma consequência da Lei da Conservação da Energia;**

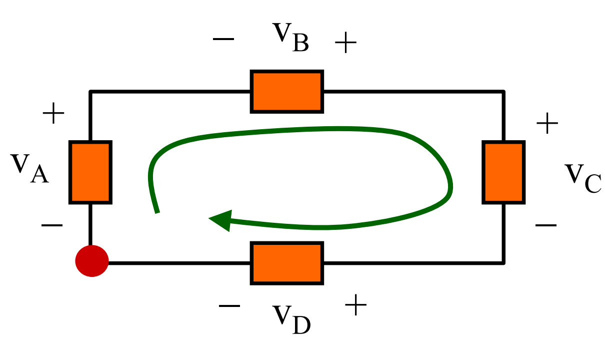
- **Mais genericamente,** $$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0$$

Lei das Tensões de Kirchhoff – 2ª lei: KVL

Para escrever a soma das tensões de um *loop*, procedemos da seguinte maneira:

1- Escolhemos um nó como ponto de partida do caminho fechado;

2- Percorremos o *loop* no sentido horário ou anti-horário, adicionando cada uma das tensões que encontramos;



3- O sinal algébrico atribuído a cada tensão é:

- **Positivo, se encontramos primeiro o sinal positivo (+) dessa tensão;**
- **Negativo, se encontramos primeiro o sinal negativo (-) dessa tensão;**

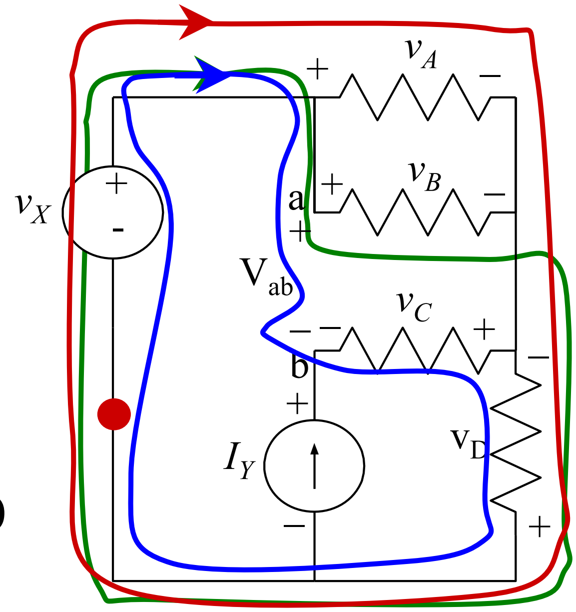
$$-v_A - v_B + v_C + v_D = 0$$

Lei das Tensões de Kirchhoff – 2ª lei: KVL

- **Podemos escrever tantas equações quantos os *loops* que conseguirmos identificar no circuito:**

$$-v_X + v_A - v_D = 0$$

$$-v_X + v_B - v_D = 0$$



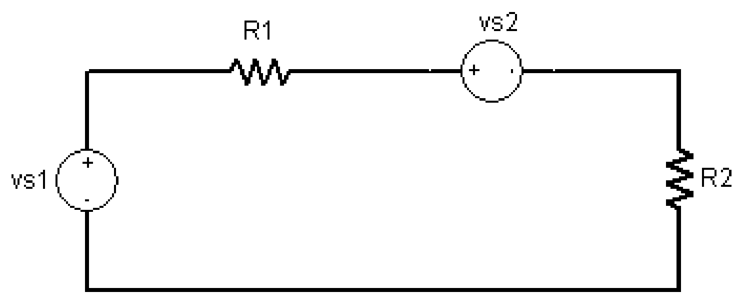
Excepção: *Caminho* a azul não é um *loop*, mas pode ser considerado para efeitos da aplicação da KVL:

$$-v_X + v_{ab} - v_C - v_D = 0$$

Análise de circuitos simples

Circuito com um só *loop* (ou uma só malha)

- **Pretendemos analisar o circuito série dado;**

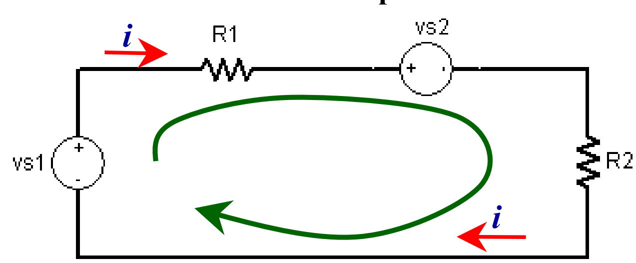


- **Como este é um circuito série, a grandeza mais importante a determinar (da qual todas as outras dependem) é a corrente, *i*, no circuito.**

Circuito com um só *loop* – determinação de *i*

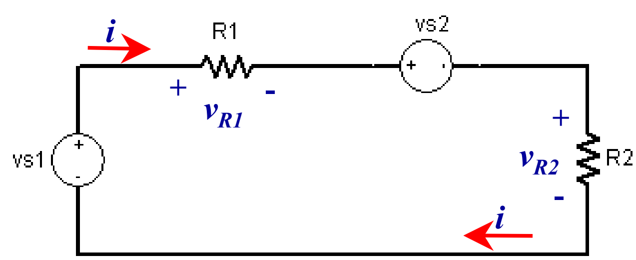
Aplicação da KVL

1- Arbitrar um sentido de referência para a corrente



Lembremos que elementos em série são percorridos pela mesma corrente.

2- Escolher as polaridades de referência para as tensões desconhecidas

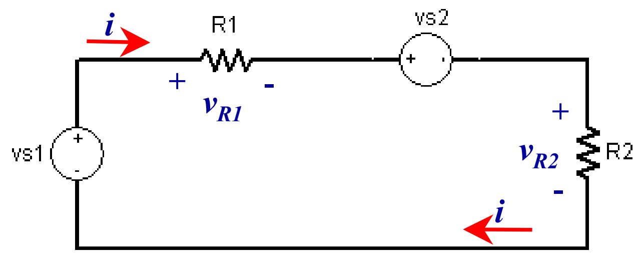


Convém escolher as polaridades de forma a que a corrente entre pelo lado positivo.

Circuito com um só *loop* – determinação de *i*

3- Com base na Lei das Tensões de Kirchhoff, escrever a equação:

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0$$



4- Aplica-se a Lei de Ohm para expressar v_{R1} e v_{R2} em função de *i*:

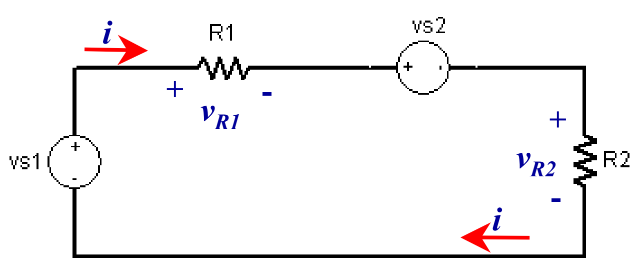
$$v_{R1} = R_1.i \qquad v_{R2} = R_2.i$$

$$-v_{s1} + R_1.i + v_{s2} + R_2.i = 0$$

$$\boxed{i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}}$$

Circuito com um só *loop*

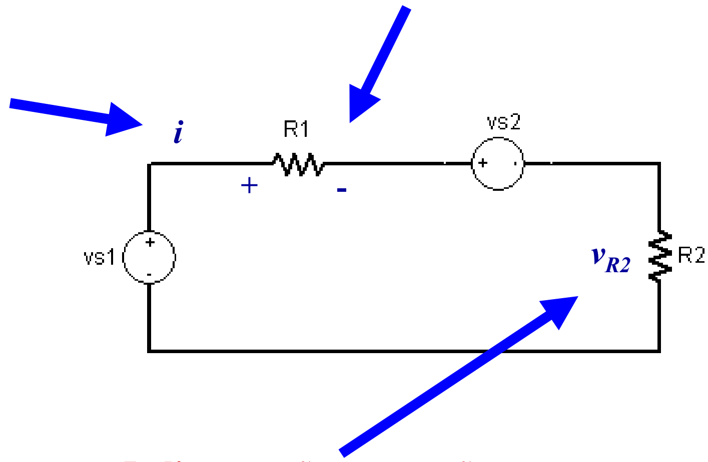
- **Sabendo *i* podemos calcular praticamente tudo sobre o circuito, por exemplo:**
  - **A tensão aos terminais de R1:** $v_{R1} = R_1.i$
  - **A potência dissipada em R2:** $p_{R2} = R_2.i^2$
  - **As potências <u>absorvidas</u> por cada uma dos geradores:** $p_{s1} = v_{s1}.(-i)$
    $p_{s2} = v_{s2}.i$



Erros frequentes!…

Indicar polaridade… mas não indicar a tensão!

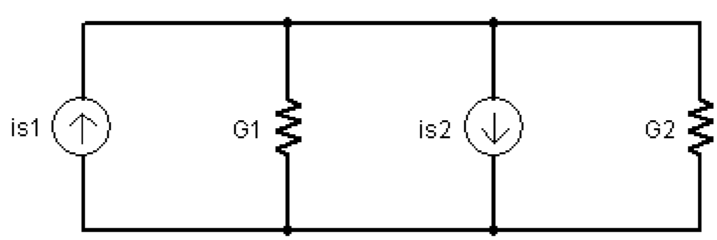
Indicar corrente… mas não o sentido!



Indicar tensão… mas não a polaridade!

Circuito com um par de nós

- **Pretendemos analisar o circuito paralelo dado;**

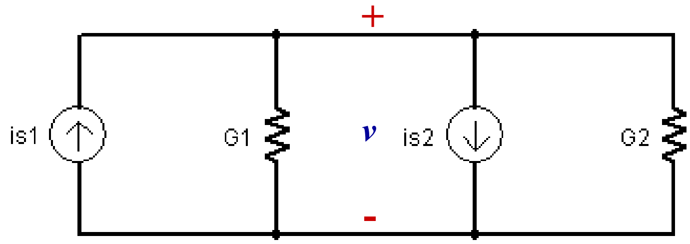


- **Neste caso, como se trata de um circuito paralelo, a grandeza mais importante a determinar (da qual todas as outras dependem) é a tensão, *v*, entre os dois nós.**

Circuito com um par de nós – determinação de *v*

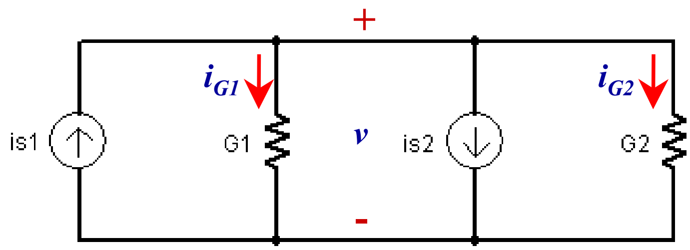
Aplicação da KCL

1- Arbitrar uma polaridade de referência para a tensão *v*;



Lembremos que elementos em paralelo estão todos à mesma tensão.

2- Escolher sentidos de referência para as correntes desconhecidas;

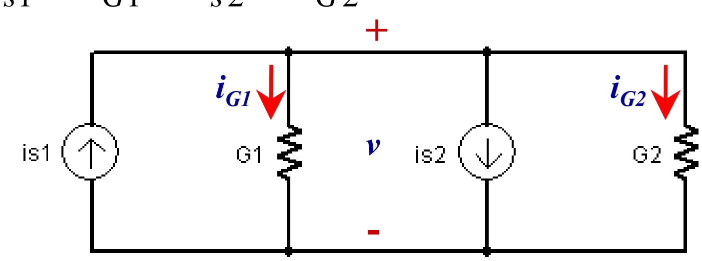


Convém escolher os sentidos de forma a que as correntes entrem pelo lado positivo da tensão.

Circuito com um par de nós – determinação de *v*

3- Com base na Lei das Correntes de Kirchhoff, escrever a equação do nó:

$$-i_{s1} + i_{G1} + i_{s2} + i_{G2} = 0$$



4- Aplica-se a Lei de Ohm para expressar i_{G1} e i_{G2} em função de *v*:

$$i_{G1} = G_1.v \qquad i_{G2} = G_2.v$$

$$-i_{s1} + G_1.v + i_{s2} + G_2.v = 0$$

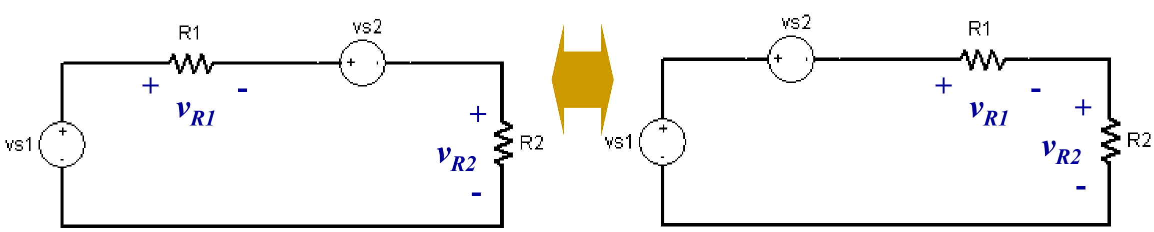
$$\boxed{v = \frac{i_{s1} - i_{s2}}{G_1 + G_2}}$$

Combinação de fontes e resistências

… para simplificar a análise de circuitos

Combinação de fontes

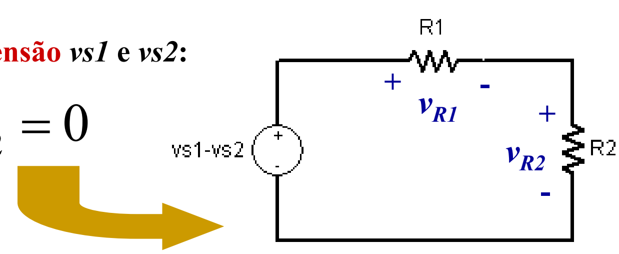
- **Notar que a posição relativa dos elementos num circuito série não afecta a corrente no mesmo.**



$$-v_{s1}+v_{R1}+v_{s2}+v_{R2}=0 \qquad -v_{s1}+v_{s2}+v_{R1}+v_{R2}=0$$

- **Podemos combinar as fontes de tensão *vs1* e *vs2*:**

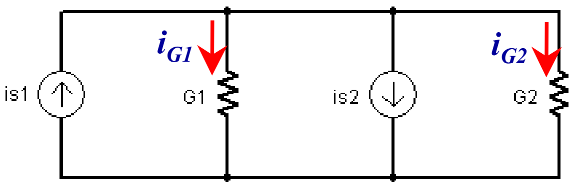
$$-\left(v_{s1}-v_{s2}\right)+v_{R1}+v_{R2}=0$$



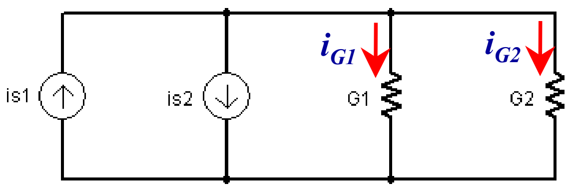
Circuito equivalente

Combinação de fontes

- **O mesmo pode ser feito para as fontes de corrente.**



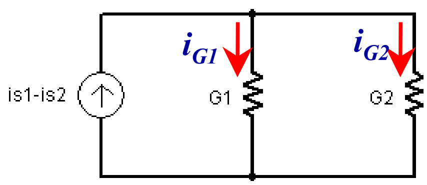
$$-i_{s1}+i_{G1}+i_{s2}+i_{G2}=0$$



$$-i_{s1}+i_{s2}+i_{G1}+i_{G2}=0$$

- **Podemos combinar as fontes de corrente *is1* e *is2*:**

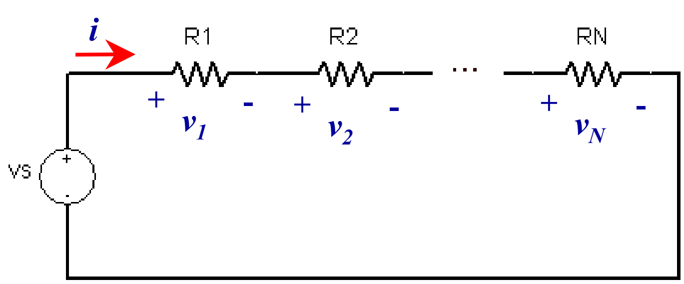
$$-\left(i_{s1}-i_{s2}\right)+i_{G1}+i_{G2}=0$$

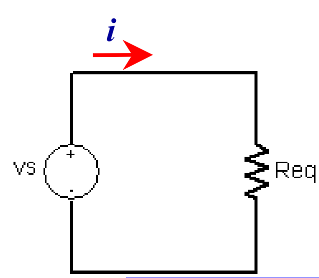


Circuito equivalente

Combinação de resistências – em série

- **Num circuito podemos substituir combinações de resistências por uma resistência equivalente;**





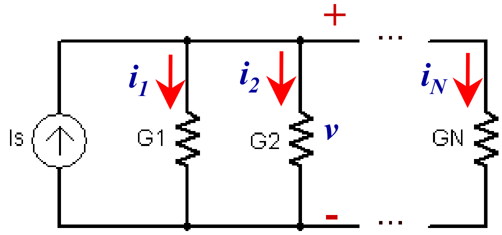
$$\boxed{v_s = R_{eq}.i}$$

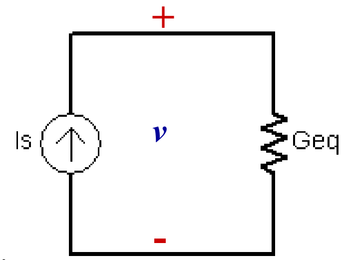
$$v_s = v_1 + v_2 + \ldots + v_N = R_1.i + R_2.i + \ldots + R_N.i$$

$$v_s = \underbrace{\left(R_1 + R_2 + \ldots + R_N\right)}.i$$

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N}$$

Combinação de resistências – em paralelo





$$i_s = i_1 + i_2 + \ldots + i_N = G_1.v + G_2.v + \ldots + G_N.v$$

$$i_s = \underbrace{\left(G_1 + G_2 + \ldots + G_N\right)}.v$$

$$\boxed{i_s = G_{eq}.v}$$

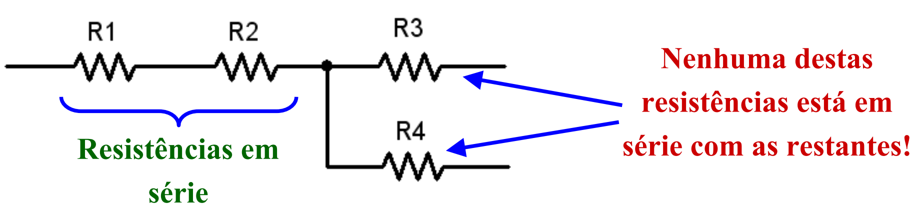
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \ldots + G_N$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}}$$

Nota: Para *N=2* a resistência equivalente é dada por:

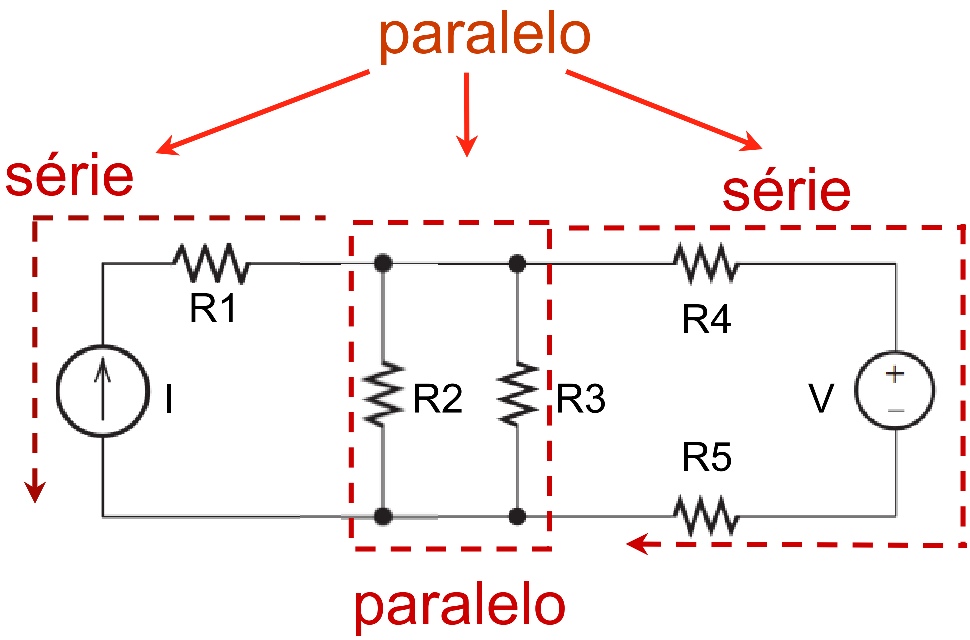
$$R_{eq2} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

Erros frequentes: Combinação de resistências



- **Nos elementos em série, não pode haver derivação nos pontos intermédios.**

Erros frequentes: Paralelos e séries

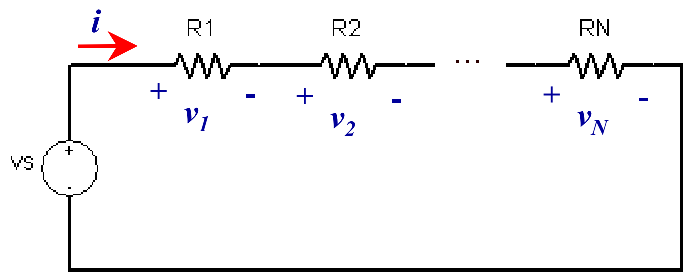


Divisores de tensão e de corrente

Circuitos muito comuns em electrónica!

Divisor de tensão

- **Serve para exprimir a tensão aos terminais de <u>uma resistência</u> num circuito com <u>várias resistências em série</u>.**



- **Aplicando a Lei de Ohm a R_j (com $1 \leq j \leq N$)**

$$v_j = R_j.i$$

- **Aplicando a mesma lei ao circuito todo**

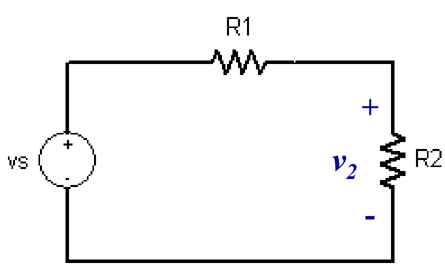
$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N}$$

- **Substituindo na expressão acima dá:**

$$\boxed{v_j = \frac{R_j}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N} v_s}$$

Divisor de tensão com duas resistências

- **Aparece com mais frequência com apenas duas resistências (ou dois conjuntos) ligadas a uma fonte de tensão.**

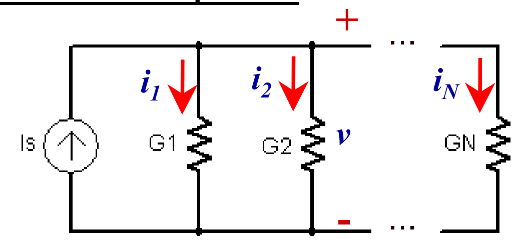


$$\boxed{v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s}$$

Mnémónica: **Tensão numa das resistências é a *resistência em causa* a dividir pela soma das resistências, vezes a tensão da fonte.**

Divisor de corrente

- É o dual do divisor de tensão e serve para exprimir a corrente através de uma resistência num circuito com várias resistências em paralelo.



- Aplicando a Lei de Ohm a G_j (com $1 \le j \le N$)

$$i_j = G_j . v$$

- Aplicando a mesma lei ao circuito todo

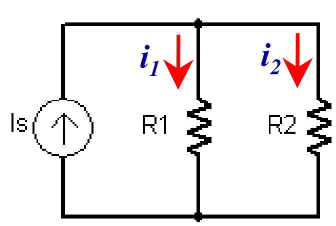
$$v = \frac{i_s}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N}$$

- Substituindo na expressão acima dá: $i_j = \dfrac{G_j}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N} i_s$

- Ou: $\boxed{i_j = \dfrac{1/R_j}{1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_N} i_s}$

Divisores de corrente com duas resistências

- É também com apenas duas resistências (ou grupos de resistências) que o divisor de corrente surge com mais frequência.

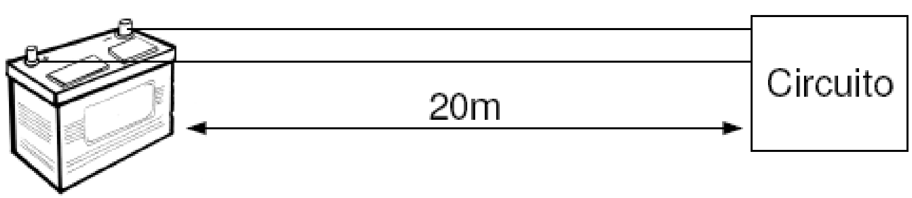


$$\boxed{i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s}$$

Mnémónica: Corrente numa das resistências é a *outra resistência* a dividir pela soma das resistências, vezes a corrente da fonte.

Exercício de aplicação

Problema

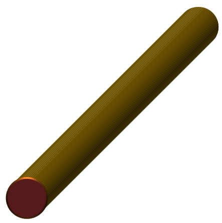


Um par de condutores de cobre com $0{,}75mm^2$ de secção é utilizado para ligar uma bateria de 12 V (tensão nominal) ao circuito que alimenta. O circuito e a bateria estão distantes entre si de 20m.

- Determine a resistência de cada um destes condutores.
- Se o circuito consumir 3A e a bateria tiver uma tensão de 12,3 V aos seus terminais, qual a d.d.p. aos terminais do circuito?

Resolução

1º: Resistência de cada fio condutor, R_C



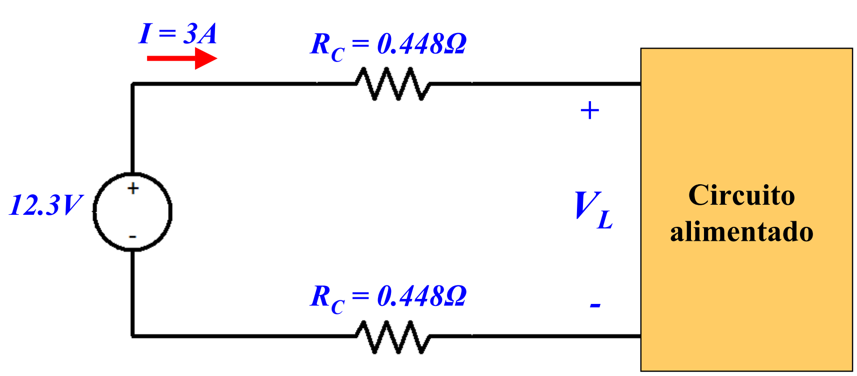
$$R_C = \rho \frac{L}{A}$$

$$\rho = 1.68\text{x}10^{-8}\,\Omega.m$$
$$L = 20m$$
$$A = 0.75mm^2 = 0.75\text{x}10^{-6}\,m^2$$

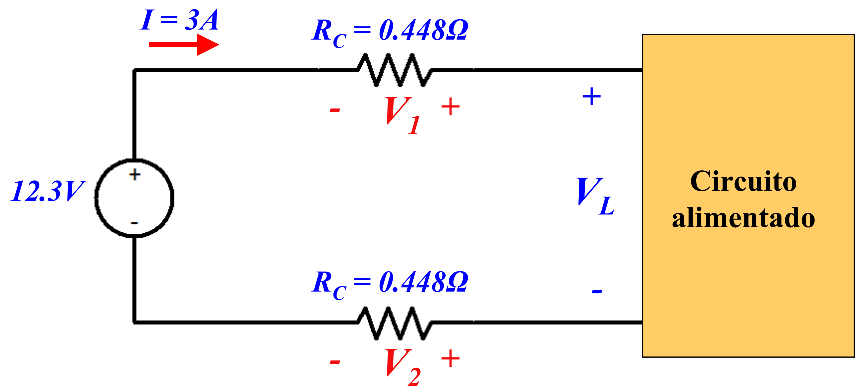
$$R_C = 1.68\text{x}10^{-8}\,\frac{20}{0.75\text{x}10^{-6}} = 0.448\Omega$$

2º: Tensão aos terminais do circuito, V_L

O circuito equivalente é:

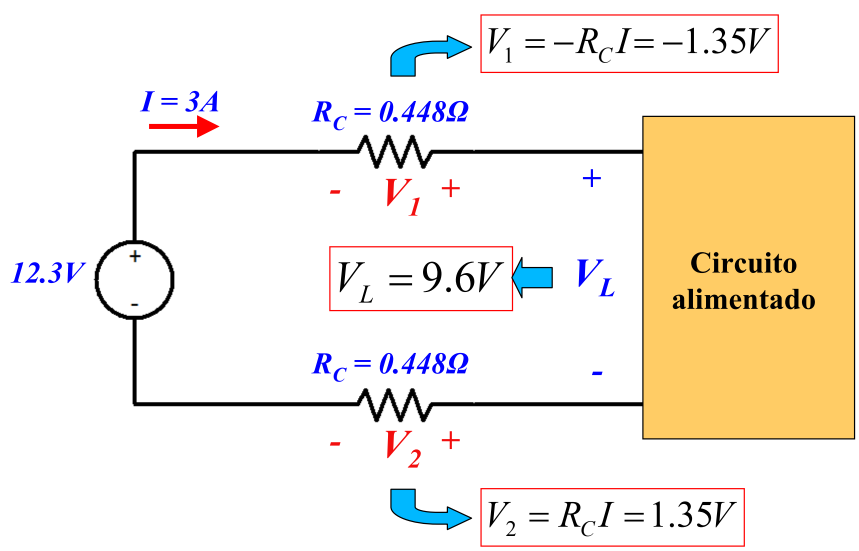


- **Para determinar V_L vamos usar *KVL*;**
- **…mas para isso precisamos de marcar tensões de referência nas resistências.**



- **Aplicando KVL, obtermos:** $-12.3 - V_1 + V_L + V_2 = 0$
- **Usando a Lei de Ohm:** $V_1 = -R_C I$ e $V_2 = R_C I$
- **Substituindo...** $-12.3 + R_C I + V_L + R_C I = 0$
- **Substituindo os valores de R_C e I:** $-12.3 + 2(0.448\text{x}3) + V_L = 0$

$$V_L = 9.6V$$

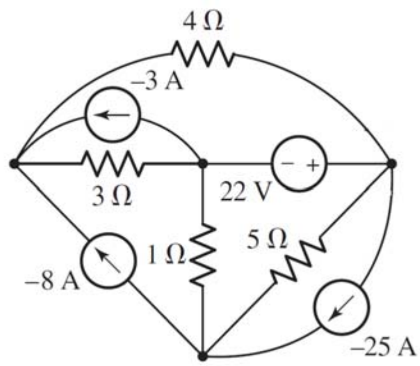


- **Às tensões V1 e V2 é costume chamar-se quedas de tensão.**

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 2: Técnicas de Análise de Circuitos

(parte 1)



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

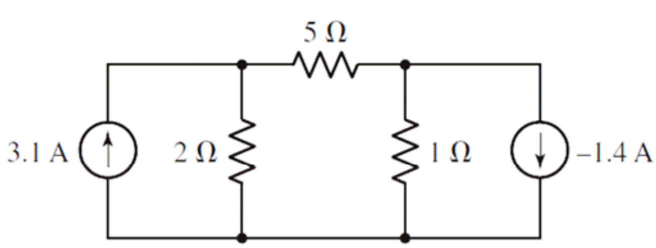
- **Análise de Nodal;**
- **Exemplos de cálculo;**
- **Análise Nodal com super-nós;**
- **Linearidade e sobreposição;**
- **Exemplos de cálculo.**

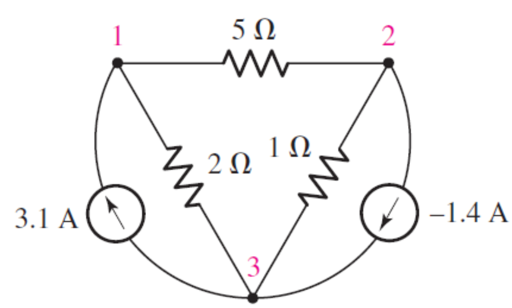
Análise Nodal

Análise de Nodal

- **Método sistemático que permite determinar as tensões em todos os nós de um circuito;**

- **nó – Ponto de ligação de dois ou mais elementos num circuito;**

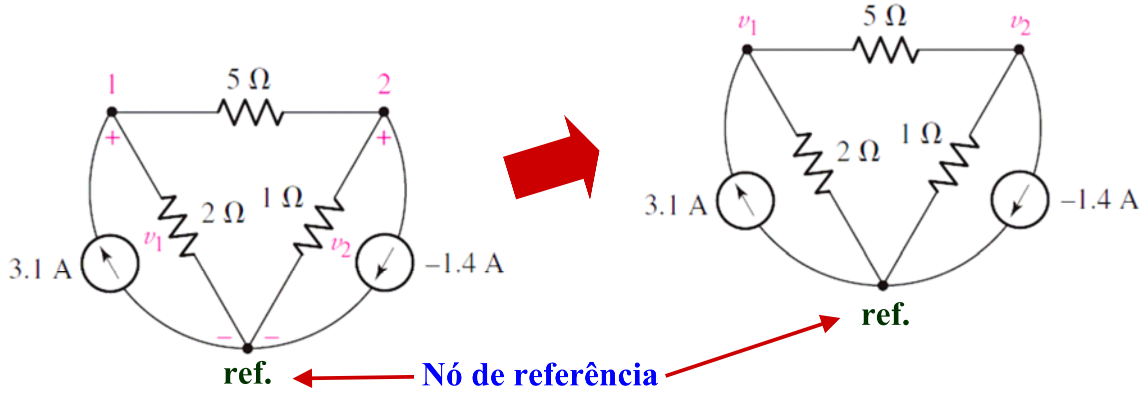




Circuito com 3 nós

Análise de Nodal – nó de referência

- Dado que uma tensão é sempre definida entre dois nós, designamos um dos nós do circuito como **Nó de Referência** – em relação ao qual todas as tensões são medidas.



- Quando referirmos, por exemplo, a tensão v_1, estaremos a referir-nos na realidade à tensão entre o **nó 1** e o **nó de referência**.

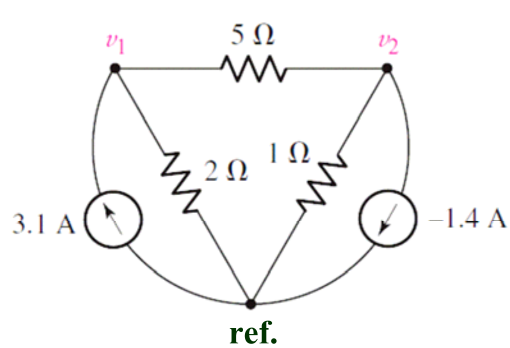
Análise de Nodal

- Para todos os efeitos práticos, o potencial eléctrico no nó de referência é considerado nulo;

- Um circuito com N nós tem N-1 tensões – as <u>Tensões Nodais</u>;

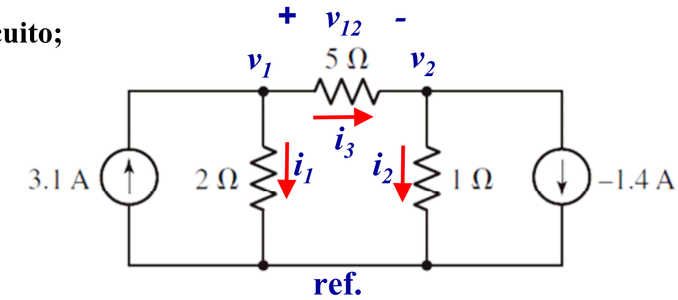
- A polaridade de referência das tensões nodais é geralmente considerada positiva **(+)** em cada nó e negativa **(-)** no nó de referência;

- Aplicando KCL a todos os nós **excepto o de referência**, obtemos um sistema de N-1 **equações** com N-1 **incógnitas** que nos permite determinar as tensões nodais.



Análise Nodal – exemplo 1

- **Apliquemos KCL aos nós do circuito;**



KCL: "A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó"

nó 1: $$3.1 = i_1 + i_3$$

nó 2: $$i_3 = i_2 - 1.4$$

- **Exprimimos agora cada uma das correntes em função das tensões:**

$$i_1 = v_1/2 \qquad i_2 = v_2/1 \qquad i_3 = v_{12}/5 = (v_1 - v_2)/5$$

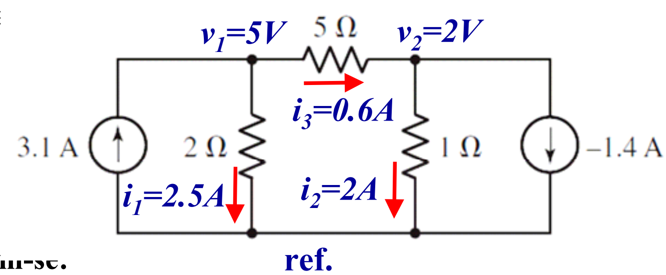
- **Substituindo acima obtém-se**

$$3 = 0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2)$$
$$0.2(v_1 - v_2) = 1v_2 - 2$$

Análise Nodal – exemplo 1

- **O que, rearranjando, dá o sistema**

$$\begin{cases} 3.5v_1 - v_2 = 15.5 \\ -v_1 + 6v_2 = 7 \end{cases}$$



- **Resolvendo por substituição obtém-se:**

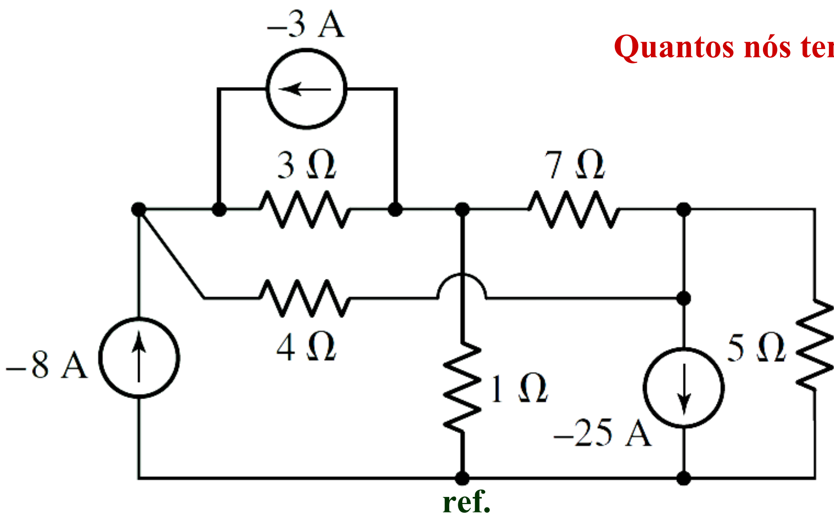
$$\begin{cases} v_1 = 5V \\ v_2 = 2V \end{cases}$$

- **Com as tensões nodais podemos agora calcular todas as correntes no circuito**

$$i_1 = v_1/2 = 2.5\text{A}$$
$$i_2 = v_2/1 = 2\text{A}$$
$$i_3 = (v_1 - v_2)/5 = 0.6A$$

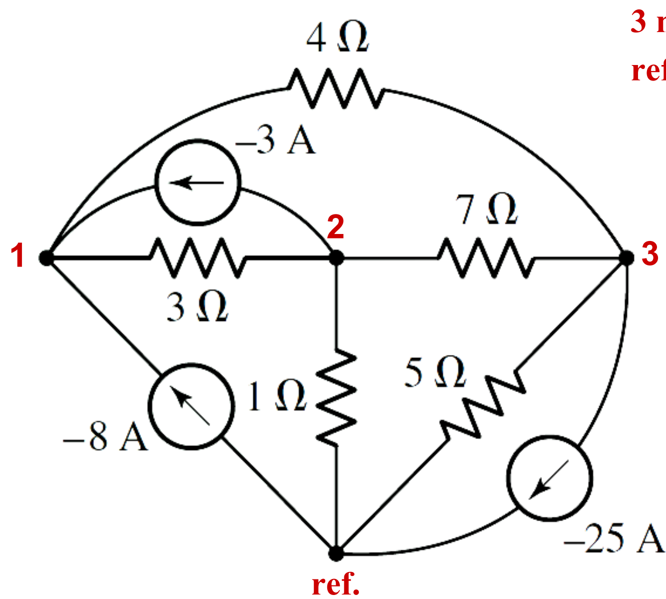
Análise Nodal – exemplo 2

- **Determinar as tensões nodais no circuito dado.**



Quantos nós tem?

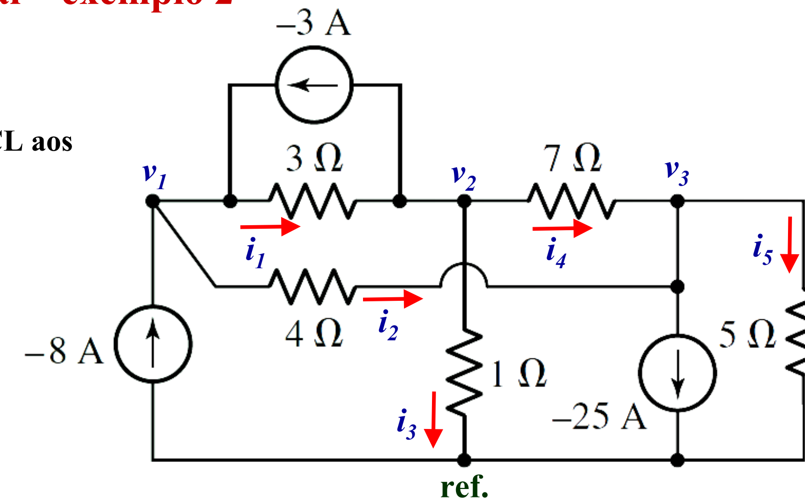
Análise Nodal – exemplo 2



3 nós mais o de referência!

Análise Nodal – exemplo 2

- **Aplicando KCL aos três nós:**



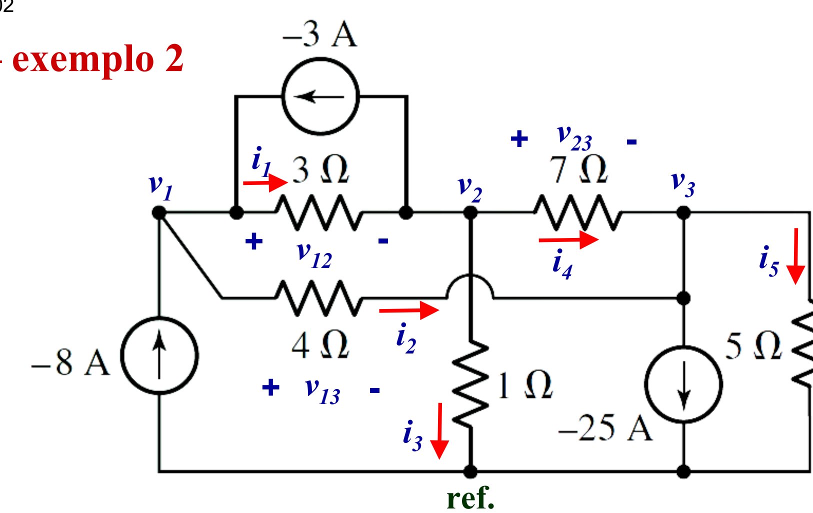
nó 1: $-8-3=i_1+i_2$

nó 2: $i_1=-3+i_3+i_4$

nó 3: $i_4+i_2=-25+i_5$

Análise Nodal – exemplo 2

- **Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:**



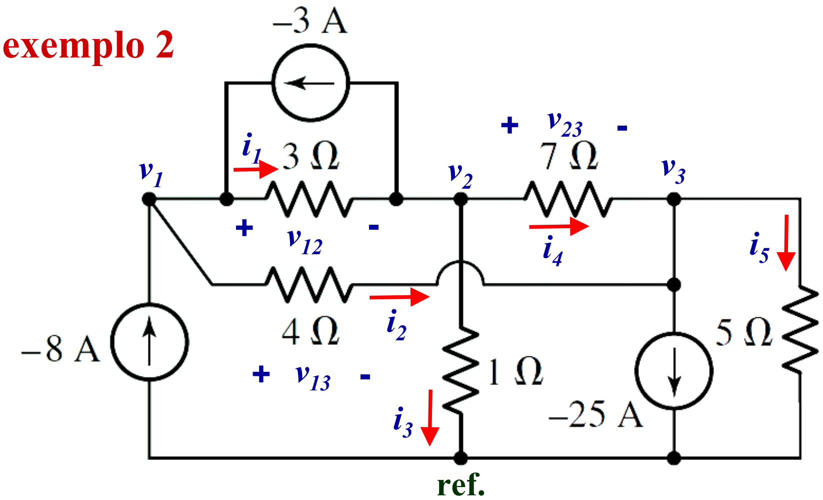
nó 1:

$$-8-3=i_1+i_2$$

$$-8-3=v_{12}/3+v_{13}/4=\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{v_1-v_3}{4}$$

$$7v_1-4v_2-3v_3=-132$$

Análise Nodal – exemplo 2



- **Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:**

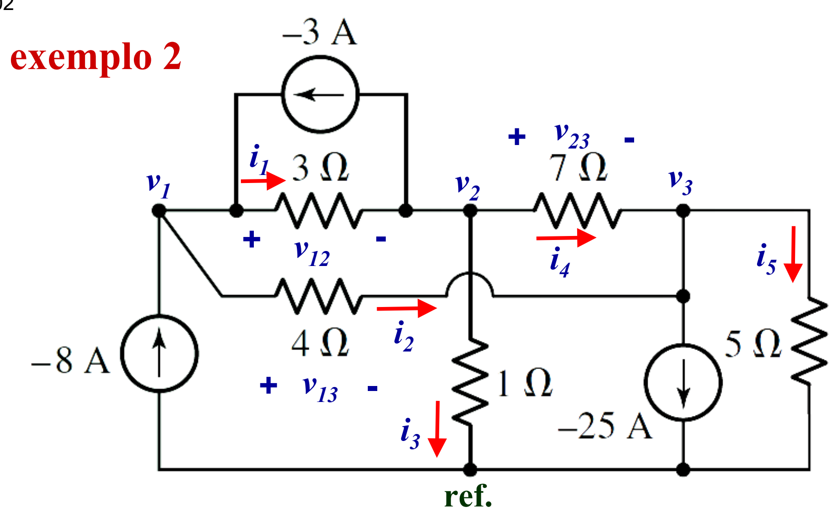
nó 2:

$$i_1 = -3 + i_3 + i_4$$

$$v_{12}/3 = -3 + v_2/1 + v_{23}/7 \Leftrightarrow \frac{v_1 - v_2}{3} = -3 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

$$7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63$$

Análise Nodal – exemplo 2



- **Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:**

nó 3:

$$i_4 + i_2 = -25 + i_5$$

$$v_{23}/7 + v_{13}/4 = -25 + v_3/5 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_3}{7} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -25 + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500$$

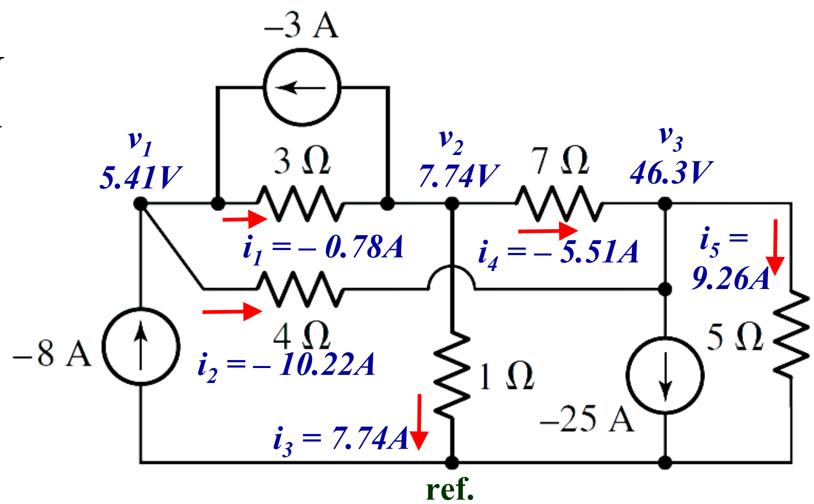
Análise Nodal – exemplo 2

- O sistema de equações é:

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63 \\ 35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500 \end{cases}$$

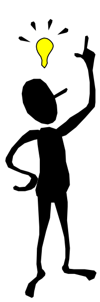
- Resolvendo obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 5.41V \\ v_2 = 7.74V \\ v_3 = 46.3V \end{cases}$$



- Com as tensões nodais, podemos agora calcular todas as correntes.

Análise Nodal passo a passo



1. Contar o número de nós *N*;
2. Escolher um dos nós como nó de Referência;
3. Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2,…v_{N-1};
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Usando a Lei das Correntes de Kirchhoff (KCL), escrever *N-1* equações nodais.

Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Como resolver?

Processo 1

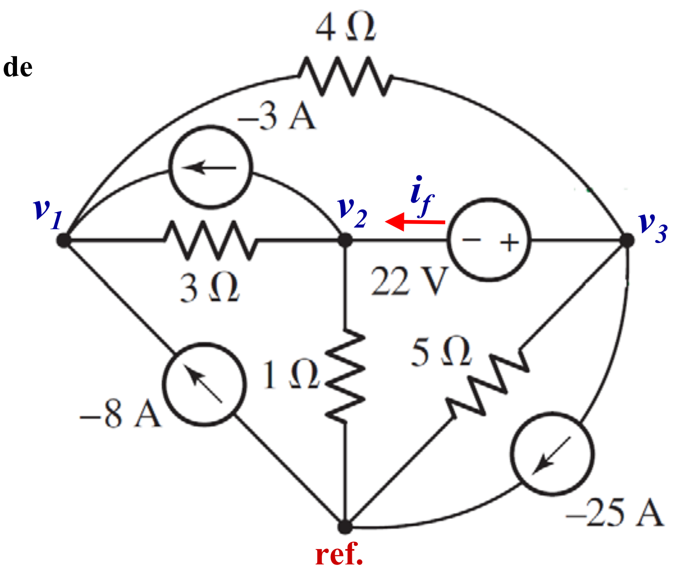
- marcar uma corrente na fonte de tensão: i_f
- aplicar KCL aos 3 nós
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$v_3 - v_2 = 22$

Resultado:

4 equações com 4 incógnitas

MUITO COMPLICADO!!



Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Processo 2

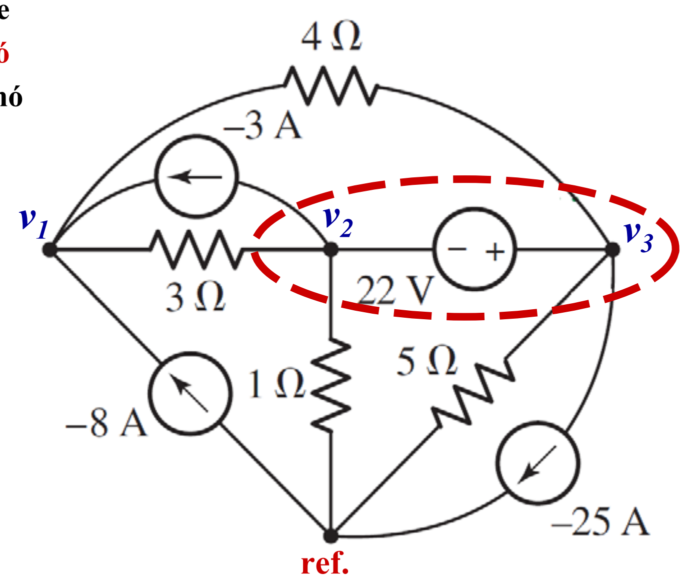
- tratar os nós 2 e 3 mais a fonte de tensão como um só nó: um super nó
- aplicar KCL ao nó 1 e ao super-nó
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$v_3 - v_2 = 22$

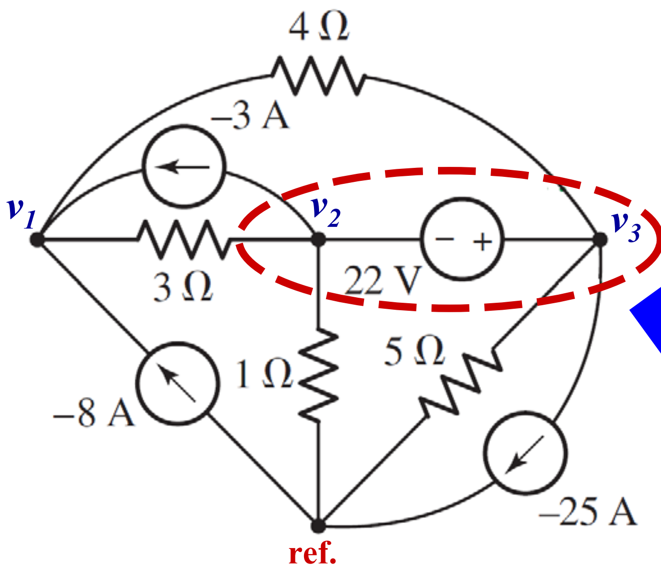
Resultado:

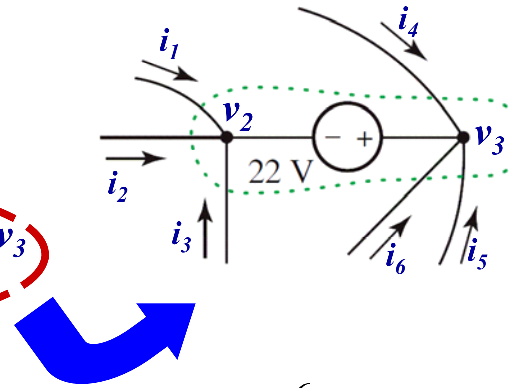
3 equações com 3 incógnitas

PROCESSO MAIS SIMPLES!!



Análise Nodal – com super-nó



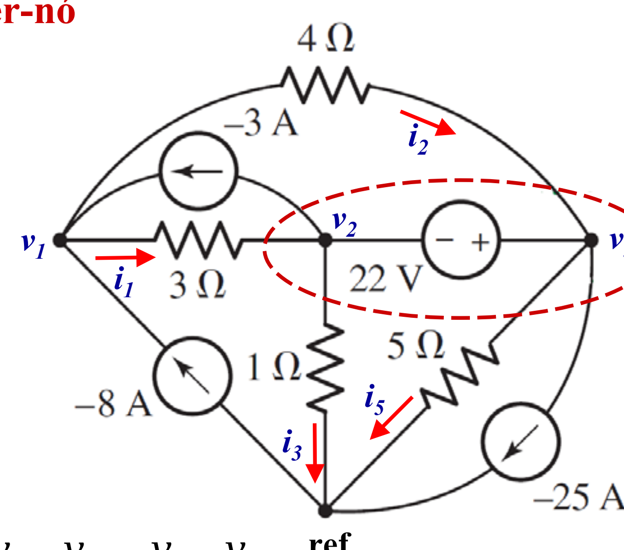


$$\sum_{k=0}^{6} i_k = 0$$

- Se a soma das correntes que entram no nó v_2 é zero e a soma das correntes que entram no nó v_3 é zero, então a soma das correntes que entram nos dois nós também tem de ser zero.

Análise Nodal – com super-nó

- Apliquemos então KCL



nó 1:

$$-8-3=i_1+i_2$$

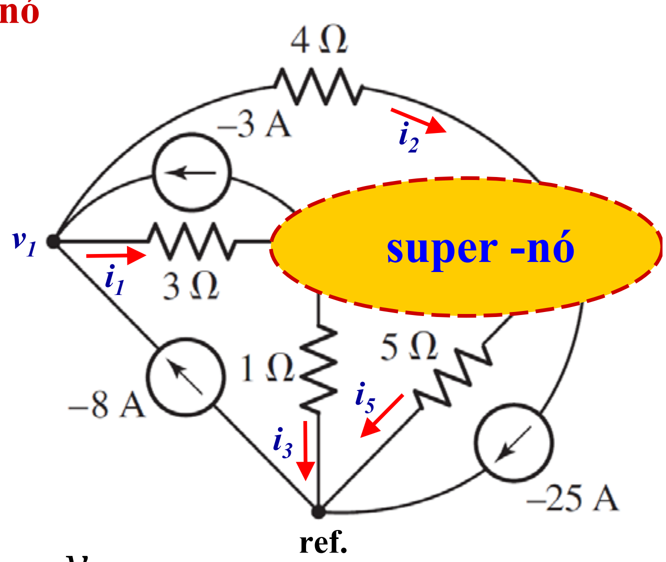
$$-8-3=v_{12}/3+v_{13}/4=\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{v_1-v_3}{4}$$

$$7v_1-4v_2-3v_3=-132$$

... é a mesma equação do exemplo anterior

Análise Nodal – com super-nó

NOTA: O super-nó inclui a fonte de tensão + os dois nós aos quais a fonte está ligada



super -nó:

$$i_1 + i_2 = -3 + i_3 + i_5 - 25$$

$$\frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -28 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680$$

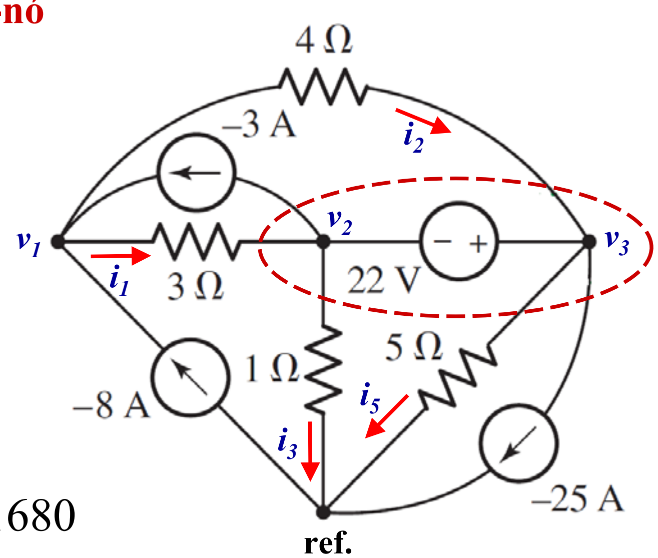
Análise Nodal – com super-nó

- **Finalmente, aplicamos KVL ao super-nó:**

$$v_3 - v_2 = 22$$

- **pelo que o sistema de equações final é**

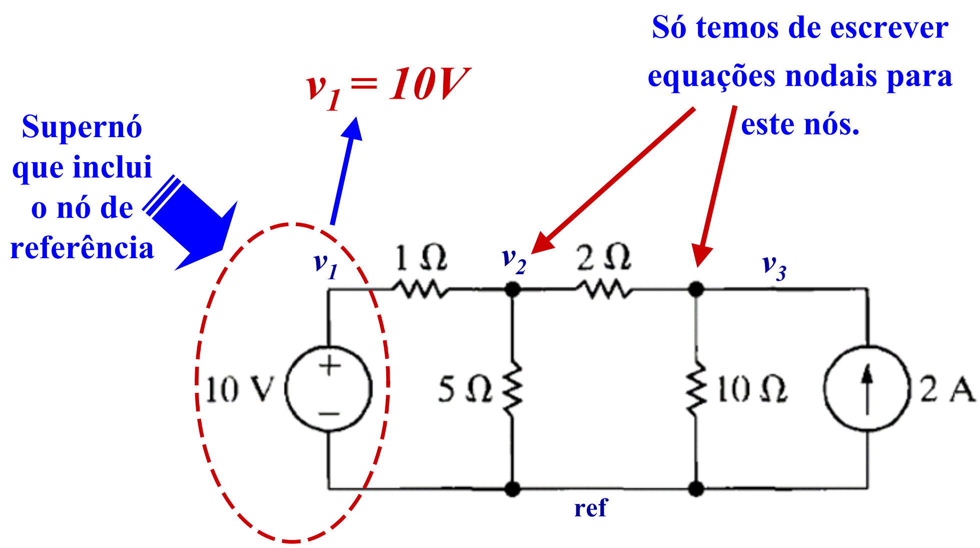
$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680 \\ v_3 - v_2 = 22 \end{cases}$$



- **Resolvendo obtém-se:** $\begin{cases} v_1 = 1.07V \\ v_2 = 10.5V \\ v_3 = 32.5V \end{cases}$

Análise Nodal – super-nó que contém o nó de referência

- **Quando o super-nó inclui o nó de referência a análise fica mais fácil!**



Análise Nodal passo a passo (com super-nós)

1. **Contar o número de nós *N*;**
2. **Escolher nó de Referência;**
3. **Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2,…v_{N-1};**
4. **Marcar correntes em todos os ramos;**
5. **Se o circuito contiver fontes de tensão, formar super-nós que contenham essas fontes e os nós a que estão ligados;**
6. **Usando KCL, escrever uma equação para cada nó (excepto o de referência) e para cada super-nó que não contenha o nó de referência;**
7. **Usando KVL relacionar a tensão de cada fonte com as tensões nodais.**

Linearidade e Sobreposição

Linearidade

- **Circuito linear – É um circuito composto apenas por:**
  - **Elementos lineares;**
  - **Fontes independentes;**
  - **Fontes dependentes lineares.**

- **Elemento linear – É um elemento passivo que tem uma relação linear entre a tensão aos seus terminais e a corrente que o percorre. Exemplo:**
  - **Resistência: $v = R.i$;**
  - **Condensador e bobina.**

Princípio da Sobreposição

- **É a consequência mais importante da linearidade.**

- **Principio da Sobreposição: A resposta de um circuito com mais do que uma fonte pode obter-se como a soma das respostas individuais devidas a cada uma das fontes, actuando sozinhas.**

- **Em termos formais, podemos expressar o Principio da Sobreposição como:**

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

Em que

- **x_1, x_2, …, x_n são as fontes;**
- ***f()* são as respostas.**

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

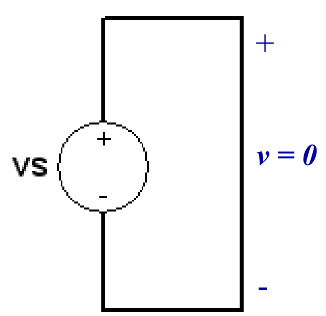
Princípio da Sobreposição

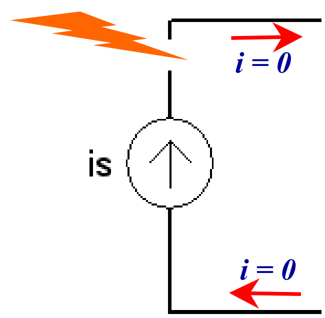
Em termos mais concretos, pode ser enunciado como

Em qualquer circuito linear contendo várias fontes, as tensões/correntes em qualquer nó/ramo podem ser calculadas adicionando as tensões/correntes individuais provocadas por cada uma das fontes actuando sozinhas.

Desactivação das *outras* fontes

- **Para determinar o efeito provocado por uma fonte, devemos desactivar todas as outras fontes independentes:**
  - **Fontes de tensão devem ser curto-circuitadas, anulando assim a sua tensão;**
  - **Fontes de corrente devem ser abertas, anulando assim a sua corrente.**

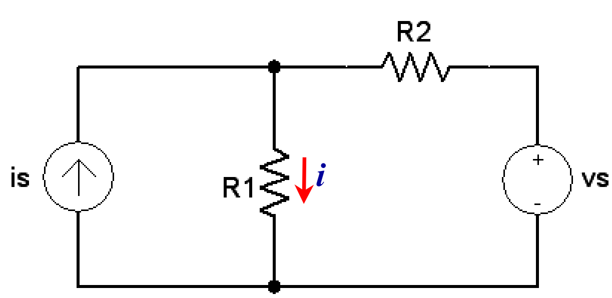




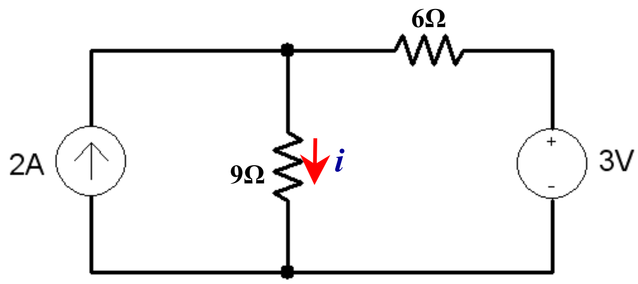
Nota: fontes dependentes não se desactivam!

Aplicação do Princípio da Sobreposição

- **Para o circuito dado, se**
  - i_1 **for a corrente em** ***R1*** **produzida só por** i_S, **e**
  - i_2 **for a corrente em** ***R1*** **produzida só por** v_S, **então**
  - **a corrente produzida pelas duas fontes em simultâneo será** $i = i_1 + i_2$



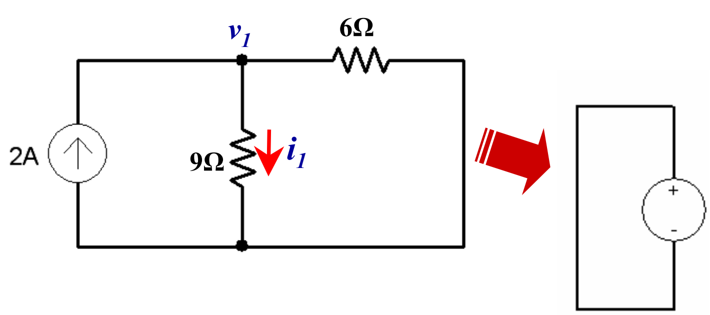
Exemplo: Para o circuito dado, calcular *i*



Exemplo - Resolução usando o Princípio da Sobreposição

1º passo: Consideremos primeiro só o efeito da fonte de corrente:

- **Desactivamos a fonte de tensão.**



Fonte de tensão foi desactivada!

$$v_1 = 2(6//9) = 7.2V$$

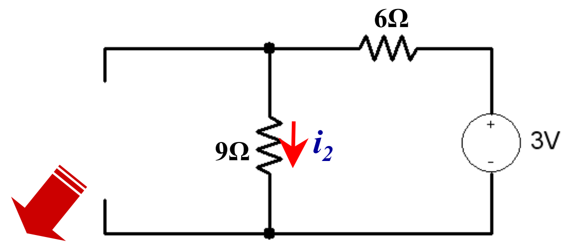
com $$6//9 = \frac{6x9}{6+9}$$

$$i_1 = \frac{v_1}{9} = \frac{7.2}{9} = 0.8A$$

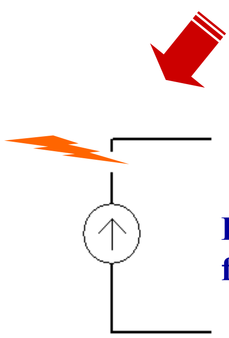
Exemplo - **Resolução usando o Princípio da Sobreposição**

2^o passo: Consideremos agora só o efeito da fonte de tensão:

- **Desactivamos a fonte de corrente;**



$$i_2 = \frac{3}{6+9} = 0.2A$$

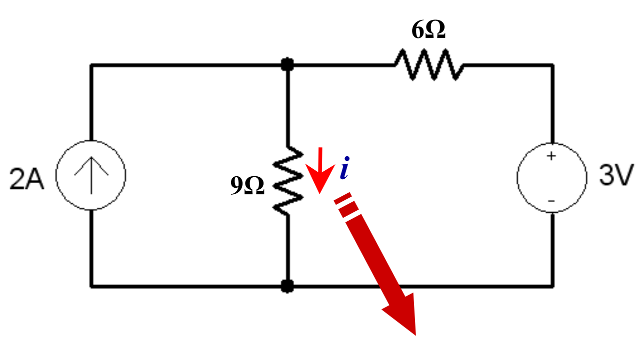


Fonte de corrente foi desactivada!

Exemplo - **Resolução usando o Princípio da Sobreposição**

3^o passo: Aplicamos o Principio da Sobreposição

- **i vai ser dada pela soma dos contributos i_1 e i_2 de cada uma das fontes**



$$i = i_1 + i_2 = 0.8 + 0.2 = 1A$$

Princípio da Sobreposição – algumas notas

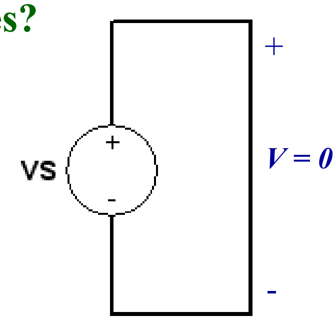
- **Se tivermos *N* fontes independentes, o circuito será analisado *N* vezes considerando uma fonte de cada vez;**

- **Contudo, nada obriga a que apenas uma fonte esteja activa em cada análise, embora essa seja a situação mais fácil;**

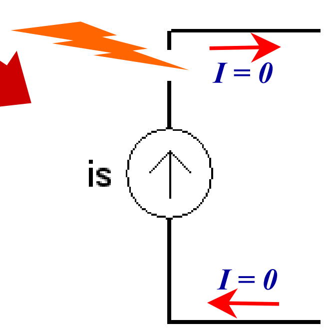
Princípio da Sobreposição – não esquecer!

Como se desactivam as fontes independentes?

- **Fontes de tensão são curto-circuitadas ⇒ $V = 0$;**



- **Fontes de corrente são abertas ⇒ $I = 0$;**

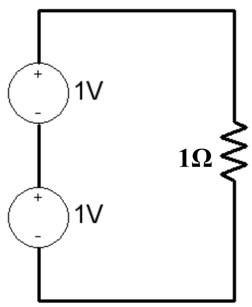


- **Fontes dependentes não se desactivam.**

Princípio da Sobreposição – nota final

- **Como o princípio só se aplica a respostas lineares, então NÃO se aplica à determinação da potência!**

Exemplo: **Potência dissipada na resistência?** $P = \frac{v^2}{R} = \frac{(1+1)^2}{1} = 4W$



Se pretendêssemos aplicar o Princípio da Sobreposição considerando que $P = P_1 + P_2$, sendo P_1 e P_2 as potências devidas a cada uma das fontes a actuar em separado, teríamos

$$P_1 = \frac{1^2}{1} = 1W \qquad P_2 = \frac{1^2}{1} = 1W$$

o que resultaria num valor errado da potência na resistência:

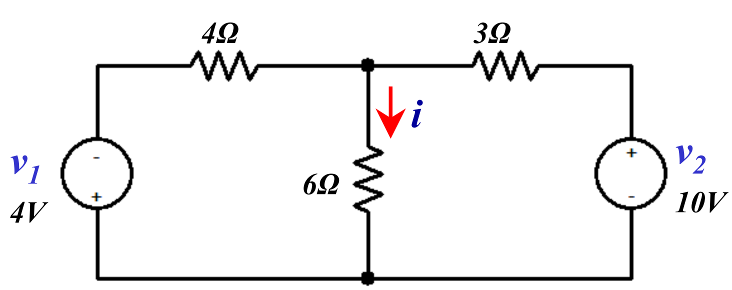
$$P = P_1 + P_2 = 2W$$

Sobreposição não funciona com potências!

Princípio da Sobreposição – Exercício

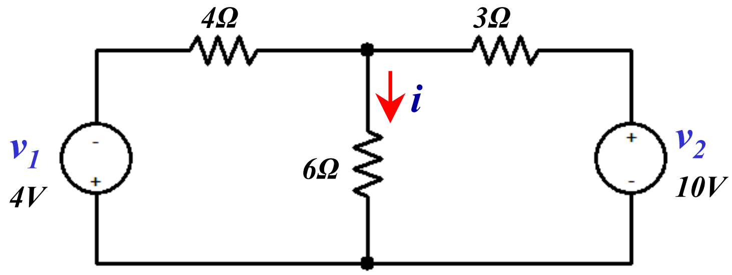
a) **Usando o princípio da sobreposição calcule i;**

b) **Determine o valor que a fonte de tensão v_1 deve ter, para que a corrente i duplique.**



Princípio da Sobreposição – Exercício

a)



- **Cada uma das fontes, v_1 e v_2, vai contribuir para a corrente i:**
  - **i_1 a corrente produzida só por v_1, e**
  - **i_2 a corrente produzida só por v_2**

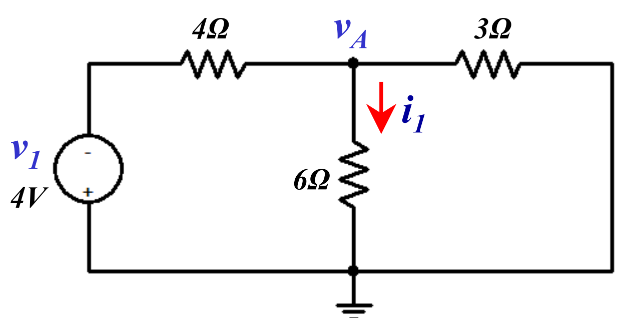
$$i = i_1 + i_2$$

Princípio da Sobreposição – Exercício

a)

- **Calculemos o contributo da fonte v_1**

Usando a fórmula do divisor de tensão:

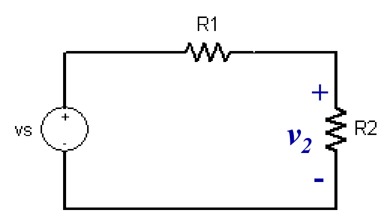


$$v_A = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1$$

$$i_1 = \frac{v_A}{6}$$

$$i_1 = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1 \frac{1}{6} = -\frac{v_1}{18}$$

Divisor de tensão



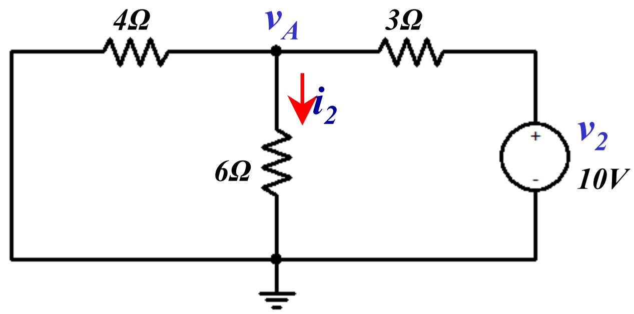
$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Princípio da Sobreposição – Exercício

a)

- E agora o contributo da fonte v_2

$$v_A = \frac{4//6}{4//6+3} v_2$$

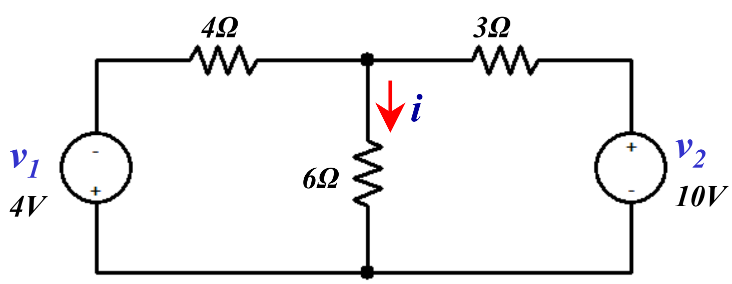


- Para $v_2 = 10V$

$$i_2 = v_A \frac{1}{6} = \frac{4//6}{4//6+3} 10 \frac{1}{6} = \frac{20}{27} A$$

Princípio da Sobreposição – Exercício

a)



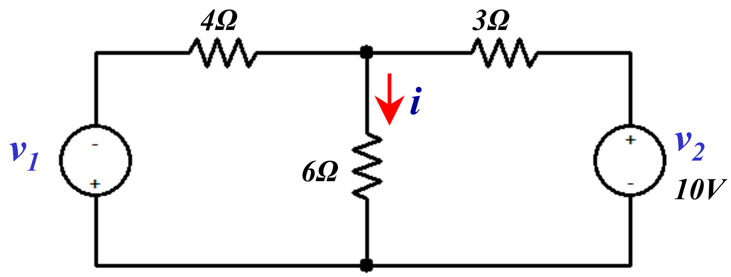
- Aplicando agora Sobreposição, calculamos a corrente i:

$$i = i_1 + i_2 = -\frac{v_1}{18} + \frac{20}{27}$$

O que para $v_1 = 4V$ dá $$i = \frac{14}{27} A$$

Princípio da Sobreposição – Exercício

b) **Calculemos agora o valor de v_1 que duplica o valor da corrente i.**



- **Para isso basta resolver a equação**

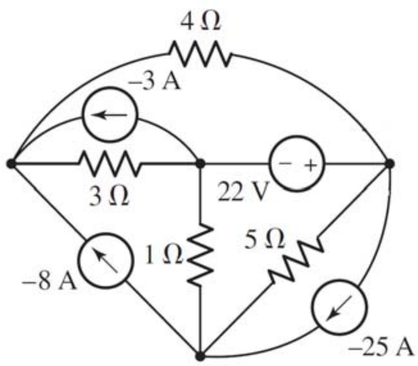
$$-\frac{v_1}{18}+\frac{20}{27}=2\text{x}\left(\text{valor obtido em } a\right)\ =2\text{x}\,\frac{14}{27}$$

que dá $v_1=-\dfrac{16}{3}=-5.33V$

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 2: Técnicas de Análise de Circuitos

(parte 2)



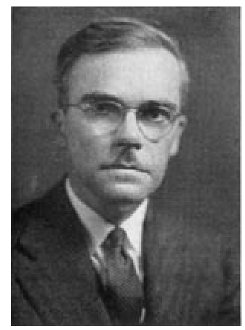
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Teorema de Thévenin;**
- **Exemplos de cálculo;**
- **Teorema de Norton;**
- **Equivalência entre Thévenin e Norton;**
- **Equivalente de Thévenin: Método Universal;**
- **Exemplos de cálculo.**

Teoremas de Thévenin e Norton

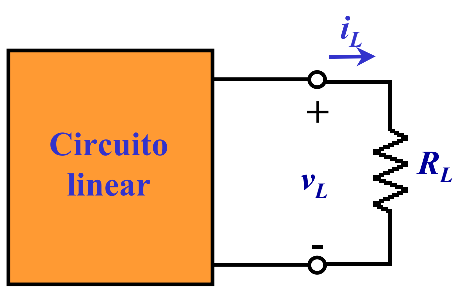
Léon Charles Thévenin
(1857 - 1926)



Edward Lawry Norton
(1898 - 1983)

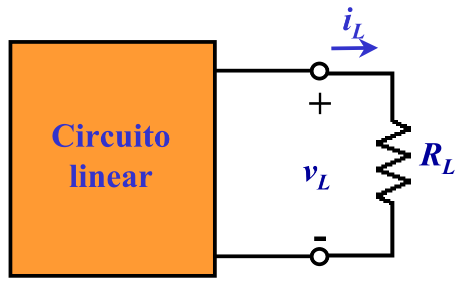
Teoremas de Thévenin e Norton

- **Duas técnicas que permitem simplificar a análise de circuitos lineares.**



- **Teoremas úteis nos casos em que estamos interessados em saber o que se passa *apenas numa parte do circuito*, por ex:**
  - **Qual é a potência dissipada em R_L?**
  - **Qual é o valor de v_L para diferentes valores de R_L?**

Teorema de Thévenin

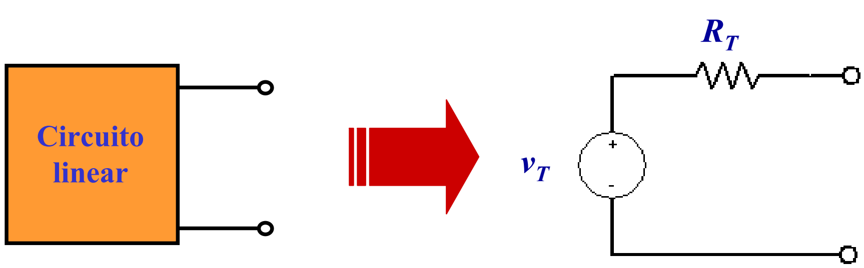


- Segundo o teorema de Thévenin, podemos substituir todo o circuito linear por um circuito equivalente mais simples;

- A análise do que se passa em R_L prossegue depois usando este circuito equivalente.

Teorema de Thévenin

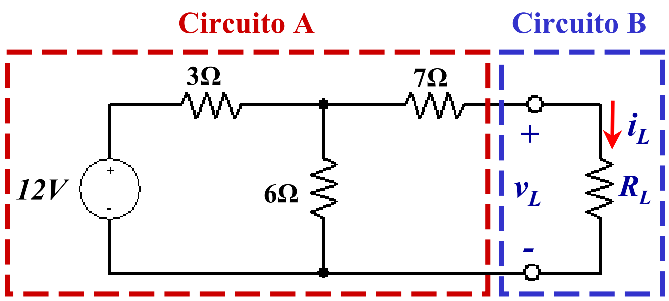
- Segundo o Teorema de Thévenin, o circuito equivalente é constituído por uma fonte de tensão com uma resistência em série.



Teorema de Thévenin

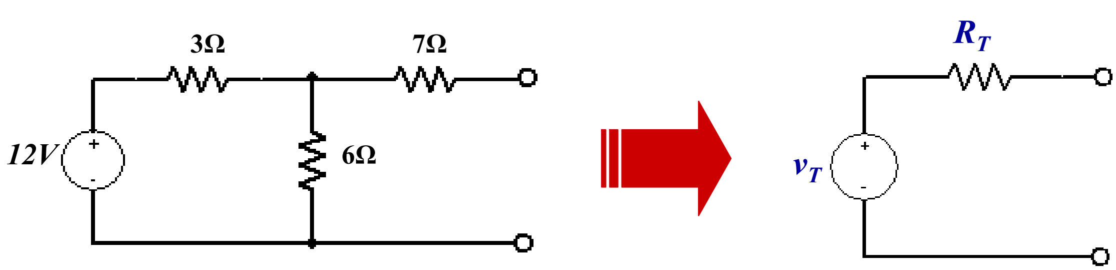
- A aplicação dos teoremas de Thévenin (e Norton), pressupõe que conseguimos dividir o circuito em duas partes:
  - Circuito A: o circuito que pretendemos simplificar – o tal circuito linear;
  - Circuito B: o circuito que queremos manter – pode ser uma resistência, mas também pode ser um circuito com mais elementos.

- Se estivermos apenas interessados em saber o que se passa em R_L, então...



Equivalente de Thévenin do Circuito A

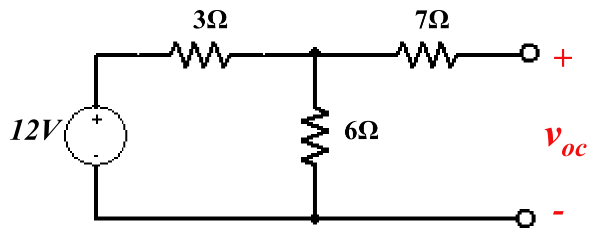
- Determinar o equivalente de Thévenin do circuito A resume-se a … determinar os valores de v_T e R_L do equivalente.



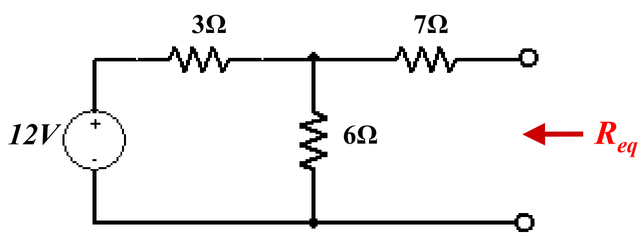
Como se procede então?

Equivalente de Thévenin do Circuito A

- **Determinamos a tensão que aparece aos terminais do circuito A em circuito aberto, ou seja, depois de B ser desligado.**

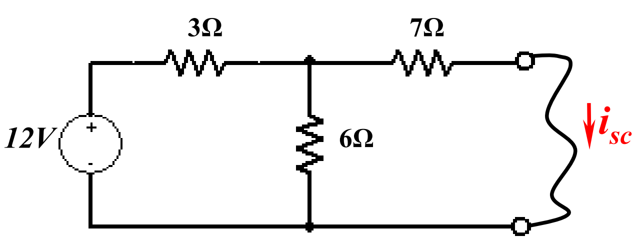


- **Determinamos a resistência equivalente entre os terminais do circuito A quando este é desativado - todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).**



Equivalente de Thévenin do Circuito A

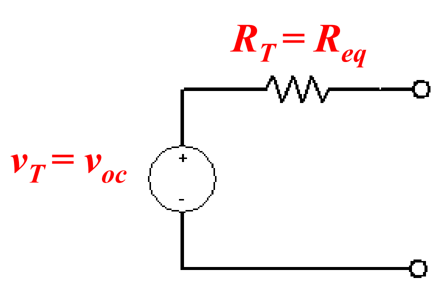
- **Se for mais fácil, podemos determinar a corrente entre os terminais do circuito A quando estes são curto-circuitados – a corrente de curto-circuito:**



Esta corrente relaciona-se com os valores anteriores por:

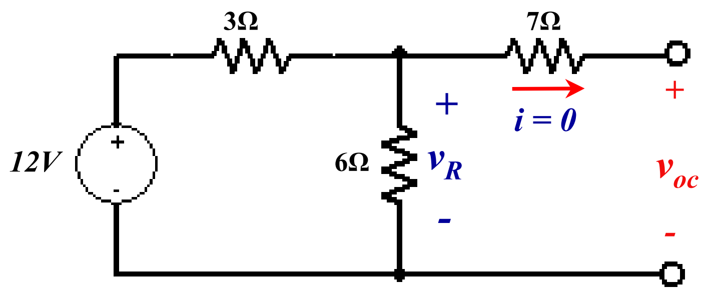
$$i_{sc} = \frac{v_{oc}}{R_{eq}}$$

Finalmente, o equivalente de Thévenin do circuito A é dado por



Aplicação do teorema de Thévenin

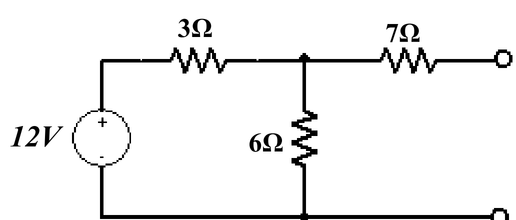
1- Determinação de v_{oc}, a tensão em circuito aberto do circuito A:



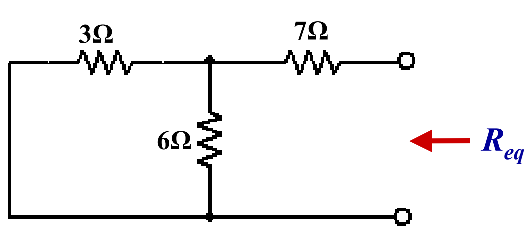
$$v_{oc} = v_R = \frac{6}{6+3} 12 = 8V$$

Aplicação do teorema de Thévenin

2- Determinação de R_{eq}, a resistência equivalente ou de saída:



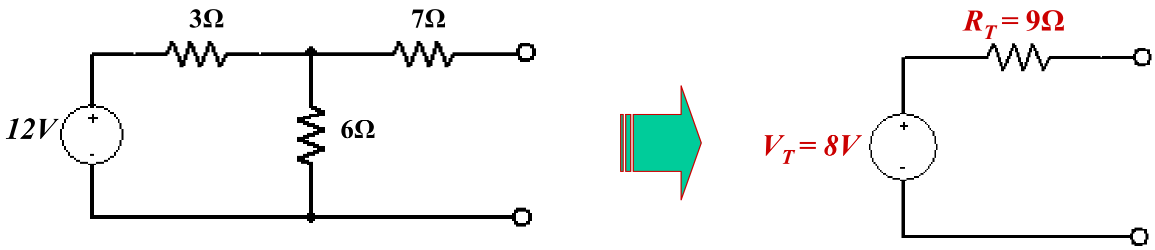
Desactivação das fontes…

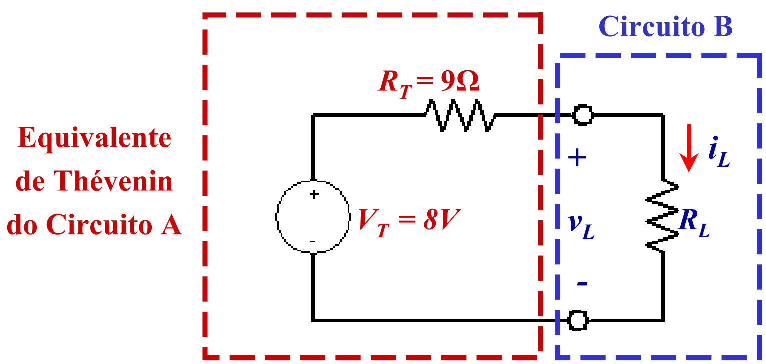


$$R_{eq} = 3//6 + 7 = \frac{3x6}{3+6} + 7 = 9\Omega$$

Aplicação do teorema de Thévenin

- O equivalente de Thévenin do circuito A é portanto:

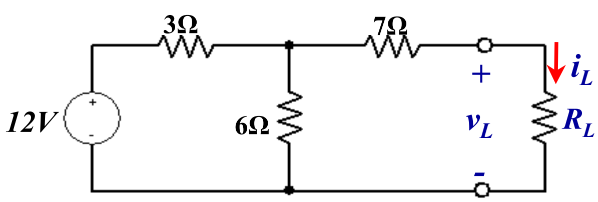




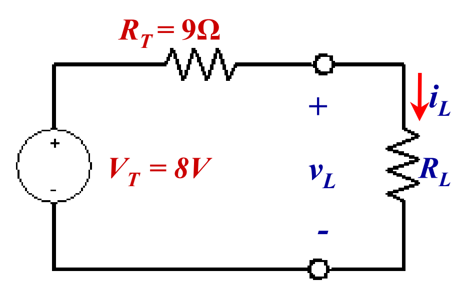
- Com este circuito é muito mais fácil determinar o que sucede ao circuito B, por exemplo, para vários valores de R_L.

Aplicação do teorema de Thévenin

Circuito original



Circuito c/ equivalente de Thévenin

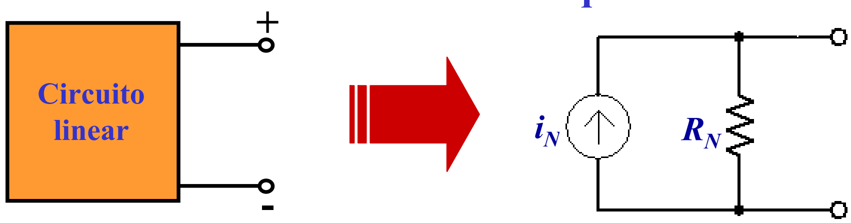


- Com o equivalente de Thévenin é possível obter informações úteis que não estão disponíveis de imediato no circuito original:
  - O valor máximo de v_L (tensão de circuito aberto) é $8V$;
  - O valor máximo de i_L (corrente de curto-circuito) é $(8/9)A$;
  - O circuito A fornece a potência máxima quando $R_L = 9Ω$.

Teorema de Norton

- **Com a aplicação deste teorema obtemos também um circuito mais simples, só que neste caso o equivalente é constituído por uma fonte de corrente com uma resistência em paralelo.**

Equivalente de Norton



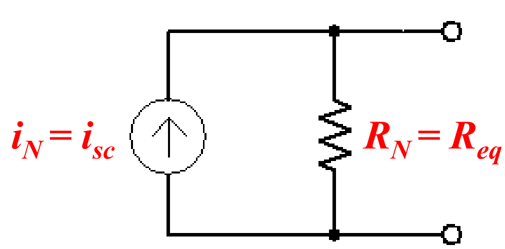
Como se procede para obter i_N e R_N?

Teorema de Norton

1. **i_N é igual à corrente que flui entre os terminais do circuito A quando estes são curto-circuitados, ou seja, é a corrente de curto-circuito, i_{sc} ;**

- **R_N é igual à resistência equivalente, R_{eq}, entre os terminais do circuito A quando este é desativado - todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).**

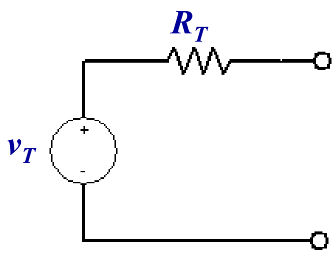
Equivalente de Norton



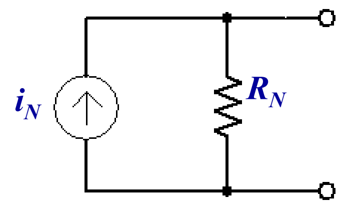
Equivalência entre Thévenin e Norton

- **Os equivalentes de Thévenin e Norton são equivalentes entre si;**

$$R_N = R_T, \quad i_N = v_T / R_T$$



Equivalente de Thévenin



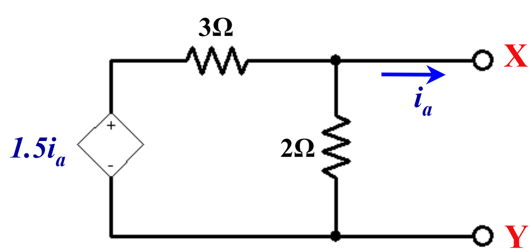
Equivalente de Norton

$$R_T = R_N, \quad v_T = i_N R_N$$

Equivalentes de Thévenin e Norton – dificuldades

- **Em circuitos com fontes dependentes, por vezes é impossível obter os valores de R_T ou R_N.**

Exemplo: **determinar o equivalente de Thévenin do circuito entre X e Y.**



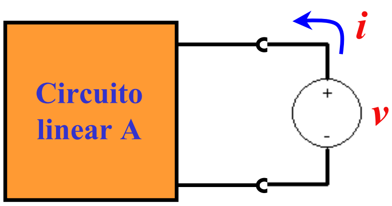
$$\leftarrow R_{eq} = ?$$

- **Obter R_{eq} por simples combinação de resistências não é possível porque a fonte dependente não pode ser desactivada.**

Equivalente de Thévenin - Método universal

- É um método que pode ser aplicado a todos os circuitos.

Como funciona?



- Dado o circuito A…
- … aplicamos nos terminais uma fonte de tensão de valor v, com corrente i.
- Depois analisamos o circuito de forma a obter uma expressão de v em função de i, com a forma

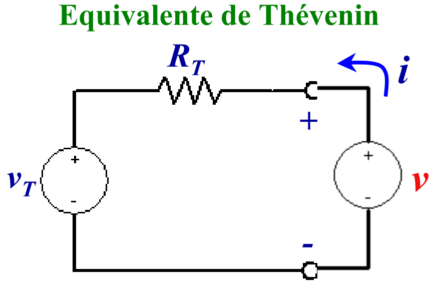
$$v = ai + b$$

- Dos coeficientes a e b tiramos

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

Método universal - demonstração

- É fácil mostrar que o Método Universal funciona recorrendo ao próprio Equivalente de Thévenin.



- Aplicamos então aos terminais uma fonte de tensão de valor v, com corrente i.
- Aplicando KVL: $-v_T - R_T i + v = 0$

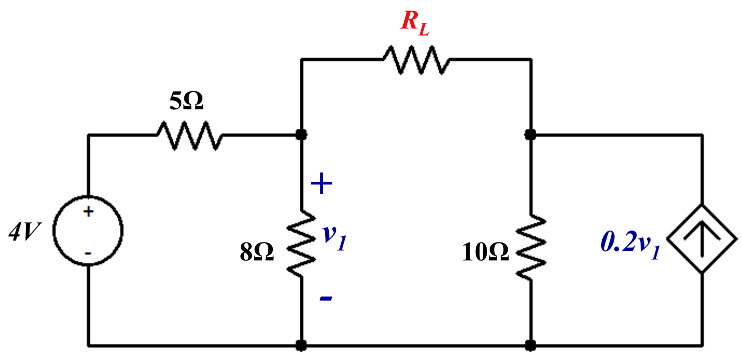
$$v = R_T i + v_T$$

- Obtemos então uma relação de v em função de i, com a forma

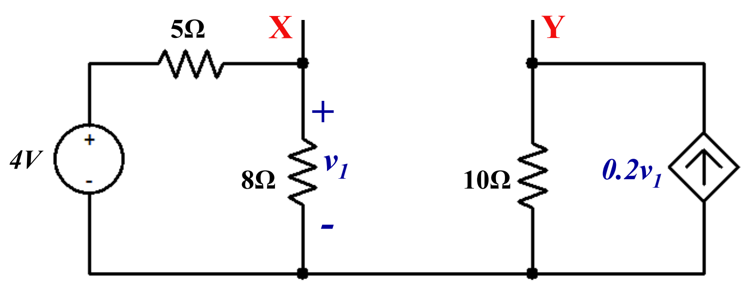
$$v = ai + b$$

- Donde se conclui que $a = R_T$ e $b = v_T$.

Exemplo: **determinar o equivalente de Thévenin visto pela resistência R_L.**

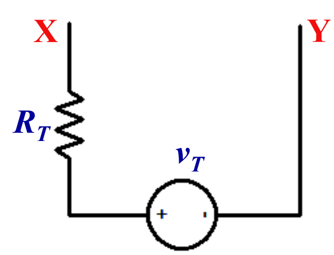


Exemplo



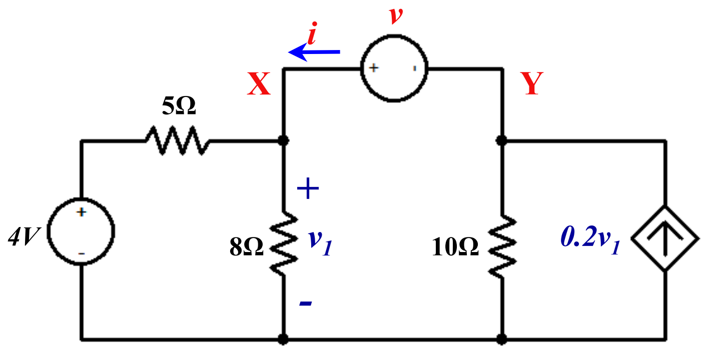
- **Retiramos RL e determinarmos o Equivalente de Thévenin entre os terminais X e Y.**

Equivalente de Thévenin



Exemplo

- Como o circuito tem uma fonte dependente, teremos de usar o **Método Universal**;



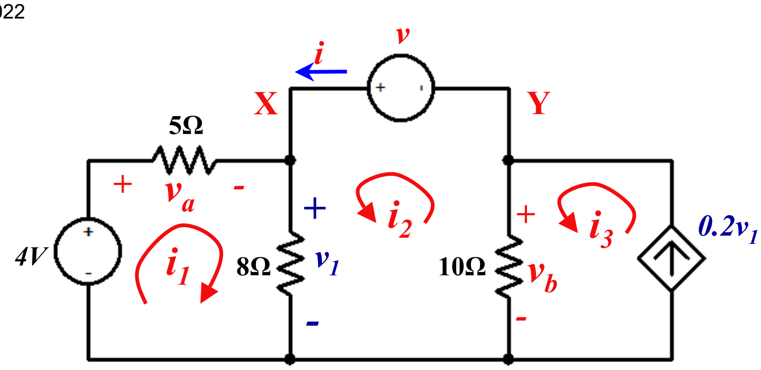
- Agora o objectivo é determinar uma relação matemática de v em função de i, com a forma

$$v = ai + b$$

Exemplo

- Vamos fazer uma Análise de Malhas;

- Marcamos correntes de malha…



- … e tensões nas resistências;

- Aplicando KVL:

$$\begin{cases} -4 + v_a + v_1 = 0 \\ -v_1 + v + v_b = 0 \\ i_3 = 0.2 v_1 \end{cases}$$

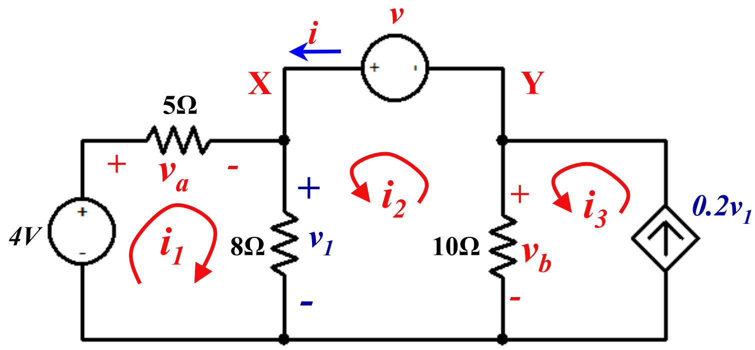
Sendo as tensões dadas por:

$$v_a = 5 i_1$$

$$v_b = 10(-i_2 + i_3)$$

$$v_1 = 8(i_1 + i_2)$$

Exemplo



- **Substituindo as tensões e sabendo que $i_2 = i$:**

$$\begin{cases} -4+5i_1+8(i_1+i)=0 \\ -8(i_1+i)+v+10(-i+i_3)=0 \\ i_3=0.2[8(i_1+i)] \end{cases}$$

- **Eliminando as incógnitas i_1 e i_3, ficamos com uma expressão apenas com v e i, como pretendido**

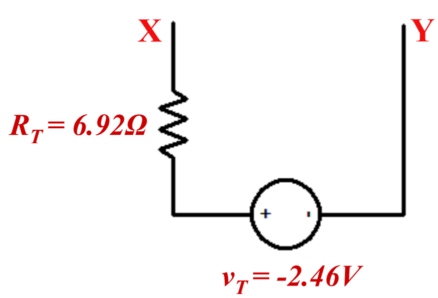
$$v = 6.92i - 2.46$$

Exemplo

$$v = 6.92i - 2.46$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v = ai + b \\ R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b \end{array}}$$

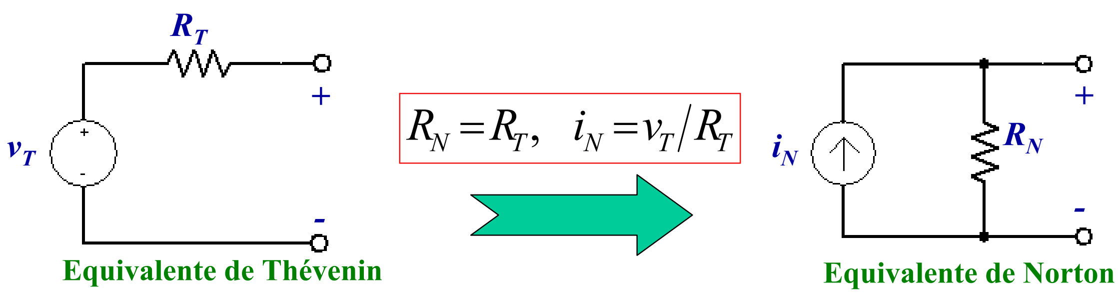
Equivalente de Thévenin



Equivalente de Norton – Método Universal

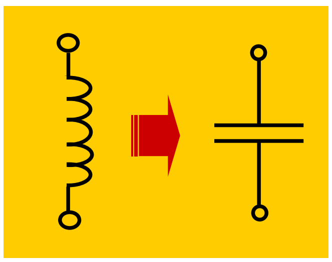
- **Se estivermos interessados no Equivalente de Norton e o circuito incluir fontes dependentes…**

- **… começamos por determinar o Equivalente de Thévenin recorrendo ao método universal… e depois obtemos o Equivalente de Norton por Transformação de fontes:**



Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 3: Capacidade e Indutância



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Redefinição de elemento activo e passivo;**
- **Condensador e capacidade;**
- **Bobina e indutância;**
- **Combinação de bobinas e combinação de condensadores;**
- **Linearidade;**
- **Dualidade.**

Elementos activos e passivos

- **A <u>capacidade</u> e a <u>indutância</u> são propriedades de dois novos elementos de circuito: o condensador e a bobina, respectivamente;**

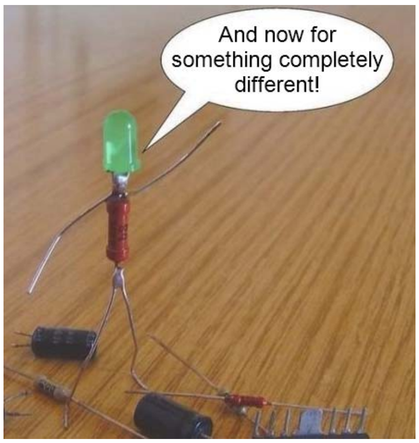
- **Apesar de passivos, este dois elementos têm a capacidade de armazenar e fornecer quantidades finitas de energia, pelo que a sua introdução requer uma definição mais rigorosa de elemento activo e passivo.**

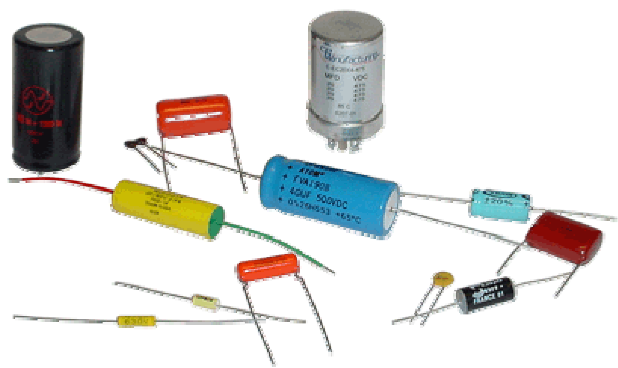
Elemento activo e passivo – NOVA DEFINIÇÃO

- **Elemento activo – é capaz de fornecer uma potência média > 0 durante um período de <u>tempo infinito</u>;**

- **Elemento passivo – não é capaz de fornecer uma potência média > 0 durante um período de <u>tempo infinito</u>.**

Condensador

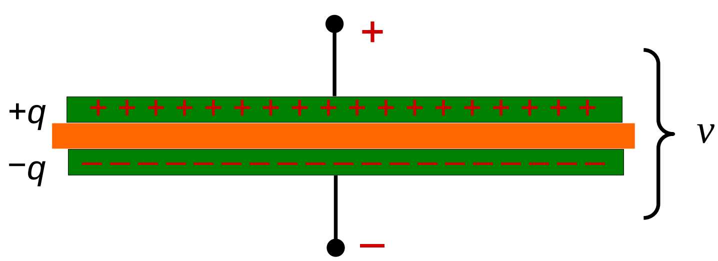




Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

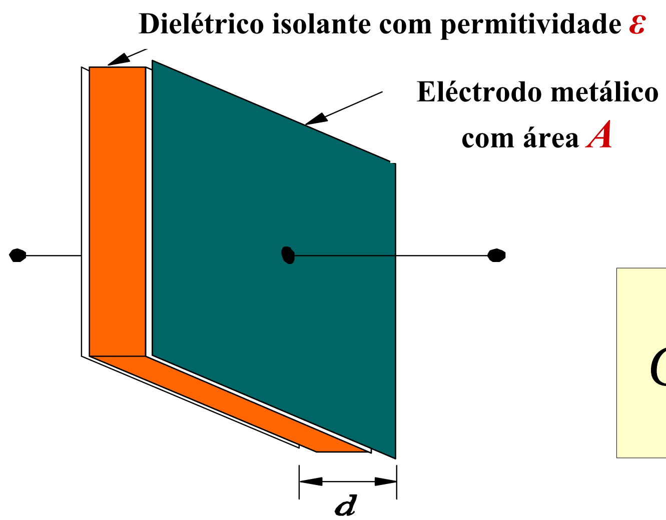
Condensador fisico

- **Constituído por duas superfícies condutoras paralelas separadas por um isolador.**



- **Quando submetido a uma tensão, *v*, o condensador carrega com uma quantidade de carga, *q*, determinada pela sua capacidade, *C*.**

Condensador fisico



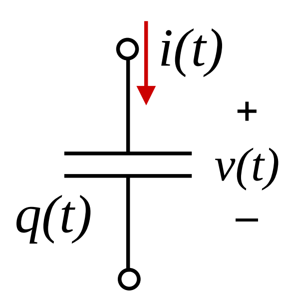
$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Condensador – modelo matemático

- **A capacidade do condensador define-se como:**

$$C = \frac{q}{v}$$

$$1Coulomb / 1Volt = 1\,Farad$$



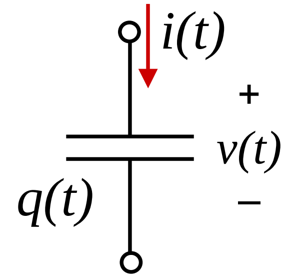
Símbolo

- **Uma relação idêntica é:**

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Condensador – modelo matemático

$$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$$



Símbolo

- **Desta relação podemos desde logo concluir que:**
  - **Uma tensão constante aos terminais de um condensador corresponde a uma corrente nula – o condensador é pois um circuito aberto para DC;**
  - **Uma variação brusca de tensão aos terminais de um condensador requer uma corrente infinita. Como não temos nunca correntes infinitas, segue-se daqui que um condensador não permite variações bruscas de tensão.**

Relação corrente-tensão

$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dv = \frac{1}{C}idt$$

- **Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0, e t, obtém-se**

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt \;\Leftrightarrow\; v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt$$

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt + v(t_0)}$$

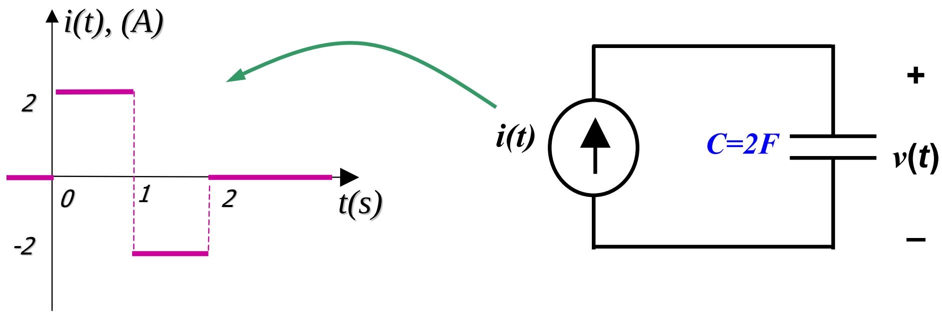
- **Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $v(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a**

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt$$

Note-se que todas estas relações assumem a Convenção de Sinais de Elemento Passivo – a corrente entra no condensador pelo terminal marcado pela polaridade (+).

Exemplo 1

Calcular a tensão no condensador, *v(t)*, sabendo que *v(t = 0) = -0.5V*.

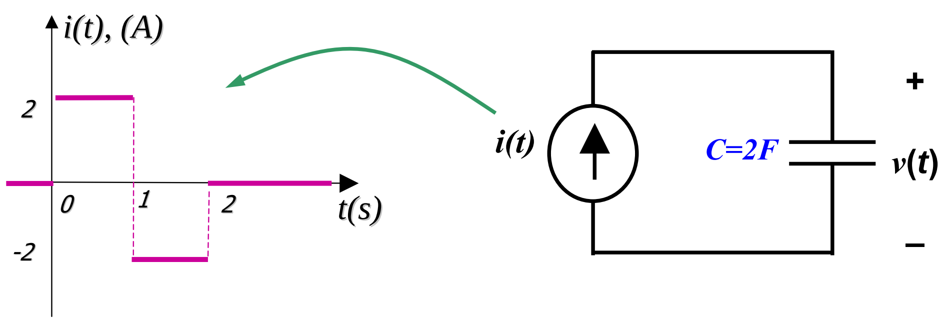


- **Consideremos primeiro o intervalo *0* a *1s*:**

$$v_1(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i dt + v(0) = \frac{1}{2}\int_0^t 2dt - 0.5$$

$$v_1(t) = t - 0.5 \qquad 0 \le t \le 1$$

Exemplo 1



- **… e agora o intervalo *1* a *2s*:**

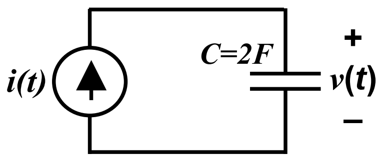
$$v_2(t) = \frac{1}{C}\int_1^t i dt + v_1(1) = \frac{1}{2}\int_1^t (-2)dt + 0.5 = \frac{1}{2}(-2t+2) + 0.5$$

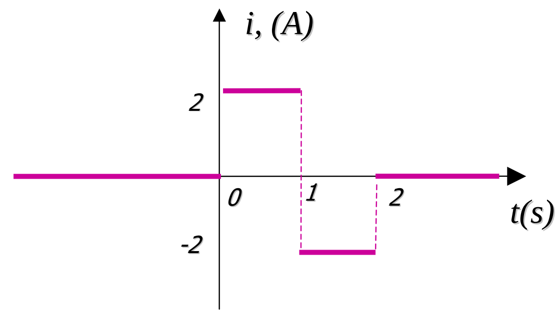
$$v_1(1) = 1 - 0.5 = 0.5V$$

$$v_2(t) = -t + 1.5 \qquad 1 \le t \le 2$$

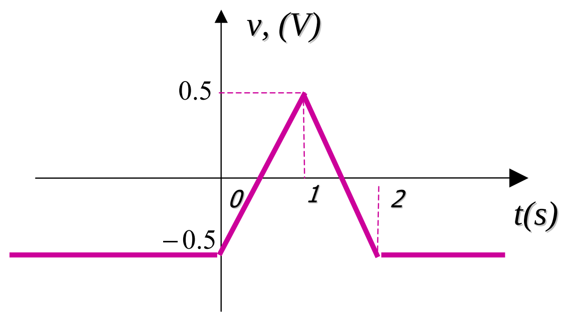
Exemplo 1

- **Obtemos então**





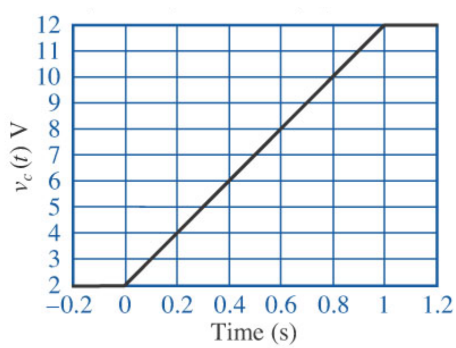
$$v(t) = \begin{cases} -0.5 & t \leq 0 \\ t - 0.5 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t + 1.5 & 1 \leq t \leq 2 \\ -0.5 & t \geq 2 \end{cases}$$



- ***v(1)* é igual à área do primeiro rectângulo de corrente x *1/C* mais *v(0)*.**

Exemplo 2

- **Calcular a corrente num condensador de *1mF* cuja tensão varia de acordo com o gráfico seguinte.**

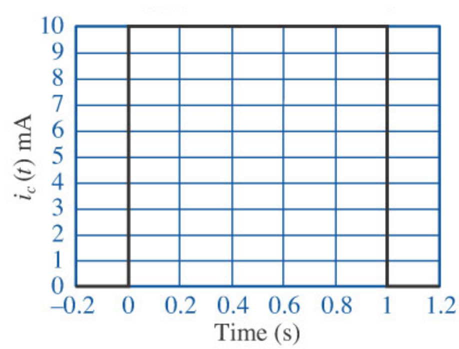


Para *t < 0* e *t > 1* a corrente é nula dado que a tensão é constante.

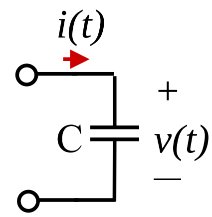
Para *0 ≤ t ≤ 1* temos:

$$i = C\frac{dv}{dt} = 10^{-3}\,\frac{12 - 2}{1\text{s}} = 10\text{mA}$$

Assim: $$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10\text{mA} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$



Energia armazenada num condensador



- **A potência fornecida ao condensador é:**

$$p = vi = vC\frac{dv}{dt}$$

- **Como *p = dW/dt*, a energia armazenada no campo eléctrico é:**

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^{t} pdt = \int_{t_0}^{t} (vi)dt = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt}dt = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} vdv$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = C\left(\frac{v^2}{2}\right)_{v(t_0)}^{v(t)} \Leftrightarrow W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2}C\left(v(t)^2 - v(t_0)^2\right)$$

- **Se seleccionarmos t_0 de forma a que a tensão e a energia sejam ambos zero:**

$$W(t) = \frac{1}{2}Cv(t)^2$$

Condensador ideal – aspectos a reter

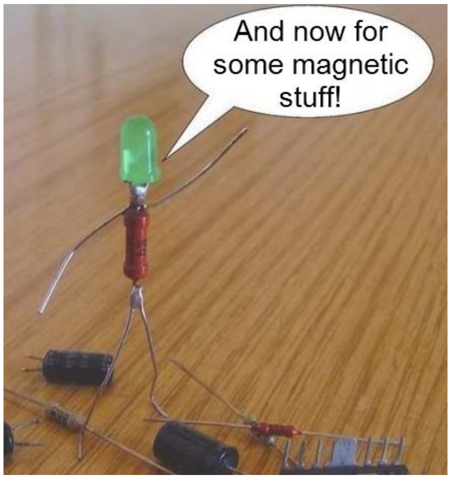
- **Se a tensão aos terminais de um condensador não varia com o tempo, então a corrente através dele é nula – o condensador é um circuito aberto em DC;**

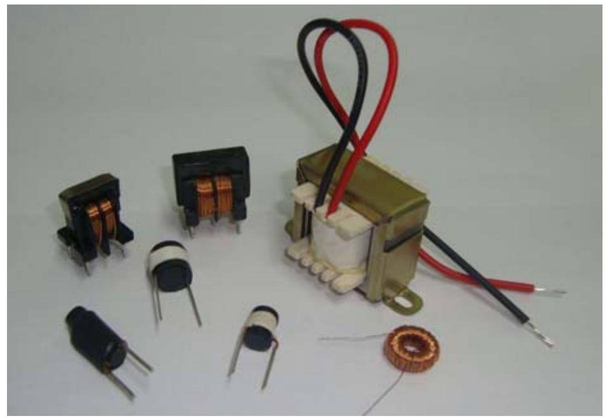
- **Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada num condensador mesmo quando *i = 0*;**

- **É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a tensão aos terminais de um condensador pois isso requer uma corrente infinita; Um condensador resiste a uma variação abrupta de tensão tal como uma mola resiste a uma mudança brusca no deslocamento;**

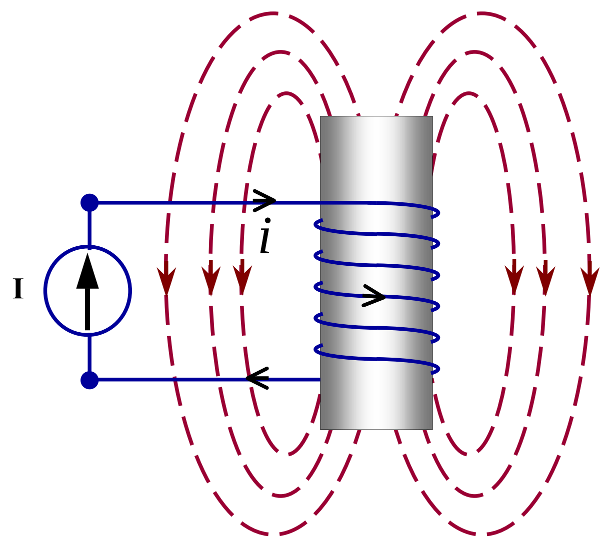
- **Ao contrário da resistência, um condensador não dissipa energia; apenas a armazena.**

Bobinas





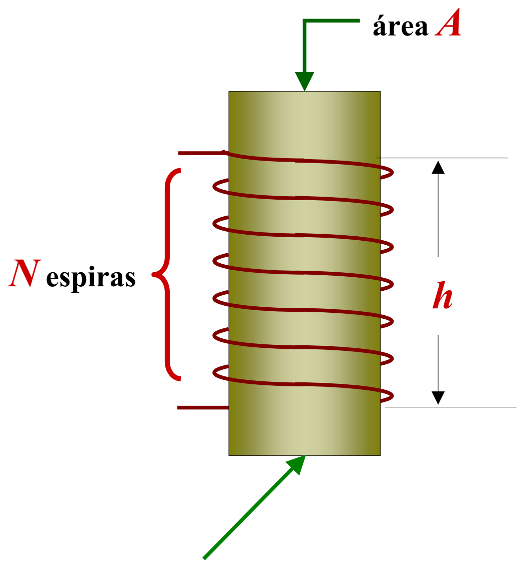
Bobina física



- **Constituída por um certo número de espiras de fio condutor enroladas.**

- **Quando atravessada por uma corrente, *i*, a bobina produz um campo magnético com intensidade de fluxo, *Φ*, determinada pela sua indutância, *L*.**

Bobina física



$$L = \mu \frac{N^2 A}{h}$$

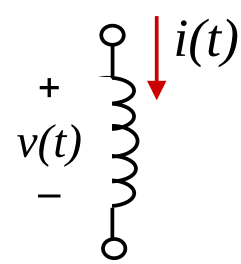
Expressão aproximada, válida só quando *h >> diâmetro*

Bobina – modelo matemático

- **A indutância da bobina define-se como:**

$$L = \frac{\phi}{i}$$

$$1 Volt.1 Segundo / 1 Ampére = 1\ Henry$$



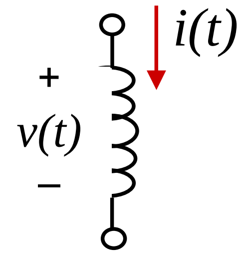
Símbolo

- **Uma relação idêntica é:**

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Bobina – modelo matemático

$$\boxed{v = L\frac{di}{dt}}$$



Símbolo

- **Desta relação podemos desde logo concluir que:**
  - **Tensão é proporcional à taxa de variação da corrente;**
  - **Se a corrente é constante a tensão é nula - bobina é um curto-circuito para DC;**
  - **Uma variação brusca de corrente requer tensão infinita. Como não temos tensões infinitas, segue-se que uma bobina não permite variações bruscas de corrente.**

Relação corrente-tensão

$$v = L\frac{di}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad di = \frac{1}{L}vdt$$

- **Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0, e t, obtém-se**

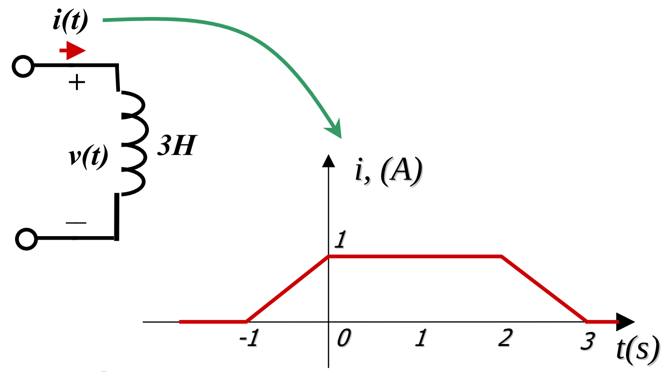
$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt \;\Leftrightarrow\; i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt \qquad \boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt + i(t_0)}$$

- **Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $i(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a**

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} vdt$$

Note-se que todas estas relações assumem a Convenção de Sinais de Elemento Passivo – a corrente entra na bobina pelo terminal marcado pela polaridade (+).

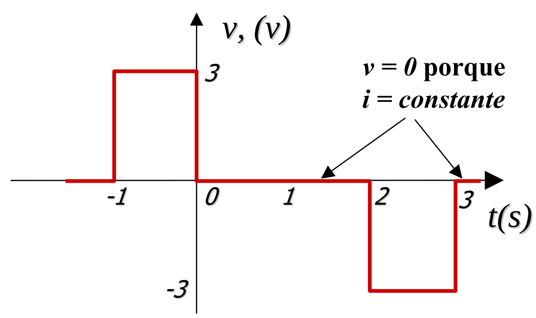
Exemplo 3



- **Efeito da velocidade de variação da corrente na tensão da bobina**

- **No intervalo *-1 < t < 0* a tensão será:**

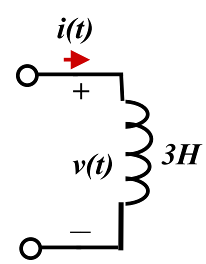
$$v_1 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{1\text{A}}{1\text{s}} = 3V$$



- **No intervalo *2 < t < 3* a tensão será:**

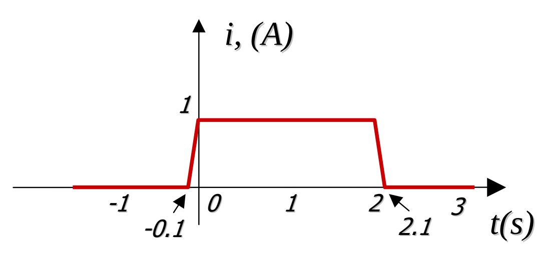
$$v_2 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{\text{-}1\text{A}}{1\text{s}} = -3V$$

Exemplo 4

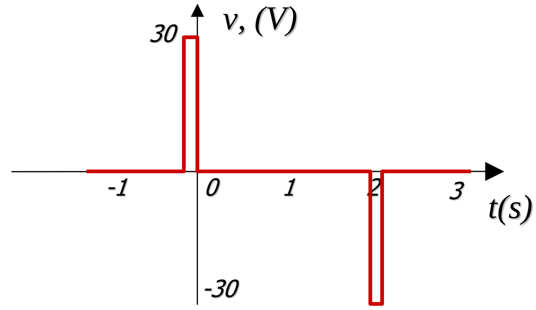


- **Se a corrente variar mais rapidamente teremos na bobina tensões de:**

$$v_1 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{1\text{A}}{0.1\text{s}} = 30V; \qquad v_2 = -30V$$

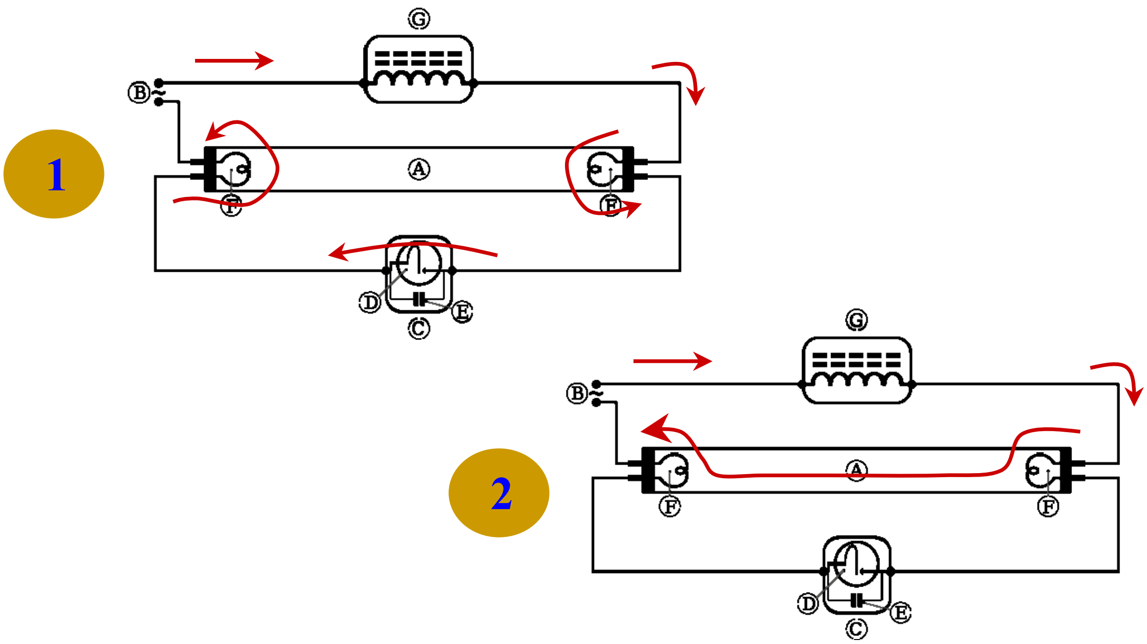


- **É por este motivo que a abertura de um interruptor num circuito indutivo causa, em geral, o aparecimento de um arco eléctrico – devido à tensão elevada que surge.**

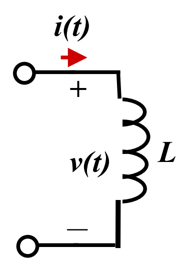


Curiosidade

- **O aparecimento de um tensão elevada devido à interrupção da corrente numa bobina constitui o principio de funcionamento das lâmpadas fluorescentes:**



Energia armazenada numa bobina



- **A potência fornecida à bobina é:**

$$p = vi = L\frac{di}{dt}i$$

- **Como $p=dW/dt$, a energia armazenada no campo magnético é:**

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^{t} pdt = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt}dt = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} idi$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = L\left(\frac{i^2}{2}\right)_{i(t_0)}^{i(t)}$$

$$W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2}L\left(i(t)^2 - i(t_0)^2\right)$$

- **Se selecionarmos t_0 de forma a que a corrente e a energia sejam ambos zero:**

$$W(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$$

Bobina ideal – aspectos a reter

- A tensão aos terminais duma bobina é zero se a corrente que a atravessa não varia com o tempo – a bobina é um curto-circuito em DC;

- Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada numa bobina mesmo quando $v = 0$ (i.e. a corrente é constante);

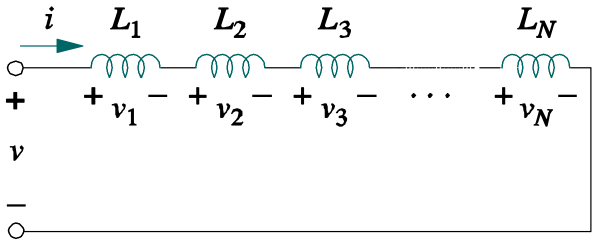
- É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a corrente aos terminais de uma bobina pois isso requer uma tensão infinita; Uma bobina resiste a uma variação abrupta de corrente assim como uma massa resiste a uma mudança brusca na velocidade;

- Ao contrário da resistência, uma bobina não dissipa energia; apenas a armazena.

Combinação de bobinas e condensadores

Combinações de bobinas

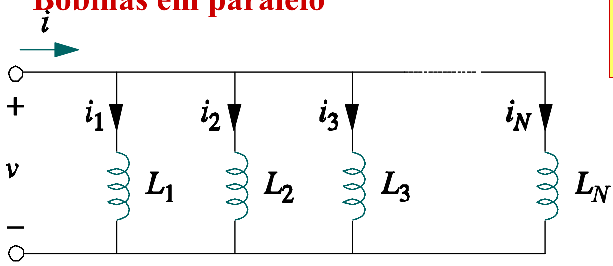
Bobinas em série



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N$$

Bobinas em paralelo

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_N}$$

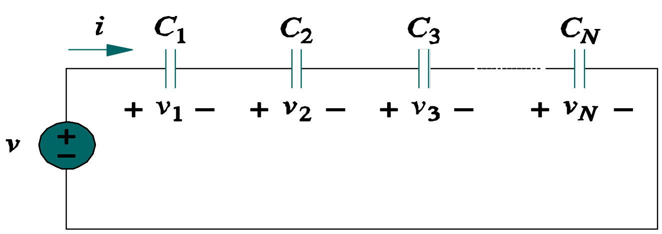


Nota: Para N=2 a indutância equivalente é dada por:

$$L_{eq2} = \frac{L_1.L_2}{L_1 + L_2}$$

Combinações de condensadores

Condensadores em série

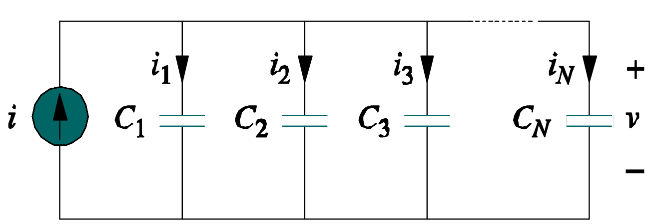


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

Nota: Para N=2 a capacidade equivalente é dada por:

$$C_{eq2} = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2}$$

Condensadores em paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$

Linearidade e Dualidade

Linearidade

- **Circuitos com bobines e condensadores são também lineares pois as relações entre tensão e corrente nestes elementos são lineares.**

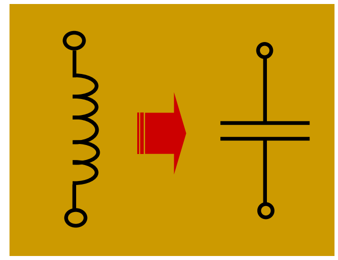
$$v = L\frac{di}{dt}$$

➢ **Se i aumentar do factor k, v aumenta do mesmo factor;**

- **Raciocínio idêntico mostra que o condensador é também linear;**

- **Principio da Sobreposição e teoremas de Thevenin e Norton são também aplicáveis.**

Dualidade



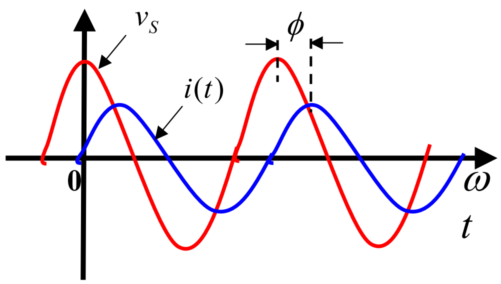
- **Quando enunciamos antes as características importantes do condensador ideal e da bobina ideal demos conta da semelhança dessas características;**

- **Podemos obter as características do condensador substituindo apenas algumas palavras-chave nas características da bobina:**
  - **bobina → condensador**
  - **indutância → capacidade**
  - **corrente → tensão**
  - **curto-circuito → circuito aberto**

- **Esta propriedade resulta da característica dual destes elementos de circuito.**

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 4: Circuitos em regime sinusoidal



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Introdução**
- **Resposta forçada a uma função sinusoidal;**
- **Função forçadora complexa;**
- **Fasores;**
- **Relações fasoriais para R, L e C;**
- **Extensão das técnicas de análise aos circuitos em regime sinusoidal;**
- **Impedância;**
- **Potência em regime sinusoidal;**
- **Valor eficaz.**

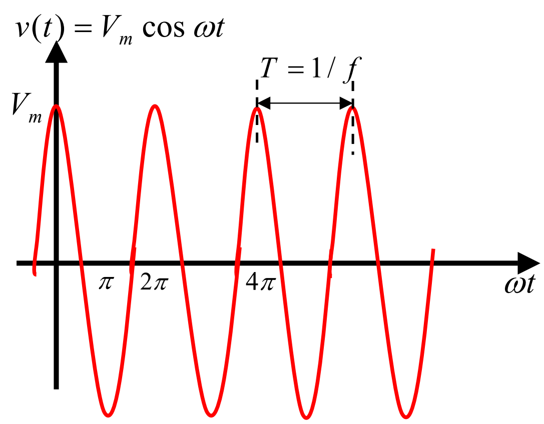
Introdução

● **O estudo da resposta dos circuitos a uma função forçadora sinusoidal é importante porque:**

➢ **Tensões sinusoidais são geradas facilmente; a energia eléctrica disponível é sinusoidal;**

➢ **A sinusóide goza da propriedade de *manter a forma* em circuitos lineares;**

➢ **Qualquer função periódica pode ser decomposta numa soma de sinusóides – conhecendo a resposta do circuito a cada uma das sinusóides podemos calcular a resposta à função original.**



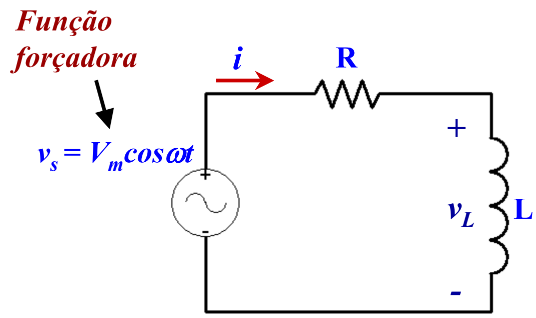
Resposta a uma função sinusoidal

Resposta a uma função sinusoidal

- **Aplicando KVL**

$$-v_s + Ri + v_L = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_m \cos\omega t$$



- **Dado que a resolução desta equação passa pela derivação e pela integração da função forçadora, é de prever que a sua solução, *i(t)*, tenha a mesma forma (e a mesma frequência) da função forçadora.**

- **Podemos portanto admitir que a solução tem a forma…**

$$i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$ **em que *A* e ϕ são constantes a determinar.**

Função forçadora complexa

Função forçadora complexa

- **A resolução de equações diferenciais é muito complicada para ter utilidade em cálculos à mãos;**

- **O problema é simplificado se optarmos antes pela função forçadora complexa:**

Em lugar desta: $v_S = V_m \cos \omega t$ **Função forçadora sinusoidal**

Usamos antes esta: $v_S = V_m e^{j\omega t}$ **Função forçadora complexa**

E porque é que esta mudança para a função complexa é legítima?

Função forçadora complexa

… Porque segundo a *Fórmula de Euler*:

$$V_m e^{j\omega t} = \underbrace{V_m \cos \omega t}_{\text{Função forçadora real dada}} + \underbrace{j V_m \sin \omega t}_{\text{Função forçadora imaginária}}$$

Função forçadora complexa

- **Portanto, ao aplicar a função forçadora complexa estamos, de facto, a aplicar, em simultâneo, duas funções:**
  - **A função forçadora sinusoidal usada no circuito real;**
  - **Uma função forçadora imaginária.**

- **O resultado obtido da análise, terá também uma parte real e uma parte imaginária. A parte real será a resposta desejada. A parte imaginária deve ser ignorada.**

Aplicação de uma função forçadora complexa

- **Esta abordagem funciona graças ao Princípio da Sobreposição.**

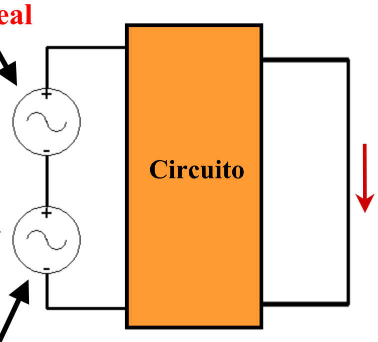
$$v_S = V_m e^{j\omega t}$$

Resposta procurada (resultante do efeito da função forçadora real)

Resposta imaginária (resultante do efeito da função forçadora imaginária)

Função forçadora real

$$v_S \begin{cases} V_m \cos \omega t \\ jV_m \sin \omega t \end{cases}$$



$$i = \underbrace{I_m \cos(\omega t + \phi)}_{} + \underbrace{jI_m \sin(\omega t + \phi)}_{}$$

$$i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Função forçadora imaginária

Fasores

O fasor

- **Uma grandeza sinusoidal é completamente caracterizada pela amplitude, pela fase e pela frequência;**

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

- **Mas num circuito linear, a frequência é a mesma para todas as tensões e correntes, pelo que a sua indicação é supérflua;**

- **Vamos então optar por uma representação complexa, na forma polar, que omite a frequência:**

$$i = I_m e^{j\phi} \rightarrow I = I_m \angle \phi$$

representação abreviada que se designa por fasor.

O fasor

- **Assim, a função forçadora real**

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + 0) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{V} = V_m \angle 0^\circ$$

e a resposta real

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

- **Fasores são quantidades complexas; são escritos em maiúsculas e em bold;**
- **Fasores não são funções do tempo.**

i(t) é uma representação no domínio do tempo	**I** é uma representação no domínio da frequência

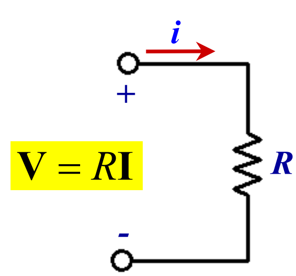
Relações fasoriais para R, L e C

- **Sendo representações no domínio da frequência, os fasores têm a vantagem de transformar as relações diferencias corrente-tensão das bobinas e condensadores, em simples relações algébricas, simplificando assim a análise de circuitos em regime sinusoidal estacionário;**

- **Vejamos então como ficam as relações corrente-tensão dos três elementos passivos que conhecemos, no domínio da frequência:**
  - **Resistência;**
  - **Bobina;**
  - **Condensador.**

Relação entre os fasores V e I na resistência

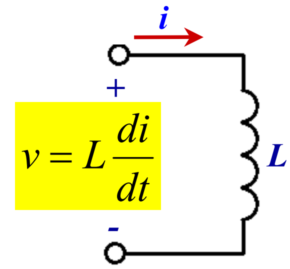
$$V_m \angle 0^\circ = R I_m \angle \phi \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = R\mathbf{I}$$



- **Na forma fasorial (domínio da frequência), a relação corrente-tensão na resistência é igual à do domínio do tempo;**

- **Isto implica $\phi = 0$, ou seja, tensão e corrente estão sempre em fase no circuito.**

Relação entre os fasores V e I na bobina



- Para a bobina temos $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

Substituindo *v(t)* pela função forçadora complexa

$$v(t) = V_m e^{j\omega t}$$

e *i(t)* pela resposta complexa $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

obtemos $V_m e^{j\omega t} = L\dfrac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right) = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

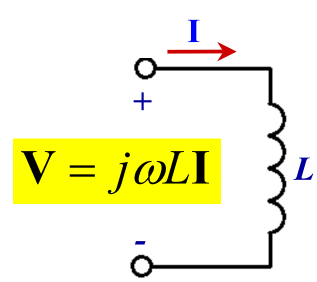
Dividindo por $e^{j\omega t}$ **obtemos** $V_m = j\omega L I_m e^{j\phi}$

O que dá na forma polar $V_m \angle 0^\circ = j\omega L I_m \angle \phi$

A relacão fasorial é portanto $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$

Relação entre os fasores V e I na bobina

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

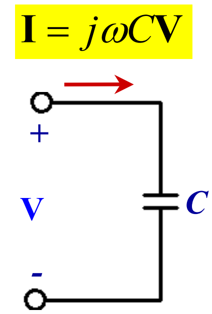


- **Ou seja, a relação diferencial entre *v(t)* e *i(t)* que existe no domínio do tempo, transforma-se numa relação algébrica no domínio da frequência;**

- **Como o ângulo do factor $j\omega L$ é *90º*, a fase de *V* é igual à fase de *I* mais *90º* - ou seja, a corrente está atrasada em relação à tensão de *90º*.**

Relação entre os fasores V e I no condensador

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$



- **Mais uma vez, obtemos uma relação algébrica entre os fasores de corrente e tensão no domínio da frequência;**

- **Aqui é a fase de *I* que é igual à fase de *V* mais *90º* - ou seja, a corrente está avançada em relação à tensão de *90º*.**

- **É de notar a semelhança entre as relações corrente-tensão das bobinas e condensadores no domínio da frequência e a lei de Ohm;**

Técnicas de Análise de Circuitos com fasores

Técnicas de análise de circuitos com fasores

- **Também se aplicam quando as tensões e as correntes são representadas por fasores.**

KVL

Ao longo de um caminho fechado temos $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_N = 0$

KCL

Em qualquer nó de um circuito verifica-se $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \ldots + \mathbf{I}_N = 0$

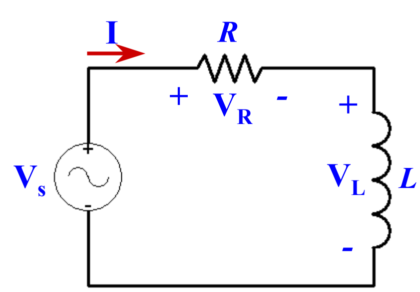
- **Análise Nodal e Análise de Malhas são também aplicáveis no domínio da frequência;**

- **O mesmo pode ser dito em relação aos Principio da Sobreposição, Transformações de fontes e teoremas de Thévenin e Norton.**

Aplicação da KVL ao circuito RL

- **Agora, tensões e correntes são representadas pelo fasor correspondente.**

- **A aplicação da KVL faz-se da mesma maneira:**



$$-\mathbf{V}_S + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = 0$$

Substituindo pelas relações V/I obtidas antes

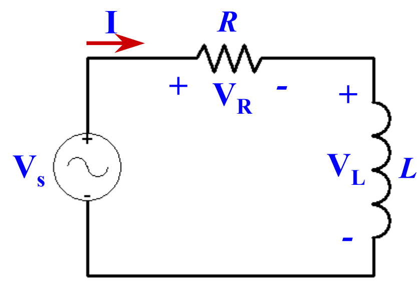
$$-\mathbf{V}_S + R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S}{R + j\omega L}$$

Se, no domínio do tempo, a fonte é $V_s = V_m \cos\omega t$, então o fasor correspondente é

$$\mathbf{V}_S = V_m \angle 0^{\circ}$$

Aplicação da KVL ao circuito RL

Pelo que $\mathbf{I} = \dfrac{V_m \angle 0^o}{R + j\omega L}$



$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle \left(-arctg \frac{\omega L}{R} \right)$$

Relembrando…

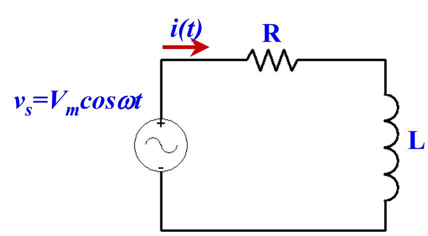
$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi \quad \Longrightarrow \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Convertemos para o domínio do tempo

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg \frac{\omega L}{R} \right)$$

Conclusões

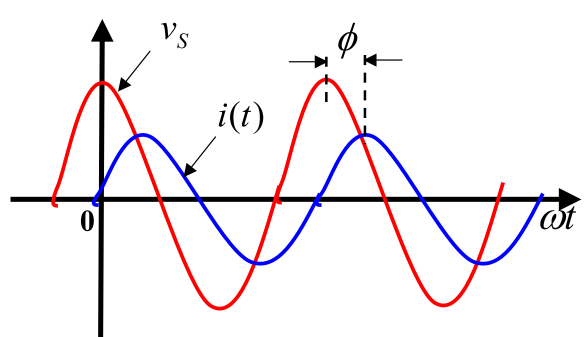
$$\boxed{i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg \frac{\omega L}{R} \right)}$$



- **A amplitude da resposta é proporcional à amplitude da função forçadora – se assim não fosse o circuito não era linear!**

- **A amplitude da resposta diminui com *R*, *L* e *ω*, mas não de forma proporcional;**

- **A corrente está atrasada em relação à tensão de um ângulo, *ϕ*, entre e *0* e *90º*:**
  - **$L = 0$ - corrente está em fase com a tensão;**
  - **$R = 0$ - corrente está atrasada 90º.**



Impedância

- No domínio da frequência, vimos que as relações V/I para os três elementos passivos que conhecemos são

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Escrevendo estas expressões como a razão entre os fasores de tensão e corrente

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

verificamos que estas razões dependem apenas dos valores dos elementos e da frequência;

- Por se tratarem de razões entre V e I, estas <u>quantidades complexas</u> são expressas com unidades de Ohm. Chamam-se genericamente impedâncias e representam-se pela letra Z.

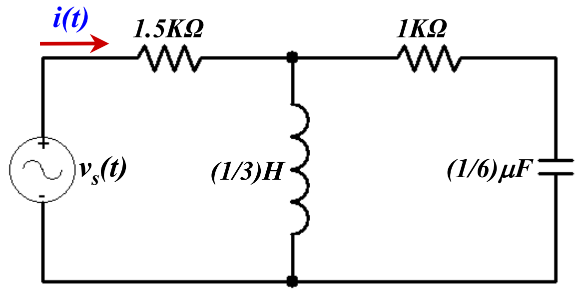
Impedância

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

- Embora possa ser um numero complexo, a impedância não é um fasor pois não tem uma correspondência no domínio do tempo.

- A validade das leis de Kirchhoff no domínio da frequência implica que as impedâncias podem ser associadas em série e em paralelo seguindo as mesmas regras usadas nas resistências.

Exemplo 1 – Determinar *i(t)* no circuito sabendo que $v_s(t) = 40\sin(3000t)$ *[Volts]*



- **Comecemos por calcular o fasor da função forçadora.**

$$v_s(t) = 40\sin 3000t \;\; = 40\cos(3000t - 90^o) \quad \rightarrow \quad \mathbf{V_S} = 40\angle -90^o\, V$$

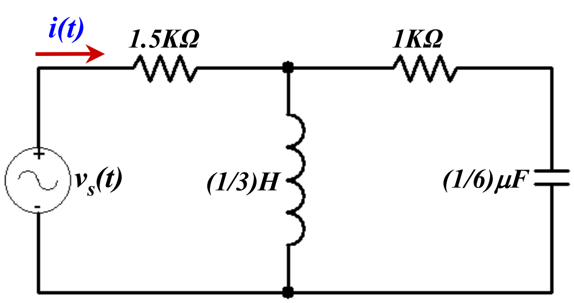
- **À frequência de *3000rad/s*, as impedâncias da bobina e do condensador são:**

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j(3000)(1/3) = j1K\Omega$$

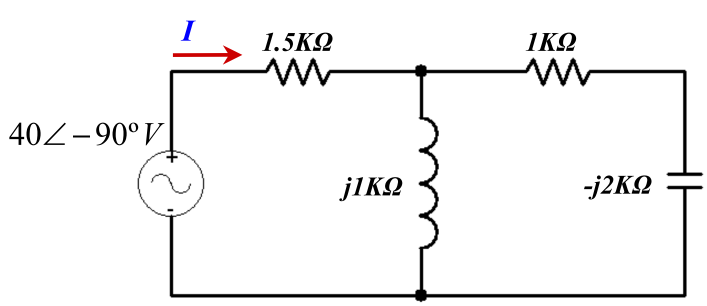
$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(3000)(1/6)10^{-6}} = -j2K\Omega$$

Exemplo 1

- **Desenhamos agora o circuito no domínio na frequência.**

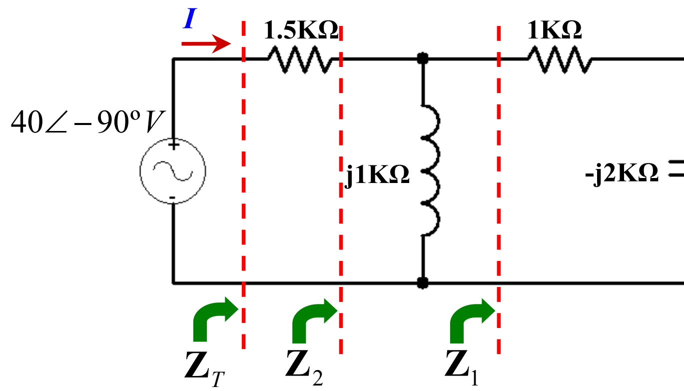


Toda a análise é feita agora neste circuito!



Exemplo 1

- **Calculamos agora a impedância total vista pela fonte**



$$\mathbf{Z}_1 = (1 - j2) K\Omega$$

$$\mathbf{Z}_2 = j1 // \mathbf{Z}_1 = \frac{j1(1-j2)}{j1+1-j2} = (0.5 + j1.5) K\Omega$$

$$\mathbf{Z}_T = 1.5 + \mathbf{Z}_2 = (2 + j1.5) K\Omega$$

Convertendo para a forma polar $\mathbf{Z}_T = 2.5\angle 36.87^o \, K\Omega$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V_S}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{40\angle -90^o}{2.5\angle 36.87^o} = 16\angle -126.9^o \;\; mA$$

- **O que transformando de volta para o domínio do tempo resulta em** $i(t) = 16\cos(3000t - 126.9^o) \;\; mA$

Potência em regime sinusoidal

Valor eficaz

Potência

- **Potência instantânea**

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- **Potência média - é a média da potência instantânea calculada num período:**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

Potência média em regime sinusoidal

- **Admitamos que a tensão e a corrente num dado elemento de circuito é dada por:**

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \textbf{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

- **A potência instantânea nesse elemento é portanto**

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\alpha\cos\beta = \\ &= 1/2\cos(\alpha+\beta) + \\ &+ 1/2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}}$$

- **Ou seja, *p(t)* inclui duas parcelas**
  - **Uma que é constante e independente do tempo;**
  - **Outra que varia ao dobro da frequência de operação**

Potência média em regime sinusoidal

- **A potência média é portanto**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta-\phi) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t+\theta+\phi)\right]dt$$

- **Como o valor médio de um coseno (ou seno) num período é zero, segue-se que**

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta-\phi)$$

Apliquemos este resultado às situações em que o elemento em causa é

- **uma resistência;**
- **um elemento reactivo: bobina ou condensador.**

Potência absorvida por uma resistência

$$P_R = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta-\phi)$$

- **Como numa resistência**
  - **a corrente e a tensão estão em fase:** $\theta-\phi=0$
  - **e** $V_m = I_m R$

então

$$P_R = \frac{1}{2}I_m{}^2 R = \frac{1}{2}\frac{V_m{}^2}{R}$$

Potência absorvida por uma bobina ou um condensador

- Numa bobina temos $\theta - \phi = 90^{o}$

- Numa condensador temos $\theta - \phi = -90^{o}$

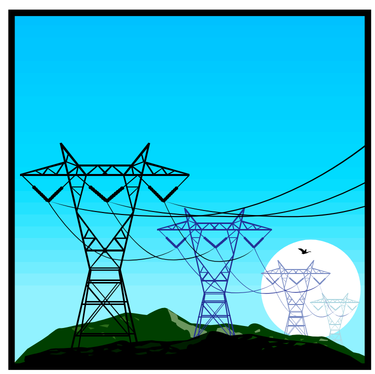
Em qualquer dos casos temos $\cos(\theta - \phi) = 0$

logo $P_L = 0$ e $P_C = 0$

A potência média fornecida a um circuito contendo apenas bobinas e condensadores é zero.

Valor eficaz

- Como sabemos, a energia elétrica chega a nossas casas na forma de uma tensão alternada sinusoidal com o valor de 220V. 220V é o chamado valor eficaz da tensão;

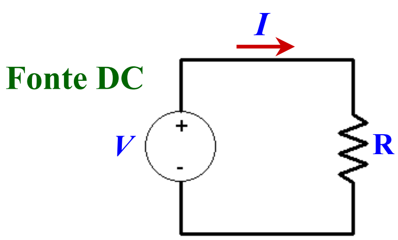


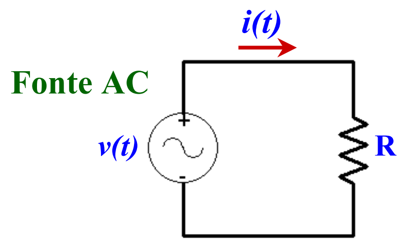
- O valor eficaz de uma tensão ou corrente periódica, é uma medida da eficácia dessa tensão ou corrente de fornecer potência a uma carga;

Valor eficaz de um corrente periódica: é igual ao valor da corrente DC que, ao fluir através de uma dada resistência, fornece a mesma potência média que a corrente periódica.

Valor eficaz

Vejamos como calcular o valor eficaz de uma corrente (ou tensão) sinusoidal atendendo à definição.





$$P_{DC} = I^2 R \qquad P_{AC} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R dt$$

Igualando as duas potências, definimos o valor eficaz da corrente

$$I_{eff}{}^2 R = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R dt \quad \Rightarrow \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt}$$

- **O valor eficaz é, assim, obtido tirando a raiz quadrada à média do quadrado da corrente. Por esse motivo é habitualmente chamado de valor RMS (*Root-Mean-Square*).**

- **Se *i(t)* for a corrente sinusoidal**

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \text{com} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

O seu respectivo valor eficaz será

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m{}^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^{\,2}\cos^2(\omega t+\phi)dt}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{I_m^{\,2}}{2}\int_0^T [1+\cos(2\omega t+2\phi)]dt}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[1+\cos(2\omega t+2\phi)]dt} \quad = I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}}$$

$$\Rightarrow \quad I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

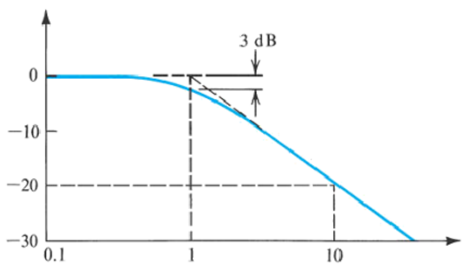
Valor eficaz

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- **O valor eficaz é portanto independente da fase da corrente ou tensão;**
- **A corrente $\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi)$ tem o valor eficaz de *1A*, e por isso fornece a uma resistência a mesma potência média que uma corrente DC de *1A*;**
- **Notar que o factor $\sqrt{2}$ só é válido para ondas sinusoidais.**

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 5: Noções de Sistemas e Sinais



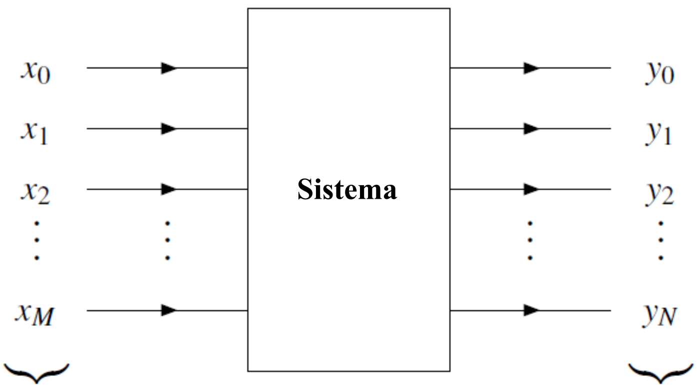
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Nocão de sistema;**
- **Sinais: definição e classificação;**
- **Sinais nos domínios do tempo e da frequência;**
- **Resposta em frequência – caso do circuito RC passa-baixo;**
- **O decibel (dB);**
- **Resposta de amplitude e de fase;**
- **Circuito RC passa-alto;**
- **Diagramas de Bode;**
- **Resposta ao degrau – tempo de subida e tilt.**

Sistema

Entidade que produz um conjunto de *sinais de saída* como resposta a um conjunto de *sinais entradas*.



Sinais de entrada **Sinais de saída**

Sinal

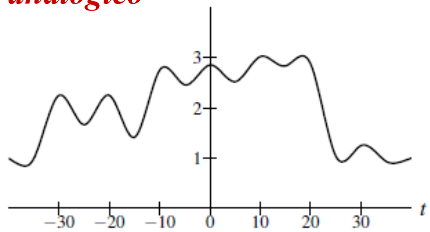
É uma função do tempo que traduz informação sobre um ou mais fenómenos.

- **Os sinais apresentam-se, em geral, em função do tempo:**
  - **Velocidade dum veículo;**
  - **Temperatura ambiente;**
  - **Ritmo cardíaco;**
  - **Tensão eléctrica da rede de distribuição;**
  - **Som de um tema musical;**
  - **…**

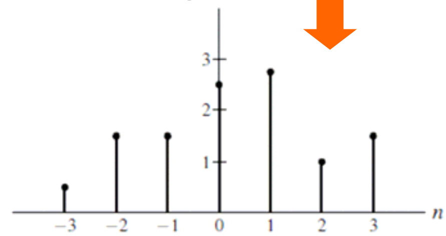
Aqui estamos particularmente interessados em sinais que podem ser representados por tensões ou correntes eléctricas.

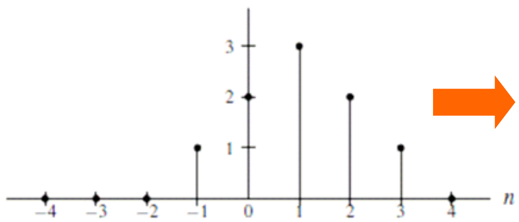
Classificação de sinais

Contínuo no tempo e na amplitude:
sinal analógico



Definido só em *instantes discretos* mas continuo na amplitude: ainda é um sinal analógico

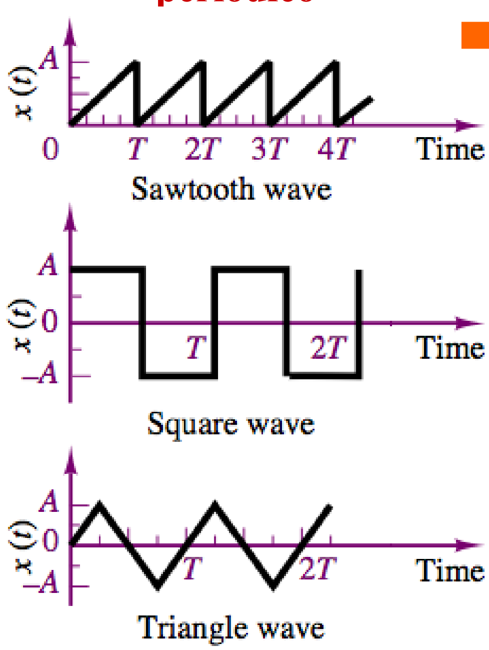




Definido em instantes discretos e com valores discretos de amplitude: *sinal digital*

Classificação de sinais

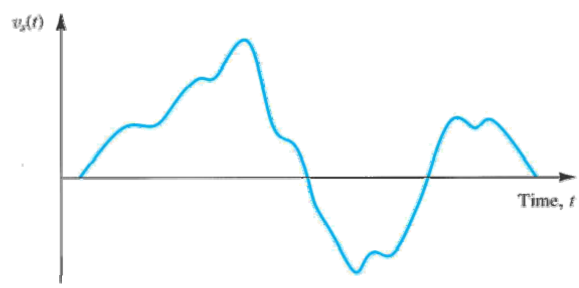
periódico



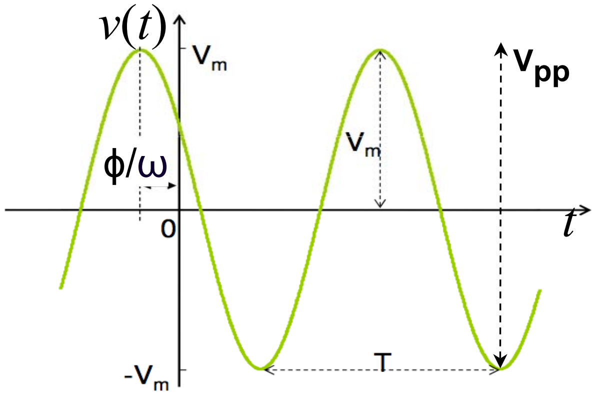
Uma função *x(t)* é periódica, com período *T*, se

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{para qualquer } t$$

aperiódico



Sinais nos domínios do tempo e da frequência



$v(t) = V_m \cos(\omega t+\phi)$

V_m - amplitude máxima (de pico)
T - periodo (s)
f - frequência (Hz) = 1/T
ω - frequência angular (*rad/s*)
ϕ - ângulo de fase (*rad* ou º)
V_{pp} - amplitude pico a pico

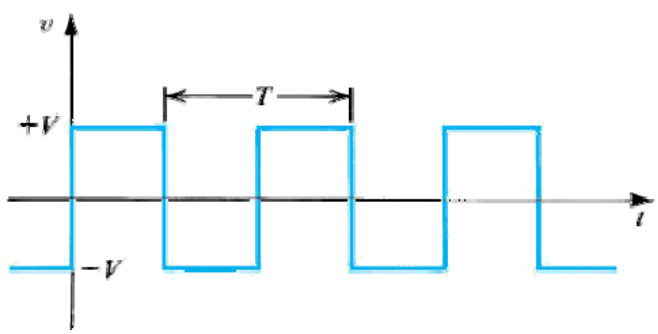
A sinusóide é o sinal mais importante no estudo de circuitos electrónicos.

Porquê?

Sinais nos domínios do tempo e da frequência

… porque segundo a série/transformada de Fourier, <u>qualquer sinal</u> pode ser descrito como uma soma de sinusoides de diferentes amplitudes e frequências.

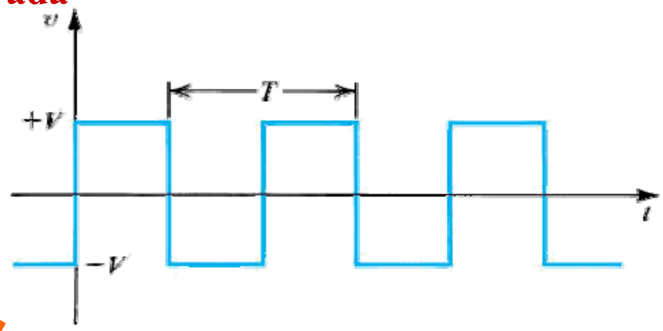
Exemplo:
Onda quadrada

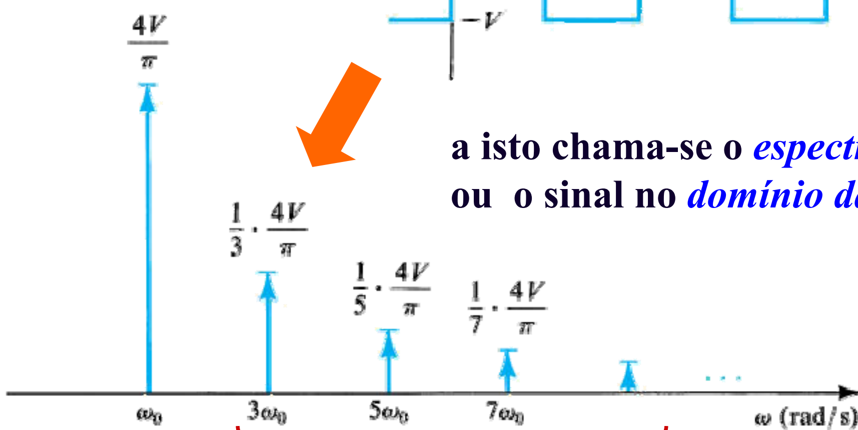


$$v(t) = \frac{4V}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \dots\right)$$

sendo $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ **a *frequência fundamental***

Exemplo: Onda quadrada





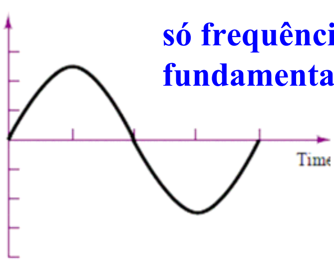
a isto chama-se o *espectro do sinal*
ou o sinal no *domínio da frequência*

freq. fundamental

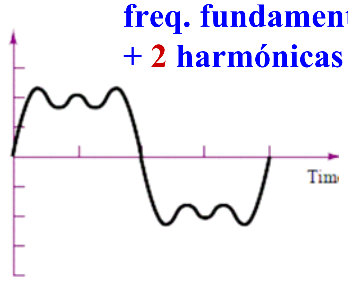
harmónicas

Exemplo: Onda quadrada

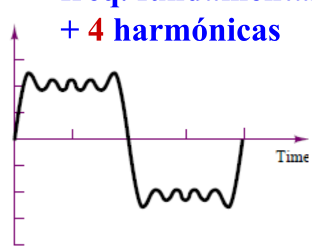
só frequência fundamental



freq. fundamental + 2 harmónicas

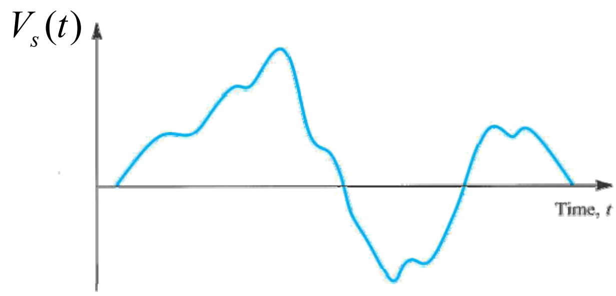


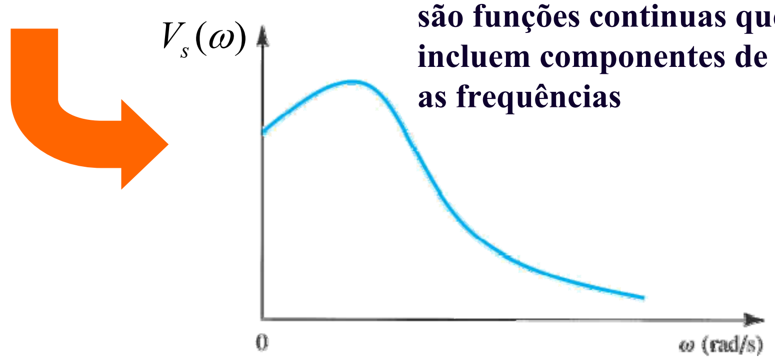
freq. fundamental + 4 harmónicas



Onda quadrada vai-se compondo à medida que mais harmónicas são adicionadas…

Exemplo: sinal aperiódico





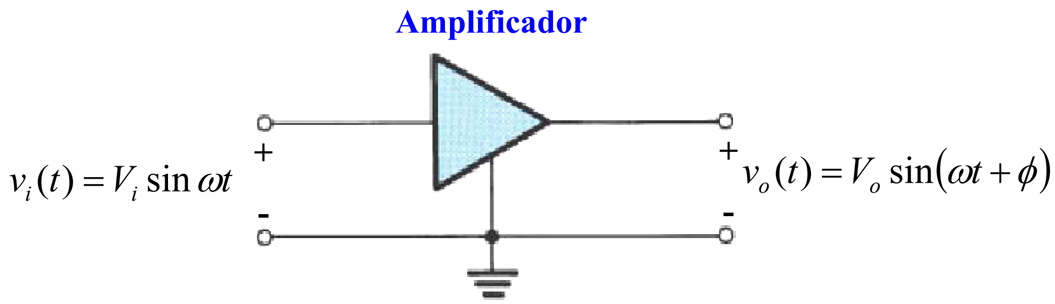
Espectro de sinais aperiódicos são funções continuas que incluem componentes de todas as frequências

Resposta em frequência

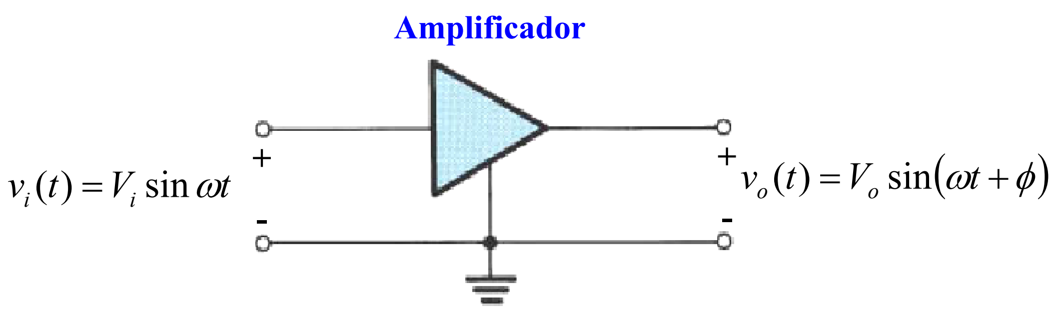
Resposta em frequência

➢ Caracteriza a forma como um sistema responde a **sinusóides de diferentes frequências**;

➢ É uma característica importante exactamente porque… *qualquer sinal pode ser expresso como uma soma de sinusóides.*



Resposta em frequência



A resposta em frequência do amplificador é expressa pela sua **função de transferência**:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_O}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)}$$

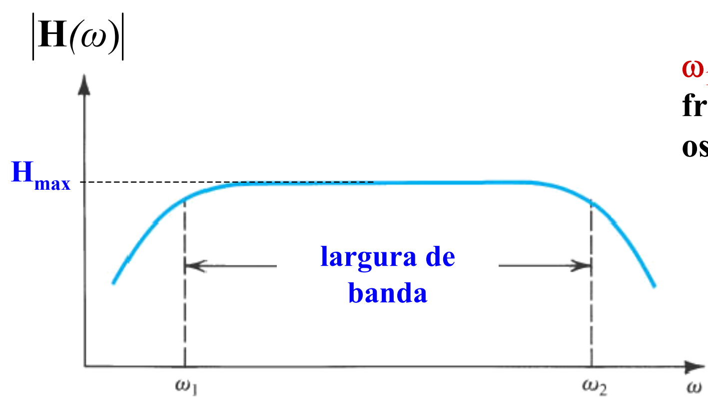
que inclui a resposta de **amplitude,** $|\mathbf{H}(\omega)|$

e a resposta de **fase**, $\angle \mathbf{H}(\omega)$

Resposta em frequência

➢ **A resposta em amplitude traduz a gama de frequências que o sistema amplifica e a gama que tende a atenuar;**

➢ **O amplificador funciona como um *filtro* com uma dada *largura de banda*;**



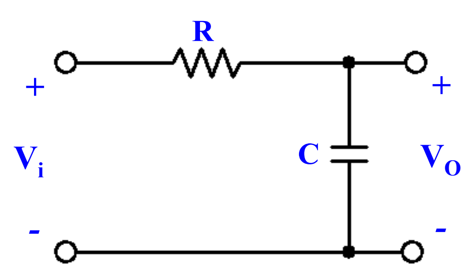
ω_1 e ω_2 são definidas como frequências de corte: para os quais o ganho é

$$\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

Usando a relação do divisor de tensão, podemos escrever

$$\mathbf{V_O}(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}\mathbf{V_i}(\omega)$$



Notar que a função de transferência é adimensional

Neste caso, a função de transferência é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_O}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Exprimindo em módulo e fase…

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg(\omega RC)$$

Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

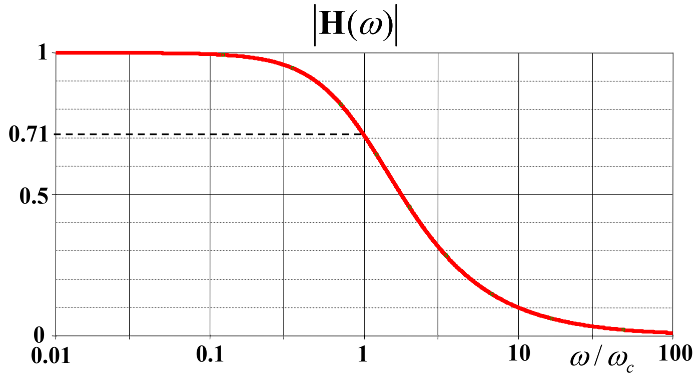
$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \qquad \angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg(\omega RC)$$

- **Na representação em módulo e fase, a função de transferência indica a atenuação e o desfasamento introduzido pelo circuito na sinusóide de frequência ω.**

- **Comportamento na frequência**
  - **Para frequências muito baixas** $|\mathbf{H}(0)| \approx 1 \quad \angle\mathbf{H}(0) \approx 0$
    pelo que $Vo \approx Vi$
  - **Para $\omega = \omega_c = 1/RC$, temos** $|\mathbf{H}(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \qquad \angle\mathbf{H}(\omega_c) = -45^o$
  - **Para frequências muito elevadas** $|\mathbf{H}(\infty)| = 0 \quad \angle\mathbf{H}(\infty) = -90^o$
    pelo que $Vo \approx 0$

Assim, este circuito é conhecido como filtro passa-baixo.

Comportamento na frequência do RC passa baixo



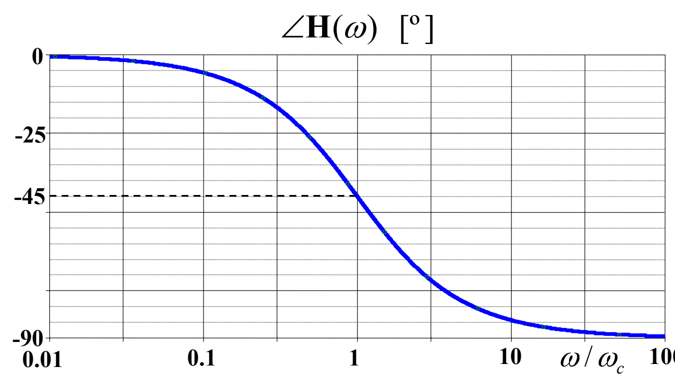
Frequência de corte

$$\omega_c = \frac{1}{\mathrm{RC}}$$

Notar:
- **Eixo X normalizado;**
- **Escalas logarítmicas em X e Y.**

- **Mas esta resposta de amplitude costuma representar-se numa *medida logarítmica*: em *decibeis* (dB):**

$$20\log|\mathbf{H}(\omega)| \quad (dB)$$



deciBel (dB)

- O ***deciBel*** corresponde a ***1/10*** da unidade base: o ***bel***;
- Esta unidade surgiu no contexto dos primeiros sistemas de telefones para quantificar a perda de **potência** de um sinal numa ligação, definindo-se como:

$$\log \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (bel) \qquad \textbf{ou} \qquad 10\log \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (decibel)$$

- **Porquê uma unidade baseada na função logaritmo?**
- **Porque a percepção de intensidade do ouvido humano é logarítmica: e.g. se a intensidade sonora aumentar *10X* a sensação é de apenas uma *duplicação* da intensidade!**
- **Tratando-se de relações entre tensões, o decibel é definido como**

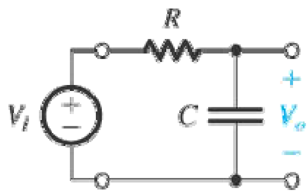
$$20\log \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad (decibel)$$

Resposta em frequência do RC passa-baixo (em *dB*)

$$20\log|\mathbf{H}(\omega)| = 20\log \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}} \qquad \omega_c = \frac{1}{\mathrm{RC}}$$

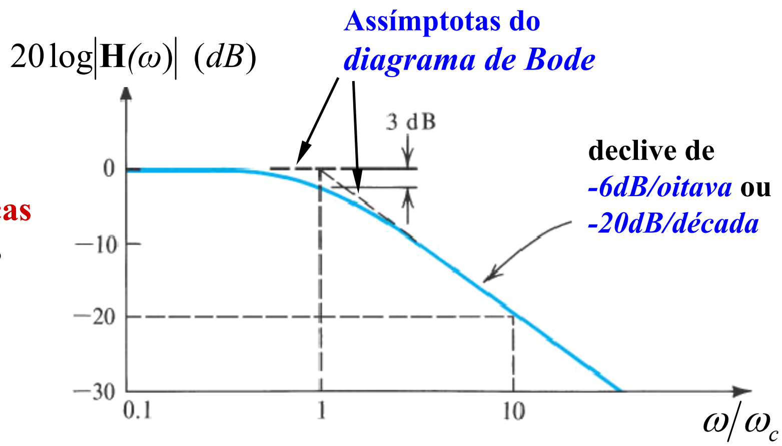
- **Para frequências muito baixas:** $|\mathbf{H}(0)| \approx 1 \quad \text{ou} \quad 0\text{dB}$
- **Para** $\omega = \omega_c$**:** $|\mathbf{H}(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad 20\log(0.707) = \text{-3dB}$
- **Para frequências elevadas:** $|\mathbf{H}(\omega)| \approx \frac{\omega_c}{\omega}$
  - **Portanto, se *ω* duplicar, *|H(ω)|* diminui para *1/2*. Como *20log(0.5) = -6*, então a amplitude cai *6dB*;**
  - **Se *ω* aumentar de um factor de *10*, *|H(ω)|* diminui para *1/10*. Como *20log(0.1) = -20*, então a amplitude cai *20dB*.**

Resposta do RC passa-baixo: diagrama de Bode

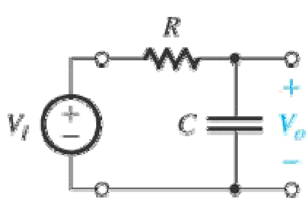


- Com estes dados podemos obter um traçado *assimptótico* da resposta do filtro: o chamado *Diagrama de Bode*.

Escalas logarítmicas em ambos os eixos



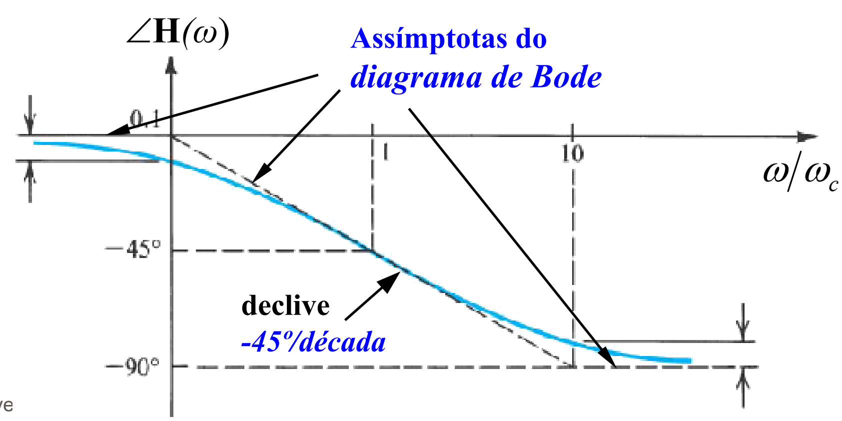
Resposta do RC passa-baixo: diagrama de Bode



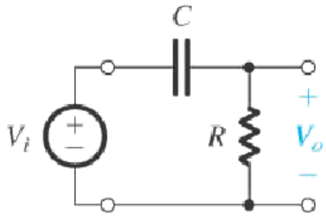
- Para a *resposta de fase* também é possível obter um diagrama de Bode.

$$\angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg(\omega RC) = -arctg(\omega/\omega_c)$$

- Para frequências muito baixas, e.g. $\omega < 0.1\omega_c$: $\angle\mathbf{H}(0) \approx 0^o$
- Para frequências muito elevadas , e.g. $\omega > 10\omega_c$: $\angle\mathbf{H}(\infty) \approx -90^o$
- Para $\omega = \omega_c$:
  $\angle\mathbf{H}(\omega_c) = -45^o$

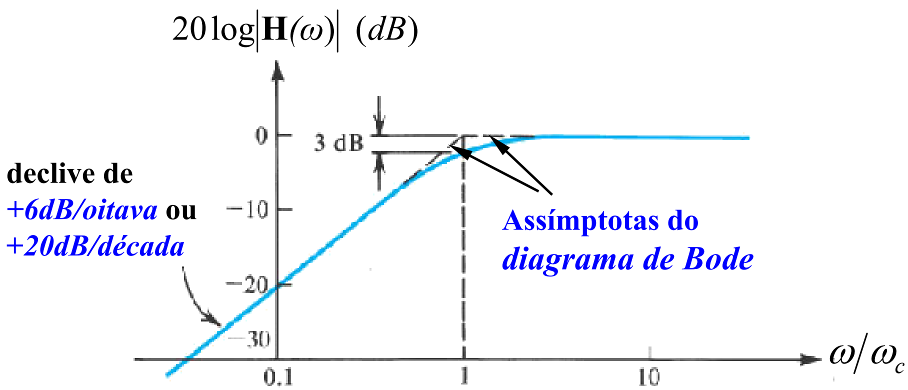


Resposta do RC passa-alto: diagrama de Bode

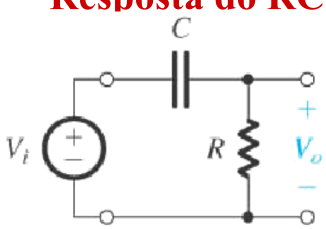


$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c/\omega)^2}} \qquad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- **Para a resposta em amplitude o *Diagrama de Bode* é**

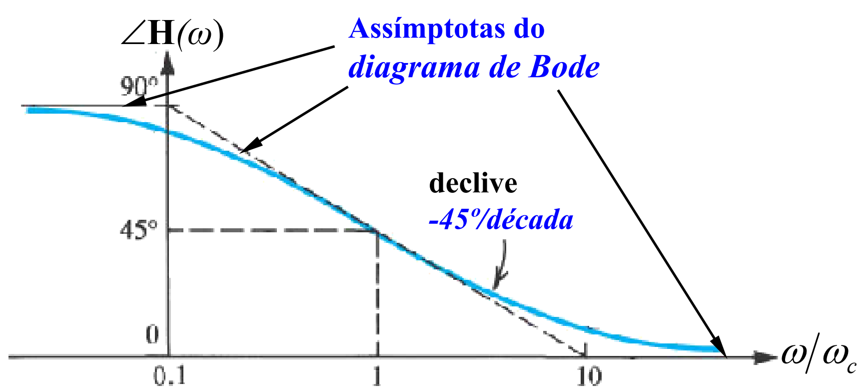


Resposta do RC passa-alto: diagrama de Bode



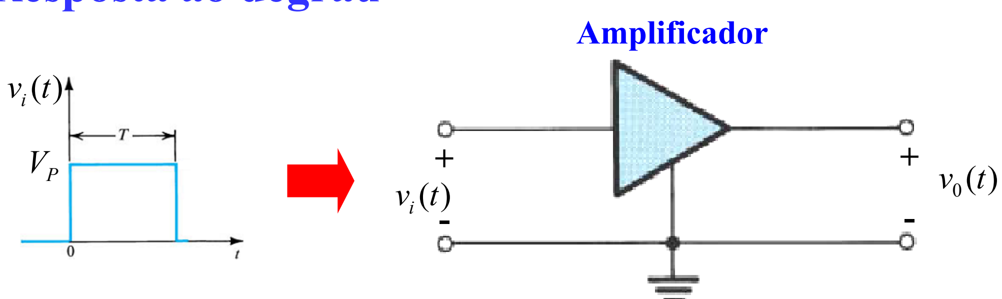
$$\angle\mathbf{H}(\omega) = arctg(\omega_c/\omega) \qquad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- **Para a resposta de fase o *Diagrama de Bode* é**



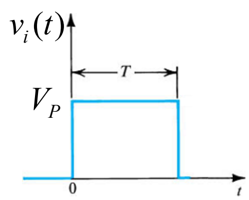
Resposta ao degrau

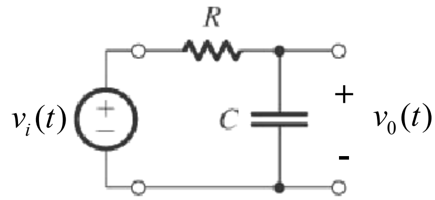
Resposta ao degrau



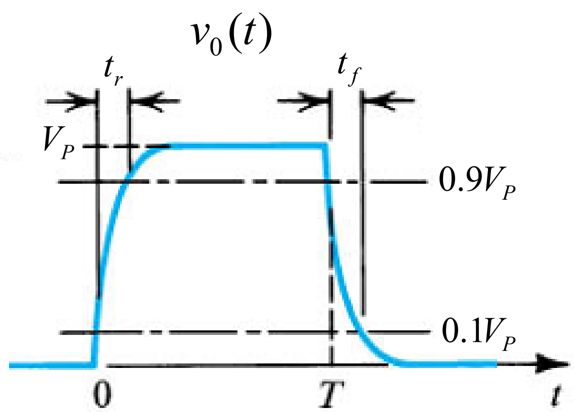
- **Traduz a forma com o sistema reage quando lhe é aplicado na entrada um *sinal em degrau*: variação abrupta entre dois valores;**
- **Na prática o que faz é aplicar, não um degrau, mas um impulso ou uma onda quadrada;**
- **A resposta ao degrau permite inferir sobre a resposta em frequência.**

Sistema tem o comportamento dum RC passa-baixo





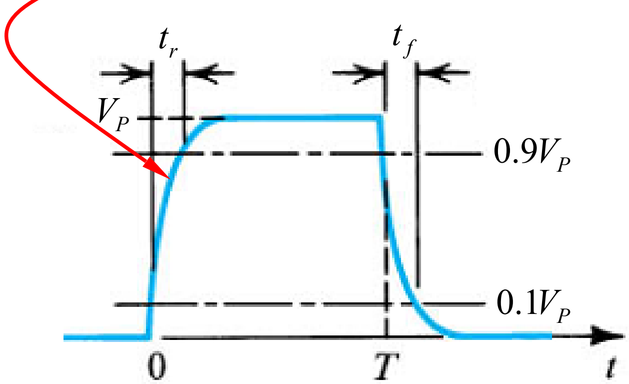
- **A velocidade com que o circuito responde ao degrau é quantificada pelo *tempo de subida*, t_r;**
- **t_r - tempo que $v_0(t)$ leva para subir de *10%* de V_P até *90%;***
- **t_f – *tempo de descida* – define-se de forma identica (*90* a *10%*).**

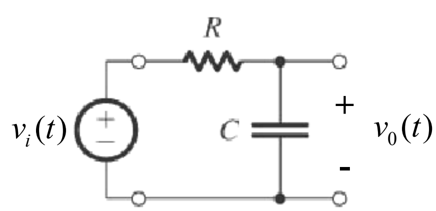


Sistema tem o comportamento dum RC passa-baixo

- **Do estudo da carga do condensador é possível mostrar que …**

$t_r \approx 2.2\tau$ **com** $\tau = RC$



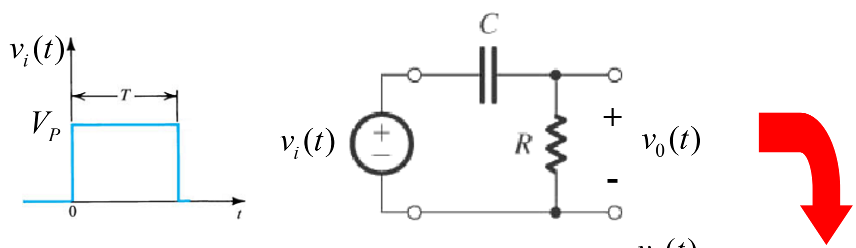


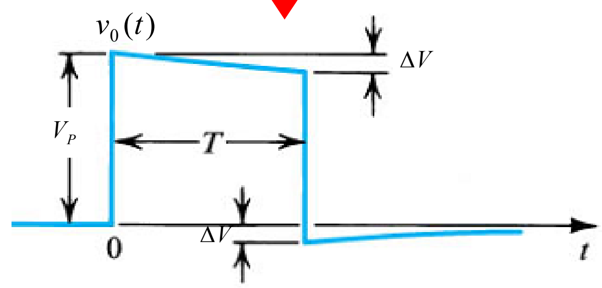
Ora, como $\tau = RC = 1/\omega_0$

então $t_r = \dfrac{2.2}{\omega_0}$

- **Portanto a resposta ao degrau é tão mais rápida quanto maior for ω_0.**

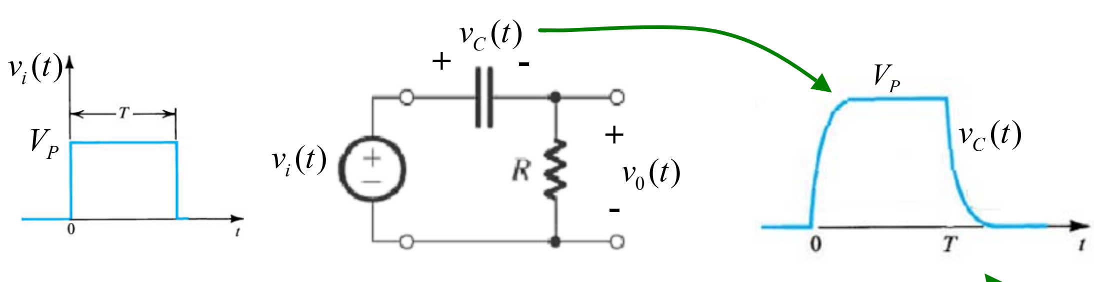
Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto



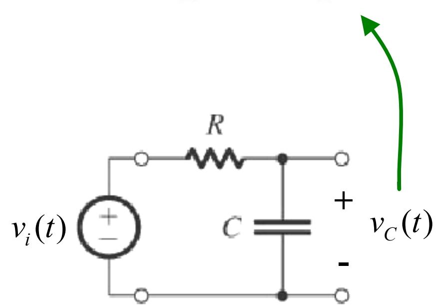


- Como responde bem às altas frequências, o circuito reproduz fielmente as transições rápidas do sinal ($t_r = 0$);
- … mas como responde mal às frequências baixas (incluindo DC), não reproduz bem as partes planas do sinal;
- Vejamos primeiro porque razão $v_0(t)$ tem esta forma.

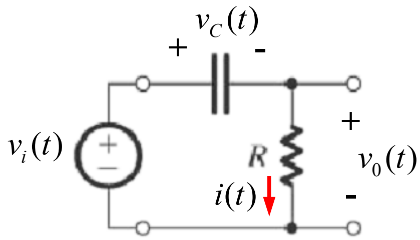
Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto

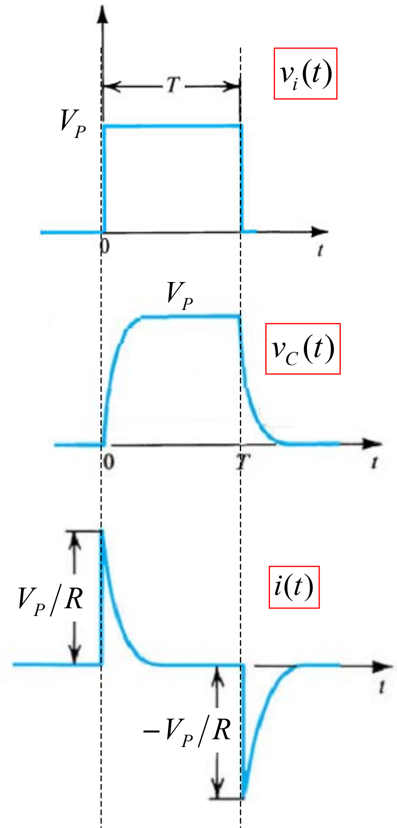


- Para se perceber a forma de $v_0(t)$, reparemos, primeiro, que o circuito é também um RC série, logo $v_C(t)$ deve ser igual à tensão de saída do RC passa-baixo.



Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto





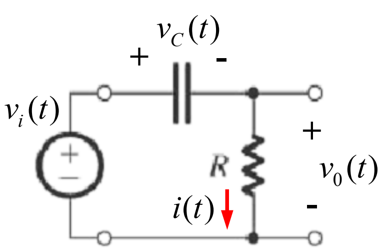
- A corrente no circuito, *i(t)*, deverá ter a forma…

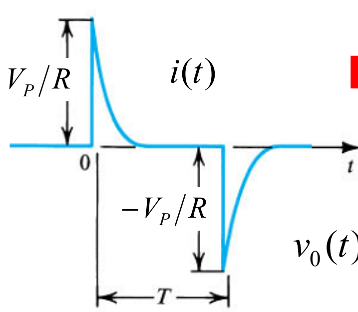
- Em $t = 0$, como o condensador está descarregado $i(t=0^+) = \dfrac{V_P}{R}$

- Em $t = T^+$, $v_i(t = T^+) = 0V$ e $v_C(t = T^+) = V_P$ pelo que

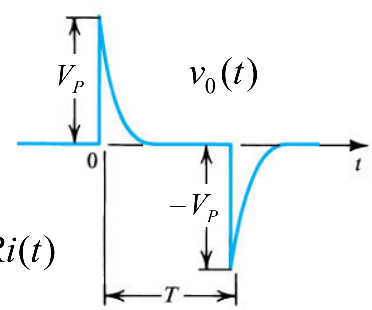
$$i(t=T^+) = -\frac{V_P}{R}$$

Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto



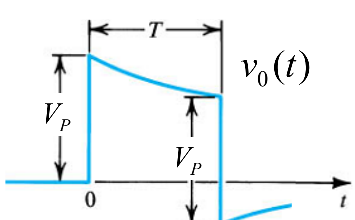


$v_0(t) = Ri(t)$

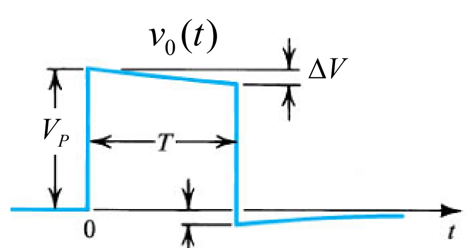


- Mas note-se que esta é a resposta se $T >> \tau$

Se *T* for mais baixo, obtemos



$T \approx \tau$

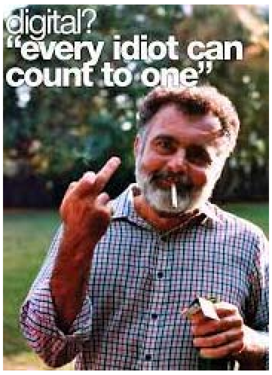


$T << \tau$

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 6: Amplificadores operacionais

(parte 1)



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

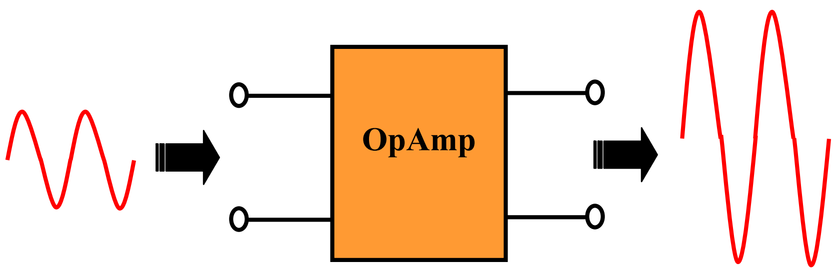
Sumário

- **Amplificador operacional: fundamentos;**
- **Modelo equivalente simplificado;**
- **Realimentação: configuração inversora;**
- **Calculo o ganho;**
- **Modelo ideal do OpAmp;**
- **Noção de curto-circuito virtual na entrada;**
- **Configuração não-inversora;**
- **Limites do modelo ideal.**

Fundamentos e
modelo simplificado

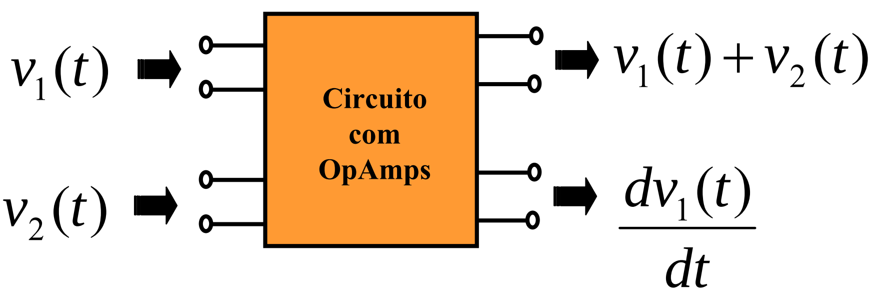
Amplificador Operacional ou *OpAmp*

Amplificador – Porque transforma (*amplifica*) um sinal eléctrico (tensão) de pequeno valor, numa réplica de maior valor.



Amplificador Operacional ou *OpAmp*

Operacional – Porque é usado em circuitos que realizam *operações* matemáticas (soma, multiplicação, derivação, etc.) em um ou mais sinais eléctricos.



Como se apresenta fisicamente?

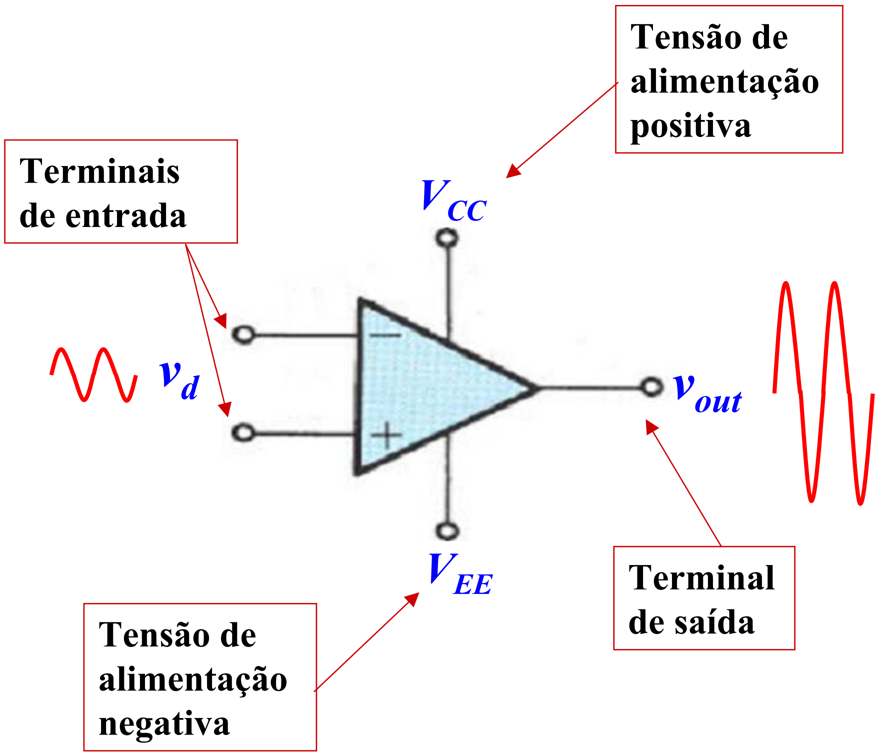
K2-W (*1953*) primeiro OpAmp modular (alimentado a *600V*)

µA709 (*1965*)
Segundo OpAmp monolítico da história. Primeiro a gozar de grande sucesso comercial.

Como se apresenta fisicamente?

OpAmps modernos

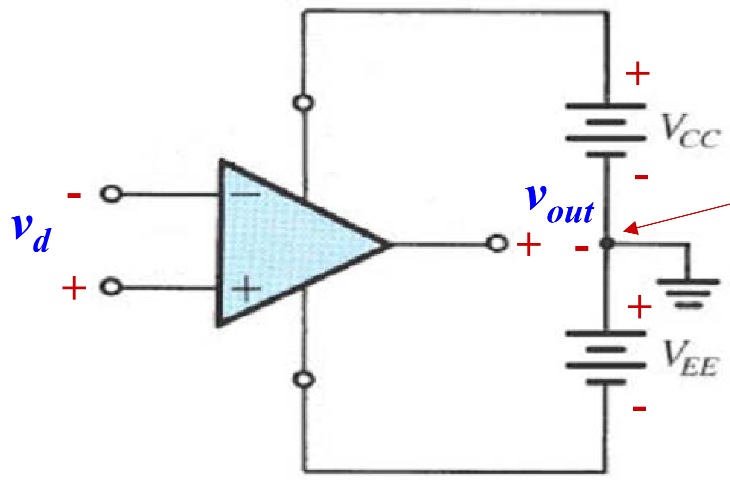
Simbolo e terminais



Sinais de entrada e saída

- O OpAmp amplifica a tensão v_d aplicada entre as duas entradas (+) e (-);

- A tensão de saída, v_{out}, é medida em relação ao ponto comum das duas tensões de alimentação – o nó de referência.

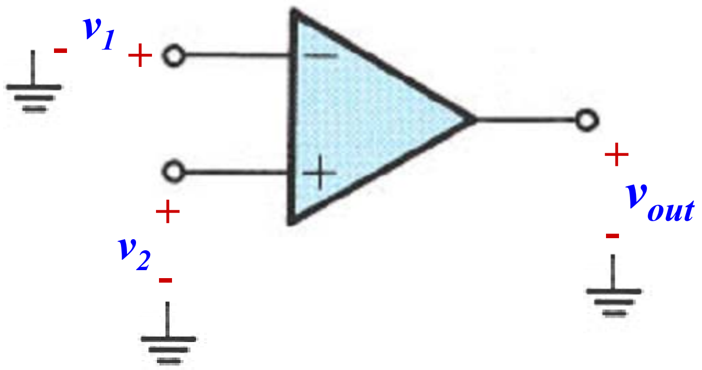


Ganho do OpAmp

- Para simplificar, é costume omitir-se as ligações de alimentação;

- V_d é a chamada tensão diferencial de entrada do OpAmp:

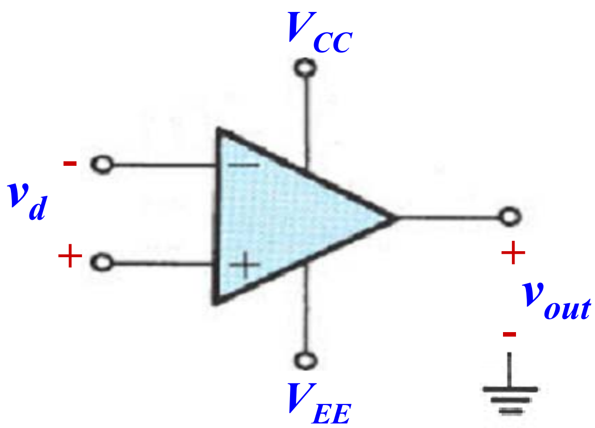
$$v_d = v_2 - v_1$$



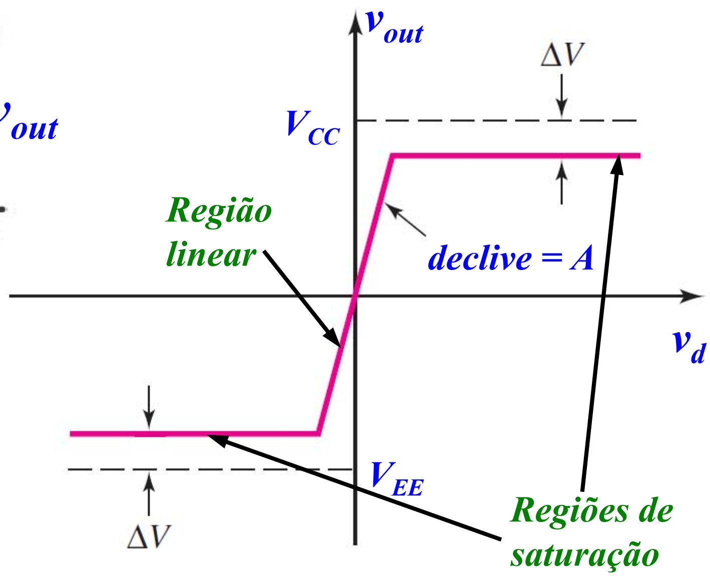
$$v_{out} = A(v_2 - v_1)$$

Ganho do OpAmp

Característica entrada/saída do OpAmp



- V_{CC} e V_{EE} são *15* e *–15V* no máximo;
- A (ganho) pode ser da ordem de 10^6.



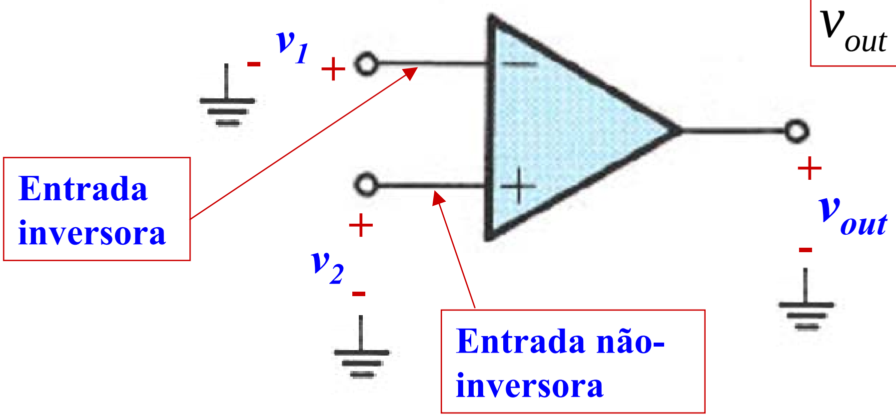
- v_{out} é limitado;
- ΔV pode variar entre *0* e *~2V*.

Entradas inversora e não-inversora

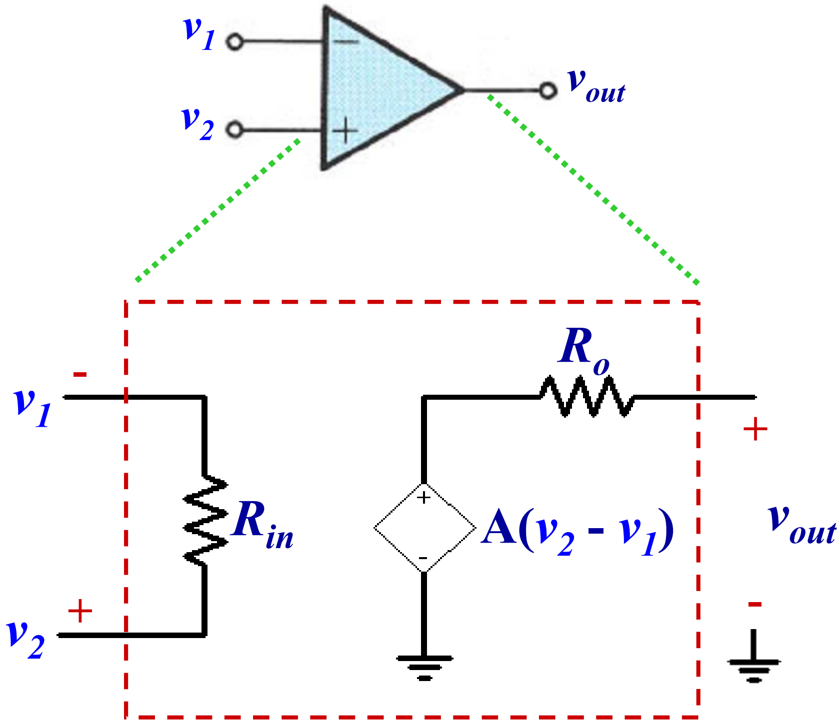
- Entrada inversora: marcada com (-) ⇒ Porque a tensão v_1 aparece na equação de v_{out} com o sinal (-): se v_1 aumentar v_{out} diminui;

- Entrada não inversora: marcada com (+) ⇒ Porque a tensão v_2 aparece na equação de v_{out} com o sinal (+): se v_2 aumentar v_{out} aumenta.

$$\boxed{v_{out} = A(v_2 - v_1)}$$



Modelo equivalente do OpAmp



- R_{in} – resistência de entrada;
- R_0 – resistência de saída;
- A – ganho em tensão.

NOTA: Modelo só é válido se o OpAmp estiver a funcionar na região linear!

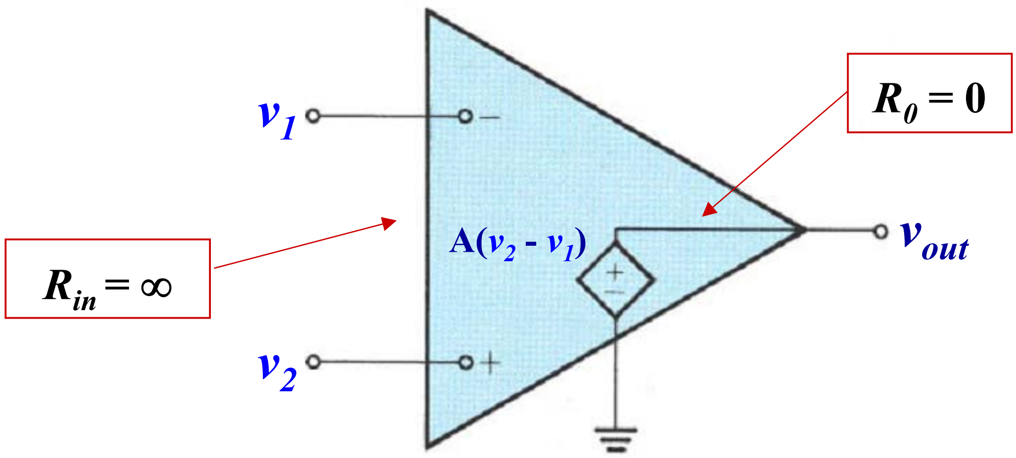
OpAmp – valores típicos

A – ganho em tensão, R_{in} – resistência de entrada; R_0 – resistência de saída.

Part Number	μA741	LM324	LF411	AD549K
Description	General purpose	Low-power quad	Low-offset, low-drift JFET input	Ultralow input bias current
Open loop gain A	2×10^5 V/V	10^5 V/V	2×10^5 V/V	10^6 V/V
Input resistance	2 MΩ	*	1 TΩ	10 TΩ
Output resistance	75 Ω	*	~1 Ω	~15 Ω

Modelo simplificado do OpAmp

- **Em geral R_{in} é muito elevado e R_0 é muito pequeno comparado com os valores das resistências usadas nos circuitos;**
- **Pelo que, na prática, adopta-se um modelo mais simples para o OpAmp:**



Realimentação

OpAmp e *feedback*

- **Mas por que razão são os OpAmps fabricados com ganhos tão elevado?**

  R: Para serem usados em circuitos com realimentação (feedback) negativa?

- **Com realimentação negativa os circuitos resultantes não têm um ganho tão elevado, mas passam a gozar de vários benefícios:**
  - **Ganho depende apenas de componentes exteriores ao OpAmp;**
  - **Melhor linearidade (menor distorção);**
  - **Maior largura de banda;**
  - **Melhores características de resistência de entrada e saída.**

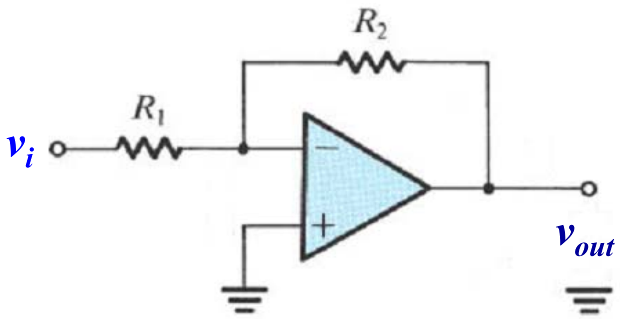
Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Configuração inversora

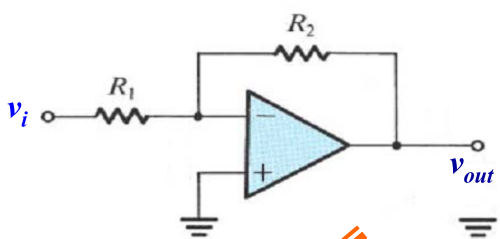
Configuração inversora do OpAmp

- **Utiliza duas resistências numa configuração de realimentação negativa (ou *feedback* negativo);**

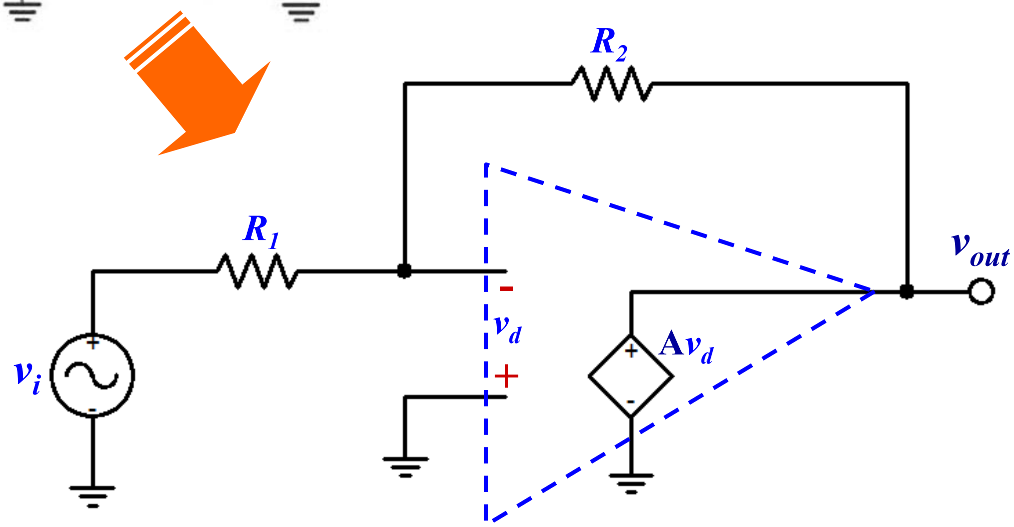
- **A configuração chama-se inversora porque quando a tensão de entrada, v_i, aumenta a tensão de saída, v_{out}, diminui.**



Configuração inversora do OpAmp

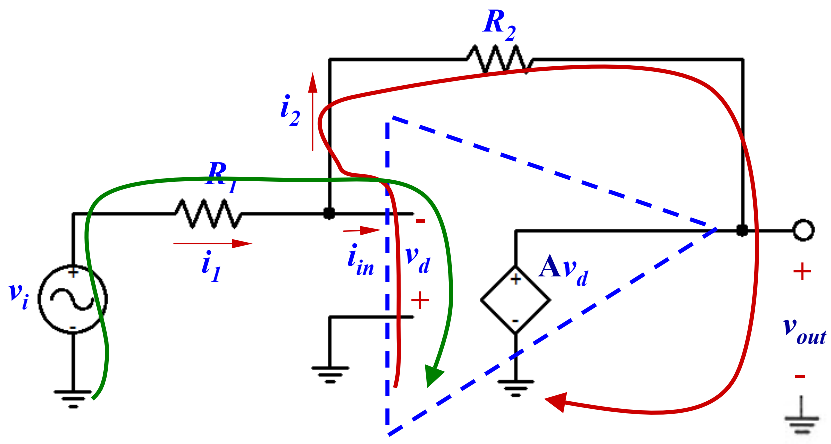


Para analisar o circuito substituímos o OpAmp pelo modelo equivalente



Configuração inversora do OpAmp

- **Queremos obter o ganho do circuito, ou seja, uma relação matemática entre v_{out} e v_i.**



- **Loop de entrada (a verde):** $-v_i + R_1 i_1 - v_d = 0$

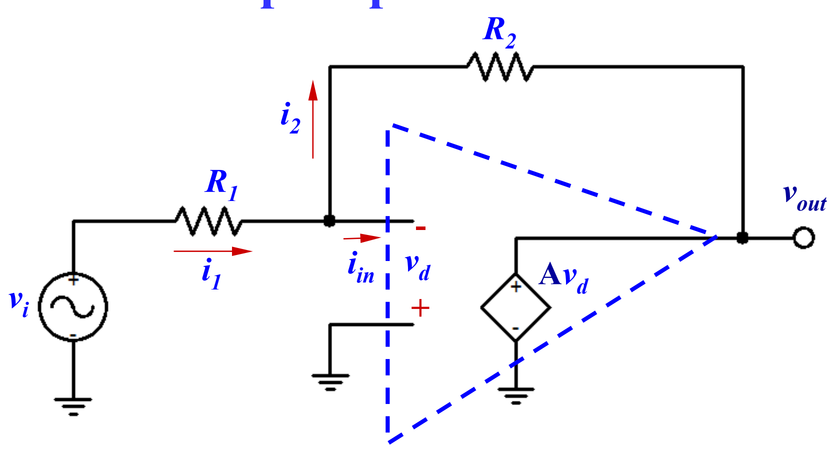
- **Loop de saída (a vermelho):** $v_d + R_2 i_2 + v_{out} = 0$

Configuração inversora do OpAmp

- **Sabemos que**

$$i_{in} = 0 \Rightarrow i_2 = i_1$$

$$v_{out} = Av_d$$



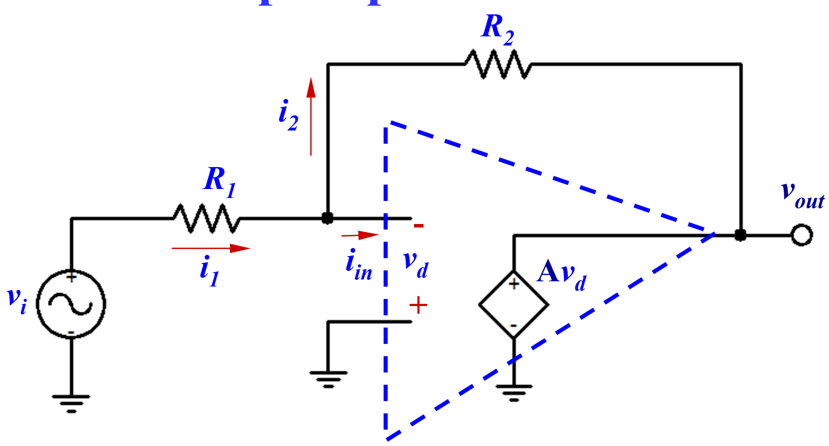
- **Substituindo nas equações anteriores:**

$$\begin{cases} -v_i + R_1 i_1 - \dfrac{v_{out}}{A} = 0 \\ \dfrac{v_{out}}{A} + R_2 i_1 + v_{out} = 0 \end{cases}$$

- **Eliminando i_1, obtemos:**

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{R_2}{R_1} + 1 \right) \dfrac{1}{A}} v_i$$

Configuração inversora do OpAmp



- **À razão v_{out} / v_i chamamos ganho em malha fechada, ou apenas ganho do circuito.**

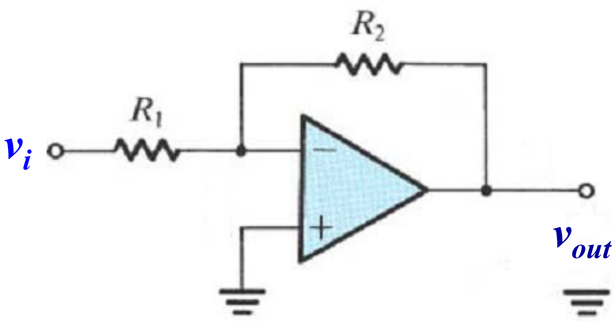
$$\boxed{G \equiv \frac{v_{out}}{v_i}}$$

$$G = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)\frac{1}{A}}$$

- **Para os valores tipicamente muito elevados de A a equação do ganho reduz-se a**

$$\boxed{G = -\frac{R_2}{R_1}}$$

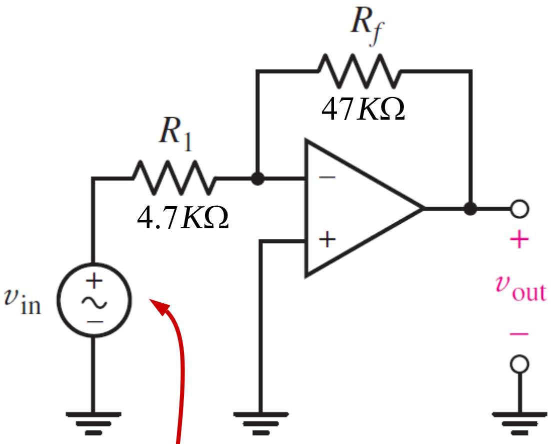
Configuração inversora do OpAmp



$$\boxed{G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}}$$

- **Este é um resultado notável dos circuitos com feedback negativo em geral, e dos OpAmps em particular:**
  - **O Ganho depende apenas do valor de resistências exteriores ao OpAmp;**
  - **O valor do ganho em tensão do OpAmp, A, não é relevante desde que seja suficientemente elevado;**
- **O sinal (–) no ganho indica que há inversão da entrada para a saída.**

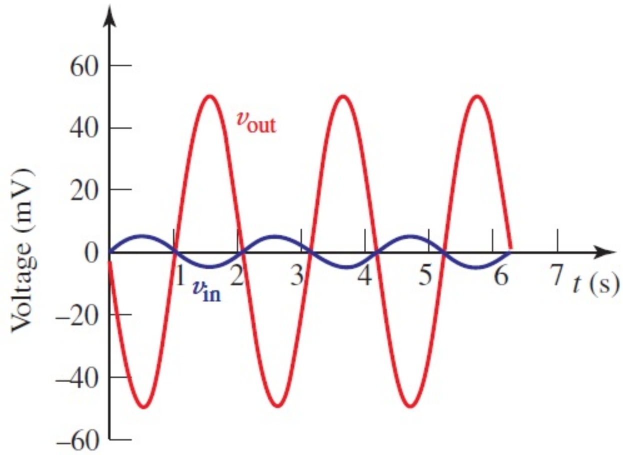
Configuração inversora - exemplo



$$G = -\frac{R_f}{R_1} = -\frac{47}{4.7} = -10$$

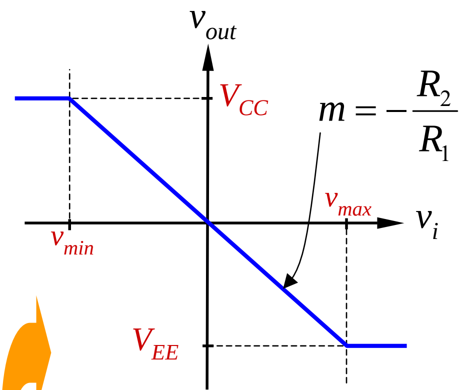
$$v_{out} = -50\sin 3t \quad mV$$

$$v_{in} = 5\sin 3t \quad mV$$



Região linear da configuração inversora

- **Para que o OpAmp opere na região linear, o valor de v_i tem de se situar entre v_{min} e v_{max}.**

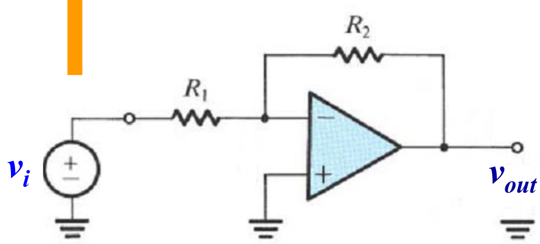


- **Substituindo** $v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} v_i$

em $V_{EE} < v_{out} < V_{CC}$

obtém-se:

$$-\frac{R_1}{R_2} V_{CC} < v_i < -\frac{R_1}{R_2} V_{EE}$$



- **Assumiu-se aqui que os limites de v_{out} são as tensões de alimentação, o que nem sempre é o caso.**

Modelo ideal do OpAmp

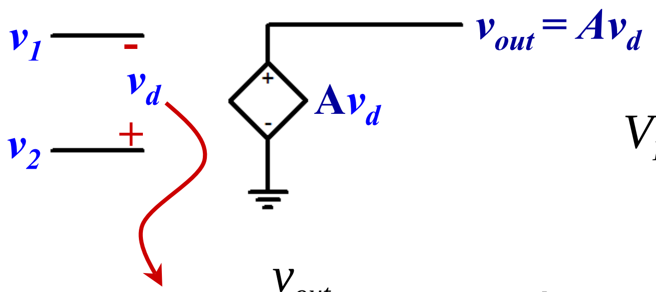
OpAmp ideal

- **A análise de circuitos com OpAmps é muito mais simples se considerarmos o ganho em tensão do OpAmp infinito: $A = \infty$. Adicionando este pressuposto ao modelo simplificado do OpAmp, obtemos:**

Modelo do OpAmp ideal

- $R_{in} = \infty$;
- **Correntes nas entradas (+) e (-) do OpAmp são nulas;**
- $R_0 = 0$;
- $A = \infty$

Curto-circuito virtual no OpAmp



$$V_{EE} < v_{out} < V_{CC}$$

$$v_d = \frac{v_{out}}{A} \quad \text{mas se } A = \infty \Rightarrow v_d \approx 0$$

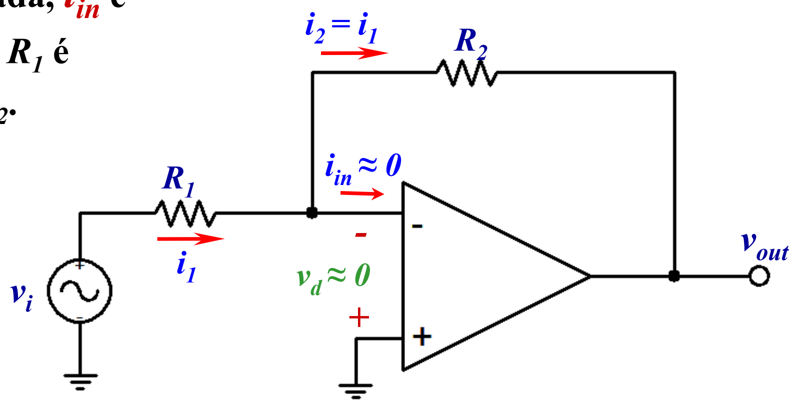
- **Como v_{out} é uma tensão de valor compreendido entre as tensões de alimentação do OpAmp (e.g. *–15* e *+15V*) e A é muito elevado, então v_d é forçosamente quase nulo:**
  - **⇒ Podemos então admitir que existe um curto-circuito (*virtual*) entre as entradas (-) e (+) do OpAmp.**
- **Este curto-circuito virtual só existe se o amplificador estiver a funcionar na região linear (se não estiver saturado, ver pg. 6.1-11).**

Análise da configuração inversora usando o modelo do OpAmp ideal

- **A análise deste circuito torna-se muito fácil se tivermos em mente que:**

  1) A tensão diferencial de entrada, v_d é nula ⇒ a corrente i_1 depende apenas de v_i;

  2) A corrente de entrada, i_{in} é zero ⇒ a corrente em R_1 é igual à corrente em R_2.

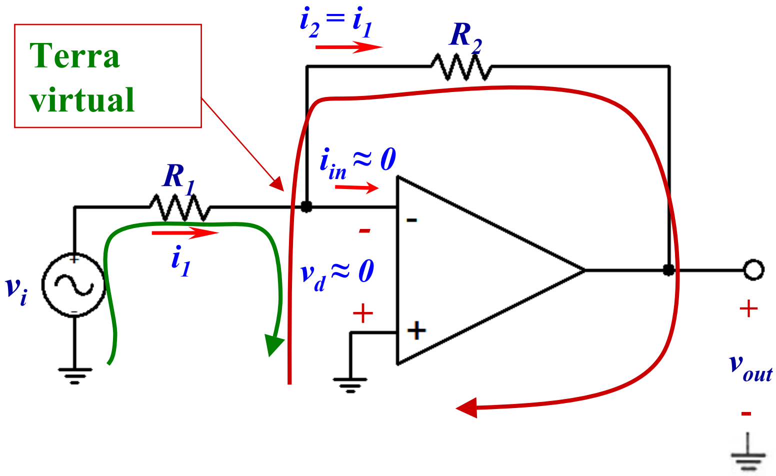


Análise da configuração inversora usando o modelo do OpAmp ideal

- As equações dos loops de entrada e de saída são agora:

$$-v_i + R_1 i_1 - 0 = 0$$

$$0 + R_2 i_1 + v_{out} = 0$$



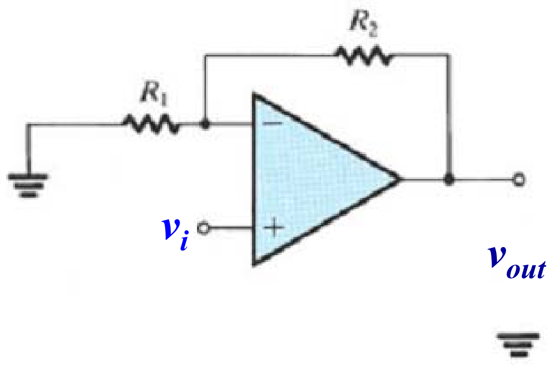
- De onde se tira

$$\frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

- Usando o modelo do OpAmp ideal conseguimos portanto chegar ao mesmo resultado de uma forma mais simples.

Configuração não inversora

Configuração não-inversora do OpAmp



- Utiliza também duas resistências numa configuração de **realimentação negativa**;

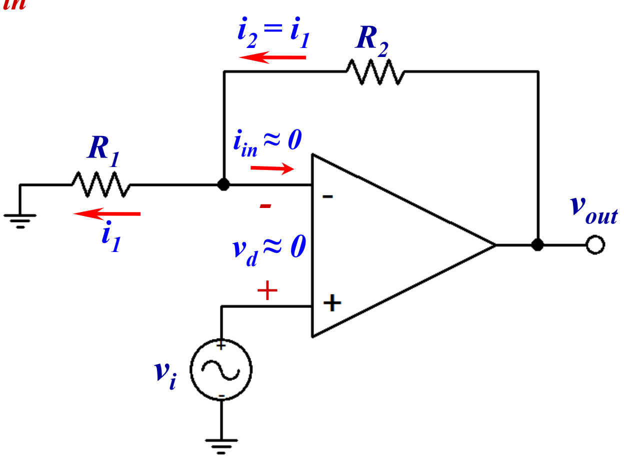
- … mas aqui o ganho G é positivo, razão porque a configuração se chama de não-inversora – quando a tensão de entrada, v_i, aumenta, a tensão de saída, v_{out}, também aumenta.

Análise da configuração não-inversora

- É feita de forma idêntica à da configuração inversora:

  1) A tensão diferencial de entrada, v_d é nula $\Rightarrow$ a corrente i_1 depende apenas de v_i;

  2) A corrente de entrada, i_{in} é zero $\Rightarrow$ a corrente em R_1 é igual à corrente em R_2.



Análise da configuração não-inversora

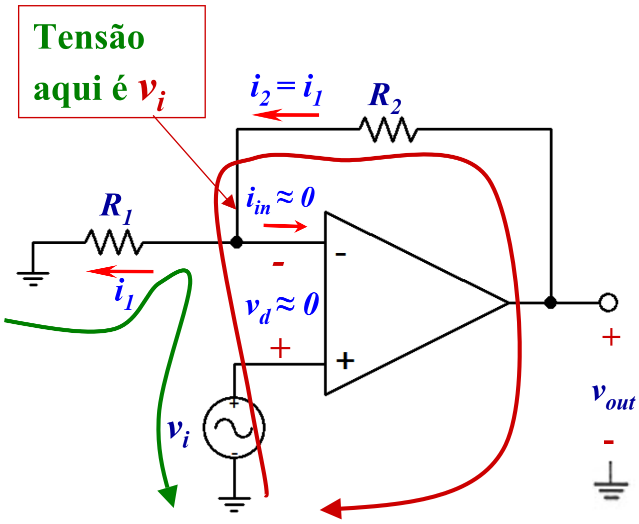
- **As equações dos loops de entrada e de saída são agora:**

$$-R_1 i_1 + v_i = 0$$

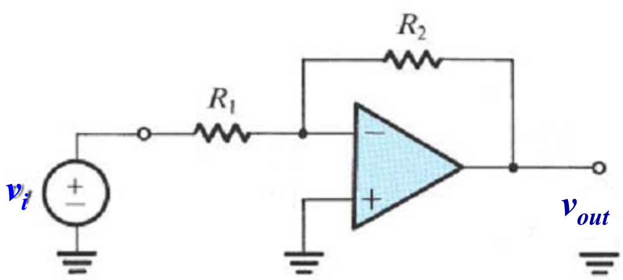
$$-v_i - R_2 i_1 + v_{out} = 0$$

- **Eliminando i_1 nas equações obtemos**

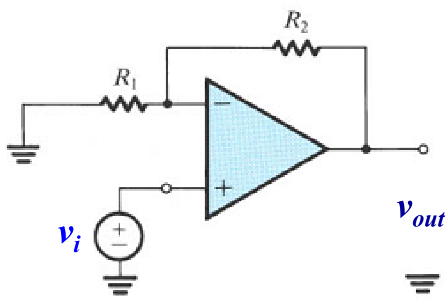
$$G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



Conclusão: configurações inversora e não-inversora



Inversora: $\frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$



Não-inversora: $\frac{v_{out}}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

Limite das aproximações obtidas com o modelo do OpAmp ideal

- **Voltando à expressão precisa do ganho da configuração inversora:**

$$G = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{A}\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{A}\right)}$$

- **…constatamos que as aproximações anteriores para o ganho são válidas se:**

  ⇒ A for muito grande;

  ⇒ e $R_2/R_1 << A$.

- **Ou seja, perdem a validade para ganhos em malha fechada, G, com valores da ordem de A.**

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 6: Amplificadores operacionais

(parte 2)

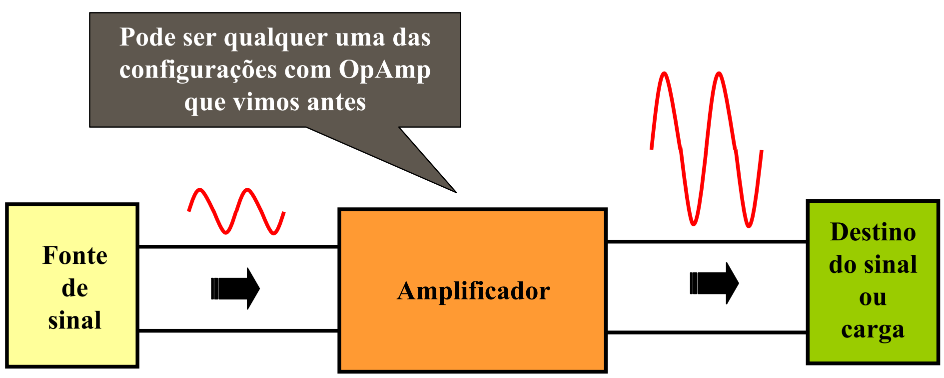
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Resistência de entrada e resistência de saída num amplificador de tensão;**
- **Resistências de entrada e de saída das configurações inversora e não-inversora;**
- **Outras configurações do OpAmp**
  - **Seguidor de tensão;**
  - **Utilidade do seguidor de tensão;**
  - **Amplificador somador;**
  - **Amplificadores integrador e diferenciador;**
  - **OpAmp como comparador.**

Resistências de entrada e de saída de amplificadores

Fonte de sinal, amplificador e carga

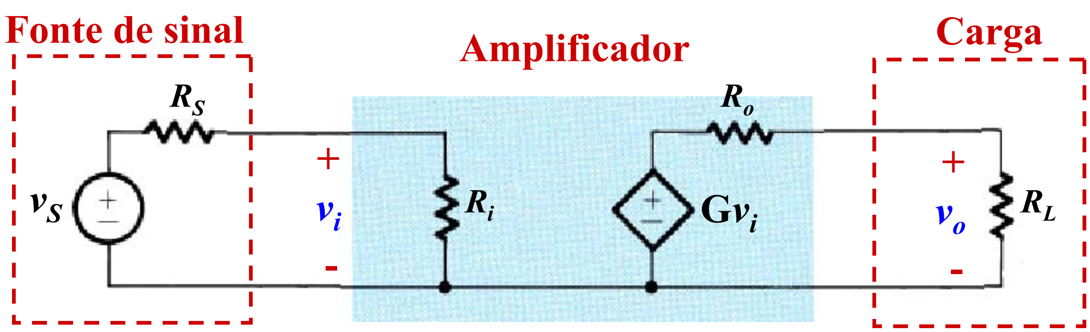


● **Numa cadeia de amplificação como esta interessa sempre maximizar a eficiência com que o sinal é transferido…**

- **… da fonte de sinal para a entrada do amplificador, e**
- **… da saída do amplificador para a carga.**

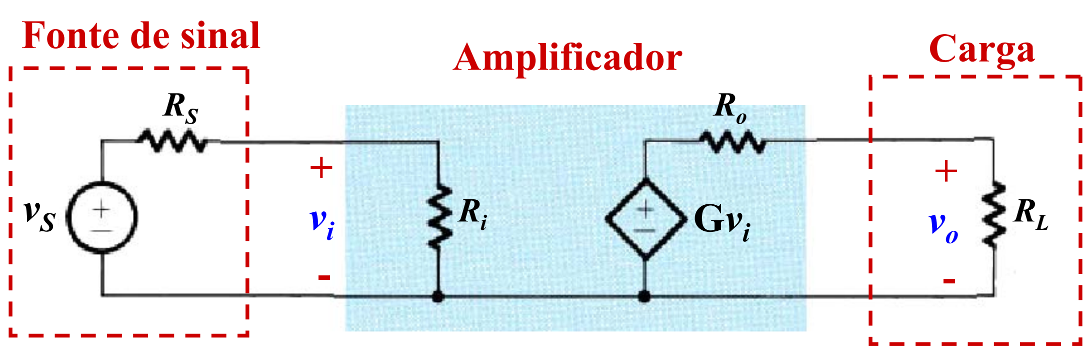
Cadeia de amplificação: equivalente de Thévenin

- **Substituindo cada um dos elementos da cadeia anterior pelo seu modelo, obtemos:**



- **No que se segue admitimos que o sinal a transferir da fonte de sinal para a carga é um *sinal em tensão*.**

Máxima eficiência…

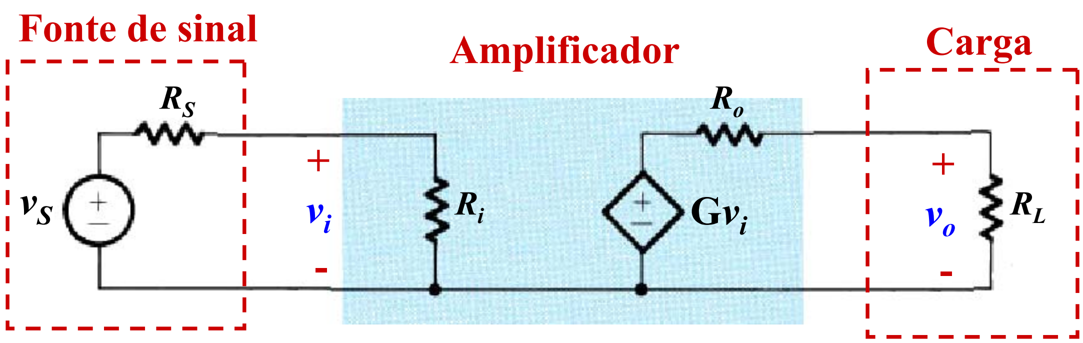


- **A máxima eficiência será conseguida se todo o sinal produzido pela fonte de sinal aparecer na entrada do amplificador. Ou seja se** $v_i = v_s$

- **… e se todo o sinal produzido pelo amplificador aparecer na resistência de carga. Ou seja se** $v_o = Gv_i$

Eficiência da entrada do amplificador

… mas não é isso que acontece!



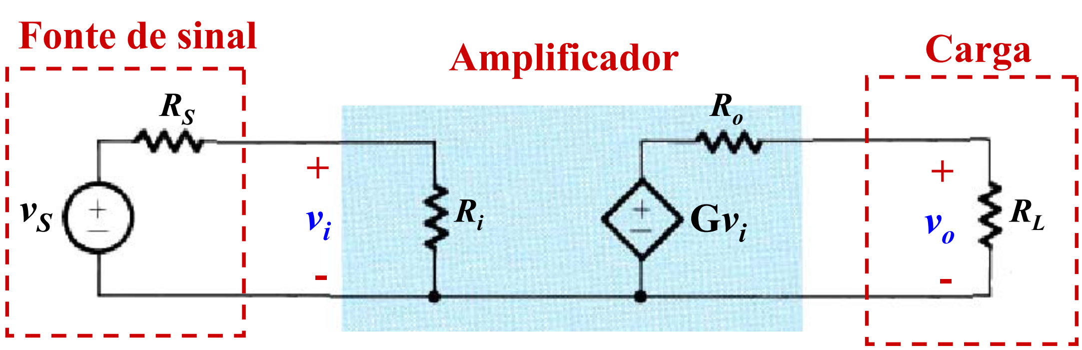
- **A tensão que aparece efectivamente entre os terminais de entrada do amplificador é:**

$$v_i = \frac{R_i}{R_i + R_S} v_S$$

- **Se $R_S = 100\Omega$ e $R_i = 500\Omega$, então:**

$$v_i = 0.83 v_S$$

Eficiência da entrada do amplificador



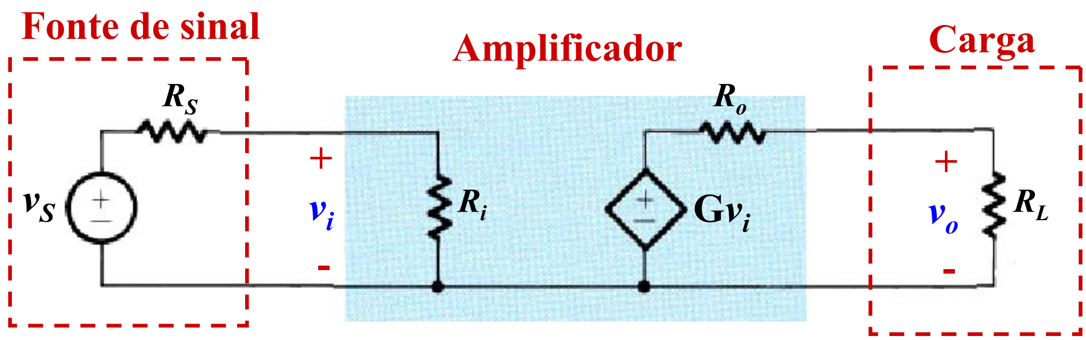
- **Para termos $v_i \approx v_s$, como é pretendido, precisamos de ter R_i muito elevado.**

Em concreto deveremos ter $R_i >> R_S$:

$$v_i = \frac{1}{1 + \frac{R_S}{R_i}} v_S \quad se \quad R_i >> R_S, \quad então \quad v_i \approx v_S$$

Eficiência da saída do amplificador

- O raciocínio que fazemos relativamente à saída do amplificador é idêntico:



- A tensão v_o que aparece efectivamente na resistência de carga, R_L, é:

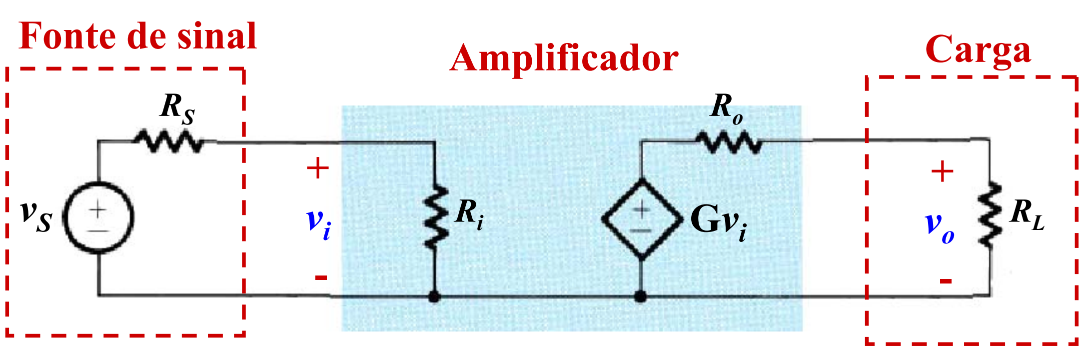
$$v_o = \frac{R_L}{R_L + R_o} G v_i$$

- Se $R_o = 10\Omega$ e $R_L = 1\Omega$, então:

$$v_o = 0.09 G v_i$$

- Estamos pois muito longe de ter $v_o = Gv_i$

Eficiência da saída do amplificador



- Para termos $v_o \approx Gv_i$, como pretendido, precisamos de ter R_o muito baixo.

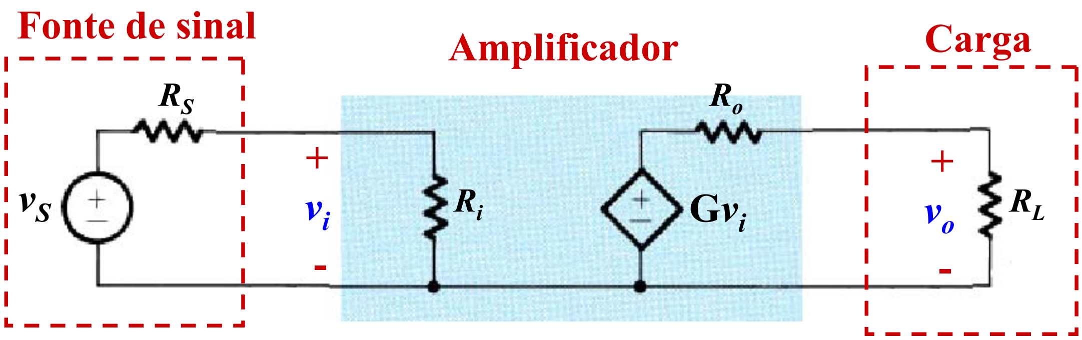
Em concreto deveremos ter $R_o << R_L$:

$$v_o = \frac{1}{1 + \frac{R_o}{R_L}} G v_i \quad se \quad R_o << R_L, \quad então \quad v_o \approx G v_i$$

Conclusão: Máxima eficiência do amplificador

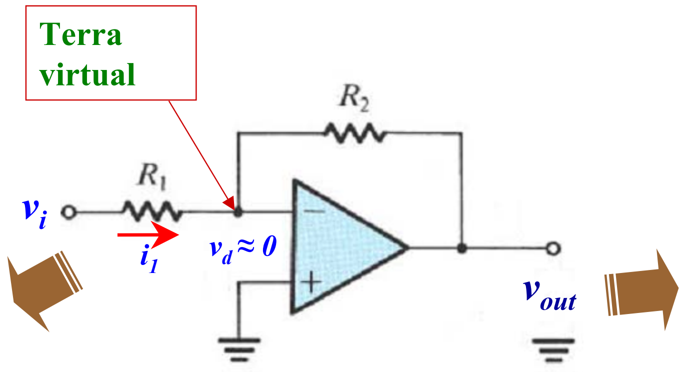
- **Para maximizar a eficiência do acoplamento de sinal na entrada e na saída, um amplificador de tensão deve apresentar:**

$$R_i >> R_S \quad e \quad R_o << R_L$$



Resistências de entrada (R_i) e de saída (R_o) das configurações inversora e não-inversora

R_i e R_o na configuração inversora



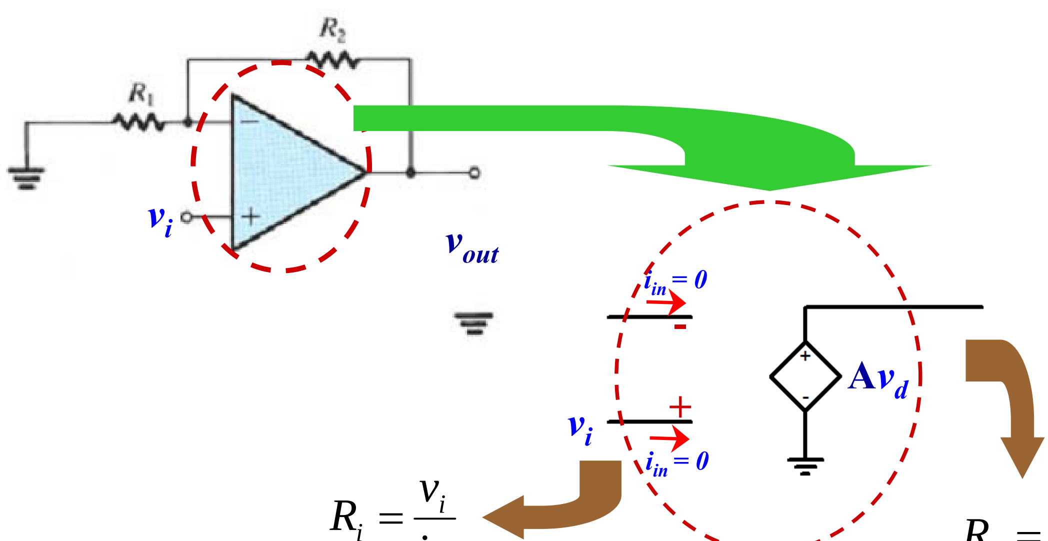
$$R_0 = 0$$

$$R_i = \frac{v_i}{i_1}$$

mas como $i_1 = \dfrac{v_i - v_d}{R_1} = \dfrac{v_i}{R_1}$

então $R_i = \dfrac{v_i}{i_1} = R_1$

R_i e R_o na configuração não-inversora



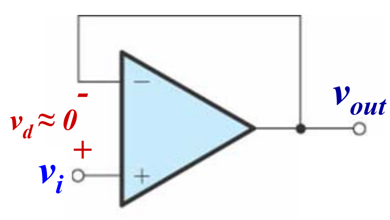
$$R_i = \frac{v_i}{i_{in}}$$

$$= \frac{v_i}{0} = \infty$$

$$R_0 = 0$$

Seguidor de tensão

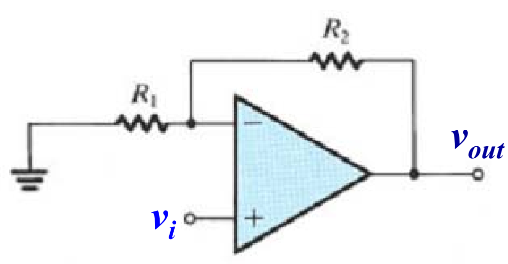
Seguidor de tensão ou *buffer*



$$v_{out} = v_i$$

- **Saída segue a entrada!**

- **Na realidade, este circuito é um caso particular da configuração não-inversora.**



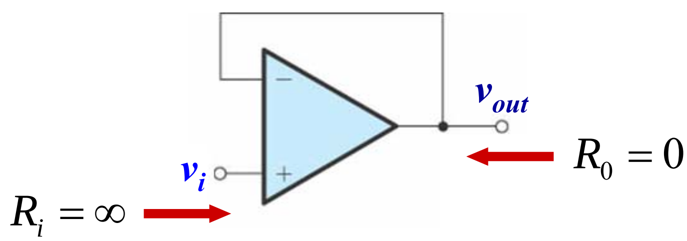
$$G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- **Se $R_1 = \infty$ e $R_2 = 0$…**

$$G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = 1$$

Seguidor de tensão

- **Mas que utilidade poderá ter um circuito com ganho = 1 ?**



- **Tal como a configuração não-inversora, este circuito também apresenta $R_i = \infty$ e $R_o = 0$, sendo útil quando queremos ligar um circuito com resistência de saída elevada a outro com resistência de entrada baixa.**

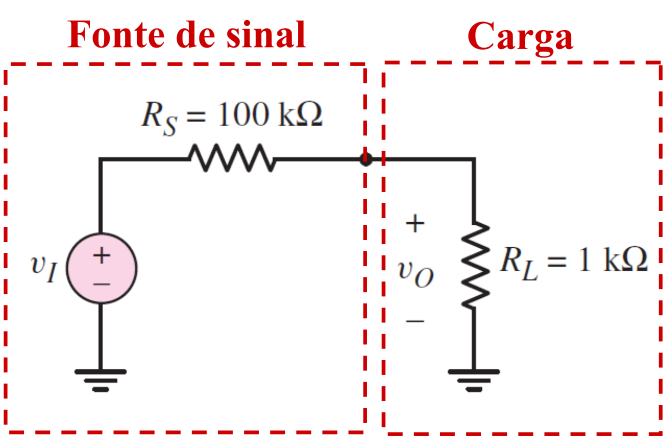
Utilidade do seguidor de tensão

- **Suponhamos uma fonte de sinal ligada a uma carga;**

- **Para conseguimos maximizar a eficiência do acoplamento entre a fonte e a carga (de forma a ter $v_o \approx v_i$), é necessário que:**

$$R_L >> R_S$$

o que não é o caso.

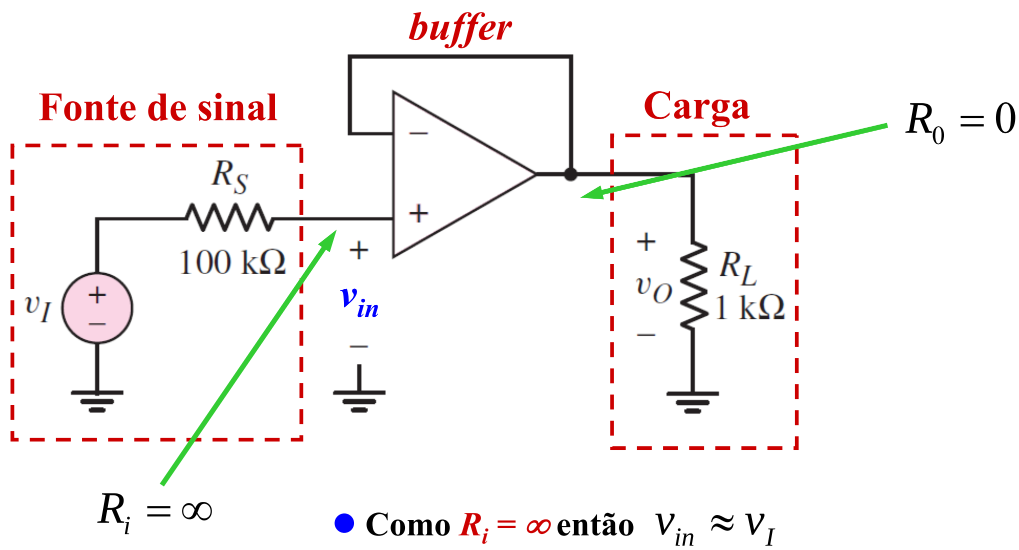


$$v_o = \frac{1K}{1K + 100K} v_I \approx 0.01 v_I$$

v_o vai ser apenas uma pequena fracção de v_i !

Utilidade do seguidor de tensão

- **Problema resolve-se com um *buffer* entre a fonte de sinal e a carga:**

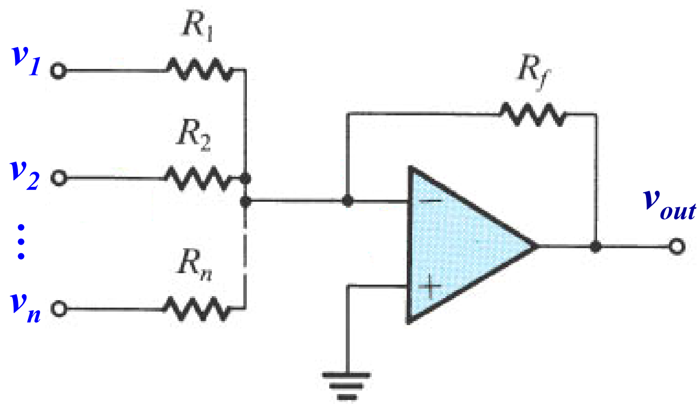


- **Como $R_i = \infty$ então** $v_{in} \approx v_I$

- **Como $R_0 = 0$ então** $v_0 \approx v_I$

Amplificador somador

Amplificador somador



$$v_{out} = K_1 v_1 + K_2 v_2 + \ldots + K_n v_n$$

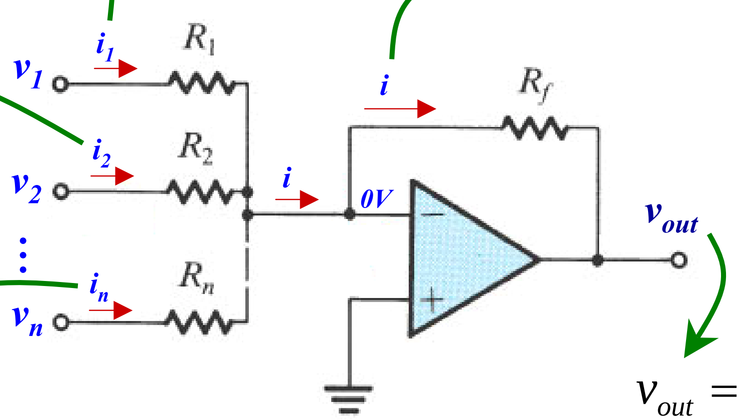
- **Saída é uma soma ponderada das tensões de entrada.**

Amplificador somador

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}$$

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2}$$



$$i_n = \frac{v_n}{R_n}$$

$$v_{out} = -R_f i$$

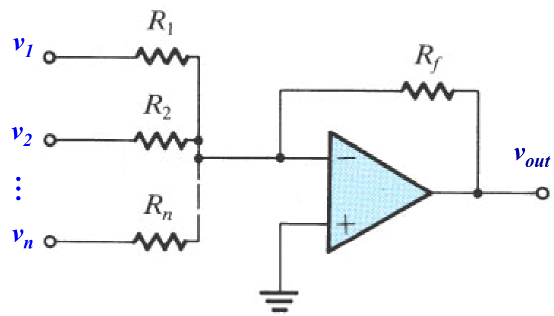
Amplificador somador

- Conjugando as expressões anteriores obtemos

$$v_{out} = -\left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \ldots + \frac{R_f}{R_n} v_n \right)$$

- Saída é portanto a soma ponderada dos sinais de entrada;

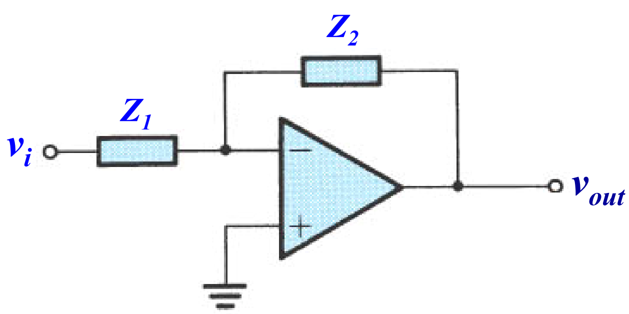
- Coeficientes de cada entrada podem ser ajustados individualmente.



Amplificadores integrador e diferenciador

Configurações inversoras com impedâncias

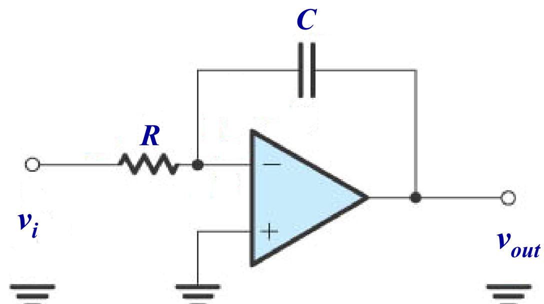
- **Se substituirmos, na configuração inversora, as resistências R_1 e R_2 por impedâncias (de condensadores ou bobinas) obtemos amplificadores com ganho dependente da frequência.**



$$G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Configuração integradora

- **Aqui a resistência de *feedback* R_2 é substituída por um condensador.**
- **A tensão de saída é proporcional ao integral do sinal de entrada.**



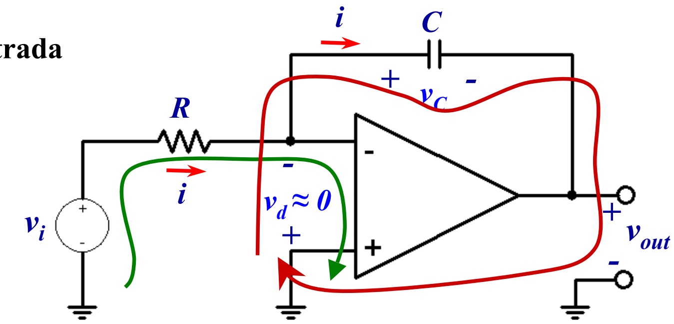
$$v_{out} \propto \int_0^t v_i dt$$

Análise da configuração integradora

- **Aplicando KVL à malha de entrada**

$$-v_i + R.i + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{v_i}{R}$$



- **Para a malha de saída:**

$$v_C + v_{out} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{out} = -v_C = -\left(\frac{1}{C}\int_0^t i dt + v_C(0)\right)$$

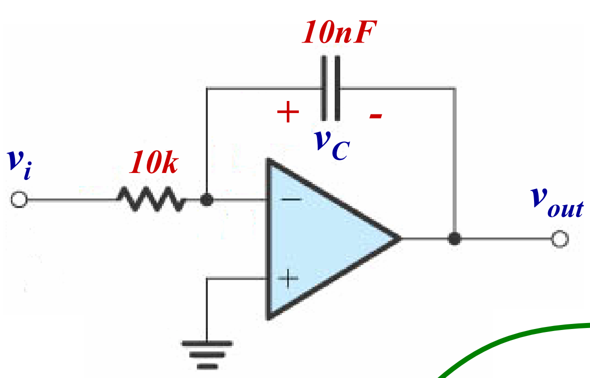
- **Substituindo a equação anterior**

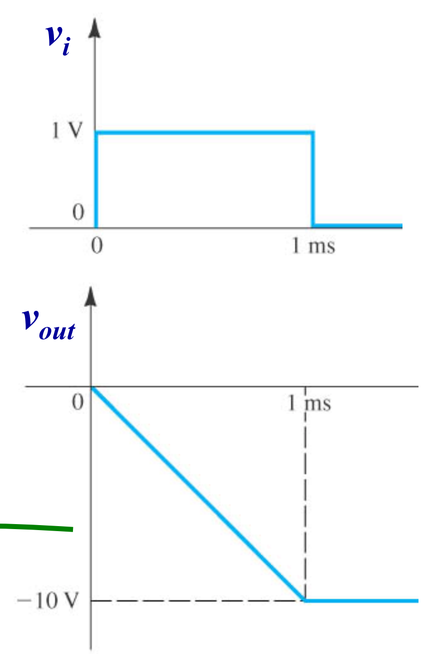
$$v_{out} = -\left(\frac{1}{RC}\int_0^t v_i dt + v_C(0)\right)$$

- **RC** **é a** ***constante de tempo de integração*****.**

Configuração integradora

- **Uma aplicação: conversão de ondas quadradas em triangulares.**

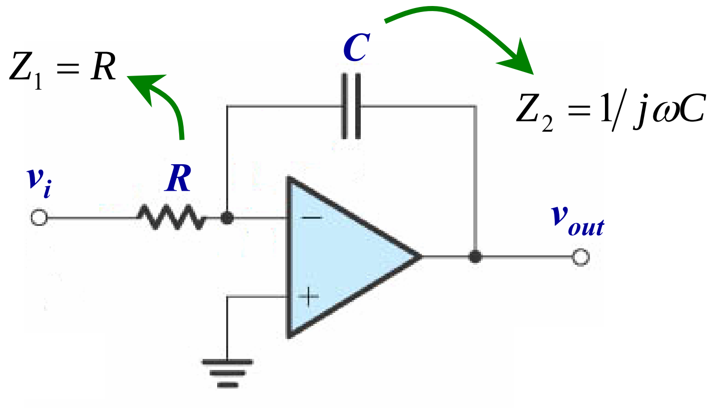




$$v_{out} = -10^4 \int_0^t v_i dt$$

Assumindo $v_C(0) = 0V$

Configuração integradora

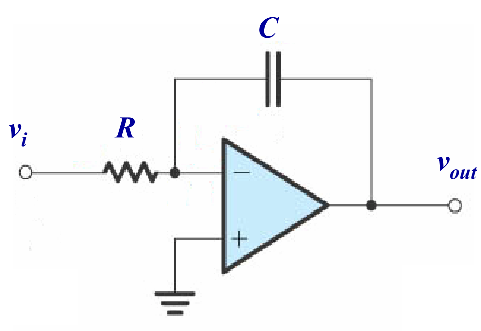


$$\frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

$$\frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{1}{j\omega CR}$$

- **Ganho do circuito diminui com a frequência - circuito é um filtro passa baixo;**
- **Ganho é unitário para $\omega_1 = 1/RC$.**

Configuração integradora



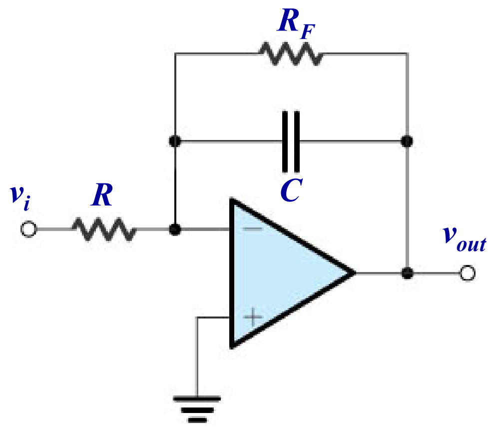
$$\frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{1}{j\omega CR}$$

$$\left|\frac{v_{out}}{v_i}\right|_{\omega=0} = \frac{1}{\omega CR}_{\omega=0} = \infty$$

- **Em DC ($\omega = 0$) o ganho do integrador é infinito (condensador é um circuito aberto).**
- **Ou seja, qualquer tensão DC na entrada, por pequena que seja, produz, mais tarde ou mais cedo, a saturação da saída.**

Configuração integradora

- **Para evitar este problema é costume usar-se o integrador com uma resistência de valor elevado em paralelo com o condensador.**



- **Agora o ganho em DC é**

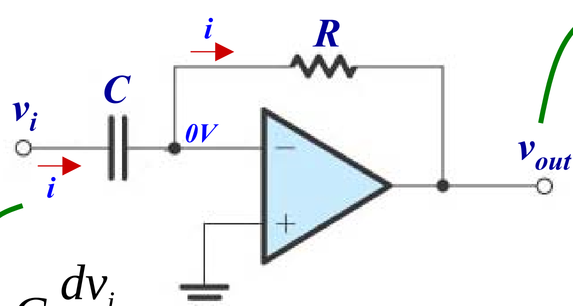
$$\left|\frac{v_{out}}{v_i}\right|_{\omega=0} = \frac{R_F}{R}$$

- **… no entanto, assim, o integrador já não é ideal.**

Configuração diferenciadora

- **Trocando a resistência e o condensador obtemos um circuito que produz uma saída proporcional à derivada do sinal de entrada.**

$$v_{out} = -Ri = -RC\frac{dv_i}{dt}$$



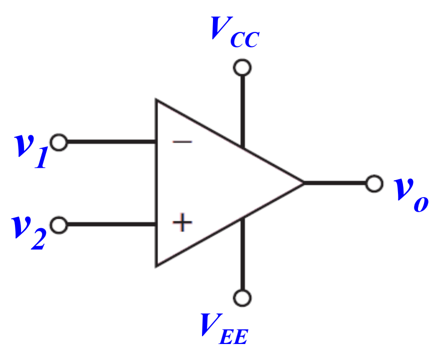
$$i = C\frac{dv_i}{dt}$$

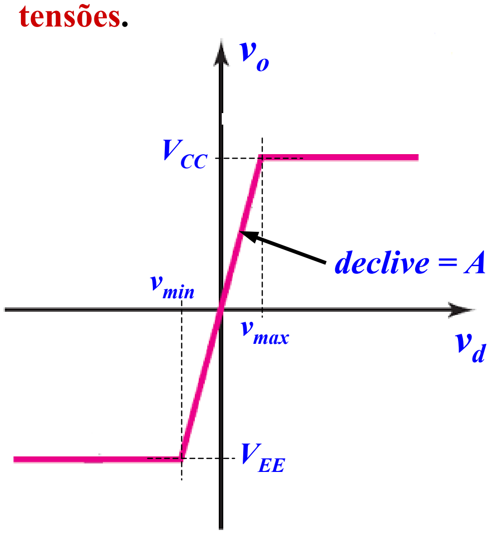
$$v_{out} = -RC\frac{dv_i}{dt}$$

OpAmp como comparador

Comparador

- **Devido ao ganho muito elevado, um OpAmp pode ser usado em loop aberto (sem feedback) como comparador de tensões.**





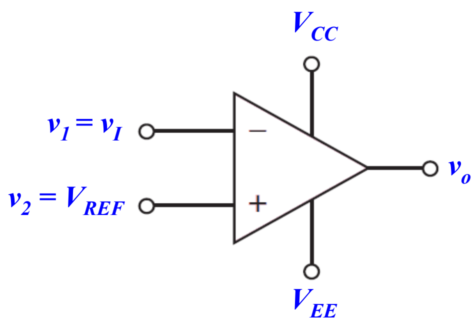
Se: $V_{CC} = -V_{EE} = 15V$

$A = 10^5$

$$v_{\max} - v_{\min} = \frac{30}{10^5} = 0.3mV$$

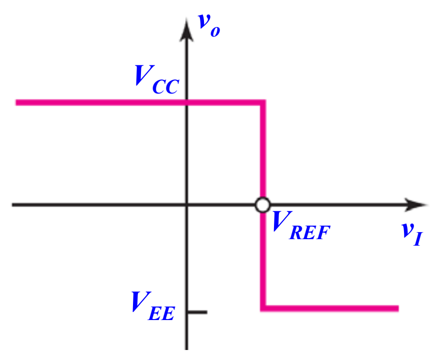
- **Portanto a região linear pode considerar-se quase vertical.**

Comparador



$$v_0 = \begin{cases} V_{CC} & \text{se } v_I < V_{REF} \\ V_{EE} & \text{se } v_I > V_{REF} \end{cases}$$

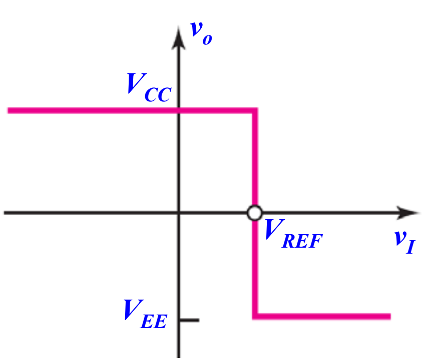
● **Circuito tem uma saída binária resultante da comparação das duas tensões de entrada.**



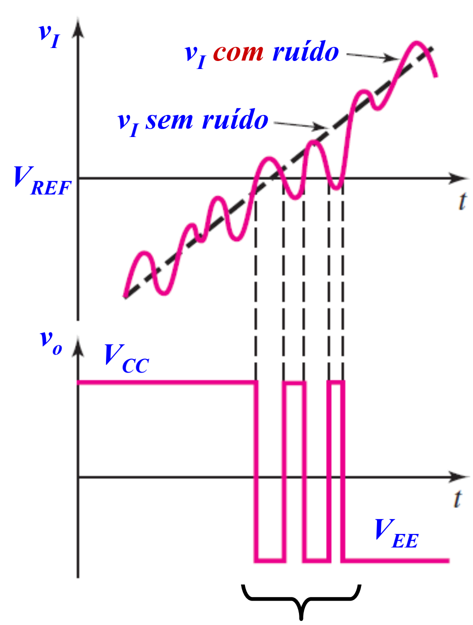
NOTA: assumindo que as tensões de saturação são V_{CC} e V_{EE}, o que nem sempre acontece!

Comparador com *feedback* regenerativo

● **Os comparadores em loop aberto não são aconselhados quando o sinal v_I têm muito ruído.**



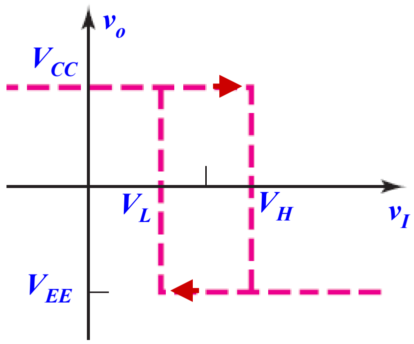
● **Isto pode acontecer, por exemplo, se o sinal v_I vier dum sensor de temperatura.**



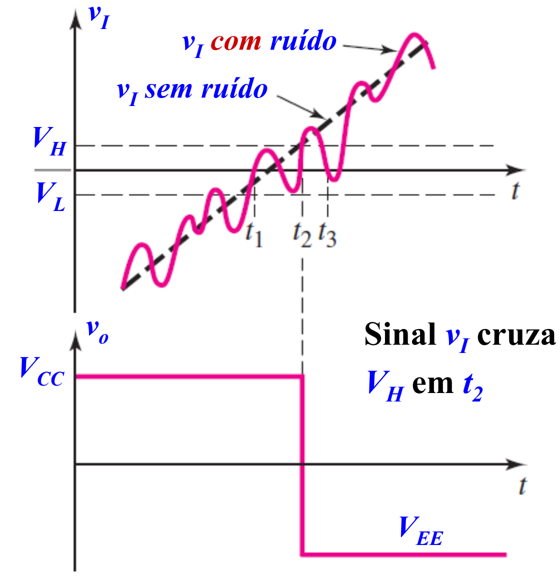
efeito indesejado!

Comparador com *feedback* regenerativo

- **Precisamos dum comparador com dois níveis de comparação:**
  V_H – quando v_I sobe;
  V_L – quando v_I desce



V_H - V_L : histerese

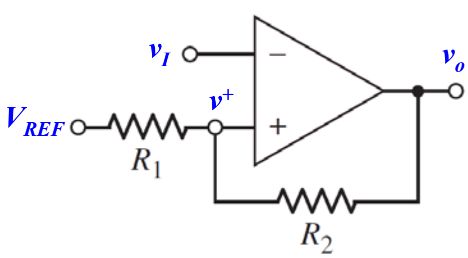


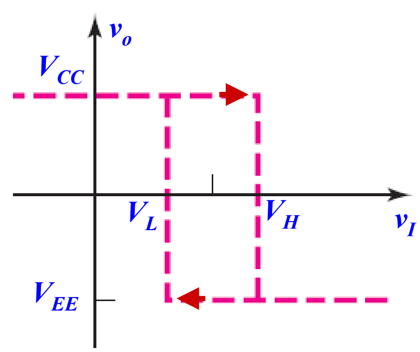
Sinal v_I cruza V_H em t_2

Assim temos uma comutação *limpa*!

Comparador com *feedback* regenerativo

- **Este comparador obtém-se usando feedback positivo. A tensão de comparação depende do estado da saída.**





- **V_H e V_L obtêm-se por Sobreposição...**

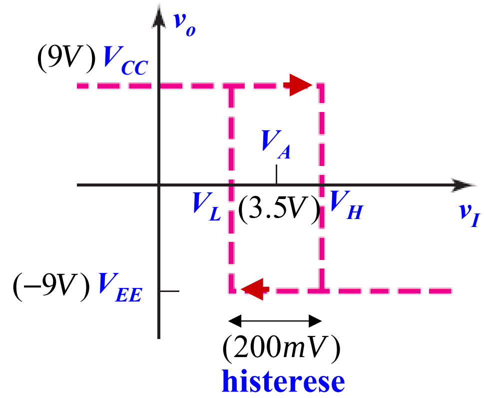
$$v^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$

$$\boxed{V_H = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC}}$$

$$\boxed{V_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{EE}}$$

Comparador com *feedback* regenerativo - projeto

- **Pretendemos obter a característica com os valores indicados.**



Dos resultados anteriores...

$$V_H - V_L = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(V_{CC} - V_{EE}\right)$$

donde se tira $R_2/R_1 = 89$

e.g. $R_2 = 82K + 6K8;\quad R_1 = 1K$

$$V_A = \frac{V_H + V_L}{2}$$

Usando as expressões anteriores: $V_A = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF}$

donde $V_{REF} = \left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right) V_A = \left(1 + \dfrac{1}{89}\right) 3.5 = 3.54V$

Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 7: Díodos e Aplicações

Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

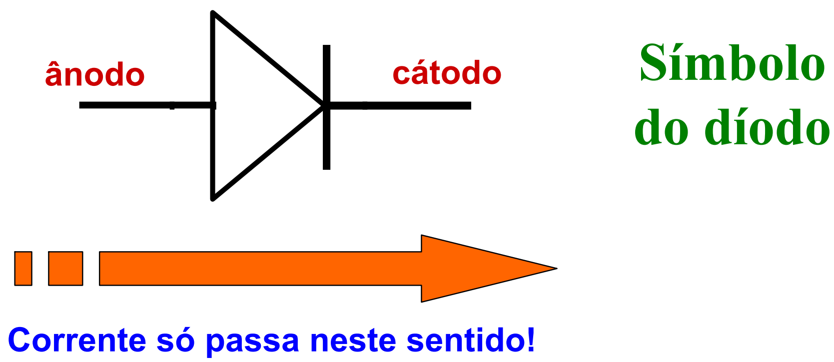
Sumário

- **Introdução;**
- **Fundamentos físicos do díodo;**
- **Junção *pn* em equilíbrio, inversamente e directamente polarizada;**
- **Característica corrente/tensão do díodo;**
- **Parâmetros mais importantes do díodo – valores típicos;**
- **Modelos simplificados para análise de circuitos;**
- **Rectificadores: meia onda; onda completa; filtragem;**
- **Díodo Zener e aplicações;**
- **Díodo LED e foto-díodo.**

Introdução

- O díodo é o componente electrónico (não linear) mais simples;

- Distingue-se por conduzir apenas num sentido: a aplicação mais comum é em circuitos de rectificação.

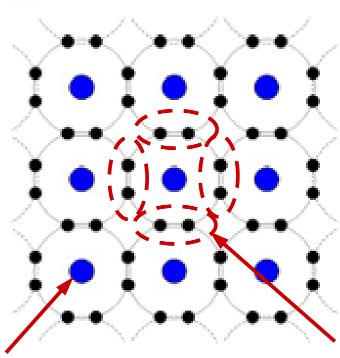


Fundamentos físicos do díodo

Semicondutores

- **Elementos com *4* electrões de valência, e.g. *silício*;**
- **Valores de condutividade entre a dos isoladores e a dos condutores.**

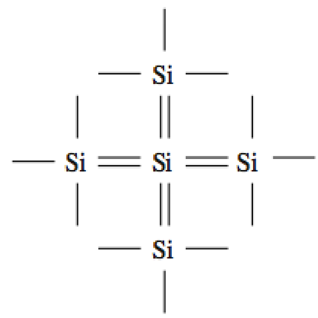
Estrutura cristalina do *silício intrínseco* (representação 2D)



núcleo atómico

Cada átomo de *Si* liga-se a 4 átomos vizinhos através duma ligação covalente

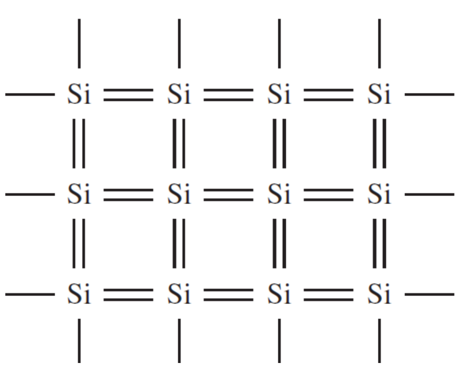
Representação simplificada



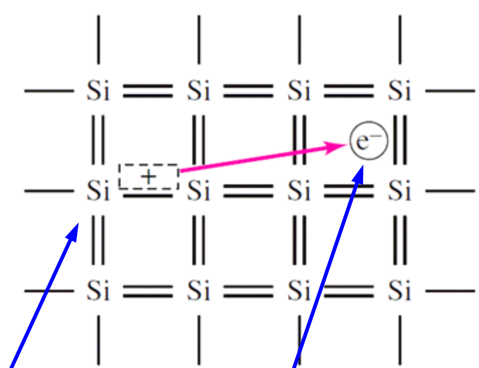
Semicondutores

- **A *0 Kelvin* o Si não tem electrões livres – condutividade é zero;**
- **Temperatura rompe algumas ligações, gerando electrões livres.**

T = 0K



T = 300K



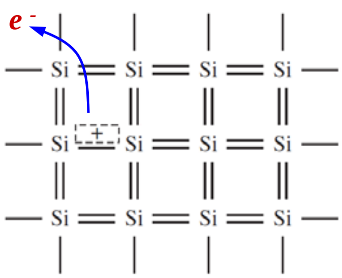
ião positivo

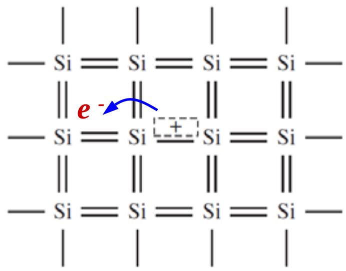
electrão livre

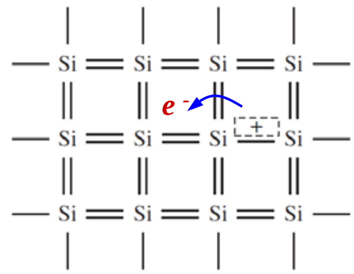
Semicondutores

- **Semicondutores distinguem-se dos condutores por terem dois tipos de portadores de corrente:**
  - **Electrões (cargas negativas);**
  - **Lacunas (cargas positivas).**

Criação de uma lacuna





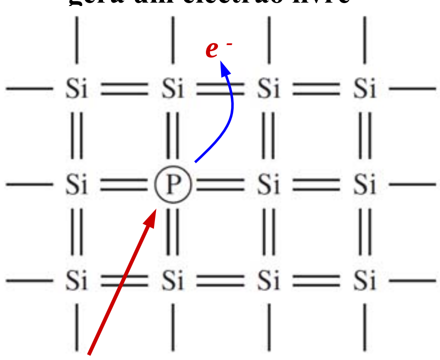


Sempre que um electrão salta de uma ligação covalente para uma lacuna, deixa uma carga positiva: é como se a lacuna se deslocasse.

Dopagem

- **Para aumentar a condutividade, o silício é *dopado*, ou seja misturado com outros elementos.**

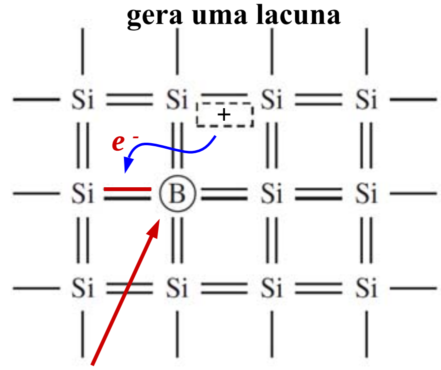
Dopagem com elemento com *5 electrões de valência* (e.g fósforo - P) gera um electrão livre



ião positivo

Silício tipo *n*

Dopagem com elemento com *3 electrões de valência* (e.g boro - B) gera uma lacuna

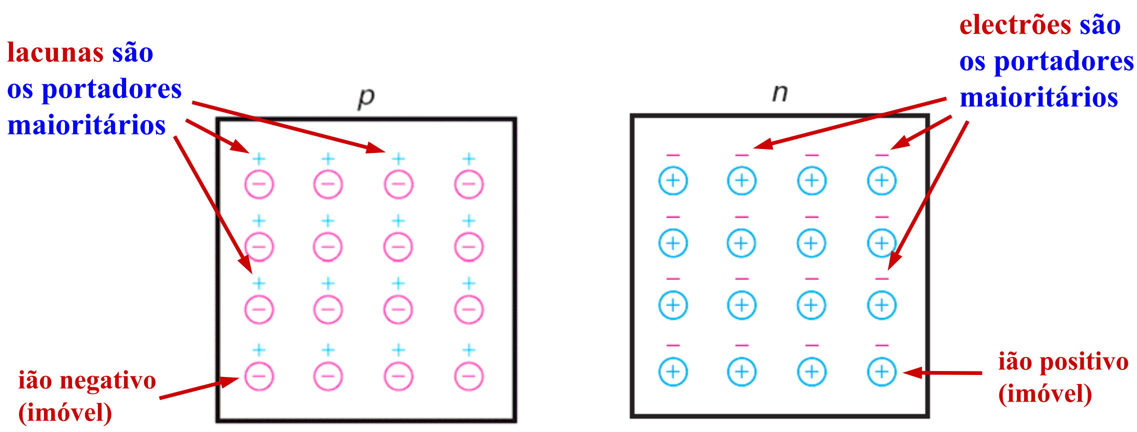


ião negativo

Silício tipo *p*

Semicondutores do tipos *n* e *p*

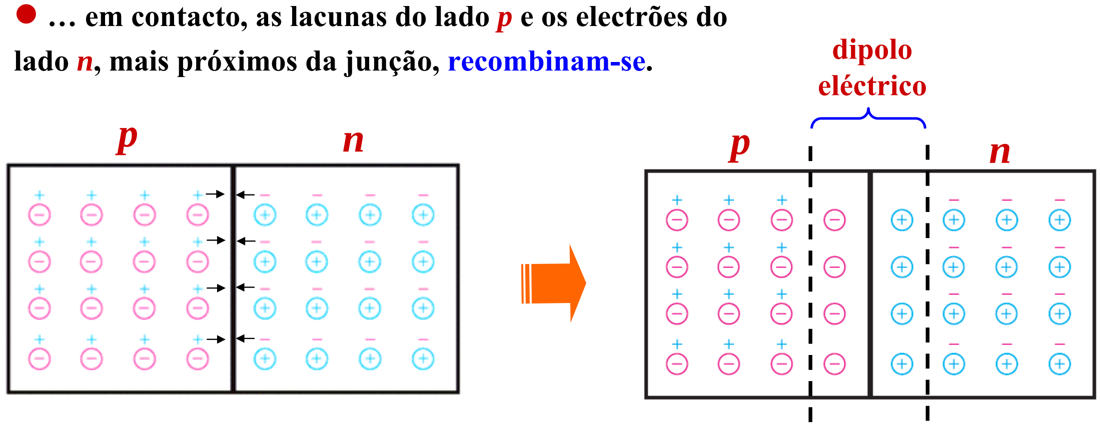
- **Um semicondutor do tipo *n* ou *p* tem apenas melhor condutividade que uma semicondutor intrínseco.**



- **A *magia* acontece quando os dois tipos de semicondutor entram em contacto, formando um *díodo de junção*…**

A junção *pn*

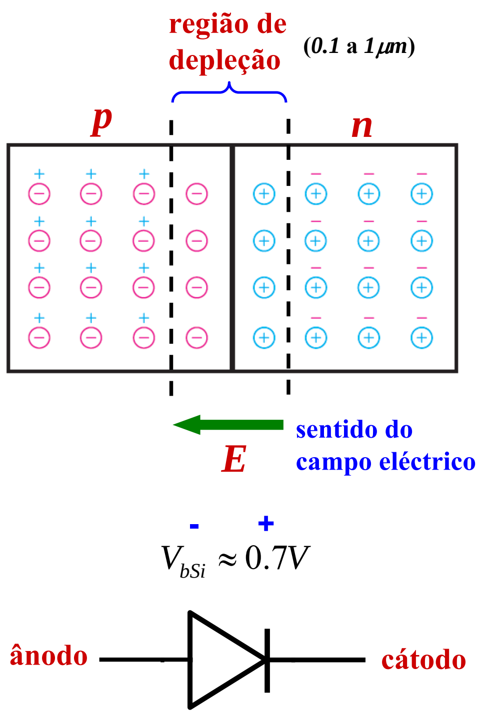
- **… em contacto, as lacunas do lado *p* e os electrões do lado *n*, mais próximos da junção, recombinam-se.**



- **Os iões próximos da junção deixam de estar electricamente *cobertos*, criando um dipolo eléctrico;**

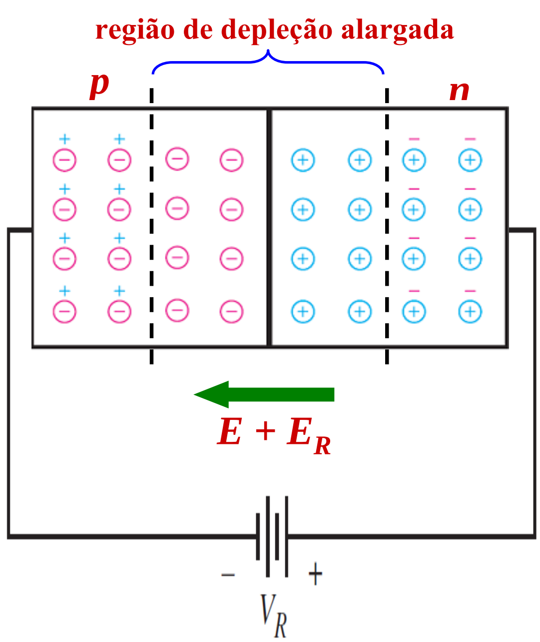
- **Este dipolo opõem-se ao movimento de lacunas de $p \rightarrow n$ e electrões de $n \rightarrow p$.**

A junção *pn* em equilíbrio



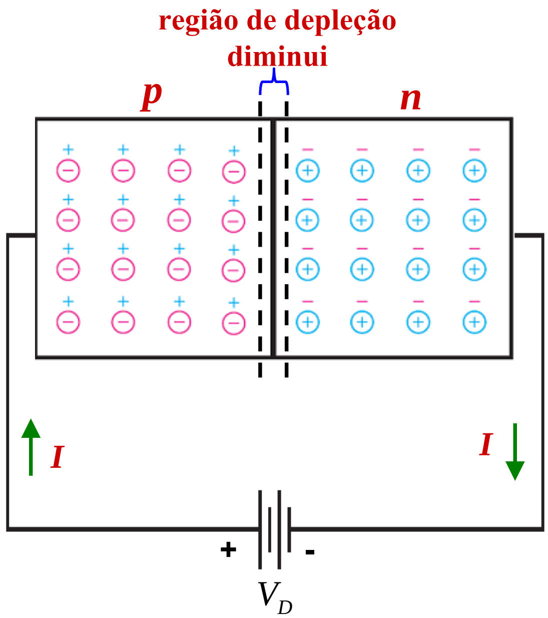
- A região do dipolo chama-se *de depleção* porque está vazia de cargas móveis;
- O dipolo estabelece um *campo eléctrico, E* que trava a difusão de electrões e lacunas através da junção;
- À diferença de potencial do dipolo chamamos *potencial de barreira*, V_b;
- No silício o valor do potencial de barreira é tipicamente de *0.7V*.
- A junção *pn* é um *díodo*…

A junção *pn* polarizada inversamente



- O + da fonte externa atrai electrões e o – atrai lacunas, aumentando o numero de iões a descoberto;
- A carga total na região de depleção aumenta, ou seja a largura desta aumenta;
- A barreira de potencial aumenta (de V_b para $V_b + V_R$) e os portadores não passam;
- O díodo não conduz!

A junção *pn* polarizada directamente



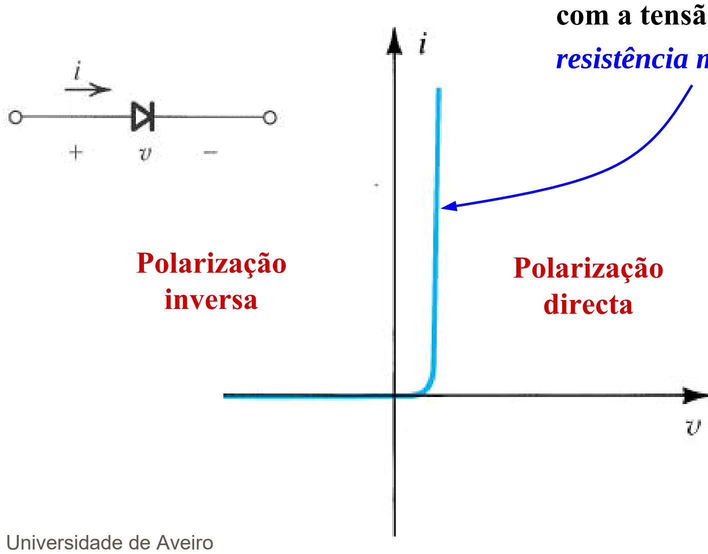
- O + da fonte externa repele lacunas em direcção à junção; o – repele electrões também em direcção à junção;
- Se V_D for superior ao potencial de barreira (V_b) a região de depleção quase desaparece;
- Electrões e lacunas conseguem atravessar sem dificuldade a região de depleção;
- O díodo conduz!

Característica corrente/tensão do díodo

Característica corrente-tensão

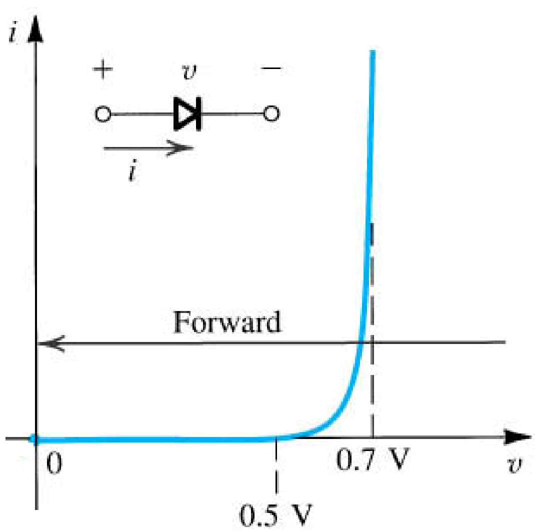
- **Duas regiões principais de funcionamento:**
  - **Polarização inversa: $v < 0$;**
  - **Polarização directa: $v > 0$.**

- **Corrente i sobre rapidamente com a tensão $v \Rightarrow$ díodo tem *resistência muito baixa* ($< 1\Omega$).**



Polarização directa

- **Nesta região, a corrente cresce *exponencialmente* com a tensão sendo dada aproximadamente por**



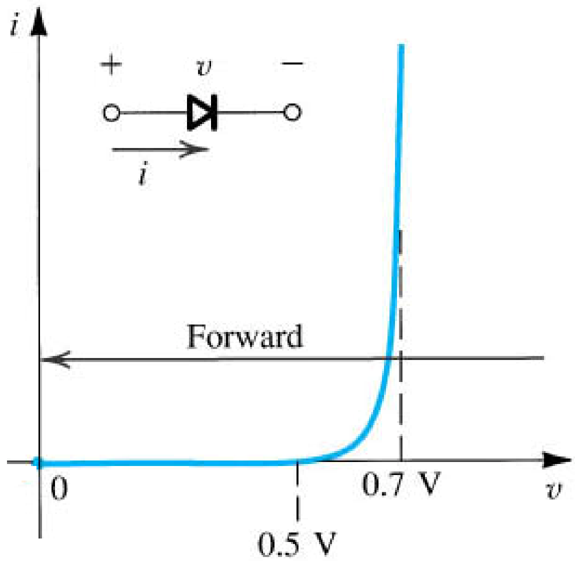
$$i = I_S\left(e^{v/nV_T} - 1\right)$$

I_S – corrente de saturação inversa (para díodos de sinal: $10^{-15}A$);

V_T – tensão térmica: $25mV$ a $20ºC$;

n – coeficiente de emissão: constante empírica de valor entre 1 e 2.

Polarização directa – observações importantes



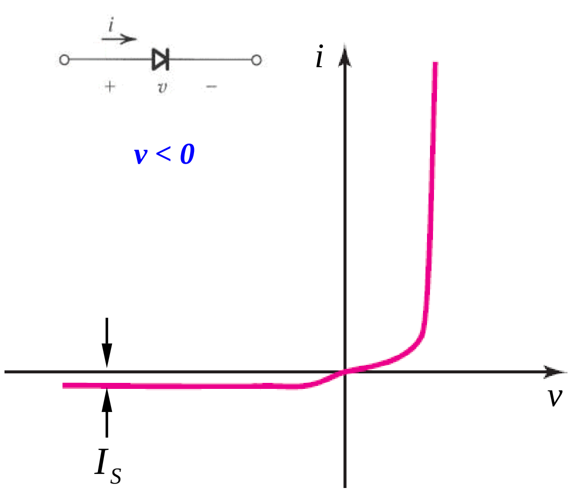
- **Devido à característica exponencial, abaixo de *0.5V* o díodo quase não conduz. Esta é a *tensão de cut-in*;**

- **Em condução normal, a tensão *v* varia em apenas *0.12V* (*n* = 2) por cada década (10x) de variação de *i*;**

- **Em condução normal, o valor típico de *v* é entre *0.6* e *0.8V*;**

- **Valores típicos para um díodo de sinal. Díodos de potência exibem valores mais elevados de tensão de condução.**

Polarização inversa



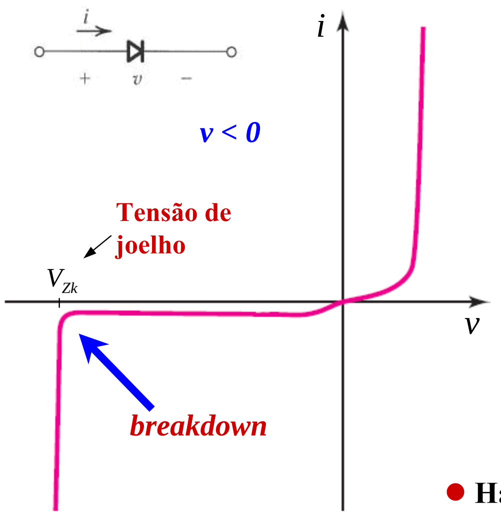
- **Para valores negativos de *v*, bastante inferiores a nV_T, a corrente *i* é dada por**

$$i = I_S\left(e^{v/nV_T} - 1\right) \approx -I_S$$

que é a *corrente de saturação inversa* da junção, da ordem dos $10^{-15}A$, (bastante insensível a *v*)

- **Na prática, a corrente inversa é bastante maior (da ordem do *nA*) por causa das correntes de fuga pela superfície do díodo.**

Região de *breakdown*



- Campo eléctrico elevado causa um aumento súbito da corrente;
- Dois mecanismos de *breakdown*:
  - *Efeito Zener*: $V_{zk} < 5V$
  - *Avalanche*: $V_{zk} > 7V$
- Ocorre em todos os díodos – circuito externo deve limitar a corrente no díodo;
- Há díodos especificamente desenhados de forma a funcionar na região de *breakdown* – os díodos Zener.

Características de díodos comuns

1N4148
(díodo *de sinal*)

1N4007
(díodo *de potência*)

Características		1N4148	1N4007
V_F	Tensão directa @ 10mA @ 1A	 *0.7V*	 *0.6V* *1.1V*
$I_{F(max)}$	Corrente directa máxima	*0.3A*	*1A*
$V_{R(max)}$	Tensão inversa máxima	*75V*	*1000V*
$I_{R(max)}$	Corrente inversa máxima @ 25ºC @ 100ºC	*10nA*	*5μA* *50μA*
$P_{(max)}$	Potência máxima dissipada	*0.5W*	*3W*

Modelos simplificados do díodo

Modelos do díodo para análise de circuitos

- **Exponencial – baseado na relação exponencial *i(v)*. É o mais preciso mas também o mais difícil de usar.**

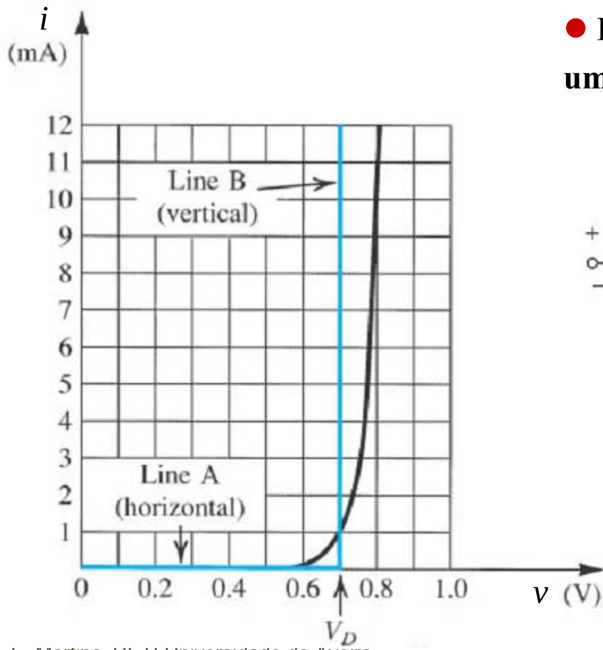
- **Na prática, os modelos que se usam são:**

  - **Tensão constante;**

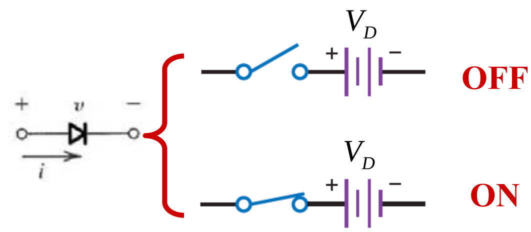
  - **Ideal.**

Modelo de tensão constante

- Curva *i(v)* do díodo é simplificada para uma linha vertical – **despreza-se r_D**;



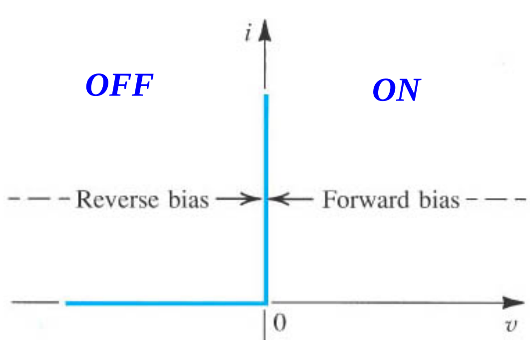
- Em condução, o díodo apresenta uma tensão **V_D constante (*0.7V*)**;

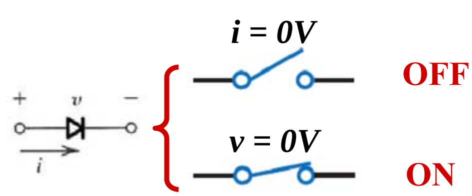


- É o modelo mais popular para análise rápida manual. É um dos que iremos usar mais.

Modelo ideal

- Considera que o díodo é um interruptor ideal com $V_F = 0V$;





- Válido só em aplicações com tensões muito maiores que as tensões normais de condução do díodo;

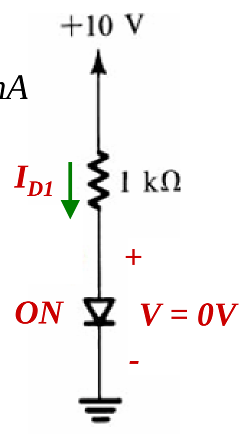
- Útil numa primeira análise de circuitos com vários díodos.

Modelo ideal

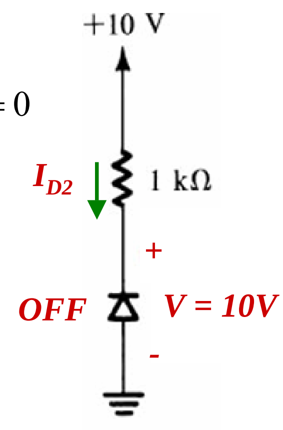
- **Díodo *on*;**
- **Tensão no díodo é *0V*;**
- **Corrente é limitada apenas pela resistência.**

- **Díodo *off*;**
- **Corrente no díodo é *0A*;**
- **Tensão inversa do díodo é a tensão de alimentação.**

$$I_{D1} = \frac{10-0}{1K} = 10mA$$



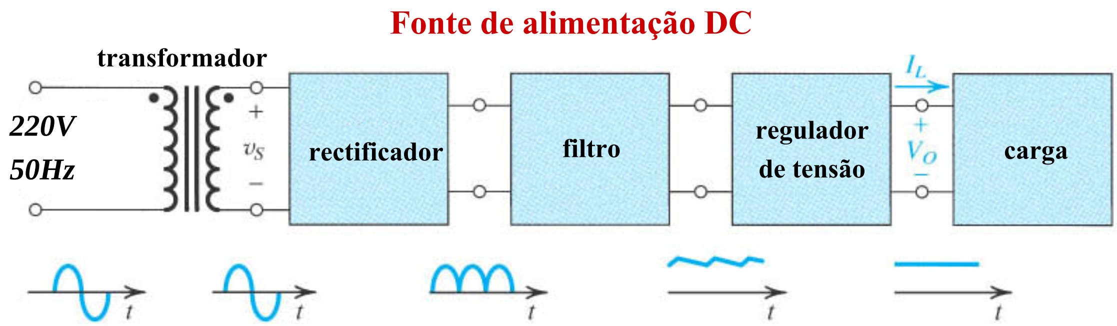
$$I_{D2} = 0$$



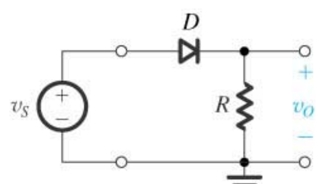
Rectificadores

Rectificadores

- **É uma das aplicações práticas mais importantes dos díodos;**

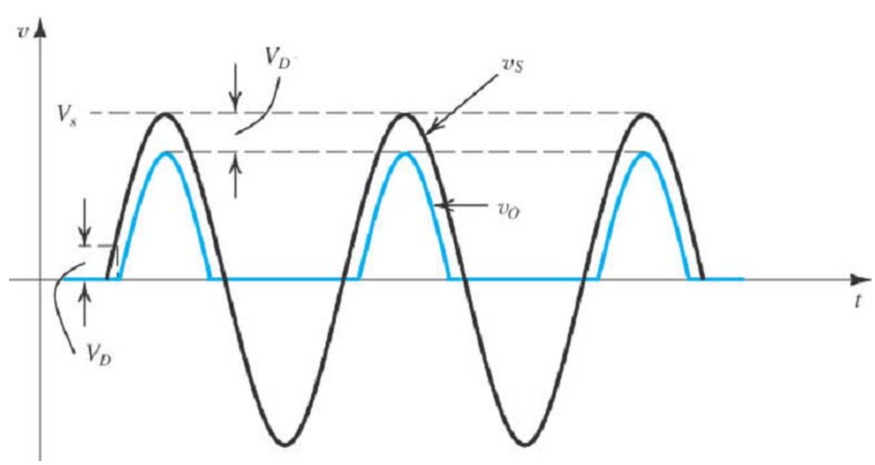


Rectificador de meia onda

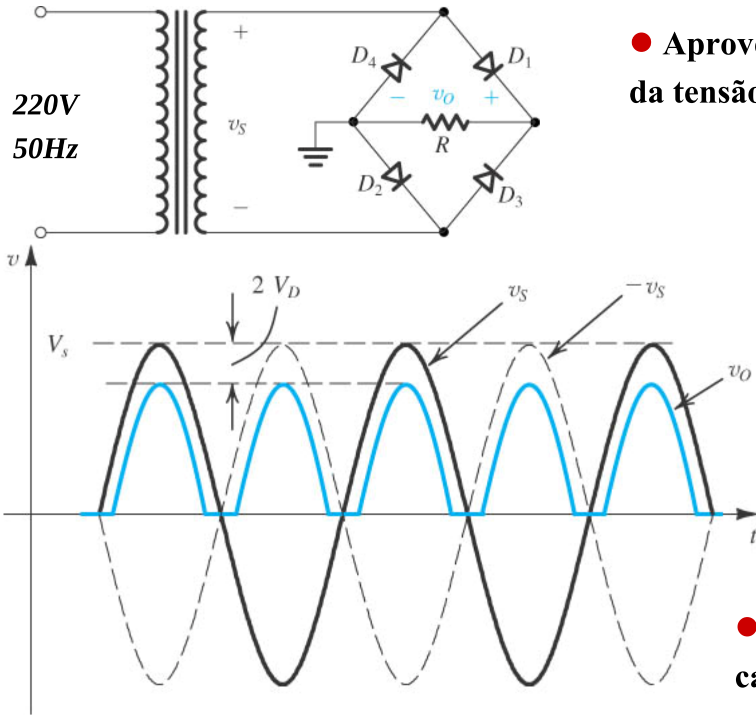


- **A tensão v_0 segue v_s (a menos de V_D) nas arcadas positivas:**

$$v_0 \approx v_S - V_D$$

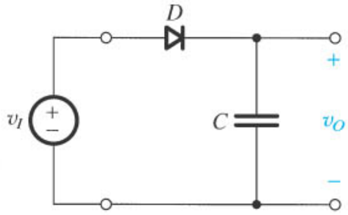


Rectificador de onda completa – em ponte

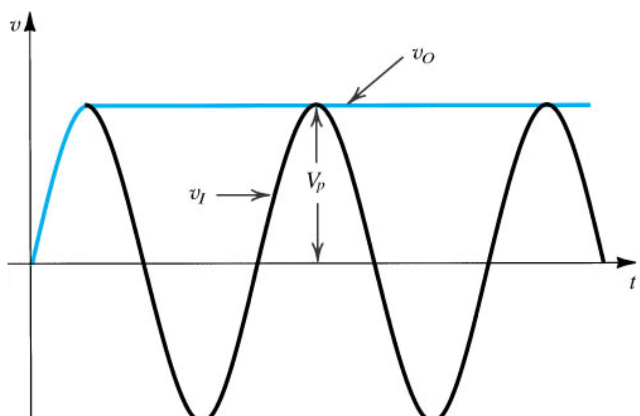


- Aproveita ambas as arcadas da tensão sinusoidal.
- Quando v_s é positivo apenas D_1 e D_2 conduzem;
- Quando v_s é negativo apenas D_3 e D_4 conduzem;
- A tensão de saída é, neste caso, reduzida em $2V_D$;

Rectificador de meia onda com filtragem



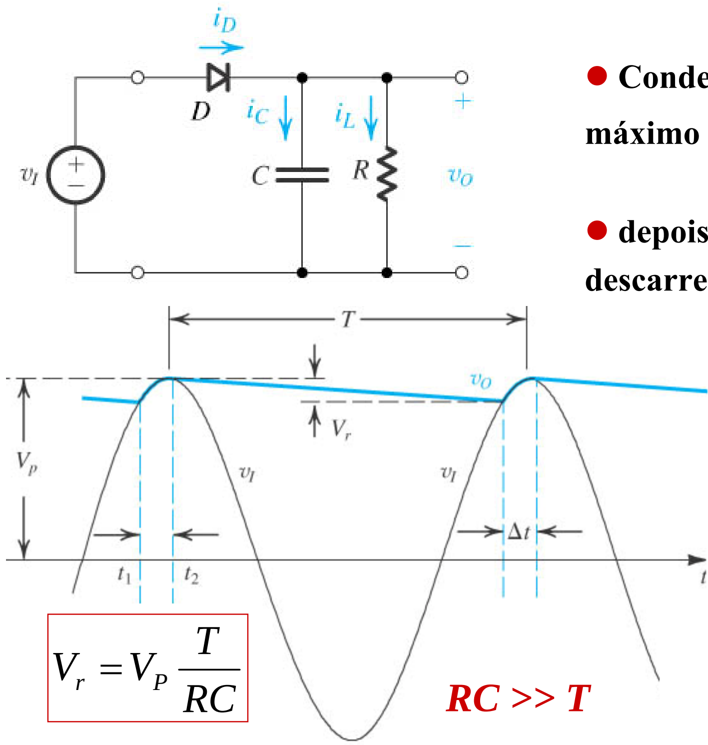
- Condensador carrega na primeira arcada positiva; depois não tem por onde descarregar.



- A tensão v_o é puramente DC, mas apenas porque não temos carga na saída.

Assumimos aqui um díodo ideal com $V_D = 0V$

Rectificador de meia onda com filtragem



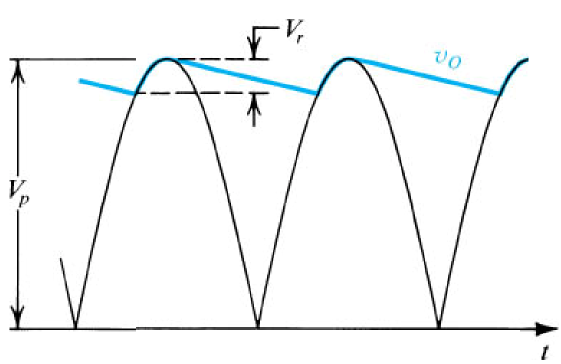
$$V_r = V_P \frac{T}{RC}$$

RC >> T

- **Condensador carrega até ao valor máximo V_P;**
- **depois D corta e o condensador descarrega sobre R;**
- **D volta a conduzir quando v_I ultrapassa a tensão no condensador;**
- **Quando maior C menor será a ondulação residual – a tensão de *ripple*, V_r.**

Rectificador de onda completa com filtragem

- **Neste caso a frequência de *ripple* é o dobro da frequência do sinal sinusoidal**



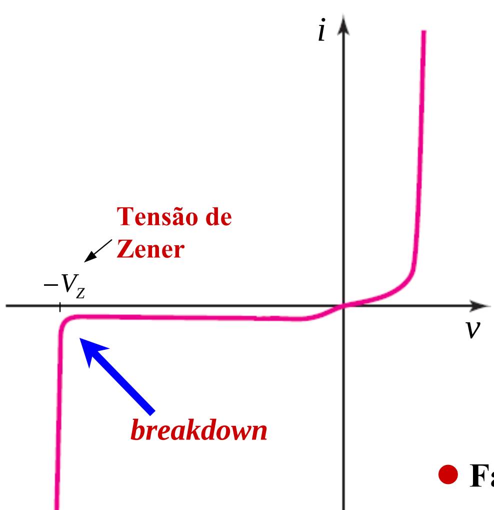
- **A expressão para V_r é**

$$V_r = V_P \frac{T}{2RC}$$

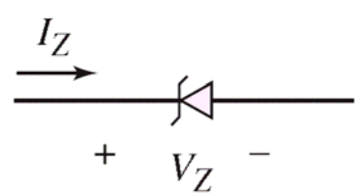
- **Para o mesmo valor de *ripple* o condensador pode ter metade do valor. A corrente no díodo é menor.**

Díodos Zener e aplicações

Díodo Zener



- **Díodos especialmente concebidos para operar na região de *breakdown*.**

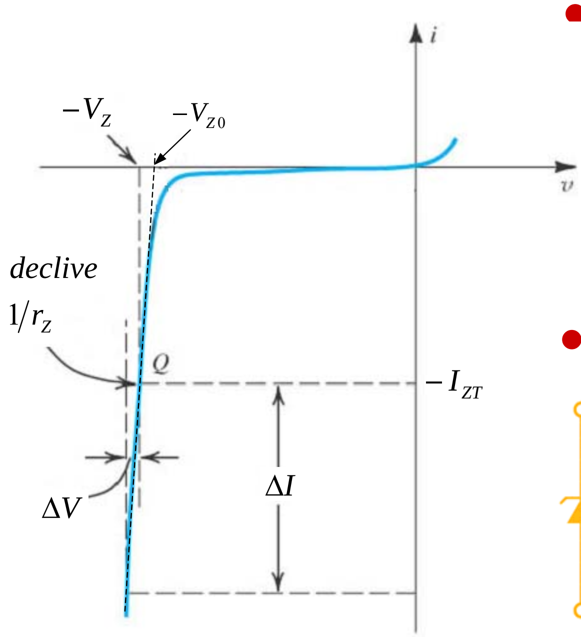


- **Valor de V_Z é determinado pelo grau de dopagem das regiões *n* e *p*;**

- **Fabricados com valores padrão de V_Z entre *2V* e centenas de *Volt*;**

- **O facto de V_Z variar muito pouco com a corrente, torna o zener útil para *regular tensões*, e.g. atenuar o *ripple* duma tensão (rectificada).**

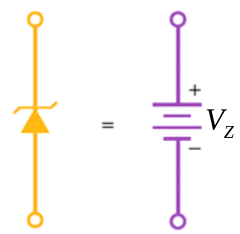
Díodo Zener - modelos



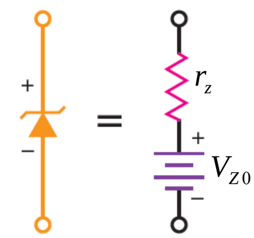
$\Delta V = r_Z \Delta I$

- **Características importantes:**
  - V_Z: **Especificado para uma dada corrente de teste** I_{ZT};
  - r_Z: ***Resistência dinâmica*****, igual ao inverso do declive na região de** ***breakdown*****.**

- **Modelos do zener:**



Tensão constante



Linear

Características tipícas de díodos zener - exemplo

Série BZX79- **Valores desde *2.1* a *75V***

BZX79-XXX	V_Z (V)	r_Z (Ω)	I_{ZT} (mA)
3V3	3.3	85	5
5V1	5.1	40	5
6V8	6.8	6	5
12	12	10	5
24	24	25	5

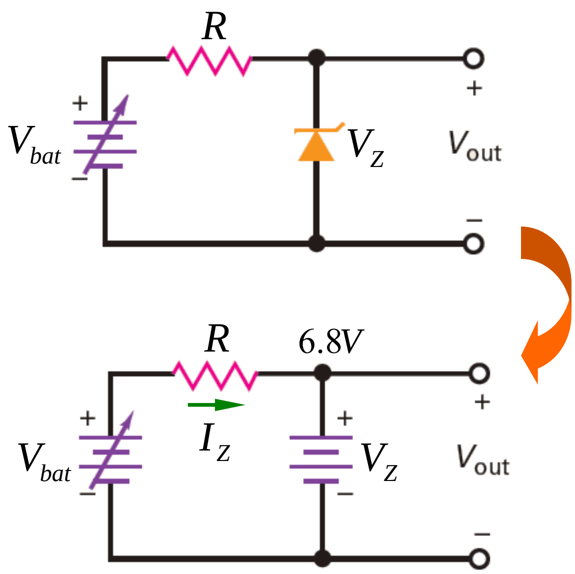
$V_F = 0.9V$ @ $10mA$;

$P_{max} = 0.5W$;

$I_{Zmax} = P_{max} / V_Z$

Aplicação 1: Zener como regulador de tensão

- **A partir duma bateria de automóvel, cuja tensão pode variar entre *13.8V* e *10.5V*, queremos gerar uma tensão constante de *6.8V*.**



$$10.5V \leq V_{bat} \leq 13.8V$$

$$V_Z = 6.8V \quad \Rightarrow \textbf{Zener BZX79-6V8}$$

A corrente I_Z deve ser o mais próxima possível de $I_{ZT} = 5mA$.

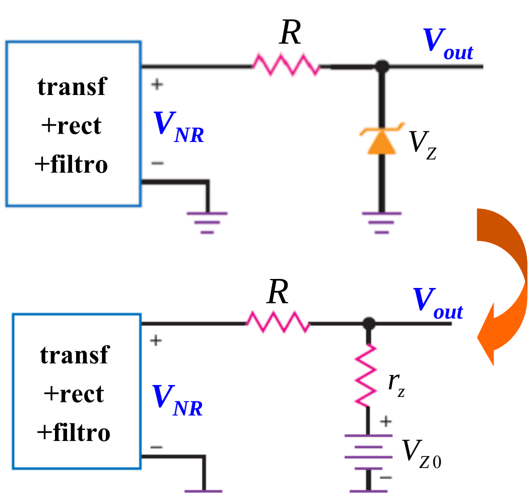
Tomando o valor médio de V_{bat} :

$$\overline{V_{bat}} = (10.5 + 13.8)/2 = 12.2V$$

$$R = \frac{\overline{V_{bat}} - V_Z}{I_{ZT}} = \frac{12.2 - 6.8}{5} \approx 1K$$

Aplicação 2: Zener como redutor de *ripple*

- **A partir duma tensão não regulada (V_{NR}) de *18V*, com *1V* de *ripple*, pretendemos gerar uma tensão regulada de $V_{out} = 10V$.**



$$V_{NR}: \; V_P = 18V; V_r = 1V$$

$$V_Z = 10V \quad \Rightarrow \textbf{Zener BZX79-10}$$

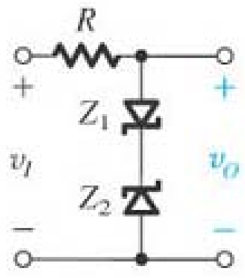
Valor de R, supondo $I_{ZT} = 5mA$:

$$R = \frac{17.5 - 10}{5} = 1.5K\Omega$$

O *ripple* em V_{out} calcula-se usando o valor tabelado $r_z = 10\Omega$:

$$V_{r\_out} = V_r \frac{r_z}{r_z + R} = 6.6mV$$

Aplicação 3: Zener como limitador (*clipper*)



Se o valor de v_I for baixo, tal que

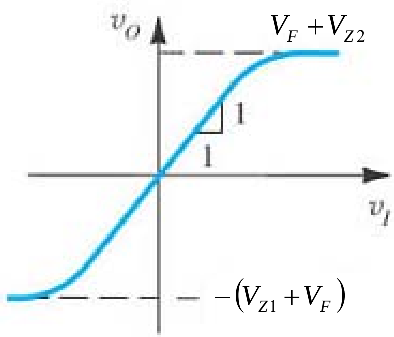
$$-(V_{Z1}+V_F) < v_I < (V_F+V_{Z2}) \quad \Rightarrow v_0 \text{ acompanha } v_I$$

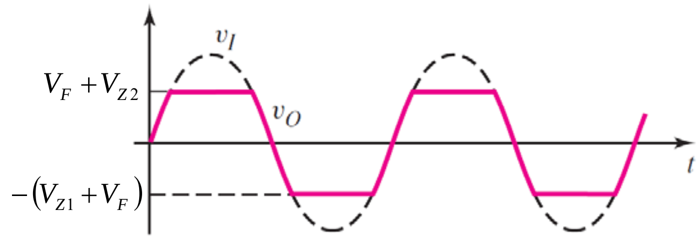
Se v_I for elevado a ponto de Z_1 e Z_2 conduzirem…

$\Rightarrow v_0$ fica limitado superiormente a V_F+V_{Z2}

Se v_I baixar a ponto de Z_1 e Z_2 conduzirem…

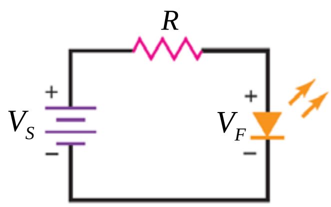
$\Rightarrow v_0$ fica limitado inferiormente a $-(V_{Z1}+V_F)$



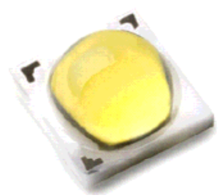


Díodo LED e fotodíodo

Díodo LED (*Light-Emitting Diodes*)

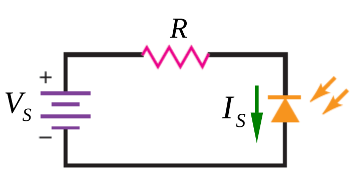


- **A recombinação de electrões e lacunas nos semicondutores usados (e.g GaAs, GaP) resulta na emissão de fotões: *electroluminescência*;**
- **A cor da luz (λ) depende dos dopantes usados e pode ser visível ou não (IR);**
- **Tensão directa, V_F, depende muito da cor do LED, variando de *1.7* (vermelho) a *3.3V* (azul);**
- **Disponíveis em potências de *mW* até *Watts* (LEDs usados em iluminação).**

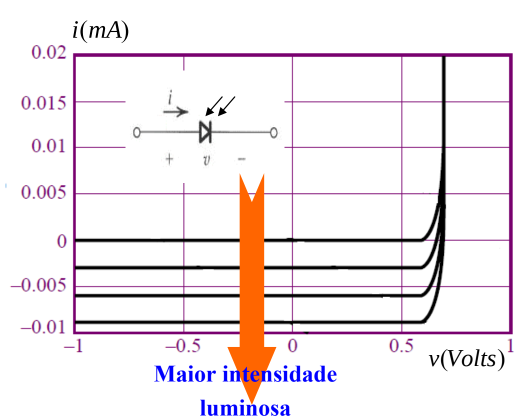


Fotodíodo

Fotodíodo do tipo SFH213



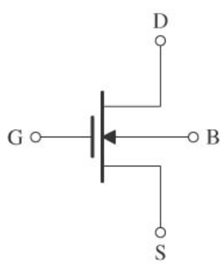
- **Funcionam em polarização inversa;**
- **Fotões incidentes na região de depleção geram pares electrão-lacuna (*foto-ionização*), aumentando a corrente inversa, I_S, do díodo;**
- **Usados como detectores/medidores de intensidade luminosa.**



Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 8: O transístor MOS

(parte 1)



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

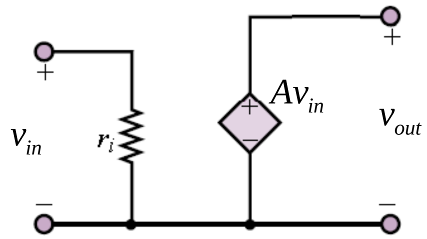
- **Introdução;**
- **Estrutura física e funcionamento do MOSFET;**
- **Modelo quadrático do NMOS e MOSFET de canal *p*;**
- **MOSFET em DC;**
- **MOSFET como amplificador.**

Introdução

O que é um transístor?

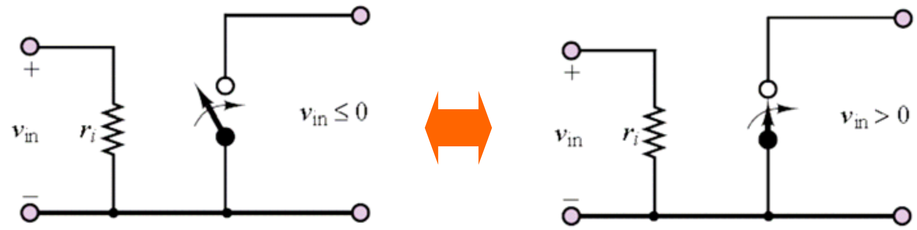
- **Dispositivo semicondutor que pode funcionar como:**

Amplificador



$$v_{out} = Av_{in}$$

Interruptor electrónico



Introdução

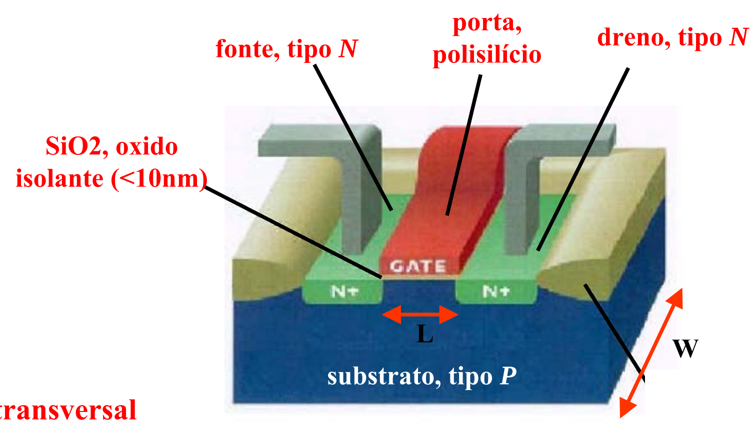
- **Transístores são dispositivos de 3 terminais.**
- **Duas grandes famílias:**
  - **transístores bipolares, ou *BJT*;**
  - **transístores de efeito de campo, ou *FET*.**

- **De entre os transístores do tipo FET, o MOSFET (*Metal-Oxide Semiconductor Field-Effect Transistor,* também chamado de IGFET), é o dispositivo mais importante. É o dispositivo base de mais de *99%* dos circuitos integrados digitais.**

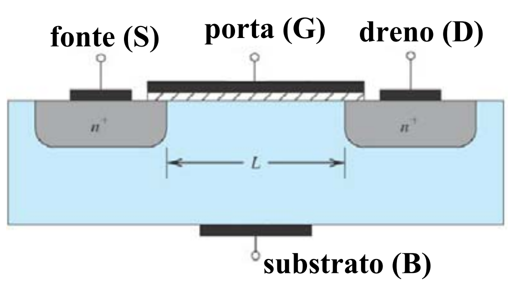
Estrutura física e funcionamento do MOSFET

Estrutura do MOSFET de canal *N*

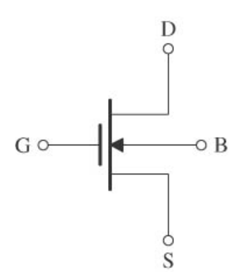
- **Dispositivo simétrico: dreno é, por convenção, o terminal de maior tensão ($I_{DS} > 0$);**
- **Substrato é ligado à tensão mais baixa do circuito (em geral, GND).**



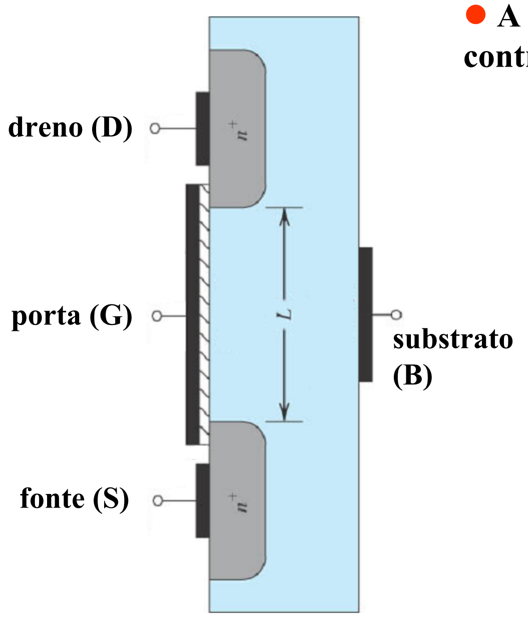
Representação em corte transversal



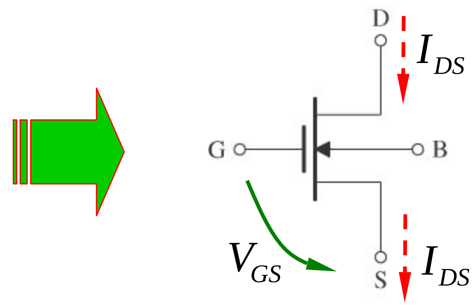
simbolo:
Transístor NMOS



Funcionamento



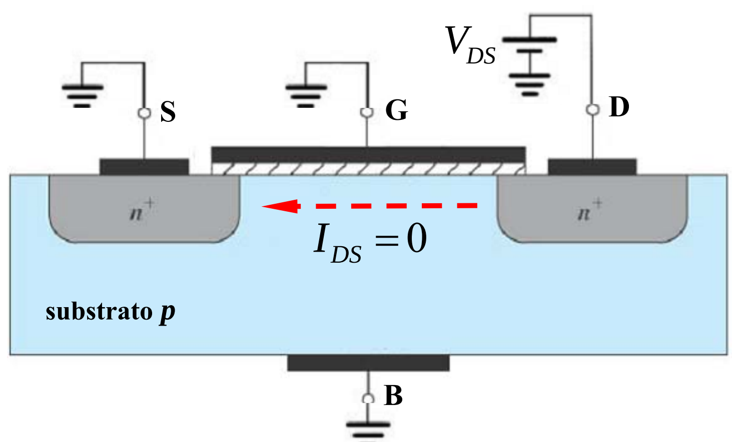
- A tensão aplicada entre Porta e Fonte controla a corrente entre Dreno e Fonte.



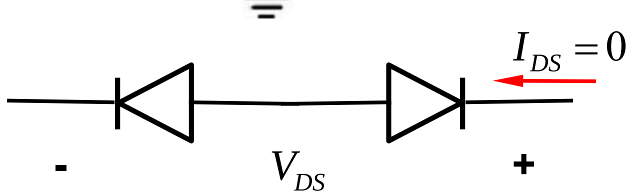
Vejamos como isso é possível.

Funcionamento

- Se $V_{GS} = 0$ então $I_{DS} = 0$.



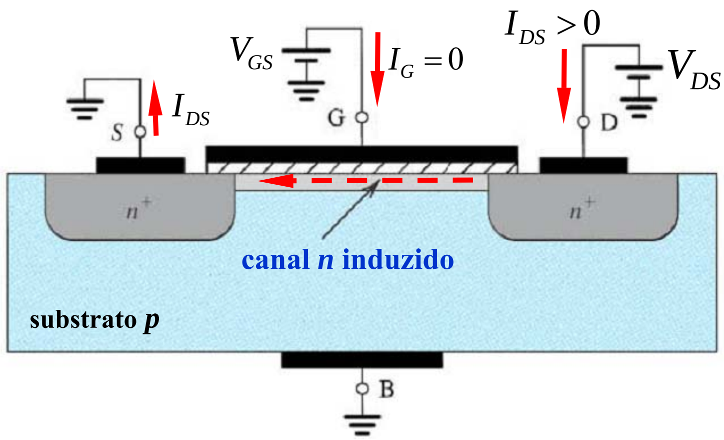
- Entre dreno e fonte temos duas junções p-n em oposição: não pode haver condução.



Funcionamento

- Se $V_{GS} \geq V_T$ então $I_{DS} > 0$.

- Tensão positiva na porta repele lacunas para baixo, criando zona de carga negativa correspondente aos iões receptores que ficam a 'descoberto';

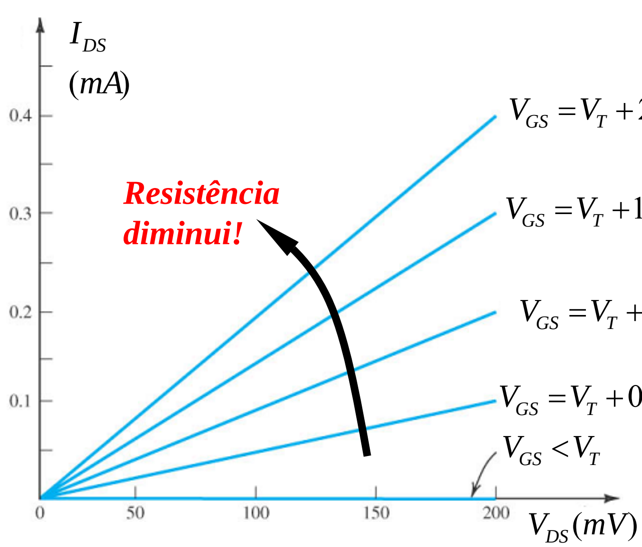


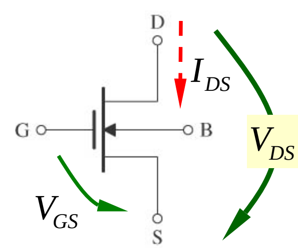
- Quando V_{GS} ultrapassa a *tensão de limiar*, V_T, o campo eléctrico vertical torna-se suficiente para atrair electrões livres das regiões da fonte e do dreno para a região debaixo da porta, criando o canal de inversão que é condutor.

Funcionamento

- Se $V_{GS} \geq V_T$ e V_{DS} pequeno

- Declive de $I_{DS} = f(V_{DS})$ aumenta com V_{GS} : MOSFET funciona como uma resistência controlada por tensão;

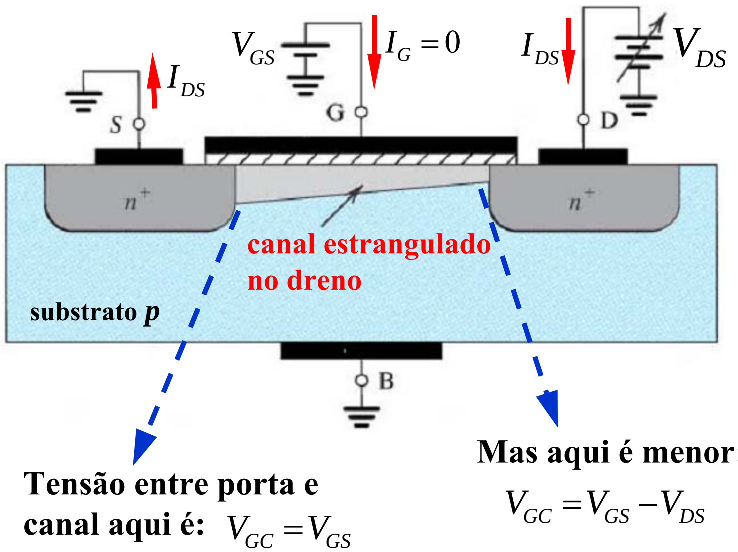




- Nestas condições diz-se que o MOSFET está a funcionar na *região linear*.

Funcionamento

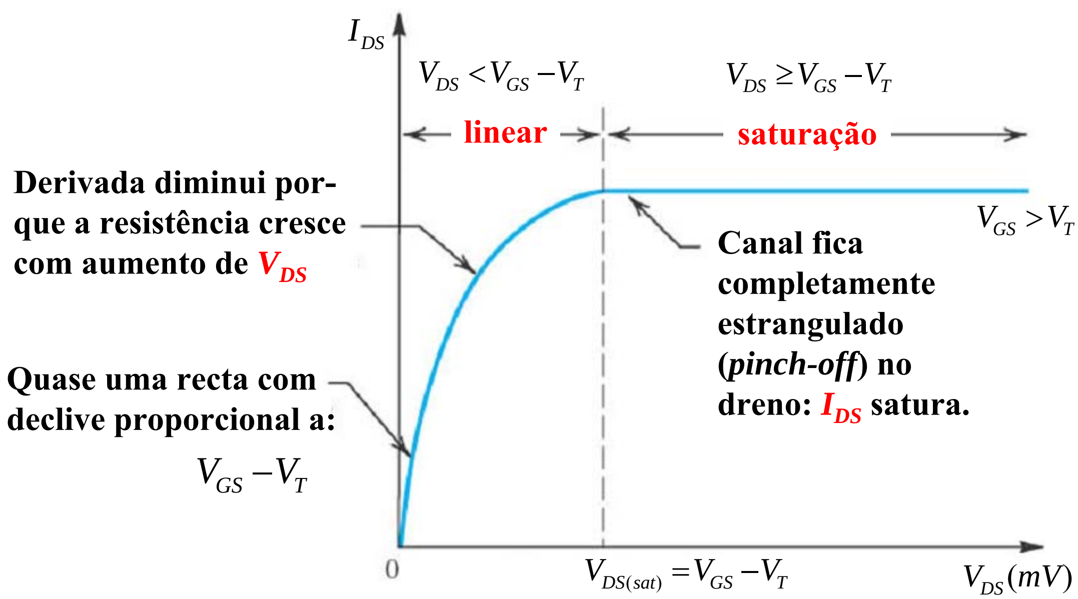
O que acontece para $V_{GS} \geq V_T$ e valores mais elevados de V_{DS}?



- **O canal tende a afunilar junto ao dreno à medida que aumentamos V_{DS};**
- **O afunilamento vai corresponder a um *aumento da resistência do canal*.**

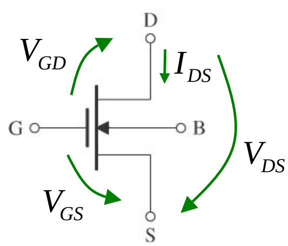
Funcionamento

Qual é o efeito deste fenómeno na característica corrente-tensão do MOSFET?

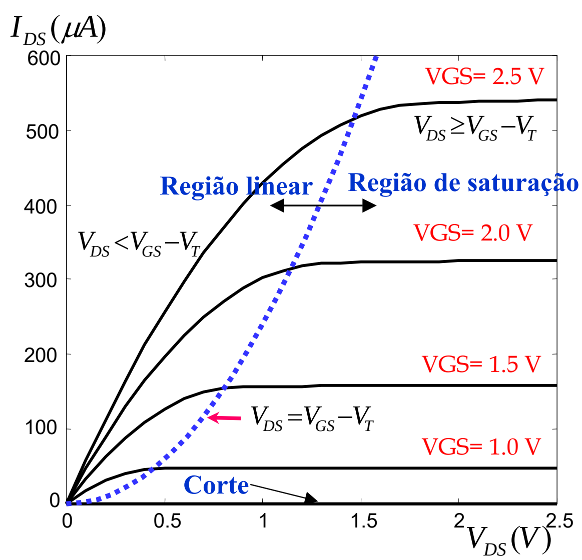


Modelo quadrático e MOSFET de canal *p*

Característica I_{DS}–V_{DS} do MOSFET

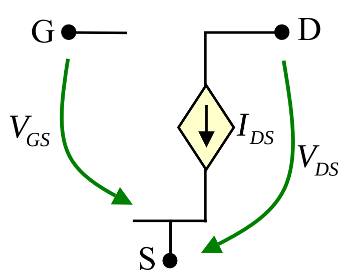


- **Região de operação depende das tensões V_G, V_D e V_S;**
  - **Corte: Não existe canal de inversão;**
  - **Linear ou tríodo - Canal de inversão uniforme; condutância entre dreno e fonte é controlada por V_{GS};**
  - **Saturação: Canal estrangulado no dreno; transístor funciona como fonte de corrente controlada por V_{GS}.**



Modelo quadrático ou de *Shockley*

$$
I_{DS} = \begin{cases} 0 \ ; \ V_{GS} < V_T & \text{Corte} \\ k\left(2(V_{GS}-V_T)V_{DS} - V_{DS}^{\ 2}\right) ; \ V_{GS} \geq V_T \ \text{ e } \ V_{GD} > V_T & \text{Linear} \\ k(V_{GS}-V_T)^2 \ ; \ V_{GS} \geq V_T \ \text{ e } \ V_{GD} \leq V_T & \text{Saturação} \end{cases}
$$

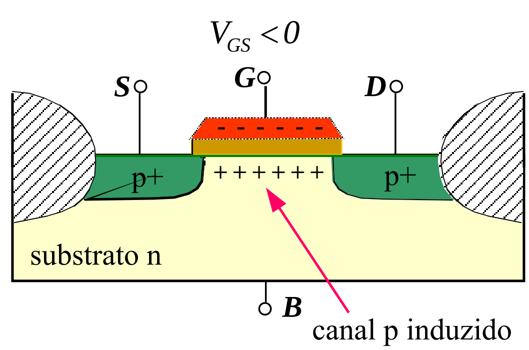


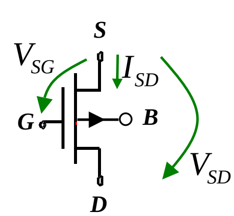
Modelo de grande sinal do MOSFET

k **é a transconductância do MOSFET, com dimensões de A/V².**

MOSFET de canal P (PMOS)

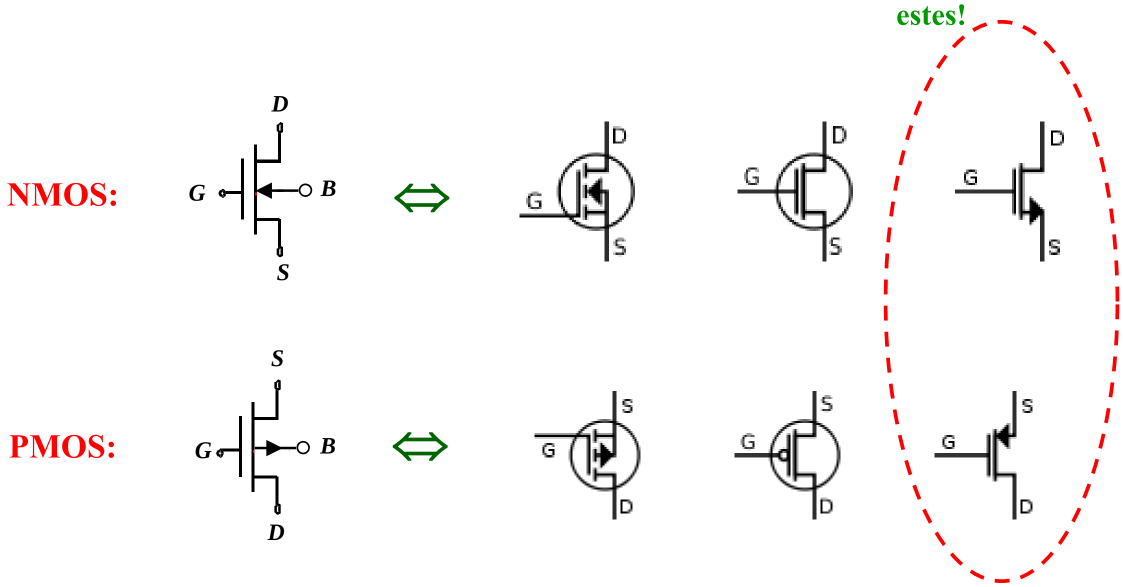
- **Substrato *n*; fonte e dreno *p*;**
- **Para induzir um canal é necessário $V_{GS} < 0$, logo $V_T < 0$;**
- **Portadores de corrente são lacunas;**
- **As expressões do Modelo Quadrático são aplicáveis desde que se considerem todas as tensões e correntes negativas;**
- **… mas como é mais cómodo trabalhar com valores positivos, é preferível trocar os índices das tensões e correntes.**
- **Terminal de substrato ligado à tensão mais positiva.**





Símbolos equivalentes NMOS e PMOS

Daqui para a frente usaremos estes!

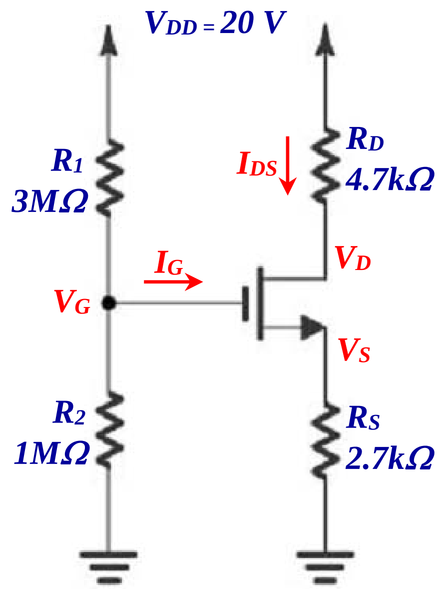


- Quando o terminal de substrato não é representado, ele é assumido ligado à tensão mais baixa (NMOS) ou à tensão mais alta (PMOS) do circuito.

Exemplos de cálculo: MOSFETs em DC

Exemplo 1

Sabendo que $V_T = 2V$ e $k = 1mA/V^2$, calcular I_{DS} e V_D.



Como $I_G = 0A$, a tensão V_G pode calcular-se usando a expressão do divisor de tensão:

$$V_G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD} = \frac{1}{3+1} 20 = 5V$$

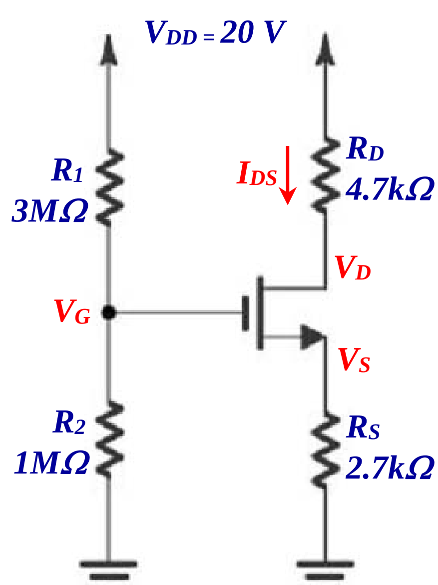
Como não sabemos se o transístor está linear ou saturado, vamos admitir, arbitrariamente, que está numa das regiões.

Supúnhamos que o consideramos saturado:

$$I_{DS} = k(V_{GS} - V_T)^2$$

A tensão V_G também se pode escrever como:

$$V_G = V_{GS} + R_S I_{DS}$$



Substituindo nesta expressão a anterior…

$$V_{GS}^2 + \left(\frac{1}{kR_S} - 2V_T\right)V_{GS} + V_T^2 - \frac{V_G}{kR_S} = 0$$

Substituindo valores, obtemos:

$$V_{GS}^2 - 3.63V_{GS} + 2.148 = 0$$

Cujas soluções são:

$$V_{GS} = 2.886V \quad \vee \quad V_{GS} = 0.744V$$

A segunda solução é < $V_T = 2V$, logo é descartada

Usando a primeira solução

$$I_{DS} = k(V_{GS} - V_T)^2 = 1(2.89 - 2)^2 = 0.79mA$$

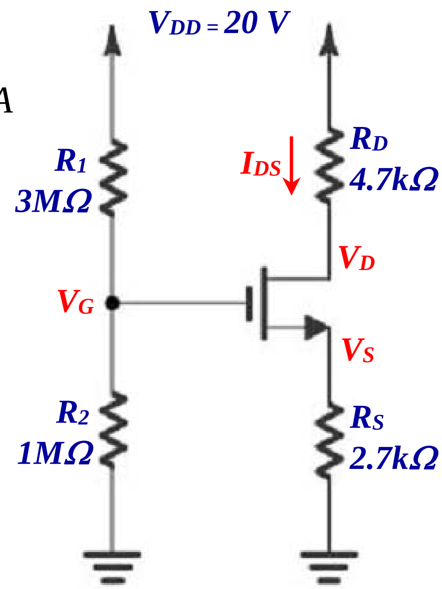
V_D é dado por

$$V_D = V_{DD} - R_D I_{DS} = 20 - 4.7(0.79) = 16.3V$$

Com esta tensão temos

$$V_{GD} = V_G - V_D = 5 - 16.3 = -11.3V < V_T$$

O que confirma que o transístor está efectivamente saturado.

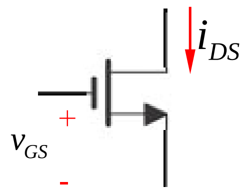


NOTA: Se não se confirmasse o estado saturado do transístor, teríamos que refazer os cálculos considerando-o na região linear.

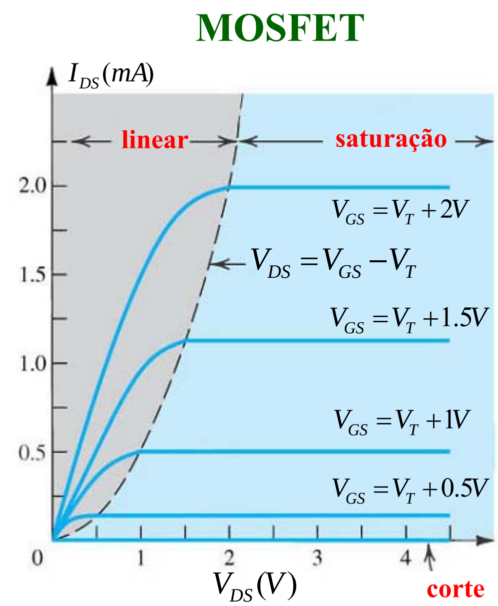
Modelo de pequeno sinal do MOSFET (transístor como amplificador)

MOSFET como amplificador

- Na região de saturação i_{DS} só depende de v_{GS}

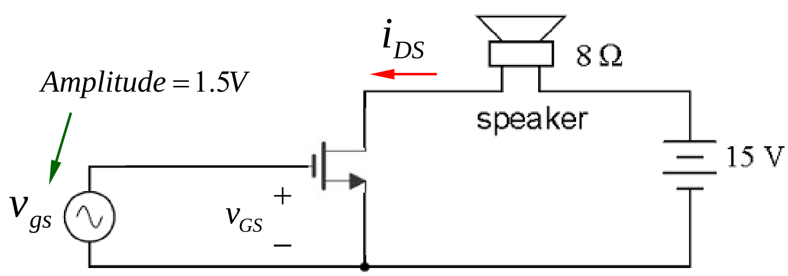


$$i_{DS} = k(v_{GS} - V_T)^2$$

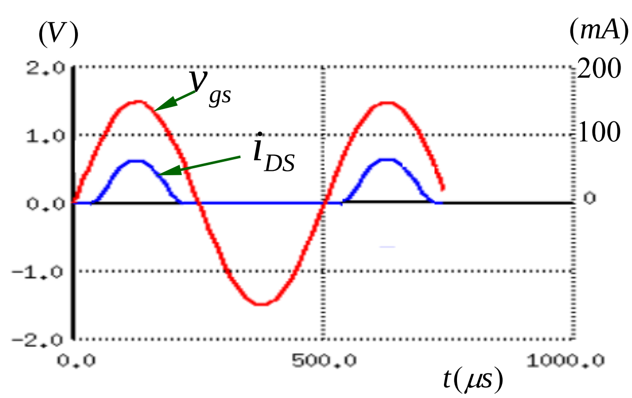


- O MOSFET funciona como uma fonte de **corrente controlada por tensão**...
- ... ou um **amplificador de transconductância**;
- Esta é pois a região adequada para operar o MOSFET como amplificador.

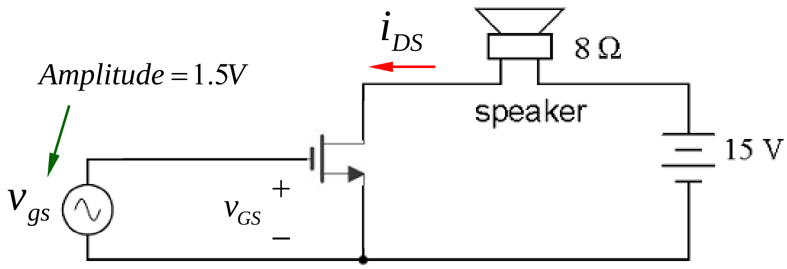
Exemplo de aplicação: amplificador audio



- ... mas a forma de onda da corrente i_{DS} não aparece igual à da fonte v_{gs} !
- Porquê?

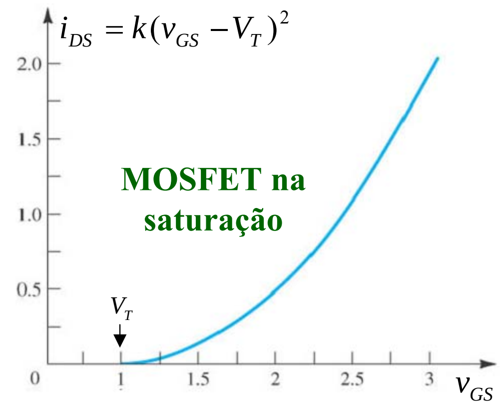


Exemplo de aplicação: amplificador audio

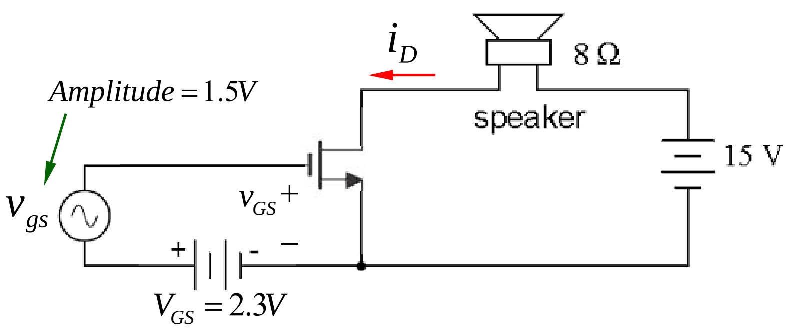


- **Para valores de v_{GS} inferiores a V_T o transístor corta;**

- **A solução é *polarizar* o transístor de forma a garantir que $v_{GS} > V_T$ para todos os valores do sinal de entrada.**



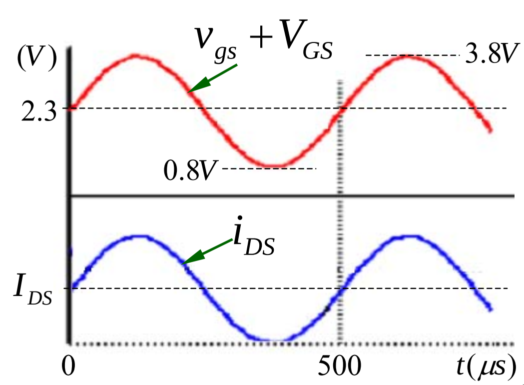
Exemplo de aplicação: amplificador audio



Assumimos V_T < *0.8V*
por isso de
–1.5 + V_{GS} > 0.8
obtemos V_{GS} = *2.3V*

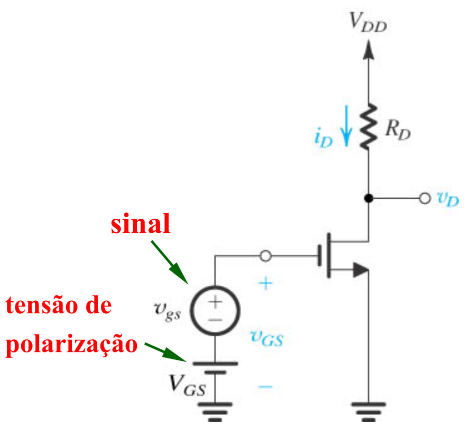
- **A polarização garante que o MOSFET conduz para todos os valores de v_{gs}.**

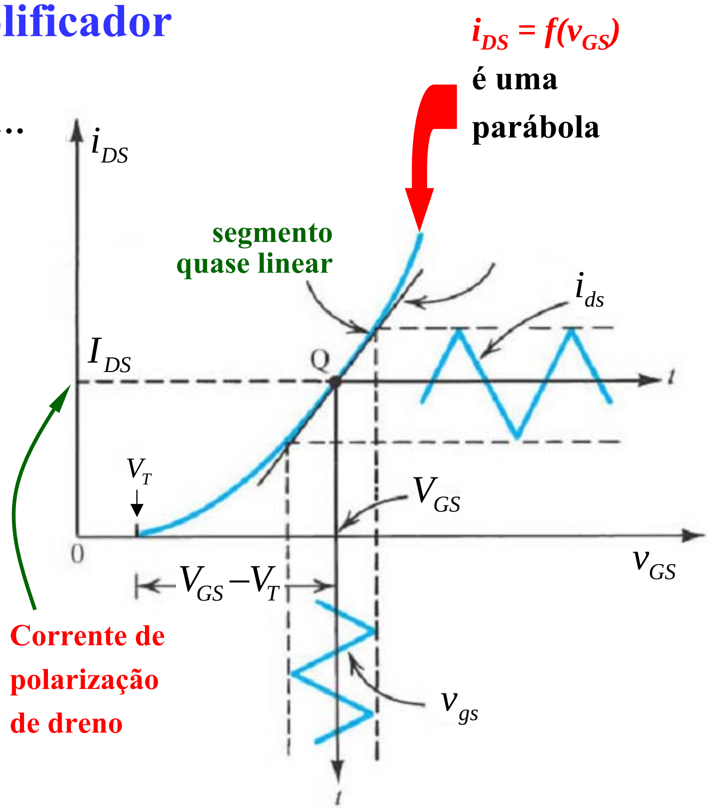
- **Forma de onda de i_{DS} é uma reprodução fiel de v_{gs}.**



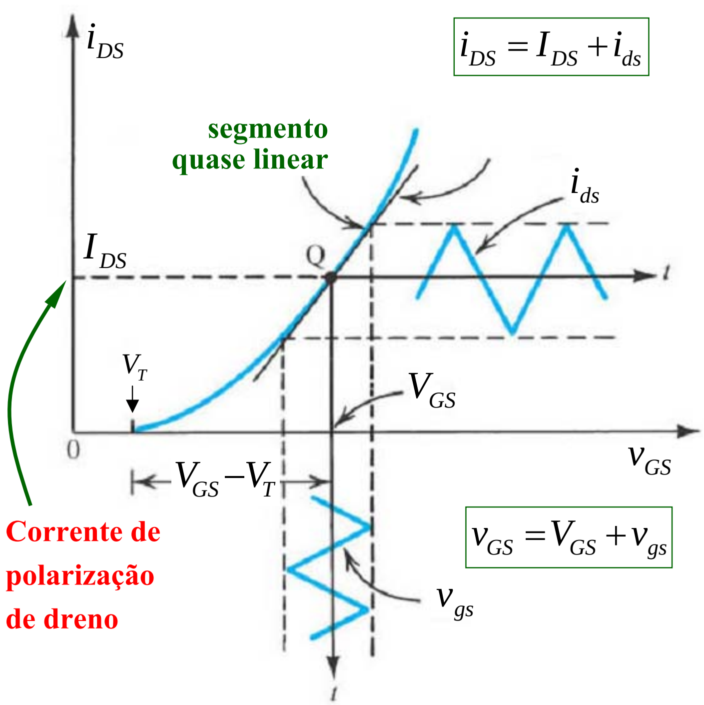
MOSFET como amplificador

- **Desenhado de outra forma…**
- **Se o sinal v_{gs} for pequeno, podemos aproximar a curva $i_{DS} = f(v_{GS})$ por uma recta.**





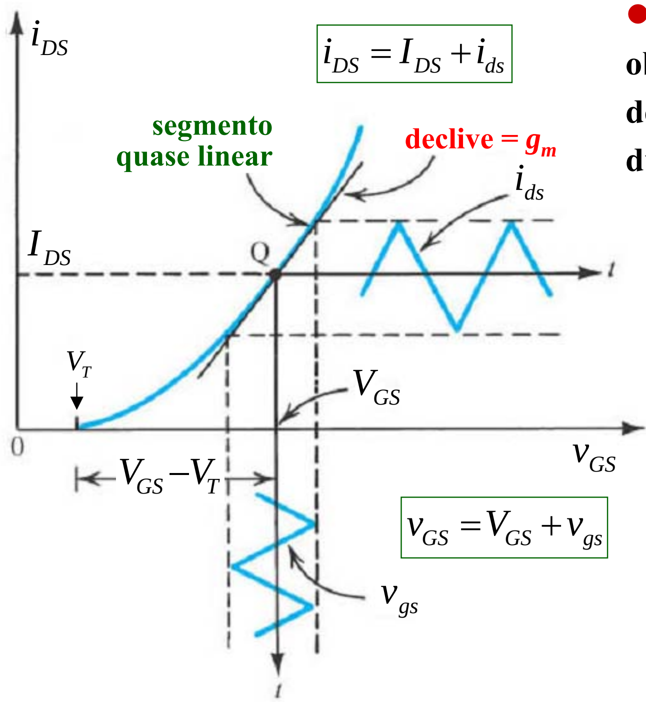
(Um parêntesis sobre notação…)



Notar que:

- **I_{DS} é a corrente DC no dreno;**
- **i_{ds} é a corrente de *sinal* no dreno, ou seja corresponde apenas à variação em torno do valor DC;**
- **i_{DS} é a corrente total no dreno;**
- **As mesmas considerações são válidas para V_{GS}, v_{gs} e v_{GS}.**

Aproximação de pequeno sinal



- **Relação não-linear entre i_{DS} e v_{GS} obriga a que o sinal v_{gs} *seja pequeno*, de forma a que i_{ds} seja uma reprodução fiel de v_{gs}.**

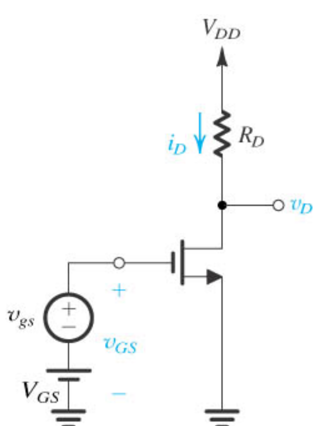
- **Para que a curva i_{DS} / v_{GS} possa ser considerada uma recta de declive g_m no ponto Q é preciso que** $v_{gs} << 2(V_{GS} - V_T)$

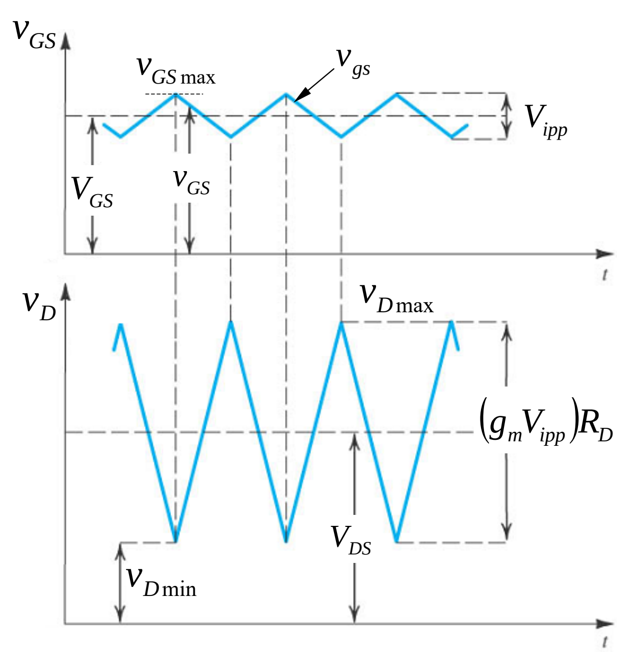
- **E assim:**

$$i_{ds} = g_m v_{gs}$$

Sendo g_m a *transcondutância* do transístor em *A/V*.

Extremos da tensão de saída





- **Para que o MOSFET não saia da região de saturação é necessário que:** $v_{GS\,max} - v_{D\,min} < V_T$ **ou seja** $v_{D\,min} > v_{GS\,max} - V_T$

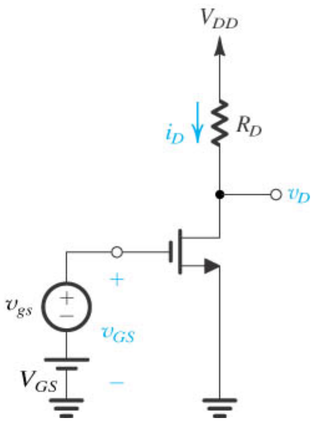
- **Para que o MOSFET não corte é preciso que:** $v_{D\,max} < V_{DD}$

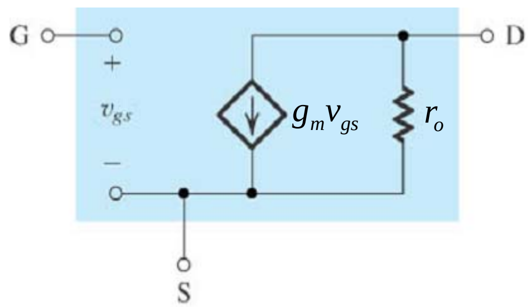
Modelo de pequeno sinal do MOSFET

- **Usando a relação exponencial i_{DS} / v_{GS} do MOSFET na região de saturação:** $i_{DS} = k(v_{GS} - V_T)^2$

e a aproximação de pequeno sinal: $v_{gs} << 2(V_{GS} - V_T)$

é possível mostrar que $g_m = 2k(V_{GS} - V_T)$ **ou** $g_m = 2\sqrt{kI_{DS}}$





$$r_o = \frac{|V_A|}{I_{DS}}$$

- **Em que r_o surge pelo facto da fonte de corrente não ser, na realidade, ideal (V_A é uma constante).**

Aplicação do modelo de pequeno sinal

Na análise de um amplificador com MOSFET separamos os cálculos da polarização daqueles que dizem respeito ao comportamento com sinal:

1) **Determinar as tensões de polarização e a corrente de dreno;**
2) **Calcular os valores dos parâmetros do modelo: g_m e r_o.**
3) **Eliminar as fontes de tensão DC, substituindo-as por curto-circuitos (*Princípio da Sobreposição*);**
4) **Substituir o(s) transístor(es) pelo circuito do modelo de pequeno sinal;**
5) **Usar as técnicas adequadas de análise de circuitos para obter *ganho*, *resistência de entrada*, etc.**