ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 7: Diagramas de fase.

~~Ejercicio 1.~~ *Dinámica unidimensional.* En cada una de las siguientes ecuaciones para $x(t)$ de la forma $\dot{x} = f(x)$, realizar el gráfico de $f(x)$, hallar los puntos de equilibrio y realizar un bosquejo de la dinámica en el eje x. A partir de esto analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(a) $\dot{x} = 1 - x^2$, (b) $\dot{x} = x^3 - x$, (c) $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$.

~~Ejercicio 2.~~ Dibujar los campos vectoriales siguientes y tratar de deducir cuáles son las correspondientes líneas de flujo:

(a) $F(x, y) = (x, y)$, (b) $F(x, y) = (-y, x)$,

(c) $F(x, y) = (y, 0)$, (d) $F(x, y) = (-x + 2y, -2x - y)$.

Ejercicio 3. Considerar el sistema a un parámetro,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x, \\ \dot{y} &= \lambda y, \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Determinar todas las soluciones y hacer un bosquejo del diagrama de fases para $\lambda = \cancel{-1}, 0, 1, 2$.

~~Ejercicio 4.~~ Sea A una matiz diagonal de 2×2. Encontrar condiciones sobre A que garanticen que:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

para todas las soluciones de $\dot{x} = Ax$.

~~Ejercicio 5.~~ Sea A una matriz de 2×2.

(a) ¿Cuál es la relación entre los campos $x \to Ax$ y $x \to (-A)x$?
(b) ¿Cuál es la relación geométrica entre la solución de $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = -Ax$?

~~Ejercicio~~ 6. Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y hacer un bosquejo del diagrama de fases.

Ejercicio 7. Hallar las soluciones y realizar un bosquejo del diagrama de fases para los sistemas (b) y (d) del Ejercicio 2.

Ejercicio 8. Realizar un gráfico aproximado de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales:

(a) $F(x, y) = (x^2, y^2)$ (b) $F(x, y) = (x, x^2)$ (c) $F(x, y) = (1, x + y)$

~~Ejercicio 9.~~ Para los siguientes sistemas, hallar los equilibrios y analizar su estabilidad.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen} x + \cos y \\ \dot{y} = xy \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = (x+1)e^y - 1 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 1 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$

Ejercicio 10. Para las siguientes ecuaciones, hallar los equilibrios y analizar su estabilidad:

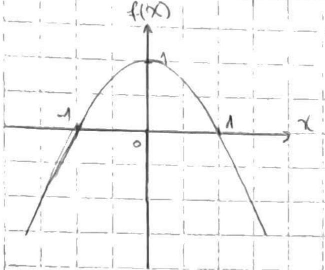
(d) $\ddot{x} + c\dot{x} - x^3 = 1$, (e) $\ddot{x} + x^3 - x = 0$, (f) $\ddot{x} - x + \cos x = 0$.

-PRÁCTICA 7-
Diagramas de fase ~

(1) *Dinámica unidimensional.* En cada una de las siguientes ecuaciones para $x(t)$ de la forma $\dot{x} = f(x)$, realizar el gráfico de $f(x)$, hallar los puntos de equilibrio y realizar un bosquejo de la dinámica en el eje x. A partir de eso analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

a) $\dot{x} = 1 - x^2$ • Puntos de equilibrio: $f(x) = 0$

$(1 - x^2) = 0 \iff x = 1$ y $x = -1$ ← Ptos. de equilibrio

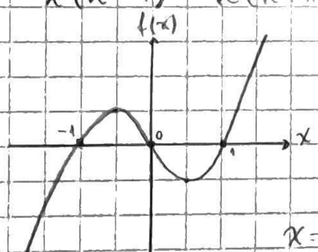


$x = 1$ es un pto de equilibrio estable (en un entorno abierto, la trayectoria tiende a 1).

$x = -1$ es un pto de equilibrio inestable (la trayectoria tiende a alejarse del -1).

b) $\dot{x} = x^3 - x$ • Ptos de equilibrio: $f(x) = 0$

$x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1) = 0 \iff x = 0,\ x = 1,\ x = -1$

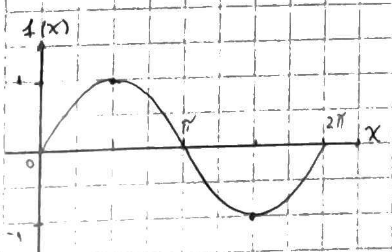


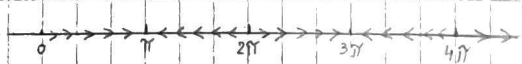
$x = 1$ y $x = -1$ son puntos inestables (tiende a alejarse de ellos).

$x = 0$ es pto de equilibrio estable (se meten en un entorno abierto alrededor del 0).

c) $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$ • Ptos de equilibrio: $f(x) = 0$

$\operatorname{sen}(x) = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$





Si k es par: $x = k\pi$ es pto. de equilibrio inestable

Si k es impar: $x = k\pi$ es pto de equilibrio estable.

⑧ Determinar todas las soluciones del sistema $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
y hacer un bosquejo del diagrama de fases

$\det (A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$ $\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{array}$

Busco autovectores asociados

$\lambda = 2$

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -b \Longrightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$:

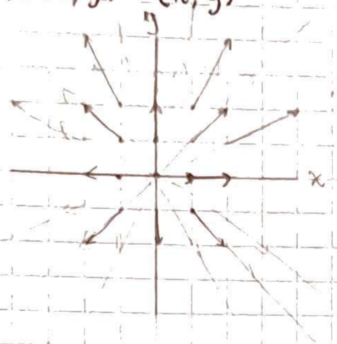
$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -2a = b \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Luego $S = \underbrace{c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{y}$

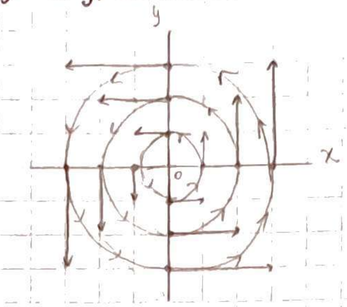
- PRÁCTICA 7 -

② Dibujar los campos vectoriales siguientes y tratar de deducir las líneas de flujo:

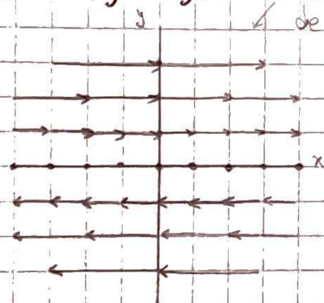
a) $F(x,y) = (x,y)$



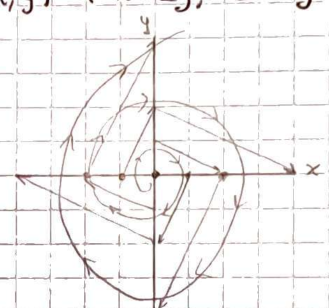
b) $F(x,y) = (-y,x)$



c) $F(x,y) = (y,0)$ casi con las líneas de flujo también



d) $F(x,y) = (-x+2y, -2x-y)$



③ Considerar el sistema a un parámetro $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinar todas las soluciones y hacer un bosquejo del diagrama de fases para $\lambda = -1, 0, 1, 2$.

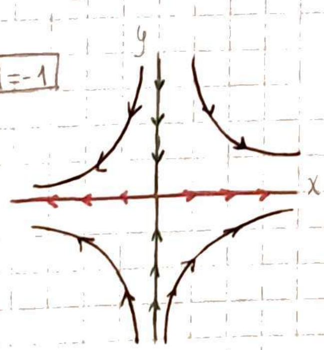
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = c_1 e^{2t} \\ y = c_2 e^{\lambda t} \end{array}$$

Chequeo:

$$\begin{cases} x' = 2c_1 e^{2t} = 2x \checkmark \\ y' = \lambda c_2 e^{\lambda t} = \lambda y \checkmark \end{cases}$$

Despejo e^t de $x = c_1 e^{2t} \Rightarrow e^t = \left|\frac{x}{c_1}\right|^{1/2} \Rightarrow y = c_2 \left|\frac{x}{c_1}\right|^{\frac{\lambda}{2}} = k \cdot \sqrt{|x|}^{\lambda}$

$\boxed{\lambda = -1}$



$c_1 = 0$, $y = c_2 e^{\lambda t} = c_2 e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$c_2 = 0$, $x = c_1 e^{2t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$

$c_1, c_2 > 0$, $c_1, c_2 < 0$

④ Sea A una matriz diagonal de 2x2. Encontrar cond. sobre A que garanticen que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ para todas las soluciones de $\dot{x} = Ax$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ Sean $x_1 = c_1 e^{at}$, $x_2 = c_2 e^{bt}$ las soluciones.

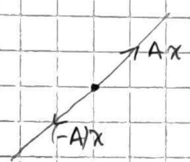
Para que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{at} \\ c_2 e^{bt} \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a, b < 0}$

⑤ Sea A una matriz de 2x2.

a) ¿Cuál es la relación entre los campos $x \to Ax$ y $x \to (-A)x$?

Son opuestos

b) ¿Cuál es la relación geometrica entre la solución de $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = -Ax$?



Recorren la misma linea de flujo en sentidos opuestos

⑥ Determinar todas las soluciones del sistema $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y hacer un bosquejo del diagrama de fases.

Autovalores: $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -20 - \lambda + \lambda^2 + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$

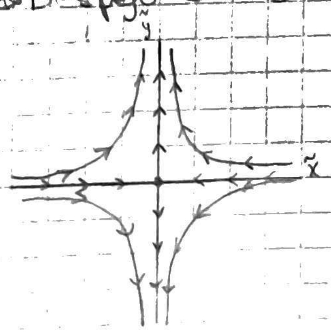
$\Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2.$

Autovectores: $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \lambda = -1$

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 2$

Luego $X = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}^{A}\begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$ llamo $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$

(*) Despejo e^t: $e^t = \dfrac{c_1}{\tilde{x}} \Rightarrow \tilde{y} = c_2 \left(\dfrac{c_1}{\tilde{x}}\right)^2 = k \cdot \dfrac{1}{(\tilde{x})^2}$ (forma de hipérbola)



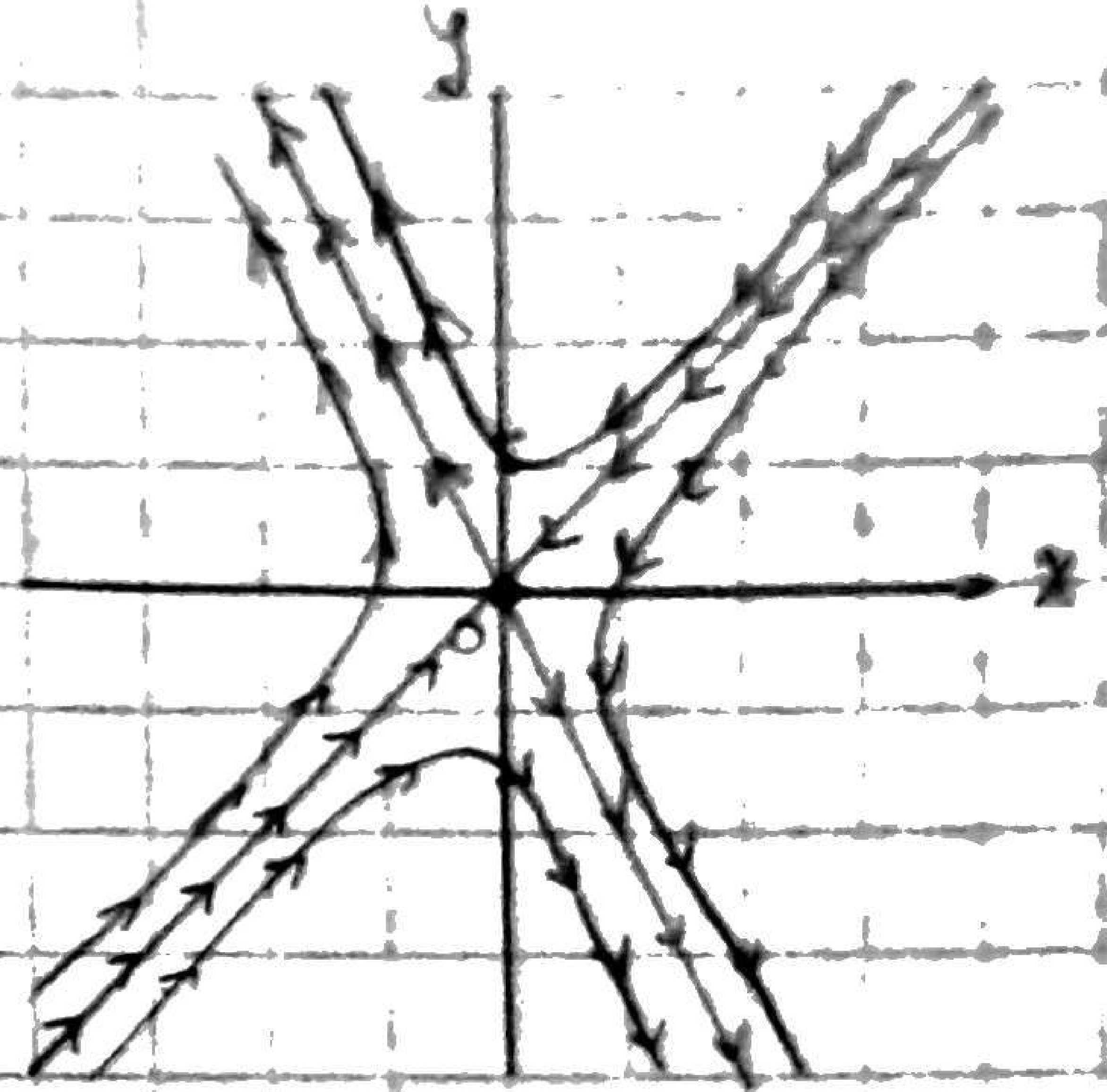
$\tilde{x} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \tilde{X} = c_2 e^{2t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

$\tilde{y} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow \tilde{X} = c_1 e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Si $\tilde{x} \neq 0$ y $\tilde{y} \neq 0 \Rightarrow$ (*) y heredan la orientación de los ejes

Transformamos los ejes: $A \cdot \mathcal{E}_1 = \boxed{}$ y $A \cdot \mathcal{E}_2 = \boxed{}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



⑨ Para los siguientes sistemas, hallar los equilibrios y analizar su estabilidad

a) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen} x + \cos y \\ \dot{y} = xy \end{cases}$ Si vale, uso Teo de linealización

$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x + \cos y \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $xy = 0$ $\rightarrow x=0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow y=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$P_1 = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $P_2 = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$ ← Ptos de equilibrio

$DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} y \\ y & x \end{pmatrix}$. Si $k=0$ para facilitar:

$DF(P_1) = DF\begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \pi/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ \pi/2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda + \frac{\pi}{2}$

$\lambda^2 - \lambda + \frac{\pi}{2} = 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-2\pi}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2\pi-1}}{2} i$, $Re(\lambda) \neq 0 \Rightarrow$ Vale Teo

$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\pi-1}}{2} i$, $\beta < 0$, $\alpha > 0$ si $\lambda = \alpha + \beta i$

Como $\alpha > 0 \Rightarrow P_1$ es un punto de equilibrio inestable

$DF(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3\pi/2 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{3\pi}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{3\pi}{2}\lambda = \lambda\left(\lambda - \frac{3\pi}{2}\right)$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

No vale el teorema pues $Re(\lambda_1) = 0$

9 b) $\begin{cases} \dot{x} = (x+1)e^{y} - 1 = F_1(x,y) \\ \dot{y} = x + y = F_2(x,y) \end{cases}$ $F = \begin{pmatrix} (x+1)e^{y} - 1 \\ x+y \end{pmatrix}$

$F_2(x,y) = 0 \iff x = -y$

Reemplazo en $F_1(x,y)$: $(x+1)e^{y} - 1 = 0 \iff e^{y}(x+1) = 1$

Si $x = 0 = y$, $0 = 0$ ✓ $1 = 1$ ✓ $\Rightarrow \boxed{P_1 = (0,0)}$

$x = 0, y \neq 0$, $e^{y} = 1 \Rightarrow y = 0$; $x \neq 0, y = 0$, $(x+1) = 1 \iff x = 0$

Si $x \neq 0 \neq y$, $y = -\ln(1-y) = -\ln(x+1)$

$P = (0,0)$ pto de equilibrio:

$DF = \begin{pmatrix} e^{y} & (x+1)e^{y} \\ 1+y & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda-2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ el Teorema no se aplica pues $Re(\lambda_1) = 0$.

c) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 1 = F_1(x,y) \\ \dot{y} = xy = F_2(x,y) \end{cases}$ $F = \begin{pmatrix} x^2 - y - 1 \\ xy \end{pmatrix} \Rightarrow DF = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$

Busco puntos de equilibrio:

$xy = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \Rightarrow -y - 1 = 0 \iff y = -1 \Rightarrow P_1 = (0,-1) \\ y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1 \Rightarrow P_2 = (1,0),\ P_3 = (-1,0) \end{cases}$

- $P_1 = (0,-1)$

$DF(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Aplica el Teorema pues $Re(\lambda) \neq 0 \ \forall \lambda$ autovalor

$\underline{\lambda = 1}$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$c_1 \neq 0$, $e^{t} = \frac{y_1}{c_1} \Rightarrow t = \ln\left|\frac{y_1}{c_1}\right|$

$y_2 = c_2 e^{-\ln|\frac{y_1}{c_1}|} = c_2 \cdot \frac{c_1}{y_1}$

Todo esto es medio al pedo. Para analizar estabilidad bastaba con ver que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ luego, las trayectorias se alejan del $(0,-1)$ en la dire del vector asoc a λ_1 y se acercan en el de λ_2

$\Rightarrow (0,-1)$ es inestable

- $P_2 = (1,0)$

$DF(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Funciona el Teo pues $Re(\lambda) \neq 0 \ \forall \lambda$ autovalor.

Como $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ el punto es inestable pues las trayectorias se alejan del punto de equilibrio cuando $t \to +\infty$

- $P_3 = (-1,0)$

$DF(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda)$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

Funciona el Teorema pues $Re(\lambda) \neq 0 \ \forall \lambda$ autovalor

Como $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ el punto es estable pues las trayectorias se acercan al punto cuando $t \to +\infty$

(10) Para las siguientes ecuaciones, hallar los equilibrios y analizar su estabilidad

d) $\ddot{x} + c\dot{x} - x^3 = 1 \Rightarrow \ddot{x} = 1 + x^3 - c\dot{x}$

$\begin{cases} x_0 = x \\ x_1 = x' \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0' = x' = x_1 \\ x_1' = x'' = 1 + x_0^3 - c x_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = 1 - c x_1 + x_0^3 \end{cases}$

Busco puntos de equilibrio:

$x_1 = 0 \Rightarrow 1 - c\,0 + x^3 = 0 \iff x_0^3 = -1 \iff x_0 = -1 \Rightarrow P_1 = (-1,0)$

$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x_0^2 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow DF(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & -c-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + c\lambda - 3 = 0 \iff$

$\iff \lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+12}}{2} \in \mathbb{R}$ CA: $\sqrt{c^2+12} > c \iff c^2+12 > c^2 \iff 12 > 0$ ✓

$\lambda_1 = \frac{-c+\sqrt{c^2+12}}{2} > 0$, $\lambda_2 = \frac{-c-\sqrt{c^2+12}}{2} < 0$. Tengo un autovalor positivo y otro negativo

$\Rightarrow P_1 = (-1,0)$ es pto de equilibrio inestable

e) $\ddot{x} + x^3 - x = 0 \iff x'' = x - x^3$

$x_0 = x$, $x_1 = x'$ $\Rightarrow \begin{cases} x_0' = x' = x_1 \\ x_1' = x'' = x_0 - x_0^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_0 - x_0^3 \end{cases}$

Busco ptos de equilibrio:

$x_1 = 0$, $x_0 - x_0^3 = 0 \iff x_0(1 - x_0^2) = x_0(1 - x_0)(1 + x_0) = 0 \iff x_0 = 0, x_0 = 1, x_0 = -1$

$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_0^2 & 0 \end{pmatrix}$

- $P_1 = (0,0)$:

$DF(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ Aplico el Teorema! $Re(\lambda) \neq 0 \ \forall \lambda$

Caso $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \Rightarrow P_1 = (0,0)$ es pto de equilibrio inestable.

- $P_2 = (1,0)$

$DF(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{2}\, i$ No aplico el teorema ∵ $Re(\lambda) = 0$

- $P_3 = (-1, 0)$ queda igual que P_2.

f) $\ddot{x} - x + \cos(x) = 0 \iff x'' = x - \cos(x)$

$x_0 = x$, $x_1 = x'$ $\Rightarrow \begin{cases} x_0' = x' = x_1 \\ x_1' = x'' = x_0 - \cos(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_0 - \cos(x_0) \end{cases}$

Busco ptos. equilibrio:

$x_1 = 0$, $x_0 - \cos(x_0) = 0 \iff x_0 = \cos(x_0)$. Se $\alpha / \alpha = \cos(\alpha) \Rightarrow x_0 = \alpha$

$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + sen(x_0) & 0 \end{pmatrix}$, $DF(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + sen(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 + sen(\alpha) & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 - sen(\alpha)$

11) Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales hallar los puntos de equilibrio y esbozar el diagrama de fases alrededor de c/uno:

a) $\begin{cases} \dot{x} = xe^y \\ \dot{y} = -1 + y + \operatorname{sen}(x) \end{cases}$ $\quad F = \begin{pmatrix} xe^y \\ -1 + y + \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}$

$xe^y = 0 \iff x = 0 \Rightarrow -1 + y = 0 \iff y = 1 \Rightarrow P_1 = (0, 1)$

$DF = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ \cos(x) & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0,1) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} e-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (e-\lambda)(1-\lambda) = 0 <\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = e \end{matrix}$

Funciona el Teorema :)
(lo analizo como si fuera el (0,0))

Busco autovectores:

$\underline{\lambda_1 = 1}: \begin{pmatrix} e-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

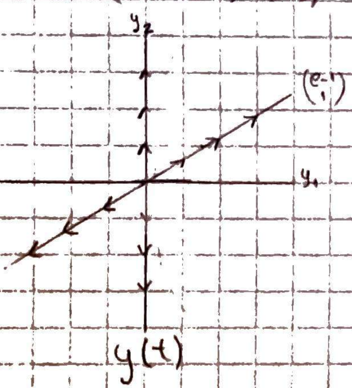
$\underline{\lambda_2 = e}: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

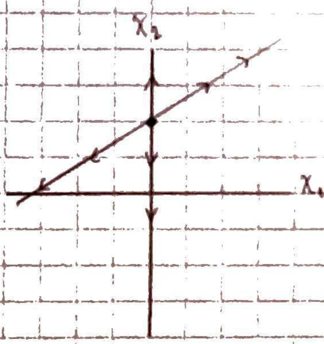
$y = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{et} \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{et} \end{pmatrix}$

$y_1 = c_1 e^t \underset{c_1 \neq 0}{\Rightarrow} t = \ln \left| \frac{y_1}{c_1} \right|$

$y_2 = c_2 e^{\ln\left|\left(\frac{y_1}{c_1}\right)^e\right|} =$





b) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - 1 \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases}$ $\quad F = \begin{pmatrix} e^{x-y} - 1 \\ xy - 1 \end{pmatrix}$

$e^{x-y} - 1 = 0 \iff e^{x-y} = 1 \iff x - y = 0 \iff x = y$

Reemplazando $y^2 - 1 = 0 \iff y = \pm 1 \Rightarrow P_1 = (1, 1),\ P_2 = (-1, -1)$

$DF = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ y & x \end{pmatrix}$

• $P_1 = (1,1)$: $DF = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$ Funciona el Teo pues $Re(\lambda) \neq 0$

$\underline{\lambda = 1-i}$: $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 i - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = a_1 i \Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

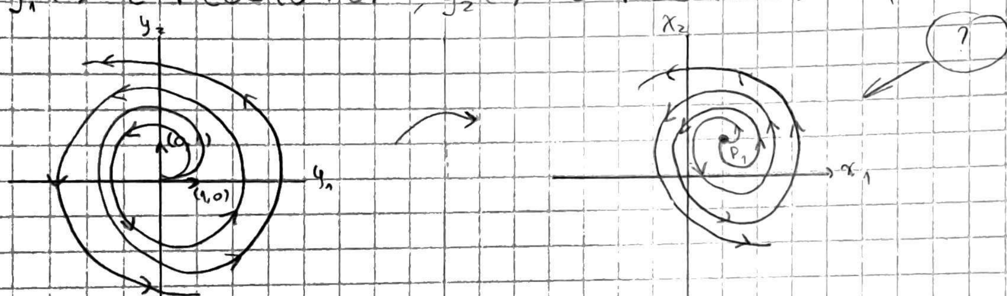
$\omega = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$ $\quad X(t) = c_1 \, Re\left(e^t e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) + c_2 \, Im\left(e^t e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right)$

$= c_1 \, Re\left(e^t (\cos(-t) + i \, sen(-t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) + c_2 \, Im(\ \cdots\ )$

$\Rightarrow X(t) = \underbrace{e^t (c_1 \cos(-t) + c_2 \, sen(-t))}_{y_1(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{e^t(-c_1 \, sen(-t) + c_2 \cos(-t))}_{y_2(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Llamo $c_1 = r\cos\theta$, $c_2 = r \, sen\theta$

$y_1(t) = e^t r \cos(\theta + t)$, $y_2(t) = e^t r \, sen(\theta + t)$ $\quad \alpha > 0$



• $P_2 = (-1,-1)$: $DF = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 <$ $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

Funciona el teorema :) Busco autovectores:

$\underline{\lambda_1 = \sqrt{2}}$: $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(1-\sqrt{2})a_1 = a_2 \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

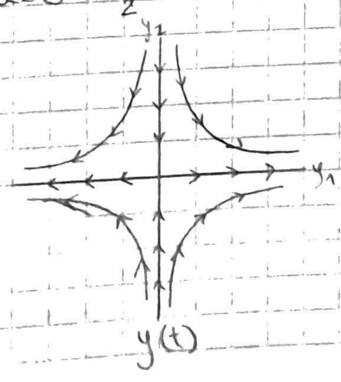
$\underline{\lambda_2 = -\sqrt{2}}$: $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(1+\sqrt{2})a_1 = a_2 \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

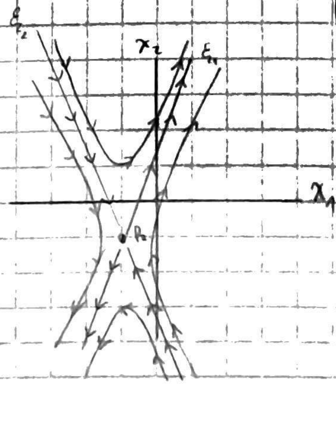
$X(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\boxed{C}} \overbrace{\begin{pmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}t} \\ c_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}}^{\varphi(t)}$

← Si $\det C > 0$, preserva orientación

$\det C < 0$, invierte.

Caso $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$





c) $\begin{cases} \dot{x} = x(y-1)-4 \\ \dot{y} = x^2-(y-1)^2 \end{cases}$ $\quad x(y-1)=4 \Rightarrow (y-1) = \dfrac{4}{x}$ $\quad$ Reemplazo $\quad x^2 - \dfrac{16}{x^2} = 0$

$x \neq 0$ ⊛

$x^4 - 16 = 0 \iff x^4 = 16 \iff x = \pm 2 \Rightarrow y-1 = 2$ ó $y-1=-2 \Rightarrow$

$P_1 = (2,3)$, $P_2 = (-2,-1)$ $\quad$ ⊛ Si $x=0$, $-4=0$ No $\Rightarrow$ P_1 y P_2 son mis únicos ptos de equilibrio.

$$DF = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ 2x & -2(y-1) \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (2,3)$, $DF(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 16 = 0 \iff \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{68}}{2} = -1 \pm \sqrt{17}.$$

Se buscan autovectores y se hacen los gráficos, vale el Teo pues $Re(\lambda) \neq 0$. Pero son re feos los autovalores, ni ganas.