ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales.

Ejercicio 1. Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar $x(t)$ la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

a) $x' - 2tx = t, \quad x(1) = 0,$ b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$

c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = 1,$ d) $x' = \dfrac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$

e) $x' - x^{1/3} = 0, \quad x(0) = 0,$ f) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

Ejercicio 2. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función definida como el cociente y'/y.

(a) Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.
(b) Dibujar el gráfico de $y(t)$ para poblaciones con tasa de crecimiento constante, positiva y negativa.
(c) ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?
(d) Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 2002 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2022, usando los resultados anteriores.
(e) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de t $(at + b)$.
(f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

Ejercicio 3. Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en 1 hora ¿Cuánto habrá aumentado en 2 horas?.

Ejercicio 4. Verifique que las siguientes ecuaciones en $x = x(t)$ son homogéneas de grado cero y resuelva:

a) $tx' = x + 2t\exp(-x/t)$ b) $txx' = 2x^2 - t^2$ c) $x' = \dfrac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0$

Ejercicio 5. Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

a) $x' = (x+t)^2$ b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

Ejercicio 6.

(a) Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes h, k de modo que las sustituciones $t = s - h$, $x = y - k$ reducen la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{at + bx + c}{dt + ex + f}\right)$$

a una ecuación homogénea.

(b) Resuelva las ecuaciones:

a) $x' = \dfrac{2x - t + 4}{x + t - 1}$ b) $x' = \dfrac{x + t + 4}{t - x - 6}$

c) $x' = \dfrac{x + t + 4}{x + t - 6}$, $x(0) = 2$. ¿Se satisface $ae \neq bd$ en este caso?

Ejercicio 7. Resuelva las siguientes ecuaciones en $y = y(x)$:

(a) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

(b) $\cos x \cos^2 y\, dx - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y\, dy = 0$

(c) $(3x^2 - y^2)\, dy - 2xy\, dx = 0$

(d) $x\, dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\, dx$

(e) $2(x + y) \operatorname{sen} y\, dx + \big(2(x + y) \operatorname{sen} y + \cos y\big)\, dy = 0$

(f) $3y\, dx + x\, dy = 0$

(g) $\big(1 - y(x + y)\tan(xy)\big)\, dx + \big(1 - x(x + y)\tan(xy)\big)\, dy = 0.$

Ejercicio 8. Considere la ecuación lineal de primer orden en $y(x)$

$$(*) \qquad y' + p(x)\, y = q(x).$$

(a) Busque una función $\mu(x)$ tal que

$$\mu(x)\big(y'(x) + p(x)\, y(x)\big) = \big(\mu(x)\, y(x)\big)'.$$

(b) Multiplique la ecuación $(*)$ por μ y halle su solución general. μ se denomina *factor integrante*.

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de una curva tal que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es la mitad de la pendiente de la recta que une el punto con el origen.

Ejercicio 10. Hallar la ecuación de las curvas tales que la normal en un punto cualquiera pasa por el origen.

Ejercicio 11. Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto es una parábola.

Ejercicio 12. Hallar la ecuación de una curva del primer cuadrante tal que para cada punto (x_0, y_0) de la misma, la ordenada al origen de la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) sea $2(x_0 + y_0)$.

Ejercicio 13.

1. Hallar las $y(x)$ soluciones de:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & y' + y = \operatorname{sen}(x), \\ \text{ii)} & y' + y = 3\cos(2x). \end{array}$$

2. Halle las soluciones de $y' + y = \operatorname{sen}(x) + 3\cos(2x)$ cuya gráfica pase por el origen (Piense, y no haga cuentas de más).

Ejercicio 14. Sea la ecuación no homogénea $y' + a(x)y = b(x)$ donde $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas con período $p > 0$ y $b \not\equiv 0$:

1. Pruebe que una solución Φ de esta ecuación verifica:

$$\Phi(x+p) = \Phi(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \Phi(0) = \Phi(p).$$

2. Encuentre las soluciones de período 2π para las ecuaciones:

$$y' + 3y = \cos(x), \qquad y' + \cos(x)y = \operatorname{sen}(2x).$$

Ejercicio 15. Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea (ley de enfriamiento de Newton). Un cuerpo se calienta 110 °C y se expone al aire libre a una temperatura de 10 °C. Al cabo de una hora su temperatura es de 60 °C. ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a 30 °C?

Ejercicio 16. Se sabe que el Carbono 14 tiene una semivida de 5600 años. Es decir, su cantidad se reduce a la mitad por desintegración radioactiva en ese lapso de tiempo.

Si en una roca sedimentaria había al formarse un 40 % de Carbono 14 y ahora hay un 2 % ¿Cuánto tiempo pasó desde que se depositaron los sedimentos?

Observación: la tasa de cambio del Carbono 14, $\dot{x}/x$, es constante.

Ejercicio 17. Si la resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo de masa m en caída libre ejerce una fuerza retardadora sobre el mismo proporcional a la velocidad $(= -kv)$, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c\frac{dy}{dt}, \text{ o bien } \frac{dv}{dt} = g - cv$$

donde $c = k/m$. Supongamos $v = 0$ en el instante $t = 0$, y $c > 0$. Encontrar $\lim_{t\to\infty} v(t)$ (llamada velocidad terminal).

Si la fuerza retardadora es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación se convierte en:

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2.$$

Si $v(0) = 0$, encuentre la velocidad terminal en este caso.

Ejercicio 18. La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, que se conoce como la ecuación de Bernoulli, es lineal cuando $n = 0, 1$. Demuestre que se puede reducir a una ecuación lineal para cualquier valor de $n \neq 1$ por el cambio de variable $z = y^{1-n}$, y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & xy' + y = x^4y^3, \\ \text{b)} & xy^2y' + y^3 = x\cos x, \\ \text{c)} & xy' - 3y = x^4. \end{array}$$

$e^{\ln(\ldots)} = e^{t^2+c} = e^{t^2} \underbrace{e^c}_{k}$

$(\ln(1+2x))' = \frac{1}{1+2x} \, 2$

-GUÍA 5-

$x' = \frac{dx}{dt}$

$x' = t + 2tx = t(1+2x)$

① a) $x' - 2tx = t$, $x(1) = 0$

$x'(t) = t\,(1+2x(t)) \underset{x(t)\neq -1/2}{\Longrightarrow} \int \frac{x'(t)}{1+2x(t)}\,dt = \int t\,dt \Rightarrow$ Sustitución $u = x(t)$, $du = x'(t)\,dt$

$\int \frac{1}{1+2u}\,du = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+2u) = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow$

$\ln(1+2x(t)) = t^2 + c \Rightarrow 1+2x(t) = e^c e^{t^2} \underset{k=e^c}{\Rightarrow} 1+2x(t) = ke^{t^2},\ k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{ke^{t^2}-1}{2}$ ← Solución general ✱ Falta ver qué pasa si $x(t) = -1/2$.

De la condición inicial, $\underset{0}{x(1)} = \frac{ke-1}{2} \Rightarrow ke = 1 \Rightarrow k = e^{-1}$

Luego, $x(t) = \frac{e^{t^2-1}-1}{2}$ ← Sol. particular. Int. Max $= \mathbb{R}$

b) $x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$, $x(1) = 0$

$x'(t) = \frac{1+x^2(t)}{1+t^2} \underset{1+x^2(t)\geq 0\ \forall t\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \int \frac{x'(t)}{1+x^2(t)}\,dt = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \Rightarrow$

$\operatorname{arctg}(x(t)) = \operatorname{arctg}(t) + c \Rightarrow x(t) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(t)+c)$ ← Sol. general

De la condición inicial, $\underset{0}{x(1)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+c\right) = \frac{1+\operatorname{tg}(c)}{1-\operatorname{tg}(c)} \Rightarrow$

Spiegel p.13 $\operatorname{tg}(A\pm B) = \frac{\operatorname{tg}A \pm \operatorname{tg}B}{1\mp \operatorname{tg}A\,\operatorname{tg}B}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(c) = -1 \Rightarrow c = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore x(t) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(t) + \frac{3\pi}{4}\right)$ ← Sol. particular

Int. Max =

— o —

✱ Si $x(t) = -\frac{1}{2}$, $x'(t) = 0 \Rightarrow 0 - 2t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = t$ ✓ Pero $x(1) \neq 0$

Luego $x(t) = -\frac{1}{2}$ no es solución.

c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}$, $x(0) = 1$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+x}{1+t} \overset{x \neq -1 \ (*)}{\Longrightarrow} \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\,dt \Rightarrow \ln|1+x| = \ln|1+t| + C$$

$$\underset{k=e^c}{\Rightarrow} 1+x = k.(1+t) \Rightarrow x = k(1+t)-1 \leftarrow \text{Sol general}$$

De la condición inicial $\underset{1}{\underset{\parallel}{x(0)}} = k-1 \Rightarrow k = 2$

$\therefore x(t) = 2t+1 \leftarrow$ Sol. particular

Dom $= \mathbb{R}$, Int. Max $= \mathbb{R}$

(*) Si $x(t) = -1$, $x'(t) = 0$, $0 = \dfrac{1+(-1)}{1+t}$ ✓ $x(0) = -1 \neq 1$

Luego $x(t) = -1$ no es solución

d) $x' = \dfrac{1+x}{1-t^2}$, $x(0) = 1$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+x}{1-t^2} \overset{x(t) \neq -1 \ (*)}{\Longrightarrow} \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt \Rightarrow \ln|1+x| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow 1 = A(1-t) + B(1+t)$$

Si $t = 1$, $B = 1/2$; $t = -1$, $A = 1/2$

$$1+x = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \underset{e^c = k}{e^c} \Rightarrow x(t) = k\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - 1 \leftarrow \text{Sol general}$$

De la condición inicial, $\underset{1}{\underset{\parallel}{x(0)}} = k-1 \Rightarrow k = 2$

$\therefore x(t) = 2\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}} - 1 \leftarrow$ Sol particular

$\exists$ un pto

Dom$(x(t)) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow$ Int. Max $= (-\infty, 1)$

(*) $x(t) = -1 \Rightarrow x'(t) = 0$, $0 = \dfrac{1+(-1)}{1-t^2}$ ✓ pero $x(0) = -1 \neq 1$

Luego $x(t) = -1$ no es solución.

-GUÍA 5-

e) $x' - \sqrt[3]{x} = 0$, $x(0) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \int x^{-1/3}\,dx = \int dt \Rightarrow \frac{3}{2}x^{2/3} = t + c \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(t+c)$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^{\frac{3}{2}} \leftarrow \text{Sol. general}$$

De la condición inicial: $\underset{0}{\underset{\parallel}{x(0)}} = \left(\frac{2}{3}c\right)^{3/2} \Rightarrow c = 0$

$$\therefore\ x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} \leftarrow \text{Sol. particular}$$

Dom $(x(t))$: $\frac{2}{3}(t+c) \geq 0 \Leftrightarrow t + c \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -c$, $c=0 \Rightarrow t \geq 0$

$\Rightarrow$ Dom $(x(t)) = [0, +\infty) =$ Int. Max.

f) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}$, $x(0) = -1$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+x}{1+t} \xRightarrow{x(t) \neq -1\ \circledast} \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\,dt \Rightarrow \ln|1+x| = \ln|1+t| + c \Rightarrow$$

$k = e^c$

$$1 + x(t) = (1+t)\,k \Rightarrow x(t) = k(1+t) - 1 \leftarrow \text{Sol. general}$$

De la condición inicial, $\underset{-1}{\underset{\parallel}{x(0)}} = k - 1 \Rightarrow k = 0$ $\therefore\ x(t) = -1 \leftarrow$ Sol. part.

Dom: $\mathbb{R}$, Int. Max. $= \mathbb{R}$

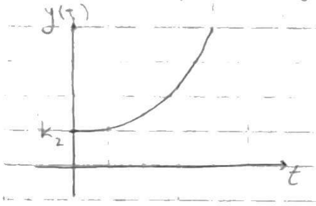
② Si $y = y(t)$ denota cont. hab. en tiempo. Tasa de crec.: y'/y

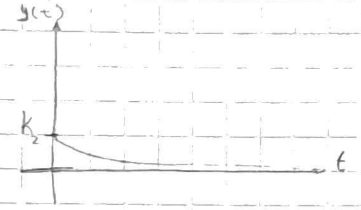
a) $\frac{y'}{y} = k_1$ con $k_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y k_1 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int k_1 dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = k_1 t + c \Rightarrow y = e^c e^{k_1 t} \underset{\underset{e^c = k_2 \in \mathbb{R}}{\uparrow}}{\Rightarrow} y(t) = k_2 e^{k_1 t}$

b) Sea $k_1 > 0$: $y(0) = k_2$ ← (cond. inicial)

$k_1 < 0$





c) Si $k_1 = 0$, $y(t) = k_2$ ← las poblaciones con k_2 habitantes

d) $t_0 = 01/01/2002 = 0$, $y(t_0) = 1000$; $t_1 = 01/05/2002 = 4$, $y(t_1) = 1020$

$t_2 = 01/01/2022 = 240$, $y(t_2) = ?$

$y(0) = k_2 e^{k_1 \cdot 0} = k_2 = 1000$

$y(4) = 1000 \cdot e^{k_1 4} = 1020 \Rightarrow e^{4k_1} = 1{,}02 \Rightarrow 4k_1 = \ln(1{,}02) \Rightarrow k_1 = \frac{\ln(1{,}02)}{4}$

Luego, $y(t) = 1000\, e^{\frac{\ln(1{,}02)}{4} t}$

$y(240) = 1000\, e^{60 \ln(1{,}02)} \approx 3281{,}03$

Van a haber 3281 habitantes en 01/01/2022

e) $\frac{y'}{y} = at + b \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int (at+b) dt \Rightarrow \ln|y| = \frac{a}{2} t^2 + bt + c$

$y(t) = e^{\frac{a}{2}t^2 + bt} \cdot k$ (con $k = e^c \in \mathbb{R}$)

f) $\frac{y'}{y} = r - cy$; $r, c > 0$

$\lim_{y \to 0^+} (r - cy) = r$, cte. $\Rightarrow$ es muy similar al exponencial para pob. pequeñas.

$\lim_{t \to \infty} (r - cy) = 0$, $r - cy = 0 \iff y = \frac{r}{c}$

③ Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación → y' proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en una hora ¿Cuánto habrá aumentado en dos horas?

$$y' = ky \Rightarrow \frac{y'}{y} = k \Rightarrow \ln|y| = tk \Rightarrow y = e^{kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 1 \;, \; y(1) = e^{k} \\ \qquad\qquad\quad \shortparallel \\ \qquad\qquad 2y(0) = 2 \end{array} \right\} e^{k} = 2 \Rightarrow k = \ln(2)$$

$$\therefore y(t) = e^{t\ln(2)}$$

Luego $y(2) = e^{\ln(4)} = 4$

A las 2 horas la población inicial será el cuádruple.

④ Verificar que son de grado cero y resolver

a) $tx' = x + 2te^{-x/t}$

$$x' = \frac{x + 2te^{-x/t}}{t} \quad , \quad f(\lambda x, \lambda t) = \frac{\lambda x + 2\lambda t e^{-\frac{\lambda x}{\lambda t}}}{\lambda t} = \frac{\cancel{\lambda}(x + 2te^{-\frac{x}{t}})}{\cancel{\lambda} t}$$

Es una ec. homogénea de grado cero. Puedo usar la sustitución
$x(t) = u(t) \cdot t \quad , \quad x'(t) = u'(t)\, t + u(t)$

$$f(u(t) \cdot t, t) = \frac{u(t)\, t + 2te^{-u(t)}}{t} \quad \Big\} \quad \cancel{u(t)\, t} + 2te^{-u(t)} = u'(t)\, t^2 + \cancel{u(t)\, t}$$
$$\| $$
$$u'(t)\, t + u(t)$$

$$u'(t) \cdot e^{u(t)} = \frac{2}{t} \Rightarrow \int e^{u(t)}\, du = 2 \int \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow e^{u(t)} = 2(\ln(t) + c)$$

$\therefore u(t) = \ln(\ln(t^2) + k)$ con $k = 2c$ Volviendo a las variables originales

$$\frac{x(t)}{t} = \ln(\ln(t^2) + k) \Rightarrow x(t) = t \ln(\ln(t^2) + k)$$

b) $txx' = 2x^2 - t^2 \Rightarrow x' = \dfrac{2x^2 - t^2}{tx}$

$f(\lambda x, \lambda t) = \dfrac{\lambda^2 (2x^2 - t^2)}{\cancel{\lambda^2} t x} = f(x, t) \Rightarrow$ Es ec. homogénea de grado cero

Llamo $x(t) = u(t) \cdot t$, $\quad u'(t)\, t + u(t) = \dfrac{2u^2(t)\, t^2 - t^2}{u(t)\, t^2} = \dfrac{2u^2(t) - 1}{u(t)}$

$$\Rightarrow u'(t) \cdot t = 2u(t) - \frac{1}{u(t)} - u(t) = u(t) - \frac{1}{u(t)}$$

$$u'(t) = \frac{u(t)}{t} - \frac{1}{t u(t)} = \frac{u^2(t) - 1}{t u(t)} \Rightarrow \int \frac{u(t)}{u^2(t) - 1}\, du = \int \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(u^2(t) - 1) = \ln|t| + c \Rightarrow |u^2(t) - 1| = t^2 \cdot e^{2c}$$

$$= \left| \frac{x^2(t)}{t^2} - 1 \right| = t^2 \cdot K \quad (k = e^{2c})$$ ← Queda en forma implícita

$f(x,t)$

$f(\lambda x, \lambda t) = \frac{\lambda x + \lambda t}{\lambda t} = \frac{\lambda(x+t)}{\lambda t} = \frac{x+t}{t} = f(x,t)$

c) $x' = \frac{x+t}{t}$, $x(1)=0$

$f(\lambda x, \lambda t) = \frac{\lambda(x+t)}{\lambda t} = f(x,t) \Rightarrow$ es homogenea de orden cero

Sea $x(t) = u(t) \cdot t \Rightarrow x'(t) = u'(t)t + u(t)$

$f(x,t) = \frac{u(t)\cancel{t} + \cancel{t}}{\cancel{t}} \Rightarrow u'(t)t + u(t) = u(t) + 1$

$\overset{\|}{u'(t)t + u(t)}$

$\Rightarrow \underset{\frac{du}{dt}}{u'(t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \int du = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow u = \ln|t| + c$

$x(t) = t\ln|t| + tc$ ← Sol general

$\underset{0}{x(1)} = c \Rightarrow c=0 \Rightarrow x(t) = t\ln|t|$ ← Sol part.

⑤ Demuestre que $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at+bx+c)$ en una ec con variables separables y aplique para resolver las ecuaciones:

$y = at + bx(t) + c \Rightarrow y'(t) = a + bx'(t)$, $x'(t) = f(y)$

$y'(t) = a + bf(y) \underset{a+bf(y)\neq 0}{\Rightarrow} \frac{y'(t)}{a+bf(y)} = 1$ ← Variables separables

a) $x' = (x+t)^2$

Llamo $y(t) = t + x(t) \Rightarrow y'(t) = 1 + x'(t)$ y $x'(t) = y^2(t)$

Luego $y'(t) = 1 + y^2(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 + y^2(t) \underset{1+y^2(t)>0\ \forall t}{\Rightarrow} \int \frac{dy}{1+y^2(t)} = \int dt$

$\operatorname{arctg}(y(t)) = t + c \Rightarrow y(t) = \operatorname{tg}(t+c) \Rightarrow \boxed{x(t) = \operatorname{tg}(t+c) - t}$

b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

Llamo $y(t) = t - x(t) + 1$, $y'(t) = 1 - x'(t)$ y $x'(t) = \operatorname{sen}^2(y(t))$

Luego, $y'(t) = 1 - \operatorname{sen}^2(y(t)) \underset{1-\operatorname{sen}^2(y(t))\neq 0}{\Rightarrow} \int \frac{dy}{\underbrace{1-\operatorname{sen}^2(y(t))}_{\cos^2(y(t))}} = \int dt \Rightarrow$

$\operatorname{tg}(y(t)) = t + c \Rightarrow y(t) = \operatorname{arctg}(t+c) \Rightarrow \boxed{x(t) = 1 + t - \operatorname{arctg}(t+c)}$

⑥ a) Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes h, k tq las sustituciones $t = s-h$, $x = y-k$ reducen la ecuación: $\dfrac{dx}{dt} = F\left(\dfrac{at+bx+c}{dt+ex+f}\right)$ a una ecuación homogénea

Sean $t = s-h$, y $x(t) = y(s)-k$, $y(s) = x(t)+k \Rightarrow y'(s) = x'(t)$

$$\underset{\substack{\parallel \\ y'(s)}}{x'(t)} = F\left(\frac{a(s-h)+b(y-k)+c}{d(s-h)+e(y-k)+f}\right) = F\left(\frac{as+by+(-ah-bk+c)}{ds+ey+(-dh-ek+f)}\right)$$

Para que sea homogéneo quiero que $\begin{cases} ah+bk=c \\ dh+ek=f \end{cases}$

Como $ae \neq bd$, el sistema tiene solución $\Rightarrow$ Puedo elegir h y k tq se cumple lo pedido.

b) Resuelva las ecuaciones:

i) $x' = \dfrac{2x-t+4}{x+t-1} \Rightarrow a=-1, b=2, c=4, d=1, e=1, f=-1$

NO

$\begin{cases} -h+2k=4 \\ h+k=-1 \end{cases} \Rightarrow h=-1-k \Rightarrow 1+3k=4 \Rightarrow k=1,\ h=-2$

$t = s+2$, $x = y-1$

$y'(s) = \dfrac{2y-2-s-2+4}{y-1+s+2-1} \Rightarrow$ Es una ec. homogénea de grado cero. Puedo tomar $y = u \cdot s \Rightarrow y' = u' \cdot s + u$

$$u'(s) \cdot s + u(s) = \frac{2u(s) \cdot s - s}{u(s)s+s} = \frac{2u(s)-1}{u(s)+1} \Rightarrow u'(s) \cdot s = \frac{-u^2(s)+u(s)-1}{u(s)+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{u(s)+1}{-u^2(s)+u(s)-1}\, du = \int \frac{1}{s}\, ds \Rightarrow -\ln(s)+c = \int \frac{u(s)-1/2}{u^2(s)-u(s)-1}\, du - \int \frac{1}{u^2(s)-u(s)+1}\, du$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{s}\right)+c = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\, dw - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u(s)-1)^2+u(s)}\, du \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{s}\right)+c = \frac{1}{2}\ln|w| - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2u(s)-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \Rightarrow$$

$w = u^2-u+1$
$dw = (2u-1)du = 2(u-1/2)du$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{s}\right)+c = \frac{1}{2}\ln|u^2-u+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)$$ ← Queda implícita

$$\frac{y-k+s-h+4}{-y-k+s-h-6}$$

$x(t)$

ii) $x' = \dfrac{x+t+4}{-x+t-6}$ $a=1,\ b=1,\ c=4,\ d=1,\ e=-1,\ f=-6$

$\begin{cases} h+k=4 \\ h-k=-6 \Rightarrow h=k-6 \end{cases} \Rightarrow 2k=10 \Rightarrow k=5,\ h=-1.$

De $t=s-h$, $x=y-k \Rightarrow t=s+1$, $x=y-5 \Leftrightarrow s=t-1$, $y=x+5$

Queda, $y'(s) = \dfrac{y+s}{-y+s}$ ← Ec homogénea de grado cero ⇒ tomo $\underline{y(s)=u(s)\cdot s}$, $y'(s)=u'(s)s+u(s)$

$u'(s)s+u(s) = \dfrac{u(s)+1}{1-u(s)} \Rightarrow u'(s)\cdot s = \dfrac{u(s)+1-u(s)+u^2(s)}{1-u(s)} \Rightarrow$

$\dfrac{du}{ds}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1-u(s)}{u^2(s)+1}\,du = \int \frac{1}{s}\,ds \Rightarrow \int \frac{1}{u^2(s)+1}\,du - \int \frac{u(s)}{u^2(s)+1}\,du = \ln|s|+C \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(u(s)) - \dfrac{1}{2}\ln(u^2(s)+1) = \ln|s|+C$

$u = y/s$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y(s)}{s}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y^2(s)}{s^2}+1\right) = \ln|s|+C$

$y=x+5$
$s=t-1$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x(t)+5}{t-1}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{(x(t)+5)^2}{(t-1)^2}+1\right) = \ln|t-1|+C$ ← Queda implícita

iii) $x' = \dfrac{x+t+4}{x+t-6}$, $x(0)=2$ ¿se satisface $ae \neq bd$?

$a=b=1,\ c=4,\ d=e=1,\ f=-6 \Rightarrow t=s-h,\ x=y-k$

$\begin{cases} h+k=4 \\ h+k=-6 \end{cases}$ Abs! No puedo usar esto (no se satisface $ae\neq bd$)

$x' = \dfrac{x+t+10-6}{x+t-6} = 1 + \dfrac{10}{x+t-6} = 1 + \dfrac{10}{y(t)}$ ⇒ $y(t)=x+t-6$
$y'(t)=x'(t)+1$
$x'(t)=f(y)=1+\dfrac{10}{y(t)}$

$\dfrac{y'(t)}{1+1+\frac{10}{y(t)}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y(t)y'(t)}{2y(t)+10} = 1 \Leftrightarrow$

$\begin{array}{r|l} y & y+5 \\ -y-5 & 1 \\ \hline -5 & \end{array}$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{y}{y+5}\,dy = t+C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{5}{y+5}\right)dy = t+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}y - 5\ln|y+5| = t+C$

Volviendo a la variable original

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x+t-6) - 5\ln|x+t-1| = t+C$

$\dfrac{1}{2}(2-6) - \cancel{5\ln 1} = C$

$C=-2$

7 Resuelva las siguientes ecuaciones en $y = y(x)$:

a) $\underbrace{(y-x^3)}_{P}dx + \underbrace{(x+y^3)}_{Q}dy = 0$ ... (1)

(por fórmulita del Spiegel; p. 91)

Sol: $\int (y-x^3)\,dx + \int \left((x+y^3) - \frac{\partial}{\partial y}\int (y-x^3)dx\right)dy = c$

(*) $\left[\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \,, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \right.$ ✓ $\Rightarrow$

Luego la ecuación es de la forma $dU = 0$: ← (Resolución de Demidovich p. 358)

$\frac{\partial U}{\partial x} = y - x^3 \Rightarrow U = yx - \frac{x^4}{4} + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y)$ ... (2)

Sabíamos que $\frac{\partial U}{\partial y} = x + y^3$ por (1) $\Rightarrow$ De (2) y (1), $\varphi'(y) = y^3 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^4}{4} + C$

Queda $U = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + C = 0 \Rightarrow \boxed{xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} = c}$ (con $c \in \mathbb{R}$)

(*) Ec. Exacta

Busco $f(x,y)$ tq $\nabla f = (P, Q)$

$\int P\,dx = \int (y-x^3)\,dx = yx - \frac{x^4}{4} + \varphi(y) = f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \varphi'(y) = Q = x + y^3 \rightarrow \varphi'(y) = y^3 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$

$f(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4}$

Rta: $\boxed{xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} = c}$

$\ln|u| = \ldots (x, y)$

b) $(\cos x \cdot \underbrace{\cos^2 y) dx}_{P} + \underbrace{(-2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y)}_{Q} dy = 0 \Rightarrow$ ¿u? (*) ¿Es exacta?

$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos x \cdot \cos^2 y \Rightarrow \int dU = \int \cos x \cos^2 y \, dx \Leftrightarrow U = \operatorname{sen} x \cos^2 y + \varphi(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -2 \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} y + \varphi'(y)$ y por dato $\frac{\partial U}{\partial y} = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y \Rightarrow \varphi'(y) = 0$

Luego, $\operatorname{sen} x \cos^2 y + c = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x \cos^2 y = c}$ (con $c \in \mathbb{R}$)

(*) Tenía que chequear que $P_y = Q_x$:

$P_y = -2 \cos x \cos y \operatorname{sen} y$, $Q_x = -2 \cos x \cos y \operatorname{sen} y \Rightarrow$ Sí es exacta

c) $\underbrace{(3x^2 - y^2)}_{Q} dy \underbrace{- 2xy}_{P} dx = 0$

$P_y = -2x$, $Q_x = 6x \Rightarrow P_y \neq Q_x \Rightarrow$ No es exacta

Demidovich P. 359 $\rightarrow$ Busco un factor integrante: $\mu = \mu(x)$ tq $(\mu Q)_x = (\mu P)_y$

$\mu'(x) \cdot (3x^2 - y^2) + \mu(x) \cdot 6x = \mu(x) \cdot (-2x) \Leftrightarrow \mu'(x)(3x^2 - y^2) = \mu(x)(-8x)$

$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{-8x}{3x^2 - y^2}$ $\leftarrow$ No sirve como factor integrante pues depende de ambas variables

Propongo $\mu = \mu(y) \Rightarrow \mu(y)(6x) = \mu'(y)(-2xy) + \mu(y)(-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu(y)(8x) = \mu'(y)(-2xy) \Leftrightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\cancel{8x}^{\,4}}{(-\cancel{2x}y)} \Leftrightarrow \ln|\mu| = -4 \ln|y| + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu = e^{\ln|y^{-4}|} e^c \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{y^4} \cdot k$ (con $k = e^c > 0$)

Tomo como factor integrante $\mu(y) = \frac{1}{y^4}$

Chequeo que $\underbrace{\left(-\frac{2xy}{y^{4\,3}}\right)}_{\tilde{P}} dx + \underbrace{\left(\frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2}\right)}_{\tilde{Q}} dy = 0$ sea exacta

$\left.\begin{array}{l} \tilde{P}_y = 6xy^{-4} \\ \tilde{Q}_x = 6xy^{-4} \end{array}\right\}$ Sí es exacta. Busco f tq $\nabla f = (\tilde{P}, \tilde{Q})$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \tilde{P} = -2xy^{-3} \Rightarrow f = \int -2xy^{-3} dx = -x^2 y^{-3} + \varphi(y)$

$\underbrace{\frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2}}_{\tilde{Q}} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -y^{-2} \Rightarrow \varphi(y) = y^{-1} + c$, $c \in \mathbb{R}$

$\therefore$ una $f(x,y) = -\dfrac{x^2}{y^3} + \dfrac{1}{y}$

Sol: $\boxed{-\dfrac{x^2}{y^3} + \dfrac{1}{y} = c}$ (con $c \in \mathbb{R}$)

- GUÍA 5 -

(7) ?

d) $x\,dy = (x^5+x^3y^2+y)dx \Leftrightarrow \underbrace{(x^5+x^3y^2+y)}_{M}dx + \underbrace{(-x)}_{N}dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} M_y = 2x^3y+1 \\ N_x = -1 \end{array}\right\}$ no es exacta. Quiero hallar un factor integrante μ tq $(\mu M)_y = (\mu N)_x$

$dy = \dfrac{x^5+x^3y^2+y}{x}\,dx$ ← Es homogénea de grado cero ∴ $y = u\cdot x$ (Mentira !!)

$dy = u'(x)\cdot x + u(x)\,dx$

$u'(x)x + u(x)\,dx = \dfrac{x^5+x^5u^2(x)+u(x)x}{x}\,dx$

$u'(x)x + \cancel{u(x)\,dx} = (x^4+x^4u^2(x)+\cancel{u(x)})\,dx$

$u'(x) = x^3+x^3u^2(x) = x^3(1+u^2(x))$

$\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2(x)} = \int x^3\,dx \Rightarrow \operatorname{arctg}(u(x)) = \frac{x^4}{4}+c \Rightarrow u(x) = tg\left(\frac{x^4}{4}+c\right),\ c\in\mathbb{R}$

$y = tg\left(\dfrac{x^4}{4}+c\right)\cdot x$

$(\mu M)_y = (2x^3y+1)\,tg\left(\dfrac{x^4}{4}+c\right)$

$(\mu N)_x = tg\left(\dfrac{x^4}{4}+c\right) + x^4\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x^4}{4}+c\right)}$

Son distintos, ??

e) $\underbrace{(2(x+y)\operatorname{sen}y)}_{M}dx + \underbrace{(2(x+y)\operatorname{sen}y+\cos y)}_{N}dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} M_y = 2(\cos y(x+y)+\operatorname{sen}y) \\ N_x = 2\operatorname{sen}y \end{array}\right\}$ no es exacto. Quiero encontrar μ tq $(\mu M)_y = (\mu N)_x$

Método Demidovich (p. 359): $-\left(\dfrac{2\cos y(x+y)+\cancel{2\operatorname{sen}y}-\cancel{2\operatorname{sen}y}}{2\operatorname{sen}y(x+y)}\right) = -\dfrac{1}{tg(y)} = f(y)$

$\Rightarrow$ Propongo $\mu = \mu(y)$

$(\mu(y).M)_y = \mu'(y)\,2\operatorname{sen}y(x+y) + \mu(y)\,2\cos y(x+y) + \mu(y)\,2\operatorname{sen}y$

$(\mu(y)N)_x = \mu(y)\,2\operatorname{sen}y$

$\mu'(y)\,2\operatorname{sen}y(x+y) = \mu(y)(-2\cos y(x+y)) \Rightarrow \dfrac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \dfrac{-1}{tg(y)} \Rightarrow$

$\ln|\mu| = -\ln|\operatorname{sen}(y)| + c \Rightarrow \mu = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(y)}\cdot K$ (con $K = e^c > 0$), tomo $\mu = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(y)}$

Queda $\underbrace{2(x+y)}_{M}dx + \underbrace{\left(2(x+y)+\dfrac{1}{tg(y)}\right)}_{N}dy = 0$

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2(x+y) \Rightarrow g = x^2+2xy+\varphi(y) \Rightarrow 2(x+y)+\dfrac{1}{tg(y)} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x+\varphi'(y)$ (*) HOJA que sigue

f) $\underbrace{3y}_{M}dx + \underbrace{x}_{N}dy = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} M_y = 3 \\ N_x = 1 \end{array}\right\}$ no es exacta! Busco μ tq $(\mu M)_y = (\mu N)_x$

Propongo $\mu = \mu(x)$. $\mu(x)3 = \mu'(x)x + \mu(x) \iff 2\mu(x) = \mu'(x)x$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{2}{x} \Rightarrow \ln|\mu| = 2\ln|x| + c \Rightarrow \mu(x) = x^2 k \quad (\text{con } k = e^c > 0)$$

Tomo $\mu(x) = x^2$ como factor integrante.

$\underbrace{3x^2y}_{\tilde{M}}dx + \underbrace{x^3}_{\tilde{N}}dy = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} \tilde{M}_y = 3x^2 \\ \tilde{N}_x = 3x^2 \end{array}\right\}$ sí es exacta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y \Rightarrow f = x^3y + \varphi(y)$$

$$\underbrace{x^3}_{\tilde{N}} = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = c \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ una $f(x,y) = x^3y$

Sol: $\boxed{x^3y = c}$

g) $(1 - y(x+y)\operatorname{tg}(xy))dx + (1 - x(x+y)\operatorname{tg}(xy))dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} M_y = -(x+y)\operatorname{tg}(xy) - y\operatorname{tg}(xy) - \dfrac{xy(x+y)}{\cos^2(xy)} \\ N_x = -(x+y)\operatorname{tg}(xy) - x\operatorname{tg}(xy) - \dfrac{yx(x+y)}{\cos^2(xy)} \end{array}\right\}$ no es exacta quiero μ tq $(\mu M)_y = (\mu N)_x$

Propongo $\mu(x,y) = 1/(x+y)$:

$\left.\begin{array}{l} (\mu M)_y = \left(\dfrac{1}{(x+y)} - y\operatorname{tg}(xy)\right)_y = -\dfrac{1}{(x+y)^2} - \operatorname{tg}(xy) - \dfrac{y.x}{\cos^2(xy)} \\ (\mu N)_x = \left(\dfrac{1}{(x+y)} - x\operatorname{tg}(xy)\right)_x = -\dfrac{1}{(x+y)^2} - \operatorname{tg}(xy) - \dfrac{x.y}{\cos^2(xy)} \end{array}\right\}$ sí es exacta

La nueva ecuación queda: $\underbrace{\left(\dfrac{1}{(x+y)} - y\operatorname{tg}(xy)\right)}_{\tilde{M}}dx + \underbrace{\left(\dfrac{1}{(x+y)} - x\operatorname{tg}(xy)\right)}_{\tilde{N}}dy = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x+y)} - y\operatorname{tg}(xy) \Rightarrow f = \ln|x+y| + y\left(+\frac{1}{y}\ln|\cos(yx)|\right) + \varphi(y)$$

$$f = \ln|x+y| + \ln|\cos(yx)| + \varphi(y)$$

$$\underbrace{\frac{1}{x+y} - x\operatorname{tg}(xy)}_{\tilde{N}} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y} + \frac{-\operatorname{sen}(xy)}{\cos(xy)}x + \varphi'(y) = \frac{1}{x+y} - x\operatorname{tg}(xy) + \varphi'(y)$$

Luego $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ una $f = \ln|x+y| + \ln|\cos(yx)|$

$\therefore$ Sol: $\boxed{\ln|x+y| + \ln|\cos(yx)| = c}$

(*) $\varphi'(y) = 2y + \frac{1}{tg(y)} \Rightarrow \varphi(y) = y^2 + \ln|sen(y)| + c$, $c \in \mathbb{R}$

luego $g(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + \ln|sen(y)|$

Sol: $\boxed{(x+y)^2 + \ln|sen(y)| = c}$, con $c \in \mathbb{R}$

~~8) Considere la ecuación lineal de primer orden $y' + p(x)\, y = q(x) \ldots (*)$~~

~~a) Busque una función $\mu(x)$ tq $\mu(x)(y'(x) + p(x)y(x)) = (\mu(x)\, y(x))'$~~

7) d) $x\,dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\,dx$ ← No es exacta, planteo $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

$x^3(x^2+y^2)+y$

$(x^5 + x^3y^2 + y)\,dx + (-x)\,dy = 0 \iff (x^3(x^2+y^2) + y)\,dx + (-x)\,dy = 0$

$\underbrace{}_{M}$ $\underbrace{}_{N}$

$(\mu M)_y = \left(x^3 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)_y = \frac{\frac{1}{x^2+y^2} + y(-(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^4}$

$(\mu N)_x = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)_x = \frac{-\frac{1}{x^2+y^2} + x(x^2+y^2)^{-2}\, 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^4}$ sí es exacta! :)

Luego, $\underbrace{\left(x^3 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{\tilde{M}} dx + \underbrace{\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)}_{\tilde{N}} dy = 0$

$\tilde{M} = \frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow f = \frac{x^4}{4} + \cancel{y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi(y)$

$\underbrace{\frac{-x}{x^2+y^2}}_{\tilde{N}} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \therefore \varphi(y) = k$, con $k \in \mathbb{R}$

Luego $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + 0$

Sol: $\boxed{\frac{x^4}{4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) = c}$

-GUÍA 5-

⑧ Considere la ecuación lineal de primer orden $y' + P(x)y = Q(x)$ (*)

a) Busque una función $\mu(x)$ tq $\mu(x)\underbrace{(y'(x) + P(x)y(x))}_{Q(x)} = (\mu(x)y(x))'$

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x)$$

$$P(x) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} \rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu(x)} = \int P(x)dx \Rightarrow \ln|\mu| = \int P(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = e^{\int P(x)dx}} \leftarrow \text{Factor integrante}$$

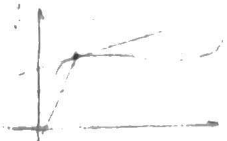
b) Multiplique la ecuación (*) por μ y halle su solución general. μ se denomina <u>factor integrante</u>

$$\int \mu(x) \cdot Q(x) = \int (\mu(x)y(x))'$$

$$\int \mu(x)Q(x)dx = \mu(x)y(x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)Q(x)dx$$

Como $\mu = e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \boxed{y(x) = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx}$

⑨ Hallar la ecuación de una curva tq la pendiente de la recta tg en un punto cualquiera es la mitad de la pendiente de la recta que une el punto con el origen.



Sea $p = (x_0, y(x_0)) \Rightarrow \overline{P0}: \quad y_1 = \overbrace{\frac{y(x_0)}{x_0}}^{\text{pendiente } 1} x$

La recta tg $\quad y_2 = \underbrace{y'(x_0)}_{\text{pendiente } 2} (x - x_0) + y(x_0)$

Yo quiero que $\quad y'(x_0) = \frac{1}{2} \frac{y(x_0)}{x_0}$

$$\int \frac{dy}{y(x_0)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x_0} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|x| + c$$

$\boxed{y = \sqrt{x} \cdot k}$ (con $k = e^c$, $c \in \mathbb{R}$)

⑩ Hallar la ecuación de las curvas tq la normal en un punto cualquiera pasa por el origen.

Sea $\mathcal{C}: \; y = f(x)$ La recta normal $y_N = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$ tiene que cumplir $\quad \frac{x_0}{f'(x_0)} + y_0 = 0 \quad$ para que pase por el origen

$$\frac{x_0}{f'(x_0)} = -f(x_0) \Rightarrow \int -x \, dx = \int f(x) \, df \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(x) = -x^2 + c \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + c} \\ -\sqrt{-x^2 + c} \end{cases} \quad (\text{con } c \in \mathbb{R})$$

⑪ Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto es una parábola.

Sea $p = (x_0, y(x_0))$ el punto de contacto de la tg y la curva. Luego

$y_{tg} = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \quad$ y $\quad y'(x_0) = k \, x_0$

Luego $\int dy = k \int x \, dx \Rightarrow \underbrace{y = \frac{k}{2} x^2 + c}_{\text{Parábola } \ddot\smile}$ (con $k, c \in \mathbb{R}$)

⑫ Hallar la ecuación de una curva del primer cuadrante tq para cada punto (x_0, y_0) de la misma, la ordenada al origen de la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) sea $2(x_0+y_0)$.

Sea $\mathcal{C}: y = f(x)$, $P = (x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$

$$y_{tg} = y'(x_0)(x-x_0) + y(x_0) = y'(x_0)x \overbrace{-x_0 y'(x_0) + y(x_0)}^{\text{ordenada al origen}}$$

Quiero que $y(x_0) - x_0 y'(x_0) = 2x_0 + 2y(x_0)$

$$y'(x_0) - \frac{y(x_0)}{x_0} = -2 - \frac{2y(x_0)}{x_0}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x_0) + \underbrace{\frac{1}{x_0}}_{P(x)} y(x_0) = \underbrace{-2}_{Q(x)}$$ Busco el factor integrante

Quiero $\mu(x)$ tq $\mu \cdot \left(y'(x) + \frac{1}{x} y(x)\right) = (\mu(x) \cdot y(x))'$

$$\cancel{\mu(x) y'(x)} + \frac{1}{x} \mu(x) \cancel{y(x)} = \mu'(x) \cancel{y(x)} + \cancel{\mu(x) y'(x)}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\mu(x)} d\mu$$

$\Rightarrow \ln|\mu| = \ln|x| + c \Rightarrow \mu = x \cdot k$ (con $k = e^c$) Elijo $\mu(x) = x$

Aplicando ej 8.b., $y = \frac{1}{\mu} \int \mu \cdot Q \, dx$

$$y = \frac{1}{x}(-2)\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \Rightarrow y = \frac{-x^2 + c}{x} \quad (\text{con } c \in \mathbb{R})$$

⑬ 1. Hallar las soluciones de:

i) $y' + y = sen(x)$, $P(x) = 1$, $Q(x) = sen(x)$

Busco factor integrante:

$$\mu y' + \mu y = \mu' y + \mu y' \Rightarrow 1 = \frac{\mu'}{\mu} \Rightarrow x + c = \ln|\mu| \Rightarrow \mu = Ke^x$$
(con $K = e^c$)

Elijo $\mu = e^x$ como un factor integrante; luego:

$$y = \frac{1}{e^x} \underbrace{\int e^x sen(x)\, dx}_{I}$$

$$I \underset{\text{Partes}}{=} -e^x \cos x + \int \cos(x) e^x dx = -e^x \cos(x) + e^x sen(x) - \underbrace{\int sen x\, e^x dx}_{I}$$

Partes
$u = e^x$, $du = e^x dx$
$dv = sen(x)dx$, $v = -\cos(x)$

$u = e^x$, $du = e^x dx$
$dv = \cos x\, dx$, $v = sen x$

$$\Rightarrow 2I = e^x(sen x - \cos x) \Rightarrow \int e^x sen(x) = \frac{e^x}{2}(sen x - \cos x)$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{1}{2}(sen(x) - \cos x) + \frac{c}{e^x}} \text{ (con } c \in \mathbb{R})$$

ii) $y' + y = 3\cos(2x)$ $P(x) = 1$, $Q(x) = 3\cos(2x)$

Busco factor integrante: es el mismo que arriba, tomo $\mu = e^x$

Luego, $y = \frac{1}{e^x} \cdot 3 \underbrace{\int e^x \cos(2x)\, dx}_{I}$

$$I = e^x \frac{sen(2x)}{2} - \int \frac{sen(2x)}{2} e^x dx = e^x \frac{sen(2x)}{2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{e^x \cos(2x)}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} e^x dx\right]$$

$u = e^x$, $du = e^x dx$
$dv = \cos(2x)dx$, $v = \frac{sen 2x}{2}$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$
$dv = sen(2x)dx$, $v = -\frac{\cos 2x}{2}$

$$= e^x \frac{sen(2x)}{2} + e^x \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{1}{4} I \Rightarrow \frac{5}{4} I = \frac{e^x}{4}(2sen(2x) + \cos(2x))$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x}{5}(2sen(2x) + \cos(2x)) + c$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{3}{5}(2sen(2x) + \cos(2x)) + \frac{c}{e^x}} \text{ (con } c \in \mathbb{R})$$

2. Halle las soluciones es de $y' + y = \text{sen}(x) + 3\cos(2x)$ cuya gráfica pase por el origen (Piense, y no haga cuentas de más)

Sol general $y = \overbrace{\frac{\text{sen}(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}}^{\text{Sol (i)}} + \overbrace{\frac{6}{5}\text{sen}(2x) + \frac{3}{5}\cos(2x)}^{\text{Sol (ii)}} + \frac{c}{e^x}$

Quiero que $y(0) = 0$

$y(0) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + c = \frac{1}{10} + c = 0 \iff c = -\frac{1}{10}$

$\therefore \; y = \frac{1}{2}(\text{sen}(x) - \cos(x)) + \frac{3}{5}(2\,\text{sen}(2x) + \cos(2x)) + \frac{1}{10e^x}$

(15) Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea. Un cuerpo se calienta 110°C y se expone al aire libre a una temperatura de 10°C. Al cabo de una hora su temperatura es de 60°C. ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a 30°C?

$y' = k(y - y_0)$ ← Se enfría proporcional a la dif. entre él y el ambiente

$y(0) = 110°C$, $y(1) = 60°C$, $y(?) = 30°C$

$\begin{cases} y \to \text{temperatura} \\ x \to \text{tiempo} \end{cases}$

$y' = k(y - 10°C) \Leftrightarrow y' \underbrace{- k}_{P(x)} y = \underbrace{-10k}_{Q(x)}$

Busco $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$:

$\int P(x)\,dx = -\int k\,dx = -kx \Rightarrow \mu(x) = e^{-kx}$

$y = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \int \mu(x) \cdot Q(x)\,dx = e^{kx}(-10k)\int e^{-kx}dx = e^{kx}\left(\cancel{(-10k)}\frac{e^{-kx}}{\cancel{-k}} + c\right)$

$y = 10 + ce^{kx}$, $(c \in \mathbb{R})$

$y(0) = 10 + c = 110 \Leftrightarrow c = 100°C$

$y(1) = 10 + 100e^{k} = 60 \Leftrightarrow e^{k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$y(x) = 10 + 100e^{\ln(\frac{1}{2})\cdot x} = 10 + 100e^{-\ln(2)x}$

$10 + 100e^{-\ln(2)x} = 30 \Leftrightarrow 100e^{-\ln(2)x} = 20 \Leftrightarrow e^{-\ln(2)x} = \frac{1}{5}$

$-\ln(2)x = -\ln(5) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2{,}322 = 2$ hs. 19 min $18{,}94$ seg

(16) Se sabe que el carbono 14 tiene una semivida de 5600 años. Es decir, su cantidad se reduce a la mitad por desintegración radioactiva en ese lapso de tiempo. Si en una roca sedimentaria había al formarse un 40% de C14 y ahora hay un 2% ¿Cuánto tiempo pasó desde que se depositaron los sedimentos?

Obs: La tasa de cambio del carbono, $\frac{\dot{x}}{x}$, es cte. $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$

$$\frac{\dot{x}}{x} = k$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt \iff \ln|x| = kt + c \iff x = e^{kt} \cdot \lambda \quad (\lambda = e^{c} > 0)$$

$$x(0) = \lambda = \frac{40}{100} \Rightarrow x(t) = \frac{40}{100} \cdot e^{kt}$$

$$x(5600) = \frac{\cancel{40}^{2}}{\cancel{100}} \cdot e^{5600k} = \frac{\cancel{20}}{\cancel{100}} \iff e^{5600k} = \frac{1}{2}$$

$$5600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff k = \frac{1}{5600} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore x(t) = \frac{40}{100} e^{-\ln(2) \frac{1}{5600} t}$$

$$\frac{\cancel{40}^{20}}{\cancel{100}} e^{-\ln(2)\frac{1}{5600} t} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{100}} \iff e^{-\ln(2)\frac{1}{5600} t} = \frac{1}{20}$$

$$-\ln(2) \frac{t}{5600} = -\ln(20)$$

$$t = 5600 \cdot \frac{\ln(20)}{\ln(2)} \approx 24.202,8$$

(13) Si la resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo de masa m en caída libre ejerce una fuerza retardadora sobre el mismo proporcional a la velocidad ($=-kv$), la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g - c\,\frac{\partial y}{\partial t}, \text{ o bien } \frac{\partial v}{\partial t} = g - cv$$

donde $c = \frac{k}{m}$. Supongamos $v=0$ en $t=0$ y $c>0$. Encontrar $\lim_{t\to\infty} v(t)$ (llamada velocidad terminal).

Si la fuerza retardadora es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación se convierte en: $\frac{\partial v}{\partial t} = g - c.v^2$. Si $v(0)=0$, hallar la v terminal en este caso.

$$v' = g - \frac{k}{m}v \iff v' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{P(t)} v = \underbrace{g}_{Q(t)}$$

Encuentro $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ factor integrante

$$\int \frac{k}{m}\,dt = \frac{k}{m}t + l \quad (l \in \mathbb{R}) \quad \text{Elijo } \mu(t) = e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\text{Luego } v(t) = e^{-\frac{k}{m}t}\int e^{\frac{k}{m}t}.g\,dt = e^{-\frac{k}{m}t}\left(g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + s\right) \quad (s\in\mathbb{R})$$

$$v(t) = g.\frac{m}{k} + se^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(0) = g.\frac{m}{k} + s = 0 \Rightarrow s = -\frac{gm}{k}$$

$$\therefore v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{k}{m}t}}\right)$$

Luego, $\lim_{t\to\infty}(v(t)) = \frac{gm}{k}$.

$$v' + \frac{k}{m}v^2 = g$$

$y' + (\cdot x) y = 0$

⑱ La ecuación $y' + P(x) y = Q(x) y^n$, que se conoce como la ecuación de Bernoulli, es lineal cuando $n = 0, 1$. Demuestre que se puede reducir a una ecuación lineal para cualquier valor de $n \neq 1$ por el cambio de variable $z = y^{1-n}$, y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

$z = y^{1-n}$, $z' = (1-n) y^{-n} \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{z'}{1-n} y^n$

$z y^n = y$

Luego $\frac{z'}{1-n} y^n + P(x) \, z y^n = Q(x) \, y^n$

$z' + (1-n) P(x) z = (1-n) Q(x)$ ← es una ec. lineal ! ☺

a) $xy' + y = x^4 y^3 \iff y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{x^3}_{Q(x)} y^3$

Sea $z = y^{-2}$, $z y^3 = y$, $z' = \underbrace{(1-3)}_{-2} y^{-3} y' \iff y' = \frac{z'}{1-3} y^3$

$\frac{z'}{(-2)} \cancel{y^3} + \frac{1}{x} z \cancel{y^3} = x^3 \cancel{y^3} \iff z' + \underbrace{\frac{(-2)}{x}}_{\tilde{P}(x)} z = \underbrace{(-2) x^3}_{\tilde{Q}(x)}$

Busco $\mu(x) = e^{\int \tilde{P}(x) dx}$ factor integrante

$-2 \int \frac{1}{x} dx = -2 \ln|x| + C \Rightarrow \mu(x) = e^{-2\ln|x|} = x^{-2}$

$z = x^2 \int x^{-2} (-2) x^3 dx = x^2 \int (-2x) dx = x^2 (-x^2 + k)$ (con $k \in \mathbb{R}$)

$z = -x^4 + kx^2 = y^{-2}$

$\boxed{y = x^2 y^3 (-x^2 + k)}$

☑ ☺

b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x \iff y' + \frac{1}{x}y = \cos x \cdot y^{-2}$ $\quad n = -2$

$z = y^3$, $z y^{-2} = y$, $z' = 3y^2 y' \iff y' = 3z' y^{-2}$

Luego, $\frac{3}{\cancel{y^2}} z' + \frac{1}{x\cancel{y^2}} z = \frac{\cos(x)}{\cancel{y^2}} \iff z' + \underbrace{\frac{1}{3x}}_{P(x)} z = \underbrace{\frac{\cos(x)}{3}}_{Q(x)}$

Encuentro factor integrante: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \ln|x| \Rightarrow \mu(x) = x^{1/3}$

$z = \frac{1}{x^{1/3}} \int x^{1/3} \frac{\cos(x)}{3} dx \underset{\text{Partes}}{=} \frac{1}{3x^{1/3}}$

C.A.:

$I = \int x^{1/3} \cos(x)\, dx = \frac{3}{4}\cos(x) x^{4/3} + \frac{3}{4}\int x^{4/3} \operatorname{sen}(x)\, dx =$

$u = \cos(x)$, $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$dv = x^{1/3} dx$, $v = \frac{3}{4} x^{4/3}$

$= \frac{3}{4} \cos(x) x^{4/3}$

c) $xy' - 3y = x^4 \iff y' \underbrace{- \frac{3}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{x^3}_{Q(x)}$

$u(x) = e^{\int P(x)dx}$, $\int P(x)\,dx = \int -\frac{3}{x}\,dx = -3\ln|x|$

$\Rightarrow u(x) = e^{-3\ln|x|} = x^{-3}$

$y = x^3 \cdot \int x^{-3} \cdot x^3\,dx = x^3(x + c)$ (con $c \in \mathbb{R}$)

$\therefore\ y = x^4 + cx^3 \quad (c \in \mathbb{R})$