Análise da Complexidade I
Introdução

Joaquim Madeira

11/03/2021

Sumário

- Análise do desempenho de algoritmos
- Complexidade temporal e espacial
- Análise experimental vs. análise formal da complexidade
- Eficiência relativa
- Exemplos simples
- Exercícios adicionais
- Sugestões de leitura

Algoritmos

O que é um algoritmo?

- Sequência de instruções não-ambíguas
- Permitem atingir um objetivo
  - Efetuar um cálculo
  - Resolver um problema
  - Executar uma tarefa
- Num espaço de tempo finito

- Como estabelecer / definir ?
  - Texto; pseudo-Código; linguagem de programação

Algoritmos Deterministas

- Um algoritmo determinista
  - Devolve sempre o mesmo resultado, qualquer que seja o número de vezes que é executado com os mesmos dados de entrada.
  - Executa sempre a mesma sequência de instruções, quando é executado com os mesmos dados de entrada.
- O tipo mais habitual de algoritmo !
- Há uma definição mais formal em termos de máquinas de estado…
- Os algoritmos que vamos usar !

Algoritmos Não-Deterministas

- Um algoritmo não-determinista
  - Pode ter um comportamento diferente, para os mesmos dados de entrada, em diferentes execuções
  - Ao contrário de um algoritmo determinista !
- Habitualmente usados para obter soluções aproximadas em alguns tipos de situações
  - Quando é demasiado oneroso determinar soluções exatas…
- Exemplos ?

Análise da Complexidade

Como escolher o algoritmo mais apropriado?

- Vários algoritmos para resolver uma instância de um problema
- Qual é o algoritmo mais eficiente / com melhor desempenho ?
- Tempo de execução / Nº de operações executadas
  - Complexidade temporal
- Espaço de memória necessário
  - Complexidade espacial

Como estimar o desempenho?

- Conhecemos o desempenho de um algoritmo para uma instância de um problema
  - Tamanho e características da instância
  - Tempo / Nº de operações
  - Espaço de memória
- Se o tamanho da instância se tornar 10 vezes maior, o que acontece?
- Se a organização dos dados for diferente, o que acontece?

Análise experimental

- Análise experimental do comportamento de um algoritmo
  - Testes computacionais com diferentes tipos de instâncias / dados de entrada
  - Contar o nº de operações significativas / Registar o tempo de execução
  - Analisar os resultados
  - Classificar o algoritmo

- MAS, o tempo de execução depende de muitos fatores !!

Análise formal

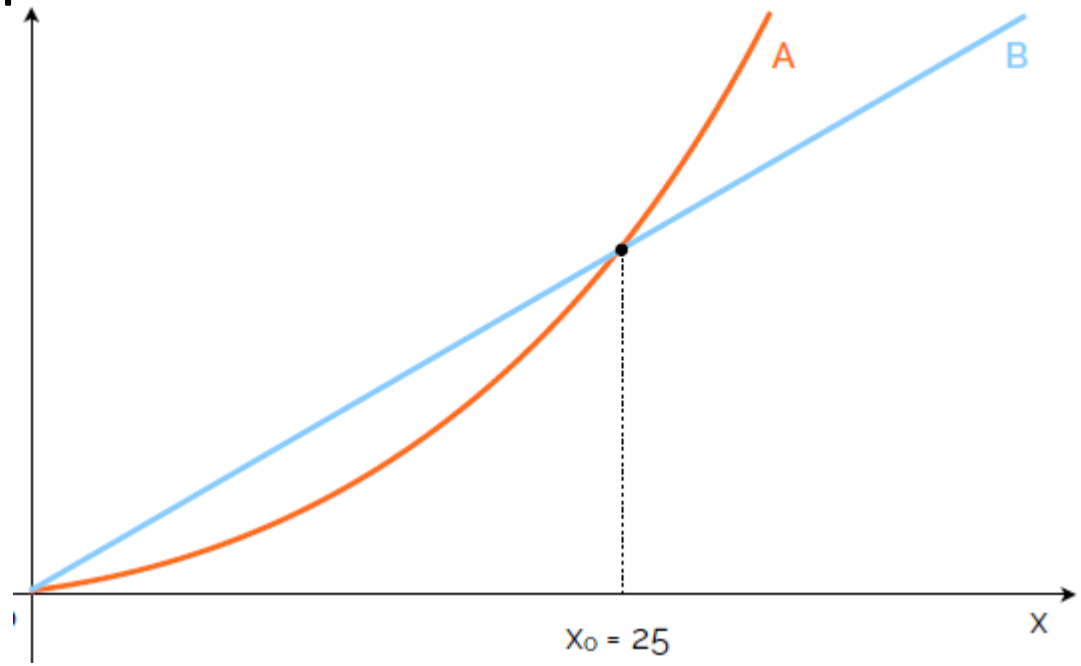
- Análise formal --- “papel e lápis”
  - Escolher uma operação significativa
  - Obter uma expressão matemática para o nº de vezes que é executada, em função do “tamanho” dos dados
  - Analisar se a “organização” dos dados também influencia o nº de operações
  - Classificar o algoritmo

- Verificar se as conclusões são compatíveis com a análise experimental

Eficiência relativa

- Dois algoritmos para um mesmo problema
- Algoritmo A : comportamento quadrático : $n^2/5$
- Algoritmo B : comportamento linear : 5n

- Qual é "melhor"?
- Para grandes volumes dos dados?



Exemplos Simples

Exemplo 1

- Determinar o maior de 3 valores a, b, c
- Escrever os invariantes
- Quantas comparações ?
- Quantas atribuições ?
- A ordem dos dados é importante ?

```
if (a > b) {
  if (a > c)
    maior = a;
  else
    maior = c;
} else {
  if (b > c)
    maior = b;
  else
    maior = c;
}
```

Exemplo 2

- Determinar o maior de 3 valores a, b, c
- Escrever os invariantes
- Quantas comparações ?
- Quantas atribuições ?
- A ordem dos dados é importante ?

```
maior = a;
if (b > maior)
  maior = b;
if (c > maior)
  maior = c;
...
```

Tarefa 1

- Determinar o maior de 4 valores a, b, c, d
- Usar as duas estratégias anteriores !!
- Faz sentido ?

Tarefa 2

- Determinar o maior de **n valores**

- Das anteriores, qual é a “melhor” estratégia ?
- Escrever e testar o algoritmo

- Quantas comparações são efetuadas ?
- Quantas atribuições são efetuadas ?
- A ordem dos dados é importante ?
- Faz sentido contar todas as atribuições ?

Exemplo 3

```
inicializar array contador[256];
de i = 0 até 256:
  contador[i] = 0;
enquanto não fim de ficheiro:
  ler próximo carater;
  incrementar contador[próximo carater];
```

- Contar o nº de ocorrências de caracteres num ficheiro
- Inicialização : quantas atribuições ao array ?
- Leitura do ficheiro : quantas vezes incrementamos o array ?

- Qual é o factor que determina o desempenho ?
- O esforço da fase de inicialização é importante ?

Ciclos – Quantas iterações? – Expressão?

```
for(k=1; k<6; k++) {
        …                                   ?
}

for(i=0; i<m; i++) {
        for(j=0; j<n; j++) {
                …                           ?
        }
}
```

Ciclos – Quantas iterações? – Expressão?

```
for(k=1; k<6; k++) {
        …
}
```

$$\sum_{k=1}^{5} 1 = 5$$

```
for(i=0; i<m; i++) {
        for(j=0; j<n; j++) {
                …
        }
}
```

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{m-1} n = m \times n$$

Tarefa 3

- Expressão para o nº de vezes que a instrução mais interna é executada
- Expressão para o resultado de cada uma das funções

```
int f1(int n) {
  int i,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    r += i;
  return r;
}
```

```
int f2(int n) {
  int i,j,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    for(j = 1; j <= n; j++)
      r += 1;
  return r;
}
```

```
int f3(int n) {
  int i,j,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    for(j = i; j <= n; j++)
      r += 1;
  return r;
}
```

```
int f4(int n) {
  int i,j,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    for(j = 1; j <= i; j++)
      r += j;
  return r;
}
```

Sugestões de leitura

Sugestões de leitura

- J. J. McConnell, Analysis of Algorithms, 1st Edition, 2001
  - Capítulo 1: secção 1.1

- A. Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2012
  - Capítulo 1: secção 1.1