Instituto Superior Técnico
DEEC
Programação 2018/2019 – 1º S
1º Trabalho

1 Introdução

Um dos problemas motivadores de introdução à engenharia aeroespacial consiste na determinação do movimento longitudinal de uma aeronave em que o movimento está limitado a um plano vertical. Este problema constitui uma simplificação do movimento real, mas permite compreender e explorar os efeitos das diversas forças que actuam na aeronave.

Este trabalho tem dois objectivos, o desenvolvimento de uma aplicação de software para ser utilizada no estudo do movimento longitudinal, e a utilização da aplicação para determinar o alcance da aeronave na situação de falta de combustível. A aplicação deve ter o nome **flight_analysis** e deve ser desenvolvida utilizado a linguagem de programação C. A aplicação será executada em ambiente Linux e ter as funcionalidades seguintes:

- Ler os parâmetros do modelo matemático, o qual descreve o movimento longitudinal.
- Calcular a resposta do modelo matemático.
- Guardar os dados da resposta do modelo num ficheiro de dados.
- Visualizar as respostas do modelo em modo gráfico.

2 Modelo do movimento longitudinal

Na descrição do movimento longitudinal são consideradas várias simplificações:

- Não há vento, a massa de ar está parada em relação ao referencial que está associado à superfície terrestre, a qual se considera como sendo plana.
- A aeronave é representada por um ponto, o centro de massa da aeronave.
- Considera-se que a aeronave não tem combustível pelo que não há geração de qualquer força propulsora (*thrust*).
- As forças presentes (peso - *weight*, sustentação - *lift*, atrito - *drag*) estão aplicadas no centro de massa da aeronave.
- No instante inicial (***t=0***) a partir do qual será determinar a trajectória da aeronave, ela está a uma *altitude (height)* ***h(0)***, tem uma *velocidade* inicial (*speed*) V(0) e o vector *velocidade* (*velocity*) **V**(0) apresenta um ângulo ***γ(0)*** com a horizontal. Note-se o vector velocidade **V** não é constante, evolui ao longo do tempo, assim como ***γ(t)*** e ***h(t)***.

  As variáveis do modelo estão expressas em unidades do S.I..

Na figura seguinte são exemplificados os ângulos e as diversas forças que com juntamente com a aplicação da lei de Newton permite determinar o modelo do movimento longitudinal.

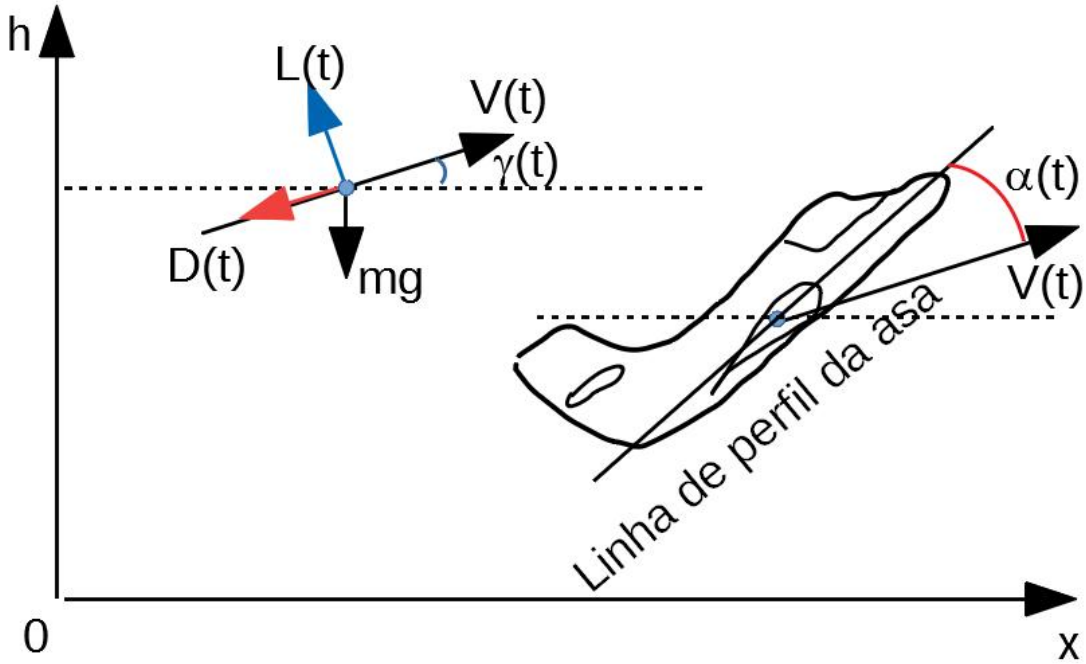

*Fig. 1: Exemplificação das forças que estão aplicadas no centro de massa da aeronave. O ângulo **γ(t)** é designado de flight path angle, e o ângulo **α(t)** é designado de ângulo de ataque (angle of attack).*

O ângulo ***γ(t)*** é designado de *flight path angle*, é positivo quando **V(t)** **"**está acima" da horizontal. O vector **V(t)** define o *flight path*. Da relação entre o vector **V**(t) e o ângulo ***γ(t)*** são calculadas as variações temporais das distâncias (velocidades) na horizontal (***dx(t)/dt***) e na vertical (***dh(t)/dt***)

$$\frac{d}{dt}(x(t))=V(t)\cos(\gamma(t)) \quad ,$$

$$\frac{d}{dt}(h(t))=V(t)\sin(\gamma(t)) \quad .$$

A taxa de variação da velocidade ***V(t)*** [m/s] e do ângulo ***γ(t)*** [rad] dependem do balanço de forças **L-*lift***, **D-*drag***, **W-*weight*** [N]. O ângulo ***γ(t)*** é positivo quando a linha de perfil da asa (que define a orientação da asa) "está acima" do vector **V(t)**. As equações são

$$\frac{d}{dt}(V(t))=\frac{1}{m}[-D(t)-mg\sin(\gamma(t))] \quad ,$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t))=\frac{1}{mV(t)}[L(t)-mg\cos(\gamma(t))] \quad ,$$

onde *m* [kg] representa a massa da aeronave e $g=9.801\ [m/s^2]$ representa a aceleração da gravidade (perto da superfície terrestre).

As forças de sustentação (***Lift***) e de atrito (***Drag***) são descritas por

$$L(t)=C_L\frac{1}{2}\rho V^2(t)S \quad [\text{N}]\text{ , e}$$

$$D(t)=C_D\frac{1}{2}\rho V^2(t)S \quad [\text{N}],$$

onde $\mathbf{C_L}$ e $\mathbf{C_D}$ representam respectivamente os coeficientes de sustentação e de atrito, ρ=1.225 [kg/*m^3]* representa a densidade do ar ao nível do mar, e *S* [m^2] representa a área da asa que inclui a parte que se encontra dentro da fuselagem.

O coeficiente $\mathbf{C_L}$ é descrito pela equação

$$C_L=\alpha\frac{\pi AR}{1+\sqrt{1+(AR/2)^2}} \quad ,$$

onde AR representa o factor de forma da asa (*Aspect Ratio)* o qual é dado por

$$AR=\frac{b^2}{S} \quad ,$$

em que *b [m]* representa o comprimento da asa, medido na perpendicular em relação ao eixo longitudinal da aeronave.

A alteração do ângulo ***α(t)*** (ângulo de ataque, ver a figura anterior) é o que permite modificar a em primeiro lugar a atitude da aeronave no plano vertical e depois a altitude. Na prática o piloto ajusta o ângulo de ataque através do comando das superfícies de controlo de voo (leme de profundidade - *elevator*) e da força/potência aplicada pelo motor. Neste trabalho, o ângulo de ataque é a única variável manipulada (escolhida pelo utilizador/piloto) para comandar a aeronave durante o voo até que a altitude seja zero (***h(.) = 0.0***).

O coeficiente $\mathbf{C_D}$ é descrito pela relação

$$C_D=C_{D0}+\epsilon C_L^2 \quad ,$$

o qual depende do valor de $\boldsymbol{C_L}$, $\boldsymbol{C_{D0}} = \boldsymbol{0.02}$ e

$$\epsilon=\frac{1}{\pi e AR} \quad ,$$

em que *e* é designado de factor de eficiência de Oswald e pode ser considerado com tendo o valor de *e* = 0.9.

3 Resolução do modelo de equações diferenciais

A resolução de equações diferenciais implica a aplicação de um método que permita determinar os valores de variáveis (funções do tempo). Essas variáveis aparecem no modelo através das respectivas taxas de variação em relação ao tempo.

O estudo de equações diferenciais é essencial para a resolução de inúmeros problemas de engenharia. Existem diversas unidades curriculares onde as equações diferenciais são abordadas de forma rigorosa, com o objectivo de obter soluções de problemas complexos, e também para determinação das condições de existência e da unicidade de soluções.

Neste trabalho procura-se abordar o conceito do ponto de vista algorítmico, isto é, a definição de sequência de acções, a aplicação de métodos numéricos simples, e o desenvolvimento de programas/funções para obter soluções numéricas aproximadas.

Consideremos como exemplo, simples, a determinação da solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}(h(t))=5.0 \quad ,$$

onde ***t*** representa o tempo. A equação indica que a solução (função do tempo) deve ser tal que a taxa de crescimento tem que ser constante ao longo do tempo e igual ao valor 5.0. Sendo assim quais serão as funções de ***t*** que satisfazem a equação diferencial? As rectas satisfazem a propriedade de ter derivadas constantes.

Certamente que após algum tempo de reflexão deve ter encontrado uma resposta, talvez um caso particular da equação

$$h(t)=h(t_0)+5.0(t-t_0) \quad .$$

A constante $\boldsymbol{t_o}$ representa um instante inicial arbitrário e $\boldsymbol{h(t_o)}$ representa o valor de ***h( )*** no instante t_o. Note-se que se o valor de $\boldsymbol{h(t_o)}$ não for especificado então a solução apresentada não está completa, porque existe uma infinidade de funções de ***t*** que satisfazem a equação diferencial. Na prática é usual simplificar a notação fazendo $\boldsymbol{t_o=0}$, em que a contagem do tempo tem início no valor 0.

A variável ***h(t)*** é designada de variável de estado já que indica o estado (altitude) da aeronave no instante ***t***. Num sistema de equações diferenciais há um conjunto de variáveis de estado que são agrupadas num vector. Esse vector é designado de vector de estado do sistema de equações diferenciais. No caso do movimento longitudinal da aeronave temos $\boldsymbol{[V(t),\ \gamma(t),\ x(t),\ h(t)]}$.

Ponto importante que é necessário recordar: Para resolver um equação diferencial, ou um sistema de equações diferenciais, é necessário especificar os valores iniciais das variáveis de estado.

Considere-se agora a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}(h(t))=a\,h(t) \quad ,$$

que deverá ser resolvida no intervalo $\boldsymbol{[0,\ t_f]}$, com a condição inicial ***h(0) = 1***, a constante ***a*** representa uma constante real e $\boldsymbol{t_f}$ representa o tempo final.

A particularidade desta equação é que o termo que está à direita do sinal de igual contém a variável ***h(t)***, a qual também aparece no lado esquerdo através da respectiva derivada.

Desde já se indica que há um método matemático que permite obter a solução exacta desta equação diferencial. O método não é apresentado, é tema de outra unidade curricular, mas a solução é dada por

$$h(t)=\exp(a t) \quad ,$$

onde ***exp(.)*** representa a função exponencial e ***t*** pertence ao intervalo ***[0, t_f]***. Para o caso particular de ***a=-1***, ***h(t) = exp(-t)***, a solução começa no valor 1 e decai exponencialmente (muito rapidamente) para zero. Nota, ***se a=-10***, o decaimento também é exponencial mas é muito mais rápido!!!

O ramo da matemática que dá pelo nome de Análise de Métodos Numéricos aborda a questão do desenvolvimento de métodos, que ao serem executados num computador, permitem obter soluções aproximadas de equações (algébricas, polinomiais, diferenciais, ...), e também permitem quantificar o nível de erro existente entre a solução numérica obtida (que é aproximação) e a solução exacta.

De seguida apresentam-se os passos que exemplificam o desenvolvimento de um método numérico simples para resolver uma equação diferencial.

O ponto de partida é a noção de derivada e a sua relação com a derivada numérica. Considere a variável independente ***t*** e assuma-se que ***dt*** representa é um incremento pequeno, positivo e constante, mas diferente de zero. A derivada de ***h(t)*** pode ser aproximada por

$$\frac{d}{dt}(h(t))\approx\frac{h(t+dt)-h(t)}{dt} \quad .$$

Usando esta aproximação, a equação diferencial pode ser aproximada por

$$\frac{h(t+dt)-h(t)}{dt}\approx a\,h(t) \quad .$$

Organizando os termos, obtém-se uma equação discreta no tempo (a aproximação da solução em pontos discretos espaçados no tempo) ,

$$h(t+dt)=h(t)+a\,h(t)\,dt \quad ,$$

ou

$$h(t+dt)=(1+a\,dt)\,h(t) \quad .$$

É importante analisar o resultado que foi obtido. A equação anterior permite calcular de forma aproximada o valor de ***h(.)*** no instante ***t+dt***, sendo necessário conhecer o valor de ***h()*** no instante ***t***. Este resultado pode ser aplicado a $\boldsymbol{t_0}$, o que permite obter o resultado em $\boldsymbol{t_0+dt}$, depois em $\boldsymbol{t_0+2dt}$, …, até chegar a $\boldsymbol{t_0+n\,dt > t_f}$.

Consideremos agora a solução exacta para a=-1, que é dada por

$$h(t)=\exp(-t)$$

e efectue-se a comparação com a aplicação da equação discreta (recursiva)

$$h(t+dt)=(1-dt)\,h(t) \quad .$$

Esta equação pode gerar resultados estranhos se o valor de ***dt*** não for escolhido de forma cuidada. Suponha-se que ***dt*** é substituído pelo valor de 2 (corresponde a ter instantes de tempo 0, 2, 4, 6, 8, …). A equação assume o aspecto seguinte

$h(t+dt)=-h(t)$,

e gera os resultados, ***1, -1 , 1, -1, 1, …***!!! Por comparação com a solução exacta (***h(t) = exp(-t)***) é de concluir que o resultado apresenta um erro enorme, e como tal não pode ser considerada uma boa aproximação da solução da equação diferencial!

Ponto importante que é necessário recordar: A escolha do valor de ***dt*** (intervalo de integração) deve ser muito pequeno para obter uma solução numérica que tenha um erro pequeno.

Existem métodos numéricos mais sofisticados que efectuam o ajuste automático do valor de ***dt*** em função do nível de erro e apresentam desempenhos muito melhores que o método que foi apresentado. Mas a sua codificação/tradução na linguagem de programação também é mais complexa e trabalhosa.

4 Funcionalidades do programa

O programa deve funcionar de acordo com as regras seguintes,

1. O programa deve apresentar no ecrã uma lista de opções, como se exemplifica a seguir, e que serve de guia ao utilizador:

   ```
   Lista de opções:

   0 – Terminar o programa

   1 – Simular o movimento da aeronave

   2 – Visualizar resultados (gráficos)

   Selecione a opção:
   ```

   O utilizador selecciona uma das opções pressionando uma das teclas **0**, **1** ou **2** do teclado (seguido de Enter). O programa deve ler a opção e deve executar o trabalho correspondente. Após o processamento das opções **1** e **2** o programa deve apresentar novamente a lista de opções. A opção **0** corresponde a terminar o programa.

2. Na opção **1**, o programa deve ler os parâmetros do modelo ***(tf, dt, S, b, m, g,*** ρ***,*** C_{D0} ***, e,*** α***(0)*** *) e o estado inicial* ***(V(0),*** γ***(0) ,x(0), h(0))*** de um ficheiro de texto cujo nome é **config_model.txt**. Atenção α***(0)*** *representa o ângulo de ataque que é ajustado pelo piloto ao longo do voo, mas neste trabalho opta-se por utilizar um valor constante para toda a simulação do voo.*

   O passo seguinte nesta opção consiste no cálculo da solução do sistema de equações diferenciais (trajectória da aeronave) aplicando o método que está descrito na secção 3. O programa deve terminar o processo de cálculo da trajectória quando ocorrer uma das seguintes situações, a altitude ***h(t)*** é menor ou igual a zero, ou o ***t*** é maior ou igual a t_f (tempo final) . O programa deve indicar no ecrã informação relacionada com progressão de execução do cálculo.

   O programa deve guardar os dados calculados, ***t, V(t),*** γ***(t) ,x(t), h(t)*** num ficheiro de texto.

O nome do ficheiro é pedido ao utilizador pelo programa. Na primeira linha desse ficheiro deve guardar os parâmetros ***(tf, dt, S, b, m, g,*** ρ, C_{D0} ***, e,*** $\alpha(0)$***)***. As linhas seguintes devem ter os valores das variáveis ***t, V(t),*** $\gamma(t)$ ***,x(t), h(t)***. Atenção se a linha ***k*** tem os valores das variáveis do instante **w**, então a linha ***k+1*** deve conter os valores das variáveis do instante de tempo ***w+dt***.

3. Na opção **2**, o programa deve ler o conteúdo de um ficheiro de dados cujo nome é introduzido pelo utilizador para efectuar o gráfico de dados. O utilizador pode escolher a variável que é apresentada no eixo horizontal e a variável que é apresentada no eixo vertical. A escolha das variáveis pode ser realizada utilizando uma lista de opções.

   Exemplos (não exaustivos) de gráficos: Gráfico temporal ***(t, V(t))***, gráfico da trajectória ***(x(t), h(t))*** ou gráfico do alcance versus velocidade ***(x(t), V(t))***.

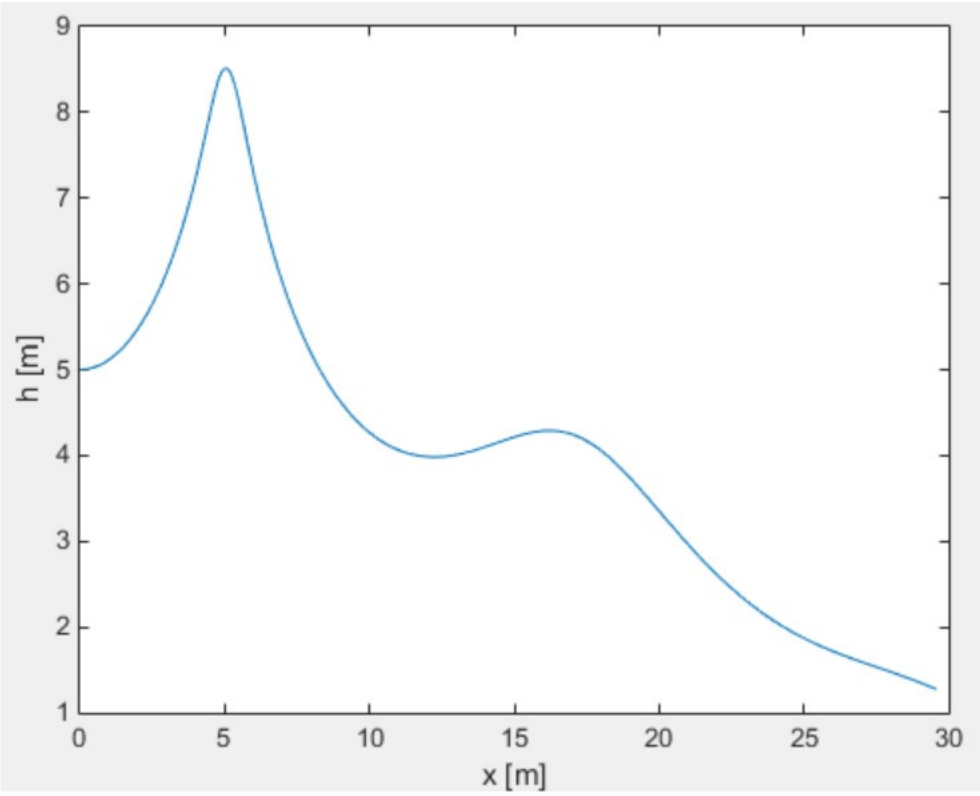

Fig.2 Exemplo de um gráfico com a trajectória, a qual depende de vários parâmetros e das condições iniciais.

De notar que se o programa não conseguir abrir o ficheiro, então ele deve escrever uma mensagem no ecrã e regressar à lista principal de opções.

5 Organização de dados e do código

Neste trabalho os dados podem ser guardados no programa em matrizes/vectores mas **não é permitido utilizar estruturas de dados (da linguagem C)**.

O código do programa deve estar organizado em funções, de acordo com as boas práticas seguintes:

1. As funções devem estar documentadas e as instruções devem estar bem alinhadas.
2. Uma função não deve ter mais de 50 a 60 linhas, tamanho da fonte 12pt.
3. Uma função deve ter no máximo 5 argumentos.

6 Organização dos ficheiros

O ficheiro de configuração da aplicação, de nome **config_model.txt,** é um ficheiro de texto em que a informação está organizada por linhas.

As linhas que no início tenham o carácter % devem ser ignoradas na leitura do ficheiro, são como comentários. As linhas vazias (terminadas com o carácter ‘\n’, ou tendo somente espaços) também devem ser ignoradas.

Exemplo da organização do ficheiro de configuração (config_model.txt):

```
% tf tempo final da simulação [s]
6.0

% Passo de integração dt  [s]
1e-5

% S – área da asa [m2]
2.0e-2

% b comprimento da asa  [m]
14e-2

% m – massa da aeronave [kg]
5e-3

% Aceleração da gravidade [m/s2]
9.801

% rho – densidade de ar ao nível do mar [kg/m3]
1.225

% CD0 – valor do coeficiente de drag para Cl = 0
0.02

% e – factor de eficiência de Oswald
0.9

% alpha – ângulo de ataque [rad] (cuidado com o valor desta variável !!!)
0.1

% V(0) -velocidade inicial [m/s]
```

```
11.0

% gamma(0) [rad] – flight path angle inicial
0.0

% x(0) posição horizontal inicial
0.0

% h(0) – altitude inicial [m]
5.0
```

Atenção: Não é permitida a alteração do significado e da ordem das linhas.

O ficheiro de resultados (exemplo: teste1.txt) tem o formato

```
(tf, dt, S, b, m, g,  r, CD0 , e,  α(0))

0.0000   V(0.0000)    γ(0.0000)    x(0.0000)    h(0.0000)
1.000e-5  V(1.000e-5) γ(1.000e-5) x(1.000e-5) h(1.000e-5)
...
w         V(w)         γ(w)         x(w)         h(w)
w+dt      V(w+dt)      γ(w+dt)      x(w+dt)      h(w+dt)
...
```

Nota: V(w) representa o valor numérico da velocidade no instante w. As colunas tem somente valores numéricos.

7 Desenvolvimento da aplicação e utilização da biblioteca gráfica

No desenvolvimento da aplicação é obrigatório a utilização da linguagem de programação C, norma C99. O acesso às funcionalidades gráficas é realizado utilizando a **biblioteca gráfica SDL2** que está instalada em todos os computadores do laboratório. Na página da disciplina e nas aulas de laboratório será exemplificada a utilização da biblioteca gráfica.

8 Entrega e avaliação

A aplicação será avaliada nos computadores do laboratório em ambiente (sistema operativo) Gnu-Linux. Os alunos devem testar a sua aplicação nos computadores de laboratório ANTES de realizarem o *upload* da versão final no sistema fénix.

Devem colocar num ficheiro zip o(s) ficheiro(s) do código fonte (ficheiro *.c) conjuntamente com o ficheiro de configuração. Não deve incluir o programa executável.

Elementos a serem avaliados nesta fase:

- Apresentação da lista de opções principal.
- Realização da opção 1,

    - Leitura do ficheiro de configuração.
    - Implementação do modelo do movimento longitudinal.
    - Implementação do método numérico para a determinação da resposta do modelo.
    - Guardar os dados no ficheiro de saída, o nome do ficheiro deve ser pedido ao utilizador.
    - Retorno à lista principal de opções.
  - Realização da opção 2,
    - Leitura do ficheiro de dados cujo nome é introduzido pelo utilizador.
    - Selecção das variáveis para gerar o gráfico.
    - Geração do gráfico utilizando as funcionalidades da biblioteca gráfica.
    - Possibilidade de apresentar outros gráficos sem ter que terminar a opção 2.
  - Utilizar um mecanismo iterativo para determinar qual deve ser o valor do ângulo de ataque que maximiza a distância horizontal percorrida pela aeronave!
  - Organização do programa, validação dos dados, das funções e da solução numérica.
- **Data de entrega:** Consultar a página da disciplina a data correspondente a **Entrega intermédia**.

9 Dúvidas

As dúvidas podem ser esclarecidas no início e no fim das aulas, e no horário de esclarecimento de dúvidas.

Nota: Na definição inicial das funcionalidades de uma aplicação, existem elementos que não estão completamente especificados. Nessas situações, o programador pode especificar os elementos em falta utilizando para o efeito justificações lógicas.

Votos de um voo excelente!