Racionalne Bézierjeve ploskve

Eva Rudolf, Sara Conta

23. 12. 2024

1 Uvod

Bézierjeve racionalne ploskve so eno od ključnih orodij, ki se uporabljajo v računalniško podprtem oblikovanju (CAD), računalniški grafiki in inženirstvu. Predstavljajo razširitev klasičnih Bézierjevih ploskev, pri čemer uvedba uteži kontrolnih točk omogoča modeliranje kompleksnejših oblik, kot so krogle, stožci in druge kvadratične površine. Zaradi te prilagodljivosti in matematične elegance so racionalne Bézierjeve ploskve nepogrešljive pri opisovanju in obdelavi geometrijskih objektov. V tej seminarski nalogi bova predstavili osnove teh ploskev, razložili delovanje de Casteljaujevega algoritma ter raziskali njihove praktične uporabe.

2 Racionalne Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta

Spomnimo se najprej definicije ploskve.

Definicija 1 *Parametrično podana ploskev v prostoru* $\mathbb{R}^3$ *je množica točk* $\{\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\}$*, podana s parametrizacijo* $\mathbf{r}:\Omega\to\mathbb{R}^3$*,*

$$\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).$$

Racionalna Bézierjeva ploskev je parametrizirana ploskev v računalniški geometriji, definirana z uteženimi kontrolnimi točkami in Bézierjevimi baznimi funkcijami. Je posplošitev klasičnih Bézierjevih ploskev, njihova definicija pa sledi istim načelom kot racionalne Bézierjeve krivulje. Racionalna Bézierjeva ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$ je projekcija Bézierjeve ploskve v $\mathbb{R}^4$ na hiperravnino $\omega=1$, ker točko v $\mathbb{R}^4$ označimo z $(\mathbf{x},\beta)=(x_1,x_2,x_3,\beta)$.

Velja, da se točke z $\beta=0$ preslikajo v točke v neskončnosti.

Definicija 2 *Racionalna Bézierjeva ploskev stopnje* (n,m) *iz tenzorskega produkta je podana kot razmerje dveh polinomskih funkcij s parametrizacijo* $\mathbf{r}:[0,1]\to\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathbf{r}(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\beta_{ikik}B_i^n(u)B_k^n(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\beta_{ik}B_i^n(u)B_k^n(v)},$$

kjer so $\beta_{ik}\in\mathbb{R}$ *uteži,* $\mathbf{b}_{ik}\in\mathbb{R}^3$ *kontrolne točke in* $B_i^n(u),B_k^n(v)$ *Bézierjevi bazni polinomi.*

Kot pri racionalnih Bézierjevih krivuljah lahko tudi tu eno izmed uteži nastavimo na vrednost 1. Na robovih $U=0$ in $v=0$ lahko na vrednost 1 nastavimo celo dve uteži.

Opomba 1 *Formula v definiciji opisuje racionalno Bézierjevo ploskev iz tenzorskega produkta, vendar je v resnici ne moremo zapisati kot produkt dveh faktorjev, zato strogo gledano formula ne predstavlja ploskve iz tenzorskega produkta.*

2.1 Lastnosti racionalnih Bézierjevih ploskev iz tenzorskega produkta

Lastnosti racionalnih Bézierjevih krivulj držijo tudi v primeru ploskev. Velja:

1. Parametrizacija racionalnih Bézierjevij ploskev je afino invariantna.
2. Racionalna Bézierjeva ploskev leži v konveksi ogrinjači svojih kontrolnih točk.
3. Ko red parametrizacije narašča, se ta parametrizacija vedno bolj približuje dejanski ploskvi.

2.2 Valj

Naj bo $(m,n)=(2,1)$. Naj bosta nadalje Bézierjevi točki B_{10} in B_{11} točki v neskončnosti, torej $\beta_{10}=\beta_{11}=0$. Tako velja, da so parametrične krivulje $v=konst$ ravne črte in parametrične krivulje $u=konst$ elipse.

Primer 1 *Naj bo* $\beta_{ij}=1\ \forall i,j$*. Racionalna Bézierjeva ploskev, zapisana z enačbo*

$$\boldsymbol{X}(u,v)=\frac{1}{N}\left[b_{00}B_0^2(u)B_0^1(v)+b_{20}B_2^2(u)B_0^1(v)+b_{01}B_0^2(u)B_1^1(v)+b_{21}B_2^2(u)B_1^1(v)+\vec{b}_{10}B_1^2(u)B_0^1(v)+\vec{b}_{11}B_1^2(u)B_1^1(v)\right],$$

kjer

$$N = B_0^2(u)B_0^1(v) + B_2^2(u)B_0^1(v) + B_0^2(u)B_1^1(v) + B_2^2(u)B_1^1(v),$$

predstavlja pol valja, ki ima za osnovno ploskev elipso.

Primer 2 *V splošnem lahko zapišemo valj, ki ima za osnovno ploskev krog, z enačbami*

$$\begin{aligned} b_{00} &= (r, 0, 0)^T \\ b_{01} &= (r, 0, h)^T \\ b_{20} &= (-r, 0, 0)^T \\ b_{21} &= (-r, 0, h)^T \\ \vec{b}_{10} &= (0, r, 0)^T \\ \vec{b}_{11} &= (0, r, 0)^T, \end{aligned}$$

kjer r predstavlja polmer kroga in h višino valja. Drugo polovico valja dobimo, če določimo $\vec{b}_{10} = \vec{b}_{11} = (0, -r, 0)^T$.

2.3 Torus

2.4 Rotacijska ploskev

2.5 Krogla

3 Racionalne Trikotne Bézierjeve ploskve

4 De Casteljaujev algoritem

Literatura

[1] J. Hoschek, D. Lasser: Fundamentals of Computer Aided geometric design, Wellesley (Massachusetts): A. K. Peters, 1993, strani 316 − 329.

[2] Zapiski predavanj pri predmetu Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje.