Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 3: Integrales de superficie.

~~Ejercicio 1.~~ Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

~~(a)~~ $r = k \quad (k = cte)$.

~~(b)~~ $\varphi = k, \quad k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

Ejercicio 2.

~~(a)~~ Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u,v) = \left(u, v, \tfrac{u^2}{a^2} + \tfrac{v^2}{b^2}\right), \quad \text{con } a, b \text{ no nulos,}$$
$$\Phi_2(u,v) = \left(au\ \cos(v), bu\ \sin(v), u^2\right),$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

(b) Mostrar que

$$\Phi(u,v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big)$$

con $0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro** (ver el ejercicio de las superficies de revolución al final de esta práctica). ?

~~Ejercicio 3.~~ Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\ \cos(v), \qquad y = u\ \operatorname{sen}(v), \qquad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xy dada en polares por:

$$r = 2 - \cos\theta \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje y.

(a) Dar una parametrización de S.

(b) ¿Es suave esta superficie?

~~Ejercicio 5.~~ Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

~~Ejercicio 6.~~ Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

~~Ejercicio 7.~~ Sea $\phi(r, \theta) : [0,1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\operatorname{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

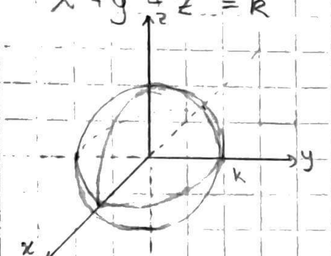
la parametrización de una superficie $\mathcal{S}$. Graficar $\mathcal{S}$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

- PRÁCTICA 3 -

① Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

(a) $r = k \quad (k = cte.) \longrightarrow \begin{cases} x = k\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = k\cos\varphi \end{cases} = T(\theta, \varphi)$

$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$

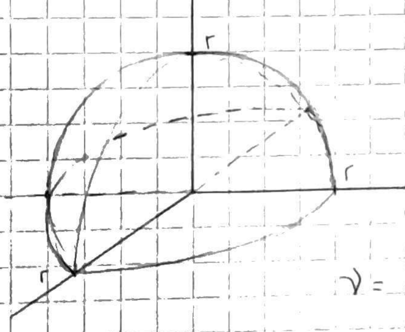


$T_\theta = (-k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, k\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, 0)$

$T_\varphi = (k\cos\theta\cos\varphi, k\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -k\operatorname{sen}\varphi)$

(b) $\varphi = k, \ k \in [0, \pi/2]$ cte. $\longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \operatorname{sen}k \\ y = r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}k \\ z = r\cos k \end{cases} = T(r, \theta)$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



$T_r = (\cos\theta \operatorname{sen}k, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}k, \cos k)$

$T_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}k, r\cos\theta \operatorname{sen}k, r\cos k)$

$T_r \times T_\theta = (r\operatorname{sen}k\cos k(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta), r\operatorname{sen}k\cos k(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta), r\operatorname{sen}^2 k)$

$\|T_r \times T_\theta\|$

$\nu = \dfrac{T_r \times T_\theta}{\|T_r \times T_\theta\|}$

② a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2}\right)$ con a, b, no nulos; $\Phi_2(u, v) = (au\cos(v), bu\operatorname{sen}(v), u^2)$

son dos parametrizaciones del paraboloide elíptico.

Qvq $Im(\Phi_1) = Im(\Phi_2) = Im(S)$ con $\left\{ f(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \right\} = S = \left(x, y, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)$

$Im(\Phi_1) \subseteq S$ $\quad \exists (u, v) \in Dom\,\Phi_1$ Qvq $\Phi_1(u, v) \in S$

$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2}\right) = (x, y, z) \Rightarrow z$ cumple $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

luego $Im(\Phi_1) \subseteq S$.

$Im(\Phi_1) \supseteq S$ $\quad$ Sea $(x, y, z) \in S$, qvq $(x, y, z) = \Phi_1(u, v) = \left(u, v, \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2}\right)$

Sea $x = u, y = v \Rightarrow z = \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} \Rightarrow (x, y, z) = \Phi_1(u, v)$

luego $Im(\Phi_1) \supseteq S$

$\therefore Im(\Phi_1) = S$

Qvq Φ_1 inyectiva: $\Phi_1(u,v) = \Phi_1(s,t) \Rightarrow \left(u, v, \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right) = \left(s, t, \frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}\right)$

De la 1ra y 2da coordenada, $u=s$ y $v=t \Rightarrow (u,v)=(s,t)$

Luego Φ_1 inyectiva

Qvq Φ_1 es C^1: Si pues cada coordenada lo es.

x

Qvq $\operatorname{Im}\Phi_2 \subseteq S$ $\exists (u,v) \in \operatorname{Dom}(\Phi_2)$, qvq $\Phi_2(u,v) \in S$

$(au\cos(v), bu\,\text{sen}(v), u^2)$ Qvq $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$u^2 = \frac{\cancel{a^2}u^2\cos^2(v)}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{b^2}u^2\,\text{sen}^2(v)}{\cancel{b^2}} = u^2(\cos^2 v + \text{sen}^2 v) = u^2$ ✓

Luego $\operatorname{Im}(\Phi_2) \subseteq S$

Qvq $\operatorname{Im}(\Phi_2) \supseteq S$ Sea $(x,y) \in S$, $\exists (u,v) \in \Phi_2$ tq $\Phi_2(u,v) = (x,y,z)$

Tomo $(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow (u,v) = (0,v)$

$\Phi_2(0,v) = (0,0,0)$ ✓

Luego $\operatorname{Im}(\Phi_2) \supseteq S$

$\therefore \operatorname{Im}(\Phi_2) = S$

Qvq Φ_2 es inyective $\Phi_2(u,v) = \Phi_2(s,t) \overset{?}{\Rightarrow} (u,v) = (s,t)$

$(au\cos(v), bu\,\text{sen}(v), u^2) = (as\cos t, bs\,\text{sen}\,t, s^2)$

$$\begin{cases} \cancel{a}u\cos v = \cancel{a}s\cos t \\ \cancel{b}u\,\text{sen}\,v = \cancel{b}s\,\text{sen}\,t \\ u^2 = s^2 \longrightarrow u = s \text{ ó } u = -s \end{cases}$$

Como $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$
$u \neq -s \Rightarrow \boxed{u = s}$

Luego $\begin{cases} \cos v = \cos t \\ \text{sen}\,v = \text{sen}\,t \end{cases} \xrightarrow{\text{con } u \neq 0} v = t + 2k\pi$ pero $v \in [0, 2\pi) \Rightarrow \boxed{v = t}$

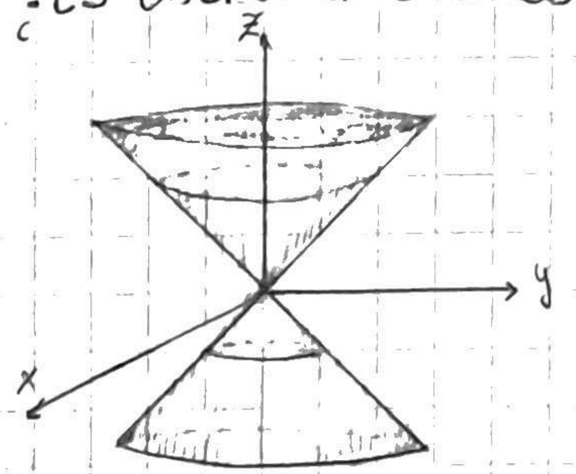
$\therefore (u,v) = (s,t)$

Qvq Φ_2 es C^1: Sí pues cada coordenada lo es.

③ Considerar la superficie dada por la parametrización;

$$x = u\cos v \,,\; y = u \operatorname{sen} v \,,\; z = u$$

¿Es diferenciable esta param? ¿Es suave la superficie?



$$T(u,v) = (u\cos v\,, u \operatorname{sen} v\,, u)$$

$$T_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, 1)$$
$$T_v = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

$$T_u \times T_v = (-u\cos v, u\operatorname{sen} v, u) \neq 0 \iff u \neq 0$$
$$\Downarrow$$

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{u^2+u^2} = u\sqrt{2}$$

En $u=0$ la normal del plano tg es cero luego, la superficie no es suave.

$$\nu = \frac{(-u\cos v, u\operatorname{sen} v, u)}{u\sqrt{2}} \leftarrow \text{si } u \neq 0.$$

Ademas en $v = 0$ y $v = 2\pi$, $T(u,0) = T(u,2\pi) \Rightarrow$ no es inyectiva la param.

⑤ Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera, de radio a y centro en el origen, en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

Delirio

$$T(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ a\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ a\cos\varphi)$$

$$T_\theta(\theta,\varphi) = (-a\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ a\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ 0)$$
$$T_\varphi(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\cos\varphi,\ a\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi,\ -a\,\text{sen}\,\varphi)$$

$$T_\theta \times T_\varphi = (-a^2\cos\theta\,\text{sen}^2\varphi,\ -a^2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}^2\varphi,\ -a^2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi)$$

$$\|T_\theta\times T_\varphi\| = \sqrt{a^4\cos^2\theta\,\text{sen}^4\varphi + a^4\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^4\varphi + a^4\,\text{sen}^2\varphi\cos^2\varphi} = a^2\,\text{sen}\,\varphi\sqrt{\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi}$$
$$= a^2\,\text{sen}\,\varphi$$

$$\nu = \frac{T_\theta\times T_\varphi}{\|T_\theta\times T_\varphi\|} = (-\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ -\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ -\cos\varphi) \leftarrow \text{con } \varphi\neq 0,\ \varphi\neq\pi$$

$$-\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\,(x-x_0) - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,(y-y_0) - \cos\varphi\,(z-z_0) = 0$$

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{x^2+y^2+z^2=a}_{f}\}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow 2x(x-x_0) + 2y(y-y_0) + 2z(z-z_0) = 0$$

⑥ Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto $(0,1,1)$ a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u,\ y = u^2+v,\ z = v^2$$

$$T(u,v) = (2u,\ u^2+v,\ v^2)$$

$$\begin{cases} x = 2u = 0 \Rightarrow u = 0 \\ y = u^2+v = 1 \\ z = v^2 = 1 \Rightarrow v = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow v = 1$$

$$T_0 = (0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} T_u = (2, 2u, 0) \\ T_v = (0, 1, 2v) \end{array}\right\} T_u\times T_v = (4uv, -4v, 2)\quad \underbrace{\|T_u\times T_v\| = \sqrt{16u^2v^2+16v^2+4}}$$

$$\|T_u\times T_v\|(0,1) = \sqrt{0+16+4} = 2\sqrt{5}$$

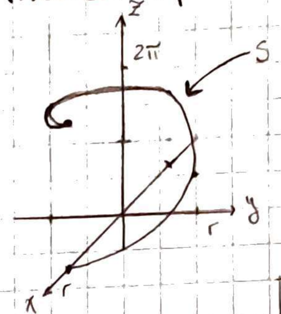
Luego, $\nu = \dfrac{T_u\times T_v}{\|T_u\times T_v\|}(0,1) = \dfrac{(0,-4,2)}{2\sqrt5} = \left(0, \dfrac{-2}{\sqrt5}, \dfrac{1}{\sqrt5}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_{tg}: -\frac{2}{\sqrt5}(y-1) + \frac{1}{\sqrt5}(z-1) = 0}$$

⑦ Sea $\phi(r,\theta): [0,1]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\,\text{sen}\,\theta,\ z = \theta$$

la parametrización de una superficie S. Graficar S, hallar un vector normal en c/punto y hallar su área.



$$\nu = \frac{T_\theta \times T_r}{\|T_\theta \times T_r\|} \qquad T_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 1)$$
$$T_r = (\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta,\ 0)$$

$$T_\theta \times T_r = (-\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta,\ -r)$$

$$\|T_\theta \times T_r\| = \sqrt{1+r^2}$$

$$\boxed{\nu = \frac{(-\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta,\ -r)}{\sqrt{1+r^2}}}$$

$$\text{Area}(S) = \iint_D \|T_\theta \times T_r\|\,dr\,d\theta = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2}\,d\theta\,dr = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,dr =$$

$r = \text{senh}\,u$
$dr = \cosh u\,du$
si $r=0,\ u=0$
$r=1,\ u=\ln(1+\sqrt{2})$

$$= 2\pi\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \cosh^2 u\,du = 2\pi\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du$$

$$= \frac{\cancel{8}\pi}{\cancel{4}2}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (e^{2u}+2+e^{-2u})\,du = \pi\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \Big(\underbrace{\frac{e^{2u}+e^{-2u}}{2}}_{\cosh(2u)}+1\Big)\,du$$

$\text{senh}^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
$\text{tgh}^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\ln(1+\sqrt{2}) = \text{senh}^{-1}(1)$

$$= \pi\left[\frac{\text{senh}(2u)}{2}+u\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}$$

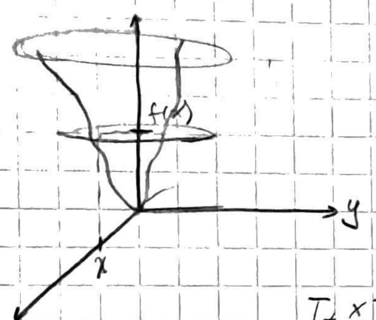
$$= \pi\left(\frac{\overset{1}{\text{senh}\,(\ln(1+\sqrt{2})^2)}}{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}+\pi\ln(1+\sqrt{2})$$

(10) Si tenemos una curva en el plano xz dada por $\{(x, 0, f(x))\ x \in [\alpha, \beta]\}$ con $\alpha > 0$ y consideramos la superficie de revolución alrededor del eje z, muestre que el área de esta superficie es

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \checkmark$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$ y $a = b = 1$.



$$\left.\begin{array}{l} r = x \\ z = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow T(t, x) = (x\cos t, x\,\text{sen}\,t, f(x))$$
con $t \in [0, 2\pi]$, $x \in [\alpha, \beta]$

$$T_t = (-x\,\text{sen}\,t, x\cos t, 0)$$

$$T_x = (\cos t, \text{sen}\,t, f'(x))$$

$$T_t \times T_x = (xf'(x)\cos t, xf'(x)\,\text{sen}\,t, -x)$$

$$\|T_t \times T_x\| = \sqrt{x^2[f'(x)]^2 + x^2} = x\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,d\theta =$$

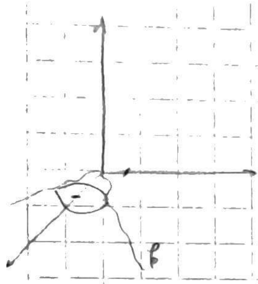
$$\therefore A(S) = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Paraboloide: $\Phi_2(u, v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, u^2)$, $1 \leq u^2 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq u \leq \sqrt{2}$

$$A(S) = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} u\cos v\sqrt{1+u^2}\,du$$

(11) Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por $\begin{cases} x(\theta) = \cos^3\theta \\ y(\theta) = \text{sen}^3\theta \end{cases}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy. Sea S la superficie ~~de revolución alrededor del eje x, muestre que el área de esta superficie es~~ que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x.

(a) Hallar una parametrización de S



$$\sigma(\theta) = (\cos^3\theta, \text{sen}^3\theta, 0) \quad , \theta \in [0, 2\pi]$$

$$S: T(\theta, t) = (\cos^3\theta, \text{sen}^3\theta \cdot \cos t, \text{sen}^3\theta \cdot \text{sen}\, t), \ \theta \in [0, 2\pi], \ \underbrace{t \in [0, 2\pi]}_{?}$$

$t \in [0, \pi]$

(b) Hallar el área de S.

$$T_\theta = (-3\cos^2\theta\, \text{sen}\,\theta, \ 3\text{sen}^2\theta \cos\theta \cos t, \ 3\text{sen}^2\theta \cos\theta \cdot \text{sen}\, t)$$

$$T_t = (0, \ -\text{sen}^3\theta\, \text{sen}\, t, \ \text{sen}^3\theta \cos t)$$

$$T_\theta \times T_t: \ x = 3\text{sen}^5\theta \cos\theta \cos^2 t + 3\text{sen}^5\cos\theta\, \text{sen}^2 t = 3\text{sen}^5\theta \cos\theta$$

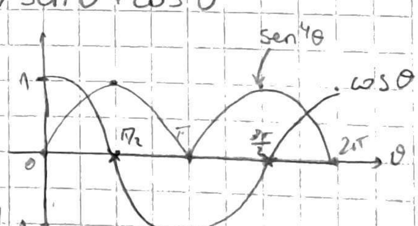
$$y = 3\text{sen}^4\theta \cos^2\theta \cos t$$

$$z = 3\,\text{sen}^4\theta \cos^2\theta\, \text{sen}\, t$$

$$\|T_\theta \times T_t\| = \sqrt{9\text{sen}^{10}\theta \cos^2\theta + 9\text{sen}^8\theta \cos^4\theta \cos^2 t + 9\text{sen}^8\theta \cos^4\theta\, \text{sen}^2 t} =$$

$$= \sqrt{9\text{sen}^{10}\theta \cos^2\theta + 9\,\text{sen}^8\theta \cos^4\theta} = 3|\text{sen}^4\theta \cos\theta| \sqrt{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}$$

$$A(S) = \iint_D 3\sqrt{\text{sen}^8\theta \cos^2\theta}\, d\theta\, dt = 3\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen}^8\theta \cos^2\theta}\, d\theta$$



$$= 3\pi \int_0^{2\pi} |\text{sen}^4\theta| \cdot |\cos\theta|\, d\theta =$$

$$= 3\pi \left[\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta \cos\theta\, d\theta - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \text{sen}^4\theta \cos\theta\, d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \text{sen}^4\theta \cos\theta\, d\theta \right]$$

$$= 3\pi \left[\frac{\text{sen}^5\theta}{5} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\text{sen}^5\theta}{5} \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{\text{sen}^5\theta}{5} \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \right] = 3\pi \left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} \right]$$

$$= 3\pi \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{12}{5}\pi}$$