Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 6: Ecuaciones de 2do. orden y sistemas de primer orden.

~~**Ejercicio 1.**~~ Hallar la solución general $(x_1(t), x_2(t))$ de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. Ídem con t tendiendo a $-\infty$.

Ejercicio 2. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea. Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 Kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$. Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque.?

~~**Ejercicio 3.**~~ Hallar la solución general de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$

~~**Ejercicio 4.**~~ Hallar la solución general de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$

Ejercicio 5. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales $y = y(x)$ de las siguientes ecuaciones:

i) $y'' - 8y' + 16y = 0$
ii) $y'' - 2y' + 10y = 0$
iii) $y'' - y' - 2y = 0$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución exacta de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

Ejercicio 6. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es un número entero.

(a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.
(b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?
(c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

~~**Ejercicio 7.**~~ Hallar todas las soluciones $y = y(x)$ de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ que verifiquen:

i) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

ii) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

iii) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

iv) $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$

v) $y(0) = 1$

vi) $y'(0) = 1$

~~**Ejercicio 8.**~~ En el interior de la Tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?.

~~**Ejercicio 9.**~~ La ecuación $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ (p, q constantes) se denomina ecuación de Euler.

(a) Demuestre que el cambio de variables $x = e^t$ transforma la ecuación en una con coeficientes constantes.

(b) Aplique (a) para resolver en $\mathbb{R}_{>0}$ las ecuaciones:

i) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

ii) $x^2y'' - xy' + y = 2x$

Ejercicio 10. Vibraciones en sistemas mecánicos.

Una carreta de masa M está sujeta a una pared por medio de un resorte, que no ejerce fuerza cuando la carreta está en la posición de equilibrio $x = 0$. Si la carreta se desplaza a una distancia x, el resorte ejerce una fuerza de restauración igual a $-\kappa x$, donde κ es una constante positiva que mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley del movimiento de Newton, se tiene que:

(1)
$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x \quad \text{o bien } x'' + a^2x = 0, \quad a = \sqrt{\kappa/M}$$

(a) Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y se libera sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, hallar la función $x(t)$. Verificar que se trata de una función periódica. Calcular su período τ, y su frecuencia $f = 1/\tau$ (la cantidad de ciclos por unidad de tiempo). Verificar que la frecuencia de vibración aumenta al aumentar la rigidez del resorte, o al reducir la masa de la carreta (como dice el sentido común) y que la amplitud de esta oscilación es x_0.

Si se produce una amortiguación que se opone al movimiento, y de magnitud proporcional a la velocidad ($= -c\frac{dx}{dt}$) debida al rozamiento, la ecuación (1) que describe el movimiento de la carreta en función del tiempo se convierte en:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = 0$$

o bien:

(2)
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0,$$
$$b = \frac{c}{2M}, \quad a = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}.$$

(b) Si $b > a$ (la fuerza de fricción debida al rozaminto es grande en comparación con la rigidez del resorte), encontrar la solución de (2) que verifique como antes $x(0) = x_0, \ x'(0) = 0$. Probar que no hay ninguna vibración y que la carreta vuelve simplemente a su posición de equilibrio. Se dice que el movimiento está sobreamortiguado.

(c) Si $b = a$, ver que tampoco hay vibración y que el comportamiento es similar al del caso anterior. Se dice que el movimiento es críticamente amortiguado.

(d) Si ahora $b < a$ (caso subamortiguado), probar que la solución de (2) con las condiciones iniciales $x(0) = x_0, \ x'(0) = 0$ es:

(3)
$$x(t) = x_0\frac{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha}e^{-bt}\cos(\alpha t - \theta)$$

donde $\alpha \doteq \sqrt{a^2 - b^2}$, y $\tan\theta = b/\alpha$.

Esta función oscila con una amplitud que se reduce exponencialmente. Su gráfica cruza la posición de equilibrio $x = 0$ a intervalos regulares, aunque no es periódica. Hacer un dibujo. Probar que el tiempo requerido para volver a la posición de equilibrio es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}}$$

y su "frecuencia" está dada por $f = 1/T$, llamada *frecuencia natural del sistema.* Notar que esta frecuencia disminuye al disminuir la constante de amortiguación c.

Hasta ahora hemos considerado vibraciones libres, porque sólo actúan fuerzas internas al sistema. Si una fuerza $F(t)$ actúa sobre la carreta, la ecuación será:

(4) $$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = F(t)$$

(e) Si esta fuerza es periódica de la forma $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, con F_0, ω constantes, hallar $x(t)$. Al valor $\omega/2\pi$ se lo llama frecuencia impresa al sistema.

Si $\tan(\phi) = \frac{\omega c}{\kappa - \omega^2 M}$, probar que la solución general de (4), con $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ puede escribirse:

(5) $$x(t) = \mathrm{e}^{-bt}(C_1\cos(\alpha t) + C_2\mathrm{sen}(\alpha t)) + \frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

El primer término tiende a cero para $t \to +\infty$, luego es "transitorio", es decir, a medida que pasa el tiempo, la solución se parece más y más al segundo sumando. Notar que la frecuencia de esta función es la frecuencia impresa al sistema, y que la amplitud es el coeficiente $\frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}$. ¿Qué pasa cuando la frecuencia impresa se acerca a la frecuencia natural del sistema? (Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia).

(f) Si $b < a$ (caso subamortiguado) hallar la frecuencia impresa ω que provoca amplitud máxima. ¿Siempre existe este valor? Este valor de frecuencia impresa (cuando existe) se denomina frecuencia de resonancia. Demostrar que la frecuencia de resonancia es siempre menor que la frecuencia natural.

~~**Ejercicio 11.**~~ Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, empleando la solución dada:

i)	$xy'' + 2y' + xy = 0,$	$I = \mathbb{R}_{>0},$	$y_1(x) = \frac{\mathrm{sen}x}{x}.$
ii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbb{R}_{>0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
iii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbb{R}_{<0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
iv)	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$	$I = (-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty),$	$y_1(x) = x.$

El último ítem es un caso especial de la ecuación $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ (ecuación de Legendre), correspondiente al caso $p = 1$, en los intevalos en que la ecuación es normal.

Ejercicio 12. Sabiendo que $y_1(x) = e^{x^2}$ es solución de la ecuación homogénea asociada, hallar todas las soluciones de $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$.

Ejercicio 13. Probar que las funciones

$$\phi_1(t) = \sin t \quad \text{y} \quad \phi_2(t) = \sin(2t)$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ pero que $W(\phi_1,\phi_2)(0) = 0$. ¿Existe algún sistema lineal normal de orden 2 definido en algún intervalo $(-\epsilon,\epsilon)$ que admita a $\{\phi_1,\phi_2\}$ como base de soluciones?

Ejercicio 11. Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales hallar los puntos de equilibrio y esbozar el diagrama de fases alrededor de cada uno de ellos:

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = xe^{y} \\ \dot{y} = -1 + y + \operatorname{sen}(x) \end{cases} \qquad \cancel{\text{(b)}} \begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - 1 \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases} \qquad \cancel{\text{(c)}} \begin{cases} \dot{x} = x(y-1) - 4 \\ \dot{y} = x^2 - (y-1)^2 \end{cases}$$

Modelos de crecimiento poblacional.

Ejercicio 12. Dada una población $x(t)$ se denomina **tasa de crecimiento** a la razón $\frac{\dot{x}}{x}$.

Como se vió en la Práctica 5, un modelo que considera que hay una población límite K es el modelo logístico en el que la razón de crecimiento es de la forma $r\big(1 - \frac{x}{K}\big)$.

Cuando hay dos poblaciones que conviven, digamos x e y, las razones de crecimiento de éstas dependen de ambas poblaciones. El modelo más sencillo que considera una población de depredadores y y sus presas x es el de Lotka–Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases}$$

con a, b, c, $d > 0$.

Si a este modelo se le agrega el hecho de que cada población tiene por si misma un límite para su supervivencia se obtiene el modelo

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - \delta x - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx - \gamma y) \end{cases}$$

con todas las constantes positivas.

Considerar los siguientes sistemas correspondientes a poblaciones de depredador–presa con crecimiento limitado:

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x - y) \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = x(2 - 3x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x - y) \end{cases}$$

Para cada uno de estos sistemas, encontrar los puntos de equilibrio y esbozar el diagrama de fases alrededor de cada uno de ellos. Observar que el comportamiento depende fuertemente de los valores de los parámetros.

Dinámica en un campo de fuerzas conservativo.

Dado $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ consideremos la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

que toma la siguiente forma de sistema en el plano de fases

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x). \end{cases}$$

En mecánica $V(x)$ es el potencial y $-V'(x)$ es la fuerza.

Ejercicio 13. Demostrar que la energía

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

es una constante del movimiento. El primer término es el de la energía cinética y el segundo, la potencial.

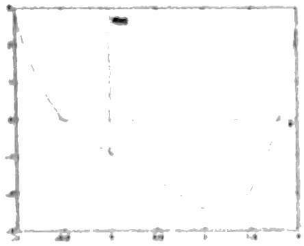
Ejercicio 14. Considerar $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Esbozar el diagrama de fases considerando diferentes niveles de la energía $H(x, y)$. Verificar que todas las trayectorias son acotadas. Utilizar la cantidad conservada obtenida en el punto anterior para obtener la posición máxima en funcion del dato inicial. Este potencial es el del oscilador armónico, es decir un resorte sin la acción de fuerzas externas.

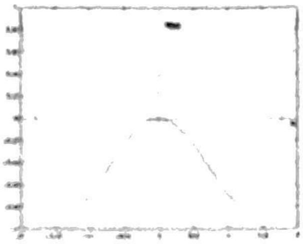
Ejercicio 15. $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$ es el potencial que da origen a la fuerza a la que está sometida una masa m que cuelga de un resorte con costante k (llamamos x a la posición aunque el movimiento se desarrolla en sentido vertical para no confundir con la variable y del plano de fases que representa la velocidad). Compare este caso con el del ejercicio anterior.

Ejercicio 16. Considerar el potencial $V(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x}$, con $x > 0$, $a > 0$. Esbozar el diagrama de fases considerando diferentes niveles de la energía. Describir cualitativamente el movimiento para valores iniciales tales que la energía sea positiva, negativa o nula. Se trata del movimiento radial (es decir, x representa la distancia al origen) de una partícula sometida a un campo gravitatorio, la cantidad $\frac{1}{x^2}$ suele interpretarse como un *potencial centrífugo*, y $V(x)$ es el *potencial eficaz*.

Ejercicio 17. Considerar el potencial del punto anterior. Fijado x_0 obtener el valor mínimo de $|y_0|$ para el cual la trayectoria cuyo nivel de energía es $H(x_0, y_0)$ es no acotada. (La cantidad y_0 es la *velocidad de escape*.)

Ejercicio 18. Hacer el bosquejo del diagrama de fases de los siguientes potenciales:





Dinámica de un campo gradiente.

Ejercicio 19. Sea $V(x, y) = ax^2 + by^2 + x^2y$, con $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos. Consideremos el sistema

$$\dot{X} = -\nabla V(X),$$

donde $X = (x(t), y(t))$.

(a) Verificar que el origen es un punto de equilibrio y clasificar su estabilidad en función de los parámetros a y b.

(b) Si a y b son no nulos, hallar los restantes puntos de equilibrio y analizar su estabilidad.

(c) Para una función $V(X)$ general, observar que los equilibrios son los puntos críticos de V. ¿De qué depende su estabilidad?

Campo central de fuerzas

Ejercicio 20. Considerar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central, esto es, se considera la ecuación

$$m\ddot{X} = -\nabla V(X), \qquad X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\{0\}$$

donde $V(X) = V_0(|X|)$, con $V_0 \in C^2((0, \infty), \mathbb{R})$.

(a) Probar que el momento angular relativo al origen $M(X) = X \times m\dot{X}$ (producto vectorial) se conserva sobre las trayectorias. Es decir, $\frac{d}{dt}(M(X(t)) = 0$.

(b) Mostrar que las trayectorias son planares. Más específicamente, si $X(t)$ es una trayectoria (solución) y $M_0 := M(X(t_0))$ para algún (cualquier) t_0, entonces $X(t)$ está contenida en el plano perpendicular a M_0.

- GUÍA 6 -

① Hallar la solución general $(x_1(t), x_2(t))$ de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$

$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X$. las sol son de la forma $e^{\lambda t} \cdot v_\lambda$

1° autovalores: $\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

2° autovectores:

$\underline{\lambda_1 = 1}$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -v_1 - v_2 = 0 \iff v_1 = -v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_1 = e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2w_1 - w_2 = 0 \iff w_2 = -2w_1 \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$X_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore X = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = -c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ x_2 = c_1 e^{t} - 2c_2 e^{2t} \end{cases}$ ← {sol general}

Quiero que: $\lim_{t\to+\infty} X = 0$: $\lim_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty \Rightarrow$ tomo $c_1 = c_2 = 0$

· $\lim_{t\to-\infty} X = 0$ $\lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0 \Rightarrow$ puedo tomar cualquier $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$ $X' = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}}_{A} X$, $X_\lambda = e^{\lambda t} v_\lambda$

1° autovalores: $\det \begin{pmatrix} -8-\lambda & -5 \\ 10 & 7-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - \overset{-6}{56 + 50} = (\lambda-2)(\lambda+3)$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$

2° autovectores:

$\lambda_1 = 2$ $\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -10a_1 - 5a_2 = 0 \iff a_2 = -2a_1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$X_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=-3$: $\begin{pmatrix}-5 & -5\\ 10 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -5b_1-5b_2=0 \iff b_1=b_2 \Rightarrow b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$X_2 = e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore X = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \leftarrow$ Sol general

- $\lim_{t\to+\infty} X=0$: $\lim_{t\to\infty} e^{2t}=+\infty$ y $\lim_{t\to\infty} e^{-3t}=0 \Rightarrow$ tomo $c_1=0$ y $c_2\in\mathbb{R}$
- $\lim_{t\to-\infty} X=0$: $\lim_{t\to-\infty} e^{2t}=0$ y $\lim_{t\to-\infty} e^{-3t}=+\infty \Rightarrow$ tomo $c_2=0$ y $c_1\in\mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x_1'=-4x_1+3x_2\\ x_2'=-2x_1+x_2\end{cases}$ $X'=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}X$

1º autovalores: $\det\begin{pmatrix}-4-\lambda & 3\\ -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda+1)$ $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

2º autovectores:

$\lambda_1=-1$: $\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -3v_1+3v_2=0 \iff v_1=v_2 \Rightarrow v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$X_1 = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-2$: $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -2w_1+3w_2=0 \iff 2w_1=3w_2 \Rightarrow w=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$X_2 = e^{-2t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\therefore X = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \leftarrow$ Sol general

- $\lim_{t\to+\infty} X=0$: $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}=0$ y $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t}=0 \Rightarrow$ tomo cualquier $c_1, c_2\in\mathbb{R}$
- $\lim_{t\to-\infty} X=0$: $\lim_{t\to-\infty} e^{-t}=+\infty=\lim_{t\to-\infty} e^{-2t} \Rightarrow$ tomo $c_1=0=c_2$

No se puede porque piden $(x_1(t), x_2(t))$:)

d) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} X$

1° autovalores: $\det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 & 3 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & -3 & \lambda+2 \end{pmatrix} = 3(-6-2\lambda+2) + (\lambda+2)(\lambda^2 + 5 - 1 + 6) =$

$= -12 - 6\lambda + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 10 =$

$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$

$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$ $\Rightarrow$ $\lambda = -2$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$

2° autovectores:

$\underline{\lambda = -2}$: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 3v_2 - 3v_3 = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} v_2 = 3v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{3}{2} v_2 \\ -2v_1 + 3v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{3}{2} v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow v_{-2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 1}$: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ -3v_2 + 3v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_2 = e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

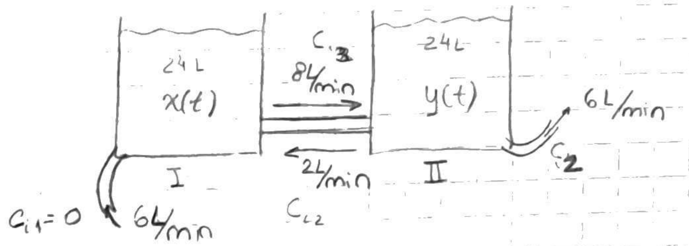
$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3v_2 + 3v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = v_2 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_3 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore X = c_1 e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← Sol general

- $\lim_{t \to +\infty} X = 0$: $c_2 = 0$ y $c_1, c_3 \in \mathbb{R}$ (por lo mismo que los 3 items anteriores)
- $\lim_{t \to -\infty} X = 0$: $c_1 = c_3 = 0$ y $c_2 \in \mathbb{R}$ (")

(2)



$t=0$: x_0 kg sal en I, y_0 en el II

Determinar x e y en $t>0$

$$x'(t) = C_{i_2}\,\frac{2L}{min} - C_{i_3}\,\frac{8L}{min} = \frac{y(t)}{\underset{12}{\cancel{24L}}}\,\frac{\cancel{2L}}{min} - \frac{x(t)}{\underset{3}{\cancel{24L}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{8L}}}{min}$$

$$x'(t) = \frac{y(t)}{12} - \frac{x(t)}{3}$$

$$y'(t) = \frac{x(t)}{\underset{3}{\cancel{24L}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{8L}}}{min} - \frac{y(t)}{\underset{3}{\cancel{12L}}}\,\frac{\overset{2}{\cancel{8L}}}{min} \Rightarrow y'(t) = \frac{x(t)}{3} - \frac{2}{3}y(t)$$

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{y(t)}{12} - \dfrac{x(t)}{3} \\ y'(t) = -\dfrac{2}{3}y(t) + \dfrac{x(t)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/12 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1/12-\lambda & -1/3 \\ -2/3 & 1/3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{12}\lambda - \frac{7}{36} = 0 \iff$$

$$36\lambda^2 - 15\lambda - 7 = 0 \iff \lambda = \frac{15 \pm \sqrt{1233}}{72} = \frac{5 \pm \sqrt{137}}{24}$$

③ Hallar la solución general de los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$

1° autovalores: $\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \lambda^2-2\lambda+2 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1\pm i$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i \end{cases}$

2° autovectores:

$\underline{\lambda = 1+i}$: $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow iv_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -iv_1 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$X_1 = e^{(i+1)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t(\cos(t)+i\,sen(t))\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix} \cos(t)+i\,sen(t) \\ sen(t)-i\cos(t) \end{pmatrix} = e^t\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ sen(t) \end{pmatrix}}_{Re(X_1)} + i\underbrace{\begin{pmatrix} sen(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}}_{Im(X_1)}\Bigg]$$

$\therefore X = c_1 e^t\begin{pmatrix} \cos(t) \\ sen(t) \end{pmatrix} + c_2 e^t\begin{pmatrix} sen(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$

Chequeo que sean LI: $\underline{t=0}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son LI :)

b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X$

1° autovalores: $\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -4 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda^2-4\lambda+8 \Rightarrow \lambda = \frac{4\pm\sqrt{-16}}{2} = 2\pm 2i$

2° autovectores:

$\underline{\lambda = 2+2i}$: $\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2i\,v_1 = -v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_1 = e^{(2+2i)t}\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}e^{2it}\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos(2t)+i\,sen(2t))\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} 2sen(2t)-2i\cos(2t) \\ \cos(2t)+i\,sen(2t) \end{pmatrix} = e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 2sen(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ sen(2t) \end{pmatrix}\right]$$

$\therefore X = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2sen(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ sen(2t) \end{pmatrix}$

¡Chequeo que sean LI: $\underline{t=0}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ son LI :)

c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$

1º autovalores: $\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \lambda = 2$

2º autovectores:

$\underline{\lambda = 2}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -v_2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_2 = e^{\lambda t}(vt + w)$ con $(A - \lambda Id)w = v$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -w_2 = 1 \Leftrightarrow w_2 = -1 \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

$\therefore X = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

d) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} X$

1º autovalores: $\det\begin{pmatrix} \lambda+5 & -9 \\ 4 & \lambda-7 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$

2º autovectores:

$\underline{\lambda = 1}$ $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{2}{\cancel{6}}v_1 = \overset{3}{\cancel{9}}v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X_2 = e^{t}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}t + w\right]$ con $(A - \lambda Id)w = v$

$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2w_1 - 3w_2 = 1 \Leftrightarrow 2w_1 = 1 + 3w_2 \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_2 = e^{t}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$\therefore X = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

④ Hallar la solución general de los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$ $\quad \mathbb{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbb{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}}_{B(t)}$ $\quad$ Sol: $\mathbb{X} = \mathbb{X}_H + \mathbb{X}_p$

1° Sol del homogéneo:

- Autovalores $\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) < \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{matrix}$

- Autovectores

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2v_1 = v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{X}_H = \overbrace{c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\mathbb{X}_1(t)} + \overbrace{c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\mathbb{X}_2(t)}$$

$$\begin{pmatrix} | & | \\ \mathbb{X}_1 & \mathbb{X}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

2° Sol. particular $\mathbb{X}_p = c_1(t)\, e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -e^t & -2e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -e^t & -2e^{2t} & 2 \\ e^t & e^{2t} & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -e^t & -2e^{2t} & 2 \\ 0 & -e^{2t} & t-2 \end{array}\right) \Rightarrow c_2'(t) = (2-t)e^{-2t}$$

$$\Rightarrow c_2(t) = -e^{-2t} - \int t e^{-2t} dt \underset{\substack{t = u,\ dt = du \\ dv = e^{-2t}dt,\ v = -\frac{e^{-2t}}{2}}}{=} -e^{-2t} - \left[-\frac{te^{-2t}}{2} + \int \frac{e^{-2t}}{2} dt \right] = +\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{3e^{-2t}}{4} + k_1$$

Tomo $k_1 = k_2 = 0$ para mi sol part.

Reemplazando $c_2'(t)$ en: $-e^t c_1'(t) - 2e^{2t} c_2'(t) = 2$

$$-e^t c_1'(t) - 2e^{2t}(2-t)e^{-2t} = 2 \Rightarrow -e^t c_1'(t) = 6 - 2t \Rightarrow c_1'(t) = -6e^{-t} + 2te^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(t) = 6e^{-t} + 2\int te^{-t} dt \underset{\substack{u = t,\ du = dt \\ dv = e^{-t}dt,\ v = -e^{-t}}}{=} 6e^{-t} + 2\left[-te^{-t} + \int e^{-t} dt \right] = 4e^{-t} - 2te^{-t} + k_2$$

$$\mathbb{X}_p = (4e^{-t} - 2te^{-t})e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{3e^{-2t}}{4} \right) e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (4-2t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbb{X} = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (4-2t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$ $\quad \bar{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \bar{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}}_{B(t)}$; $\bar{X} = \bar{X}_H + \bar{X}_P$

1° sol del homogéneo

- Autovalores: $\det \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -4 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 \Rightarrow \lambda = 2 \pm 2i$

- Autovectores

$\lambda = 2+2i$, $v = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

(*) $I = \int e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = -e^{-2t}\frac{\cos(2t)}{2} - \int \frac{2e^{-2t}}{2}\cos(2t)\,dt$

$u = e^{-2t}$, $du = -2e^{-2t}dt$; $dv = \mathrm{sen}(2t)dt$, $v = -\frac{\cos(2t)}{2}$

$u = e^{-2t}$, $du = -2e^{-2t}dt$; $dv = \cos(2t)dt$, $v = \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}$

$= -e^{-2t}\frac{\cos(2t)}{2} - \left[e^{-2t}\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2} + \int e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t)\,dt \right]$

$I = -\frac{e^{-2t}}{4}(\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t))$

$\bar{X}_H = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}$

2° sol particular: $\bar{X}_p = c_1(t)\, e^{2t} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^{2t} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} | & | \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = B(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{2t}\,2\,\mathrm{sen}(2t) & -2e^{2t}\cos(2t) \\ e^{2t}\cos(2t) & e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} e^{2t}\,2\,\mathrm{sen}(2t) & -2e^{2t}\cos(2t) & e^{2t} \\ e^{2t}\cos(2t) & e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t) & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_2 \to 2\,\mathrm{sen}(2t)F_2 - \cos(2t)F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} e^{2t}\,2\,\mathrm{sen}(2t) & -2e^{2t}\cos(2t) & e^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & 8\,\mathrm{sen}(2t) - e^{2t}\cos(2t) \end{array} \right)$

$2e^{2t} c_2'(t) = 8\,\mathrm{sen}(2t) - e^{2t}\cos(2t) \Leftrightarrow c_2'(t) = 4e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{1}{2}\cos(2t)$

$c_2(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2t) + 4\int e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t)\,dt \underset{(*)}{=} -\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2t) - e^{-2t}(\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)) + k_2$

$2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t)\, c_1'(t) - 2e^{2t}\cos(2t) \cdot \left(4e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{1}{2}\cos(2t) \right) = e^{2t}$

$2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t)\, c_1'(t) - 8\cos(2t)\,\mathrm{sen}(2t) + e^{2t}\cos^2(2t) = e^{2t}$

$2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t)\, c_1'(t) = e^{2t}\,\mathrm{sen}^2(2t) + 8\cos(2t)\,\mathrm{sen}(2t) \Leftrightarrow c_1'(t) = \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2} + 4e^{-2t}\cos(2t)$

$c_1(t) = -\frac{\cos(2t)}{4} - e^{-2t}(\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)) + k_1$ $\quad$ (Tomo $k_1 = k_2 = 0$)

$\therefore \bar{X} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix} + \left(-\frac{\cos(2t)}{4} - e^{-2t}(\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)) \right) e^{2t} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$

$+ \left(-\frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} - e^{-2t}(\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)) \right) e^{2t} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}$

⑤ Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales $y = y(x)$ de las siguientes ecuaciones:
En c/caso encontrar una sol. de la ecuación no homogenea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}

i) $y'' - 8y' + 16y = 0$

$e^{\lambda t}$ es sol $\iff \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \iff (\lambda - 4)^2 = 0 \iff \lambda = 4$ con mult $= 2$

$\Rightarrow$ Sol $= \{e^{4x}, xe^{4x}\} \Rightarrow Y_H = c_1 \underbrace{e^{4x}}_{X_1} + c_2 \underbrace{xe^{4x}}_{X_2}$

- $y'' - 8y' + 16y = x$

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = 8y_2(x) - 16y_1(x) + x \end{cases}$$

Y_p tiene la forma: $Y_p = c_1(x)e^{4x} + c_2(x)xe^{4x}$

Para hallar $c_1(t)$ y $c_2(t)$: $Q(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t) \end{pmatrix}$

$$Q(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & xe^{4x} \\ 4e^{4x} & e^{4x} + 4xe^{4x} \end{pmatrix} \text{ y } b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{4x} & xe^{4x} & 0 \\ 4e^{4x} & 4xe^{4x} + e^{4x} & x \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{cc|c} e^{4x} & xe^{4x} & 0 \\ 0 & e^{4x} & x \end{array}\right)$$

$e^{4x} c_2'(x) = x \Rightarrow c_2'(x) = xe^{-4x} \Rightarrow c_2(x) = \int xe^{-4x} dx = \frac{-xe^{-4x}}{4} + \int \frac{e^{-4x}}{4} dx =$

$u = x,\ du = dx$
$dv = e^{-4x}dx,\ v = -\frac{e^{-4x}}{4}$

$= -\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + K_1$

$\therefore c_2(x) = -\frac{e^{-4x}}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right)$

$e^{4x}c_1'(x) + xe^{4x} \cdot xe^{-4x} = 0 \Rightarrow c_1'(x) = -x^2e^{-4x} \Rightarrow c_1(x) = \int -x^2e^{-4x}dx =$

$u = x^2,\ du = 2xdx$
$dv = -e^{-4x}dx,\ v = \frac{e^{-4x}}{4}$

$= \frac{x^2e^{-4x}}{4} - \int \frac{xe^{-4x}}{2}dx = \frac{x^2e^{-4x}}{2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16}\right] + K_2 =$

$= \frac{x^2e^{-4x}}{2} + \frac{xe^{-4x}}{8} + \frac{e^{-4x}}{32} + K_2 \quad \therefore c_1(x) = \frac{e^{-4x}}{2}\left(x^2 + \frac{x}{4} + \frac{1}{16}\right)$

$Y_p = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} - x + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{7}{8}x - \frac{7}{32}$

$\therefore Y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{8}x - \frac{7}{32}$

• $y''-8y'+16y=e^x$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{4x} & xe^{4x} & 0 \\ 0 & e^{4x} & e^x \end{array}\right) \Rightarrow c_2'(x)=e^{-3x} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{e^{-3x}}{3}$$

$$c_1'(x)e^{4x}+xe^x=0 \Rightarrow c_1'(x)=-xe^{-3x} \Rightarrow c_1(x)=\int -xe^{-3x}dx = \frac{xe^{-3x}}{3}-\int\frac{e^{-3x}}{3}dx =$$

$u=x,\ du=dx$

$dv=-e^{-3x}dx,\ v=\frac{e^{-3x}}{3}$

$$c_1(x)=\frac{xe^{-3x}}{3}+\frac{e^{-3x}}{9}=\frac{e^{-3x}}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$Y_p=\cancel{\frac{xe^x}{3}}+\frac{e^x}{9}-\cancel{\frac{xe^x}{3}}=\frac{e^x}{9}$$

$$\therefore Y = c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}+\frac{e^x}{9}$$

• $y''-8y'+16y=1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{4x} & xe^{4x} & 0 \\ 0 & e^{4x} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow c_2'(x)=e^{-4x} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{e^{-4x}}{4}$$

$$c_1'(x)e^{4x}+x=0 \Rightarrow c_1'(x)=-xe^{-4x} \Rightarrow c_1(x)=\int xe^{-4x}dx = \frac{xe^{-4x}}{4}+\frac{e^{-4x}}{16}$$

$$Y_p=\frac{x}{4}+\frac{1}{16}-\frac{x}{4}=\frac{1}{16}$$

$$\therefore Y = c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}+\frac{1}{16}$$

• $y''-8y'+16y=e^{-x}$

$$c_2'(x)=e^{-5x} \Rightarrow c_2(x)=-\frac{e^{-5x}}{5}$$

$$e^{4x}c_1'(x)+xe^{-x}=0 \Rightarrow c_1'(x)=-xe^{-5x} \Rightarrow c_1(x)=\frac{xe^{-5x}}{5}-\int\frac{e^{-5x}}{5}dx=\frac{xe^{-5x}}{5}+\frac{e^{-5x}}{25}$$

$u=x,\ du=dx$

$dv=-e^{-5x}dx,\ v=\frac{e^{-5x}}{5}$

$$Y_p=\cancel{\frac{xe^{-x}}{5}}+\frac{e^{-x}}{25}-\cancel{\frac{xe^{-x}}{5}}=\frac{e^{-x}}{25}$$

$$\therefore Y = c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}+\frac{e^{-x}}{25}$$

$\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ $\frac{1}{u(u+1)}$ $\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$

ii) $y'' - 2y' + 10y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = 1 \pm 3i$

$\lambda = 1 + 2i :: z = e^{(1+3i)t} = e^t \cdot (\cos(3t) + i\,\text{sen}(3t)) \Rightarrow Re(z) = e^t\cos(3t),\ Im(z) = e^t\,\text{sen}(3t)$

Luego, $Y_H = c_1 \cos(3t)e^t + c_2\,\text{sen}(3t)e^t \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- $y'' - y' + 10y = x$

Busco $Y_p = c_1(x)\cos(3x)e^x + c_2(x)\,\text{sen}(3x)e^x$ con $Q(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} e^x\cos(3x) & e^x\,\text{sen}(3x) \\ e^x(\cos(3x) - 3\,\text{sen}(3x)) & e^x(\text{sen}(3x) + 3\cos(3x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^x\cos(3x) & e^x\,\text{sen}(3x) & 0 \\ -3e^x\,\text{sen}(3x) & 3e^x\cos(3x) & x \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to \cos(3x)F_2 + 3\,\text{sen}(3x)F_1} \left(\begin{array}{cc|c} e^x\cos(3x) & e^x\,\text{sen}(3x) & 0 \\ 0 & 3e^x & x\cos(3x) \end{array}\right)$$

$c_2'(x) = e^{-x}\frac{x}{3}\cos(3x) \Rightarrow c_2(x) = \int e^{-x}\frac{x}{3}\cos(3x)\,dx$

$(4c_1e^{2x}+c_2e^{-x})-(2c_1e^{2x}-c_2e^{-x})-2(c_1e^{2x}+c_2e^{-x})=0$ ✓

iii) $y''-y'-2y=0$

$\lambda^2-\lambda-2=0 \iff (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \iff \lambda=2$ ó $\lambda=-1$

Sol $\{e^{2x}, e^{-x}\} \Rightarrow Y_H = c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

· $y''-y'-2y=x$, $Y_p=c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{-x}$

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{cc|c} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} & x\end{array}\right)$$

$$c_2'(x)\cdot(-3e^{-x})=x \Rightarrow c_2'(x)=-\frac{xe^{x}}{3} \Rightarrow c_2(x)=-\frac{1}{3}\int xe^{x}dx \underset{\substack{u=x,\ du=dx\\ dv=e^{x}dx,\ v=e^{x}}}{=}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[(xe^{x})-\int e^{x}dx\right]=-\frac{xe^{x}}{3}+\frac{e^{x}}{3}=-\frac{e^{x}(x-1)}{3}$$

$$e^{2x}c_1'(x)+e^{-x}\left(-\frac{xe^{x}}{3}\right)=0 \Rightarrow e^{2x}c_1'(x)=\frac{x}{3} \Rightarrow c_1'(x)=\frac{xe^{-2x}}{3}$$

$$c_1(x)\underset{\substack{u=x,\ du=dx\\ dv=e^{-2x}dx,\ v=-\frac{e^{-2x}}{2}}}{=}\frac{1}{3}\left[-\frac{xe^{-2x}}{2}+\int\frac{e^{-2x}}{2}dx\right]=-\frac{xe^{-2x}}{6}-\frac{e^{-2x}}{12}=-\frac{e^{-2x}}{6}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$Y_p=\left(-\frac{x}{6}-\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\therefore Y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$$

· $y''-y'-2y=e^{x}$, $\left(\begin{array}{cc|c} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} & e^{x}\end{array}\right)$

$c_2'(x)=-\frac{e^{2x}}{3} \Rightarrow c_2(x)=-\frac{e^{2x}}{6}$

$e^{2x}c_1'(x)-\frac{e^{x}}{3}=0 \Rightarrow c_1'(x)=\frac{e^{-x}}{3} \Rightarrow c_1(x)=-\frac{e^{-x}}{3}$

$$Y_p=-\frac{e^{x}}{3}-\frac{e^{x}}{6}=-\frac{e^{x}}{2}$$

$$\therefore Y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-\frac{e^{x}}{2}$$

• $y''-y'-2y=1$, $\left(\begin{array}{cc|c} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} & 1 \end{array}\right)$

$c_2'(x) = -\frac{e^{x}}{3} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{e^{x}}{3}$

$e^{2x} c_1'(x) - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow c_1'(x) = \frac{e^{-2x}}{3} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{e^{-2x}}{6}$

$Y_p = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

$\therefore Y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}$

• $y''-y'-2y=e^{-x}$, $\left(\begin{array}{cc|c} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} & e^{-x} \end{array}\right)$

$c_2'(x) = -\frac{1}{3} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{x}{3}$

$e^{2x} c_1'(x) - \frac{e^{-x}}{3} = 0 \Rightarrow c_1'(x) = \frac{e^{-3x}}{3} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{e^{-3x}}{9}$

$Y_p = -\frac{e^{-x}}{9} - \frac{e^{-x}}{3} = -\frac{4}{9} e^{-x}$

$\therefore Y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{4}{9} e^{-x}$

⑥ Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es un número entero

a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y''+y=0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.

$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$, $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x) \Rightarrow Y = c_1 \cos(x) + c_2 \,\mathrm{sen}(x)$

$\begin{cases} b_1 = c_1 \cos(a_1) + c_2 \,\mathrm{sen}(a_1) \\ b_2 = c_1 \cos(a_2) + c_2 \,\mathrm{sen}(a_2) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(a_1) & \mathrm{sen}(a_1) \\ \cos(a_2) & \mathrm{sen}(a_2) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Tiene solución $\iff \det A \neq 0$

$\det A = \cos(a_1)\,\mathrm{sen}(a_2) - \mathrm{sen}(a_1)\cos(a_2) = \mathrm{sen}(a_2 - a_1) = \mathrm{sen}(-(a_1 - a_2))$

$\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es entero $\Rightarrow a_1 - a_2 \not\equiv 0 \ (\pi) \Rightarrow \mathrm{sen}(-(a_1 - a_2)) \neq 0 \quad \forall a_1, a_2$

Luego el sistema tiene solución y es única

b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?

Si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π, $a_1 - a_2 = k\pi$

luego $sen(-k\pi) = 0$ y el sistema ya no tiene solución

c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

$\lambda^2 + k^2 = 0 \iff \lambda = \pm ki \Rightarrow \bar{Y} = c_1 \cos(kx) + c_2 \, sen(kx)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos(ka_1) & sen(ka_1) & b_1 \\ \cos(ka_2) & sen(ka_2) & b_2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \cos(ka_1) & sen(ka_1) & b_1 \\ 0 & \underbrace{sen(ka_2)\cos(ka_1) - sen(ka_1)\cos(ka_2)}_{sen(-k(a_1-a_2))} & \cos(ka_1)b_2 - \cos(ka_2)b_1 \end{array}\right)$$

$$c_2(x) = \frac{\cos(ka_1)b_2 - \cos(ka_2)b_1}{sen(-k(a_1 - a_2))} = \omega$$

$$c_1(x)\cos(ka_1) + \omega \, sen(ka_1) = b_1 \Rightarrow c_1(x) = \frac{b_1 - \omega \, sen(ka_1)}{\cos(ka_1)}$$

⑦ Hallar todas las soluciones $y=y(x)$ de $y''-y'-2y=0$ y $y''-y'-2y=e^{-x}$ que verifiquen:

~~[illegible]~~ Busco sol. general de esas ecuaciones

$y''-y'-2y=0$; $\lambda^2-\lambda-2=0 \iff (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \iff \lambda=2,\ \lambda=-1$

$Y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

$y''-y'-2y=e^{-x}$: $Y_p = c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{-x}$

$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x}\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} & e^{-x}\end{array}\right)$

$c_2'(x) = -\frac{1}{3} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{x}{3}$

$e^{2x}c_1'(x) - \frac{e^{-x}}{3} = 0 \Rightarrow c_1'(x) = \frac{e^{-3x}}{3} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{e^{-3x}}{9}$

$Y_p = -\frac{e^{-x}}{9} - \frac{e^{-x}}{3}x = -\frac{e^{-x}}{3}\left(x+\frac{1}{9}\right)$

$Y = c_1e^{2x}+c_2e^{-x} - \frac{e^{-x}}{3}\left(x+\frac{1}{9}\right)$, $Y' = 2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}+\frac{e^{-x}}{3}\left(x+\frac{1}{9}\right)-\frac{e^{-x}}{3}$

i) $y(0)=0$, $y'(0)=1$

- $y''-y'-2y=0$

$Y_H(0) = c_1+c_2=0$
$Y_H'(0) = 2c_1-c_2=1$ $\iff \left(\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & -3c_2 & 1\end{array}\right) \Rightarrow c_2=-\frac{1}{3},\ c_1=\frac{1}{3}$

$Y_H = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$

- $y''-y'-2y=e^{-x}$

$Y(0) = c_1+c_2-\frac{1}{27}=0$
$Y'(0) = 2c_1-c_2-\frac{8}{27}=1$ $\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/27 \\ 2 & -1 & 35/27\end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/27 \\ 0 & -3 & 33/27\end{array}\right) \Rightarrow c_2 = -\frac{11}{27},\ c_1=\frac{12}{27}$

$Y = \frac{12}{27}e^{2x} - \frac{11}{27}e^{-x} - \frac{e^{-x}}{3}\left(x+\frac{1}{9}\right) = \frac{12}{27}e^{2x} - \frac{4}{9}e^{-x} - \frac{xe^{-x}}{3}$

ii) $y(0)=1,\ y'(0)=0$

- $y''-y'-2y=0$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3},\ C_1 = \frac{1}{3}$

$$Y_H = \frac{e^{2x}}{3} + \frac{2e^{-x}}{3}$$

- $y''-y'-2y=e^{-x}$: $\begin{cases} c_1 + c_2 - 1/27 = 1 \\ 2c_1 - c_2 - 8/27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 28/27 \\ 2 & -1 & 8/27 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 28/27 \\ 0 & -3 & -48/27 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{16}{27},\ C_1 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

$$Y = \frac{4}{9}e^{2x} + \frac{16}{27}e^{-x} - \frac{e^{-x}}{3}\left(x + \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9}e^{2x} + \frac{5}{9}e^{-x} - \frac{e^{-x}x}{3}$$

iii) $y(0)=0,\ y'(0)=0$

- $y''-y'-2y=0$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow C_2 = 0,\ C_1 = 0 \Rightarrow Y_H = 0$

- $y''-y'-2y=e^{-x}$ $\begin{cases} c_1 + c_2 - 1/27 = 0 \\ 2c_1 - c_2 - 8/27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/27 \\ 2 & -1 & 8/27 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/27 \\ 0 & -3 & 6/27 = 2/9 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{2}{27},\ C_1 = \frac{1}{9}$$

$$Y = \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{2}{27}e^{-x} - \frac{e^{-x}}{3}\left(x + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{1}{9}e^{-x} - \frac{e^{-x}x}{3}$$

iv) $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(c_1 e^{2x} + \underbrace{\frac{c_2}{e^x}}_{\to 0} - \frac{x}{3e^x} - \underbrace{\frac{1}{27e^x}}_{\to 0}\right) = \lim_{x\to\infty}(c_1 e^{2x}) - \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3e^x}}_{L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3e^x} = 0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{2x} = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Para ambas ecuaciones, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$ y $c_2 \in \mathbb{R}$

v) $y(0)=1$

- $y''-y'-2y=0$:

$Y_H(0)=C_1+C_2=1 \Rightarrow C_1=1-C_2 \Rightarrow Y_H=(1-C_2)e^{2x}+C_2e^{-x}$

- $y''-y'-2y=e^{-x}$

$Y(0)=C_1+C_2-\frac{1}{27}=0 \Rightarrow C_1=\frac{1}{27}-C_2=$

$\Rightarrow Y=\left(\frac{1}{27}-C_2\right)e^{2x}+C_2e^{-x}-\frac{e^{-x}}{3}\left(x+\frac{1}{9}\right)$

vi) $y'(0)=1$

- $y''-y'-2y=0$

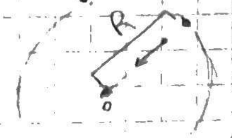
$Y_H'(0)=2C_1-C_2=1 \Rightarrow C_2=2C_1-1 \Rightarrow Y_H=C_1e^{2x}+(2C_1-1)e^{-x}$

- $y''-y'-2y=e^{-x}$

$Y'(0)=2C_1-C_2-\frac{8}{27}=1 \Rightarrow 2C_1-C_2=\frac{35}{27} \Rightarrow C_2=2C_1-\frac{35}{27}$

$Y=C_1e^{2x}+\left(2C_1-\frac{35}{27}\right)e^{-x}-\frac{e^{-x}}{3}\left(x+\frac{1}{9}\right)$

8) En el interior de la Tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?



$\left.\begin{matrix} F_g=-K.x \\ \shortparallel \\ mx'' \end{matrix}\right\} mx''+Kx=0 \Leftrightarrow m\lambda^2+K=0$

$m\lambda^2=-K \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{K}{m}}\,i$

$X_1=e^{\sqrt{\frac{K}{m}}\,i\,t}=\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+i\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)$

$X=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+C_2\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)$

$X(0)=C_1=R$

$X'=-R\sqrt{\frac{K}{m}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)+C_2\sqrt{\frac{K}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)$

$X'(0)=0$ ← Parte del reposo

$X'(0)=C_2\sqrt{\frac{K}{m}}=0 \Leftrightarrow C_2=0$

Luego, $X(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$ y $X = 0 \iff \sqrt{\frac{k}{m}}\, t = \frac{\pi}{2} \iff t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$X'(t) = -R\sqrt{\frac{k}{m}}\,\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$$X'\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = -R\sqrt{\frac{k}{m}}\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\cancel{\sqrt{\frac{k}{m}}}\,\frac{\pi}{2}\,\cancel{\sqrt{\frac{m}{k}}}\right)}_{1} = \boxed{-R\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- GUÍA 6 -

(9) La ecuación $x^2y''+pxy'+qy=0$ (p, q constantes) se denomina ecuación de Euler.

a) Demuestre que el cambio de variables $x=e^t$ transforma la ecuación en una con coeficientes constantes.

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t}-e^{-t}\frac{dy}{dt}}{e^t}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazando en la ecuación original

$$\cancel{e^{2t}}\cdot\cancel{e^{-2t}}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+p\cancel{e^{t}}\cdot\cancel{e^{-t}}\frac{dy}{dt}+q\,y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=0 \quad \leftarrow \text{coef. ctes.}$$

$$\ddot{y}+(p-1)\dot{y}+qy=0$$

b) Aplique (a) para resolver en $\mathbb{R}_{>0}$ las ecuaciones:

i) $x^2y''+2xy'-6y=0$ Sea $x=e^t$

$(*)\ \ddot{y}+\dot{y}-6y=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+3)=0$ $\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-3\end{cases}$

$\lambda=2$: $\tilde{Y}_1=e^{2t}$, $\lambda=-3$: $\tilde{Y}_2=e^{-3t}$ ← Sol. de la ecuación $(*)$

$\Rightarrow \tilde{Y}=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}$. Como $x=e^t \Rightarrow t=\ln(x)$. Luego,

$$Y=c_1e^{\ln(x^2)}+c_2e^{\ln(x^{-3})}=\boxed{c_1x^2+\frac{c_2}{x^3}=Y}$$

ii) $x^2y''-xy'+y=2x$ Sea $x=e^t$. Busco sol. del homogéneo

$(*)\ \ddot{y}-2\dot{y}+y=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ con mult. 2

$\Rightarrow$ Sol: $\{e^t, te^t\} \Rightarrow \tilde{Y}_H=c_1e^t+c_2te^t \Rightarrow Y_H=c_1x+c_2x\ln(x)$

$\tilde{Y}_p=c_1(t)e^t+c_2(t)te^t$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^t & te^t & 0\\ e^t & e^t+te^t & 2e^t\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} e^t & te^t & 0\\ 0 & e^t & 2e^t\end{array}\right)\Rightarrow c_2'(t)=2 \Rightarrow c_2(t)=2t$$

$e^tc_1'(t)+2te^t=0 \Rightarrow c_1'(t)=-2t \Rightarrow c_1(t)=-t^2$

$\tilde{I}_p = -t^2 e^t + 2t^2 e^t = t^2 e^t \Rightarrow I_p = x\ln^2(x)$

$\therefore I = c_1 x + c_2 x\ln(x) + x\ln^2(x)$

(11) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, empleando la solución dada:

i) $xy'' + 2y' + xy = 0$, $I = \mathbb{R}_{>0}$, $y_1(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Sea $y(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot z$

$y' = \frac{\cos(x)x - \text{sen}(x)}{x^2} z + z' \frac{\text{sen}(x)}{x}$

$y'' = \frac{(-\text{sen}(x)x + \cancel{\cos(x)} - \cancel{\cos(x)})x^2 - 2x(\cos(x)x - \text{sen}(x))}{x^4} z + z' \frac{\cos(x)x - \text{sen}(x)}{x^2} +$

$z'' \frac{\text{sen}\,x}{x} + z' \frac{\cos(x)x - \text{sen}(x)}{x^2}$

Reemplazando en la ecuación ...

$\frac{\cancel{-x^3\text{sen}(x)} - 2x^2\cos(x) + 2x\,\text{sen}(x)}{x^3} z + \frac{2\cos(x)x - \cancel{2\text{sen}(x)}}{x} z' + \text{sen}(x) z'' +$

$+ \frac{2\cos(x)x - 2\text{sen}(x)}{x^2} z + \cancel{\frac{2\text{sen}(x)}{x} z'} + \cancel{\text{sen}(x) z} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}(x) z'' + 2\cos(x) z' = 0$

$s = \text{sen}(x)$, $ds = \cos(x)\,dx$, $dx = \frac{ds}{\cos(x)}$

Sea $u = z'$, $\text{sen}(x)u' + 2\cos(x)u = 0 \iff \frac{u'}{u} = -2\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \Rightarrow$

$\ln(u) = -2\int \frac{1}{s}\,ds = -2\ln(\text{sen}(x)) + c_1$

$u = \frac{1}{\text{sen}^2(x)} \cdot c_1 \Rightarrow z = c_1 \int \frac{1}{\text{sen}^2(x)}\,dx = -\text{cotg}(x)c_1 + c_2 = -\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} c_1 + c_2$

luego $\boxed{y(x) = -\frac{\cos(x)}{x} c_1 + \frac{\text{sen}\,x}{x} c_2}$

ii) $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$, $I = \mathbb{R}_{>0}$, $y_1(x) = e^{x^2}$. Sea $y(x) = e^{x^2} z$

$y' = 2xe^{x^2} z + z' e^{x^2}$; $y'' = 2e^{x^2} z + 4x^2 e^{x^2} z + z' 2xe^{x^2} + z'' e^{x^2} + z' 2xe^{x^2}$

Reemplazando en la ecuación

$e^{x^2}[\cancel{2xz} + \cancel{4x^3 z} + 2x^2 z' + xz'' + 2x^2 z' - \cancel{2xz} - z' - \cancel{4x^3 z}] = 0$

$xz'' + (4x^2 - 1)z' = 0 \Rightarrow$ Llamo $u = z'$, $xu' + (4x^2 - 1)u = 0$

$\frac{u'}{u} = -4x + \frac{1}{x} \Rightarrow \ln(u) = -2x^2 + \ln(x) + c_1 \Rightarrow u = xe^{-2x^2} c_1$

$z = c_1 \int xe^{-2x^2}\,dx = c_1 \int \frac{e^s}{-4}\,ds = -\frac{c_1}{4} e^{-2x^2} + c_2$, luego $\boxed{y = -\frac{c_1}{4} e^{-x^2} + c_2 e^{x^2}}$

$s = -2x^2$ derivada ...

iii) $xy'' - y' - 4x^3y = 0$, $I = \mathbb{R}_{<0}$, $y_1(x) = e^{x^2}$

iv) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $I = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$, $y_1(x) = x$

$y = xz$, $y' = z + xz'$, $y'' = z' + z' + xz'' = 2z' + xz''$

Reemplazo en la ec. original,

$(1-x^2)(2z' + xz'') - 2x(\cancel{z} + xz') + \cancel{2xz} = 0$

$(2-4x^2)z' + (x-x^3)z'' = 0$. Reemplazo $u = z'$

$$\frac{u'}{u} = \frac{4x^2-2}{x-x^3} = \frac{4x^2-2}{x(1-x)(1+x)}$$

CA: $\frac{4x^2-2}{x(1-x)(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$

$A(1-x)(1+x) + Bx(1+x) + Cx(1-x) = 4x^2-2$

$x=1$: $2B = 2 \Rightarrow B = 1$

$x=-1$: $-2C = 2 \Rightarrow C = -1$

$x=0$: $A = -2$

$$\ln|u| = \int\left(\frac{-2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\ln(u) = -2\ln|x| - \ln|1-x| - \ln|1+x| + c$$

$$u = \frac{c_1}{x^2(1-x)(1+x)} = z'$$

CA: $\frac{1}{x^2(1-x)(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x}$

$Ax(1-x)(1+x) + B(1-x)(1+x) + Cx^2(1+x) + Dx^2(1-x) = 1$

$x=0$: $B = 1$ $x=-1$: $D = 1/2$

$x=1$: $C = 1/2$

$x=2$: $-6A \cancel{- 3 + 6 - 2} = 1 \Rightarrow A = 0$

$$\Rightarrow z = c_1\int \frac{1}{x^2(1-x)(1+x)}\,dx$$

$$z = c_1\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right)dx$$

$$= c_1\left(-\frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{2} + \frac{\ln(1+x)}{2}\right) + c_2 = c_1\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c_2$$

$$\boxed{y = c_1\left(-1 + \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + xc_2}$$