CAVIGLIA-FAZZERI-HA6

Algoritmo di Simon

Introduzione

L'Algortimo di Simon permette uno **speed-up esponenziale** rispetto agli analoghi classici.
Supponiamo di avere un **oracolo o Black Box** che calcola una funzione, la quale prende in input una string a n bit e da come output una stringa a n bit. Per ogni x esiste un solo valore di y tale che $f(x) = f(y)$, ovvero tale che $y = x \oplus a$, dove a è la periodicità della funzione che sto cercando.
Il problema è classicamente difficile da risolvere, in quanto non esiste un algoritmo efficiente: l'unica possibilità è dare in input all'oracolo una serie di stringhe fino a che non vengono trovati i valori di
x e y tali che $f(x) = f(y)$. Una volta trovate tali stringhe è facile calcolare il periodo come $a = x \oplus y$.
Poiché l'unico modo per risolvere il problema è provare i diversi input, bisogna sondare tutto lo spazio logico, composto da
2^n stringhe. Possiamo dimostrare che in media sono necessari $2^{n/2}$ tentativi e chiamate all'oracolo.
La complessità, dunque, cresce esponenzialmente con il numero di bit n.

Descrizione dell'algoritmo quantistico

Possiamo definire il nostro algoritmo come una sequenza di passi.

1. Partiamo da n bit logici e n qubit addizionali.

   $$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\oplus n}|0\rangle^{\oplus n}$$

2. Applichiamo $N = 2^n$ porte di Hadamard ai primi n qubit.

   $$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle|0\rangle^{\oplus n}$$

3. Applichiamo l'oracolo che per ogni $|x\rangle$ calcola $f(x)$ e immagazzina il suo valore negli n bit finali.

   $$|\psi_1\rangle \xrightarrow{O} |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle|f(x)\rangle$$

   Lo stato
   $|f(x)\rangle$ sarà associato sia allo stato $|x\rangle$ sia allo stato $|x \oplus a\rangle$, quindi possiamo riscrivere la formula come

   $$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{x=0}^{N-1} \frac{|x\rangle + |x \oplus a\rangle}{\sqrt{2}} |f(x)\rangle.$$

4. Misurando gli ultimi n qubit, otterremo una stringa casuale $f(x_0)$ con probabilità $1/2^{n-1} = 2/N$. Ci interessa che i primi n qubit, dopo la misura, si troveranno nello stato sovrapposizione

   $$|\psi_3\rangle = \frac{|x\rangle + |x \oplus a\rangle}{\sqrt{2}}.$$

5. Se applichiamo n porte di Hadamard, otteniamo

   $|\psi_3\rangle \xrightarrow{H^{\oplus n}} |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{y=0}^{N-1} [(-1)^{x_0 \cdot y} + (-1)^{(x_0 \oplus a) \cdot y}] |y\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{y=0}^{N-1} [(-1)^{x_0 \cdot y} +$
   $(-1)^{x_0 \cdot y + a \cdot y}] |y\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{y=0}^{N-1} (-1)^{x_0 \cdot y} [1 + (-1)^{a \cdot y}] |y\rangle.$

   Per le stringhe
   y per cui $a \cdot y = 1$, il coefficiente dello stato $|y\rangle$ è $[1-1] = 0$. Al contrario, se $a \cdot y = 0$, il coefficiente dello stato $|y\rangle$ è $[1+1] = 1$. Nella somma precedente, quindi, sono presenti solo gli stati $|y\rangle$ tali che $a \cdot y = 0$, quindi la possiamo riscrivere come

   $|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{a \cdot y = 0} (-1)^{x_0 \cdot y} [1 + (-1)^{a \cdot y}] |y\rangle.$

6. La misura dei rimanenti n qubit darà una stringa y tale che $a \cdot y = 0$. Dobbiamo dunque iterare la procedura per ottenere diversi valori ($a \cdot y_i = 0$ per $i = 1, ..., n$). Otteniamo, quindi, un sistema di equazioni.
   Se le equazioni sono linearmente indipendenti, esiste una sola stringa
   a che le soddisfa tutte.

$$\begin{cases} a \cdot y_1 = 0 \\ a \cdot y_2 = 0 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ a \cdot y_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Si può dimostrare che bastano solo $O(n)$ iterazioni del protocollo per ottenere n equazioni linearmente indipendenti e determinare a, garantendo uno speed-up esponenziale rispetto ad un algoritmo classico.

Implementazione in Qiskit

Iniziamo l'implementazione dell'algoritmo con l'importazione delle librerie che ci permettono di creare il nostro ambiente virtuale in cui lavorare.

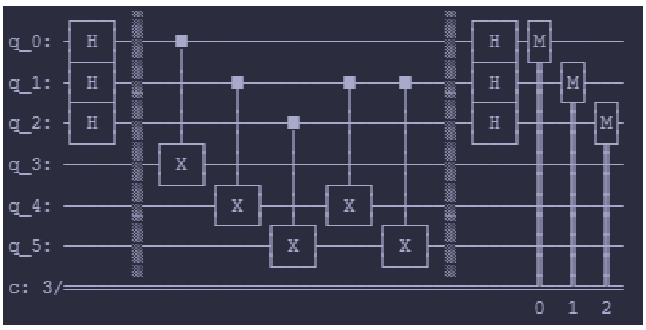
```
import dotenv
import os

# Load the .env file
dotenv.load_dotenv()

from qiskit_ibm_runtime import QiskitRuntimeService, Sampler

# Save an IBM Quantum account and set it as your default account.
QiskitRuntimeService.save_account(
    channel="ibm_quantum",
```

```
    token=os.environ.get("IBM_API_TOKEN"),
    set_as_default=True,
    # Use `overwrite=True` if you're updating your token.
    overwrite=True,
)

# Load saved credentials
service = QiskitRuntimeService()
```

```
# importing Qiskit
from qiskit_aer import AerSimulator, Aer
# from qiskit.providers.ibmq import least_busy
from qiskit import QuantumCircuit, transpile

# import basic plot tools
from qiskit.visualization import plot_histogram
from qiskit_textbook.tools import simon_oracle
```

Adesso possiamo scrivere il nostro algoritmo vero e proprio. Come oracolo abbiamo utilizzato quello presente nella libreria `qiskit_textbook.tools`.

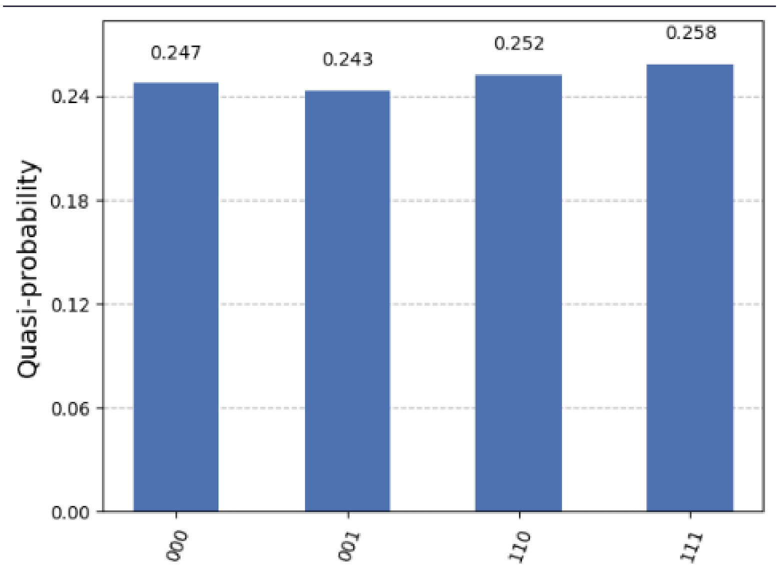
```
bitstring = '110' # input ('insert string b: ')
n = len(bitstring) # length of the string b
simon_circuito = QuantumCircuit(n*2, n)

# Apply Hadamard gates before querying the oracle
simon_circuito.h(range(n))
simon_circuito.barrier() # We use barriers to improve our visualization of th

simon_circuito = simon_circuito.compose(simon_oracle(bitstring))
simon_circuito.barrier()
simon_circuito.h(range(n))
simon_circuito.measure(range(n), range(n))
simon_circuito.draw()
```



Test con il simulatore

Effettuiamo un primo test con un simulatore e disegniamo un istogramma con le probabilità di collasso in ogni stato.

```
# Assume simon_circuit is already defined
aer_sim = AerSimulator() # Aer.get_backend('aer_simulator')
#aer_sim.set_options(precision='single')

#results = aer_sim.run(simon_circuito).result()

simon_circuito = transpile(simon_circuito, aer_sim)

results = aer_sim.run(simon_circuito).result()

# Get the counts
counts = results.get_counts()

# Normalize counts to probabilities
total_shots = sum(counts.values())
probabilities = {key: value / total_shots for key, value in counts.items()}

# Plot the histogram of probabilities
plot_histogram(probabilities)
```




```
def bdotz(b, z):
    accum = 0
    for i in range(len(b)):
        accum += int(b[i]) * int(z[i])
    return (accum % 2)
```

```
for z in counts:
    print( '{}.{} = {} (mod 2)'.format(bitstring, z, bdotz(bitstring,z)) )
```

```
110.000 = 0 (mod 2)
110.110 = 0 (mod 2)
110.001 = 0 (mod 2)
110.111 = 0 (mod 2)
```

La verifica finale sarebbe la risoluzione del sistema lineare ottenuto.