Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

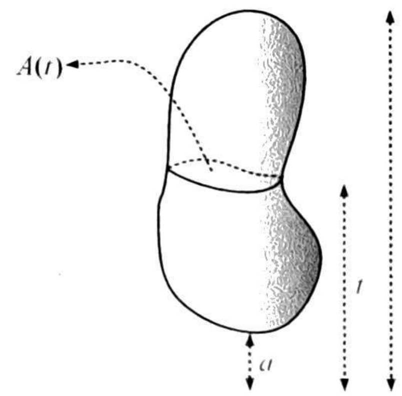
Práctica 0: Repaso de integración y cambio de variables.

1. PRINCIPIO DE CAVALIERI.

Ejercicio 1. Considerar un cuerpo que ocupa una región Ω en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = \ell$. Deduzca que el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^\ell A(t)\, dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenido al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 2. Calcular el volumen de una región cilíndrica. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula empírica *superficie de la base por altura.*

Ejercicio 3. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

2. FUBINI.

Ejercicio 4. Sea R el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x^2 y\, dA$, (b) $\iint_R x \cos(xy)\, dA$.

Ejercicio 5. Sea R el rectángulo arbitrario $[a, b] \times [c, d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R \phi(x, y)\, dA$ cuando $\phi(x, y)$ está dada por

(a) $\phi(x, y) = f(x)g(y)$, (b) $\phi(x, y) = f(x) + g(y)$.

3. Descripción de Regiones.

Ejercicio 6. Sea T el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,3)$ y $(3,5)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 7. Para cada una de las siguientes descripciones, graficar la región correspondiente y calcular el área respectiva.

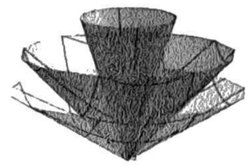
$$(a)\ -1 \leq x \leq 1+y,\ -1 \leq y \leq 1, \qquad (b)\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1$$

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{P}$ la pirámide cuyos vértices son $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Describirla analíticamente. Hallar el volumen.

Ejercicio 9. Describir en coordenadas *cilíndricas y en esféricas* las siguientes regione

(*a*) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$,
(*b*) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq y\}$
(*c*) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \leq z,\ y \geq 0\}$,
(*d*) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq x^2+y^2\}$
(*e*) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$

(*f*) La parte superior de los conos verticales a 45, 30 y 60 grados:



(*g*) La intersección entre una esfera de radio 17 y cada uno de los conos anteriores.

Ejercicio 10. Describir en coordenadas cilíndricas los siguientes conjuntos:
(*a*) El sólido limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x^2+y^2$.
(*b*) El sólido definido por $x^2+y^2+z^2 \leq 16$, $x^2+y^2 \geq 4$.
(*c*) El sólido limitado por los planos $z = 2$, $z = 9$ y la superficie de ecuación $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$
(*d*) Un cilindro de radio R y largo L "apoyado vertical" sobre el plano xy, y un cono con punta en el origen y misma tapa que el cilindro.
(*e*) La zona intermedia entre dos conos de ángulos 30 y 60, con $0 \leq z \leq 8$.

Ejercicio 11. Calcular los volúmenes de los sólidos que sean acotados de los dos ejercicios anteriores.

Ejercicio 12. ¿Es cierto que el volumen de un cono es un tercio del de un cilindro?

4. Aplicaciones de la integral.

Ejercicio 13. *Valor medio:* hallar el valor medio de la función $f(x,y) = x^2y$ en la región triangular de vértices $(1,1)$, $(2,0)$ y $(0,1)$.

Ejercicio 14. *Masa:* hallar la masa de la región de ecuación $x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2$ sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la componente z, digamos $\rho(x,y,z) = \lambda z$.

5. Cambio de Variables.

$$\boxed{\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \qquad , \qquad \iint_D f \circ T\, |J_T| = \iint_{T(D)} f}$$

Ejercicio 15. Sean $T(u,v) = T\big(x(u,v), y(u,v)\big) = (au+bv, cu+dv)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Sea D^* el rectángulo $[0,3] \times [1,3]$.

(a) Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es biyectiva T? Observar que D es un paralelogramo y hallar su área.
(b) Describir el área de D en términos de una integral sobre D^*. Indicar que función hay que integrar y que relación tiene con T.

Ejercicio 16. Sea D el paralelogramo de vértices $(1,2)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(6,6)$. Calcular

✓(a) $\iint_D xy\,dxdy$ ✓(b) $\iint_D (x-y)\,dxdy$

Sugerencia: plantear las integrales como integrales sobre el cuadrado $D^* = [0,1] \times [0,1]$.

Ejercicio 17. Sean $D^* = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1;\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ y P la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $P(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
(a) Mostrar que $P(D^*) = D$. ¿Es biyectiva P?
(b) ¿En qué transforma P el rectángulo $[r, r+\Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$?
(c) Calcular la matriz $DP(r,\theta)$. ¿En qué transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en (b)? ¿Y en el caso $r = 0$?
(d) Escribir la demostración de la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).

Ejercicio 18. Sean $D_1 = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 4\pi\}$ y P la transformación del ejercicio anterior.
(a) Hallar $D = P(D_1)$.
(b) Calcular $\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$ y $\iint_{D_1} r^2 J\,drd\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar.
¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

✓**Ejercicio 19.** Considere la curva dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Escriba esta curva en coordenadas polares y haga un dibujo (esta curva se llama lemniscata). Halle el área encerrada por esta curva.

✓**Ejercicio 20.** Calcular $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 \le 1$ y debajo del cono de ecuación $z = (x^2+y^2)^{1/2}$.

✓**Ejercicio 21.** Sea E el elipsoide dado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.
✓(a) Considere la transformación $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x,y,z) = \left(\tfrac{x}{a}, \tfrac{y}{b}, \tfrac{z}{c}\right)$$

(con inversa $g^{-1}(x,y,z) = (ax, by, cz)$). Describa $g(E)$, calcule el Jacobiano de g y utilícelo para hallar el volumen de E.
✓(b) Calcule $\displaystyle\iiint_E \left((x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)\right) dx\,dy\,dz.$

✓**Ejercicio 22.** Hallar el centro de masa del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 \le 1$, $1 \le z \le 2$, si la densidad es $\rho = (x^2+y^2)z^2$.

?✓**Ejercicio 23.** Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el momento de inercia alrededor del eje x está definido por,

$$\boxed{I_x = \iiint_W (y^2 + z^2)\rho\,dx\,dy\,dz}$$

y análogamente se definen I_y e I_z. Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

tfernandezvidal@gmail.com
@yahoo.com.ar

$\not{1}7$/08/2022
PRÁCTICA

Para aprobar: 2 ejercicios bien en ~~el~~ c/examen

" promoción: 2 parciales aprobados con prom ≥ 6.

PRACTICA 0:

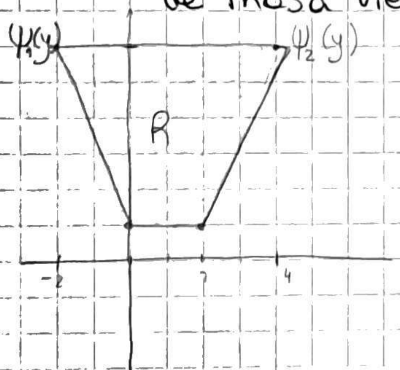
Fubini: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), x \in [a,b]\}$

φ_1 y φ_2 continuas

$f: D \to \mathbb{R}$ integrable

$$\iint_D f\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,dy\,dx$$

Ejercicio: Determinar la masa y el centro de masa del trapecio que tiene por vértices a $(-2,6)$, $(0,1)$, $(2,1)$ y $(4,6)$. Si la densidad de masa viene dada por $f(x,y) = y$



$$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad C = (x_M, y_M)$$

$$x_M = \frac{1}{M}\iint_R x\,f(x,y)\,dA$$

$$y_M = \frac{1}{M}\iint_R y\,f(x,y)\,dA$$

$\psi_2(y)$ $\quad y = \frac{5}{2}x - 4 \Rightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{8}{5} = \psi_2(y)$

$\psi_1(y)$ $\quad y = -\frac{5}{2}x + 1 \Rightarrow x = -\frac{2y}{5} + \frac{2}{5} = \psi_1(y)$

$$M = \int_1^6 \int_{-\frac{2y}{5}+\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}y+\frac{8}{5}} y\,dx\,dy = \int_1^6 y\cdot\left(\frac{2}{5}y + \frac{8}{5} - \left(-\frac{2}{5}y + \frac{2}{5}\right)\right)dy =$$

$$= \int_1^6 \left(\frac{4}{5}y^2 + \frac{6}{5}y\right)dy = \left[\frac{4}{15}y^3 + \frac{3}{5}y^2\right]_1^6 = \frac{235}{3} = \text{Masa}$$

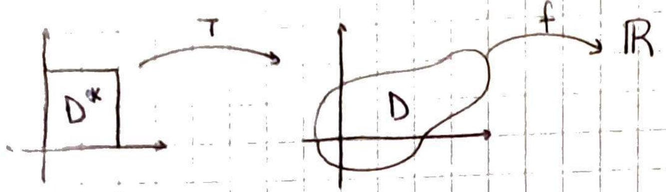
$$x_M = \frac{3}{235}\int_1^6 \int_{-\frac{2}{5}y+\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}y+\frac{8}{5}} x\cdot y\,dx\,dy = \frac{3}{235}\int_1^6 y\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{2}{5}y+\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}y+\frac{8}{5}} dy = 1$$

$$y_M = \frac{3}{235}\int_1^6 \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} y^2\,dx\,dy = \frac{3}{235}\int_1^6 y^2\cdot x\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy = \frac{207}{47}$$

$$C = \left(1, \frac{207}{47}\right)$$

Cambio de variables: $T: D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ inyectiva, C^1, D^* región acotada, $f: D = T(D^*) \to \mathbb{R}$ integrable. Si DT inversible en D^* y $JT = |\det(DT)|$

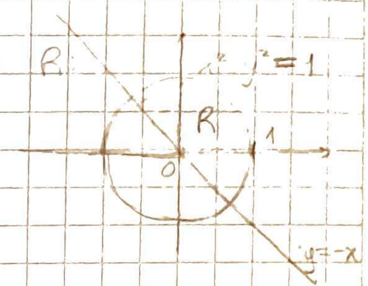
$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D^*} f \circ T(u,v) \boxed{JT}\, du\, dv$$



Coordenadas polares: $(x,y) = T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Ejercicio: Calcular el valor medio de la función $f(x,y) = x+y$ en la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -y,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Valor medio $\frac{1}{A(R)} \cdot \iint_R f(x,y)$ y $A(R) = \iint_R 1\, dx\, dy$



- $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$

  $0 \leq r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$

- $y \geq 0 \Rightarrow r\,\text{sen}\,\theta \geq 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$

- $-y \leq x$, $y = -x$, $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = r\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ o $\frac{\pi}{4}$

$\therefore r \in [0,1]$, $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$, $JT = r$

$$\Rightarrow A(R) = \int_0^{3\pi/4}\int_0^1 r\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{8}$$

$$Vm = \frac{8}{3\pi} \cdot \int_0^{3\pi/4}\int_0^1 r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{8}{3\pi} \cdot \int_0^{3\pi/4} (\cos\theta + \text{sen}\,\theta) \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{8}{9\pi} \cdot (\text{sen}\,\theta - \cos\theta)\Big|_0^{3\pi/4} = \frac{8}{9\pi} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{8}{9\pi} + \frac{8\sqrt{2}}{9\pi} =$$

$$= \frac{8}{9\pi}(1+\sqrt{2})$$

[black pen red pen]

Coordenadas cilíndricas: $T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$, $JT = r \geq 0$

Ejercicio: Calcular $\iiint_R z \cdot e^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$, $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq z^2+2, \; -3 \leq z \leq 1\}$

Rta. $\pi \left(4e + \frac{e^3}{2} - \frac{e^{11}}{2}\right)$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad JT = r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad \begin{array}{l} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array}$$

Ejercicio: Calcular $\iiint_R z\, dx\, dy\, dz$, $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

$0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\qquad JT = r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$z: r\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \cos\varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi \left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{r=1} d\varphi =$$

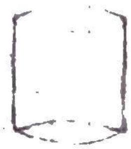
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \left.\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

17/08/2022

GUÍA

PRACTICA 0

(2)



Coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ $J\Phi = r$

$$V = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^r r \, dr \, d\theta \, dz = 2\pi \int_0^z \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=r} dz = \pi r^2 . z$$

Volumen del cilindro: $\pi r^2 . h$ (con $h = z$) ✓

(3) $\{z = x^2 + y^2 \,,\ z = 2\} = R$

Cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$, $J\Phi = r$

$$\text{Vol.: } \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r \, dr \, d\theta \, dz = 2\pi \int_0^2 \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} dz = 2\pi . z\Big|_0^2 = \boxed{4\pi}$$

(4) $R = [-1, 1] \times [0, 1]$

(a) $$\iint_R x^2 y \, dA = \int_{-1}^1 \int_0^1 x^2 y \, dy \, dx = \int_{-1}^1 x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(b) $$\iint_R x\cos(xy) \, dA = \int_{-1}^1 \int_0^1 x\cos(xy) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \cancel{x}\left(\frac{\text{sen}(xy)}{\cancel{x}}\right)\Big|_{0=y}^{1=y} dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \text{sen}\,x \, dx = -\cos x\Big|_{-1}^1 = -\cos 1 + \cos(-1)$$

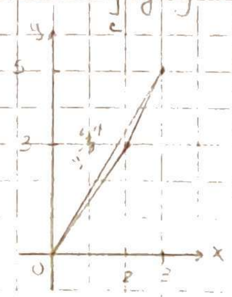
(5) $R = [a,b] \times [c,d]$. Expresar como integrales simples $\iint_R \phi(x,y)\,dA$ cuando:

(a) $\phi(x,y) = f(x)\,g(y)$: $\iint_R f(x).g(y)\,dA = \int_a^b f(x)\,dx . \int_c^d g(y)\,dy$

(b) $\phi(x,y) = f(x) + g(y)$: $\iint_R [f(x) + g(y)]\,dA = \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d g(y)\,dy$

(6) Triangulo T: $(0,0)$; $(2,3)$; $(3,5)$.

Describir como tipo 1.



Techo: $y = \frac{5}{3}x$; Piso: $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \text{ en } 0 \le x \le 2 \\ y = 2x - 1 \text{ en } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

Como tipo 2:

Pared izq: $x = \frac{3}{5}y$; Pared der: $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \text{ de } 0 \le y \le 2 \\ x = \frac{y+1}{2} \text{ de } 2 \le y \le 3 \end{cases}$

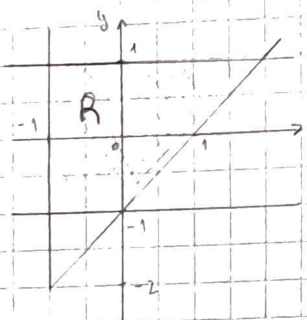
Hallar el área: $A = \int_0^2 \left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right)x\,dx + \int_2^3 \left(\frac{5}{3}x - 2x + 1\right)dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \int_2^3\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx$

$= \frac{1}{3} + \left(-\frac{x^2}{6}+x\right)\Big|_2^3 = \frac{1}{3} + \left[-\frac{3}{2}+3-\left(-\frac{2}{3}+2\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}$

(7) Graficar la región y calcular el área

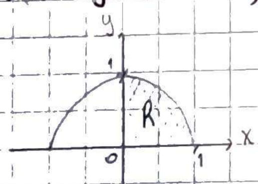
(a) $\{-1 \leq x \leq 1+y,\ -1 \leq y \leq 1\} = R$



$A(R) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1+y} 1\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}(1+y-(-1))\,dy = \int_{-1}^{1}(y+2)\,dy =$

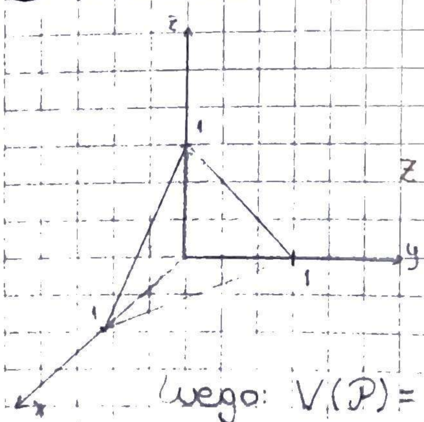
$= \frac{y^2}{2} + 2y\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} + 2 = 4$

(b) $\{0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1\} = R$ Coord. polares: $\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$



$A(R) = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \underbrace{r}_{I\Phi}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

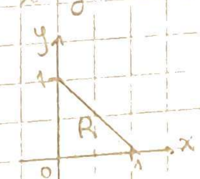
(8) Pirámide P: $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Hallar volumen.



$V = \iiint_E 1\,dA$

$z\begin{cases} \text{Techo: plano } x+y+z=1 \Rightarrow z = 1-x-y \\ \text{Piso: } z=0 \end{cases}$

$R: \quad 0 \leq y \leq 1-x$
$\quad\ \ 0 \leq x \leq 1$



luego: $V(P) = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx =$

$= \int_0^1\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{0=y}^{y=1-x}dx = \int_0^1\left(1-x-x+x^2-\frac{1}{2}(1-2x+x^2)\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx =$

$= \left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

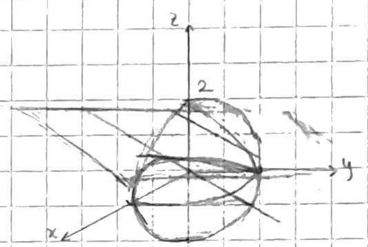
(9) Describir en coord cilíndricas y esféricas:

(a) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

Cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$

Esféricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$

(c) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4, x \leq z, y \geq 0\}$



Cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ r\cos\theta \leq z \leq 2 \end{cases}$

Esféricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$

(e) $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$

Cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r \leq z \leq 3 \end{cases}$

Esféricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \end{cases}$

(10) Describir en cilíndricas

(a) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x^2+y^2$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$

(c) $z = 2$, $z = 9$, $z = \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{r^2}$

(e) $0 \leq z \leq 8$. Zona intermedia entre 2 conos de 30° y 60°
$\pi/6$ $\pi/3$

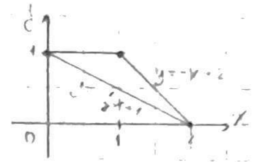
$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases}$

$8 = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

$8 = r \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow r = 16$

$\frac{16\sqrt{3}}{3} \leq r \leq 16$

(13) Hallar valor medio de $f(x,y) = x^2y$ en el triangulo $(1,1),(2,0),(0,1)$.



Valor medio $\frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\,dA$, $A(R) = \iint_R 1\,dA$

$$A(R) = \int_0^1 \int_{2-2y}^{2-y} 1\,dx\,dy = \int_0^1 (2-y-2+2y)\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$y = -\frac{1}{2}x + 1$; $y = -x+2$

$x = 2-2y$; $x = 2-y$

$$\text{Valor medio } 2.\int_0^1\int_{2-2y}^{2-y} x^2y\,dx\,dy = 2\int_0^1 y.\frac{x^3}{3}\Big|_{2-2y}^{2-y} dy = \frac{2}{3}\int_0^1 y.\left[(8-12y+6y^2-y^3)-\right.$$

$$\left.-(8-24y+24y^2-8y^3)\right]dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (12y^2-18y^3+7y^4)\,dy = \frac{2}{3}.\left(4y^3-\frac{9}{2}x^4+\frac{7}{5}x^5\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}.\left(4-\frac{9}{2}+\frac{7}{5}\right) = \frac{2}{3}.\frac{9}{10}$$

$$= \frac{3}{5}$$

(14) Hallar la masa de $x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2$, sabiendo $\rho(x,y,z) = \lambda z$

Ej ≈ enp851; ej 1, Calculo - Stewart

Coord. esf: $\begin{cases} x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi + r \end{cases}$ $J = r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$; $\begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$

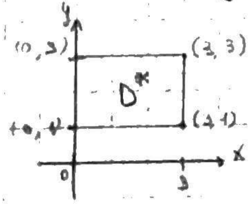
$$M = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi.\lambda(r\cos\varphi + r)\,d\varphi\,d\theta\,dr = \int\int\int (r^3\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + r^3\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

$$= \lambda\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2} - r^3\cos\varphi\Big|_{0}^{\pi/2} d\theta\,dr = 2\pi\lambda\int_0^R \left(\frac{r^3}{2}+r^3\right)dr = 2\pi\lambda\frac{3}{2}\int_0^R r^3\,dr =$$

$$= \frac{3}{4}\pi\lambda.\,r^4\Big|_0^R = \boxed{\frac{3\pi}{4}\lambda.R^4}$$

(15) $T(u,v) = T(x(u,v),y(u,v)) = (au+bv, cu+dv)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ y $D^* = \overset{x}{[0,3]} \times \overset{y}{[1,3]}$

(a) $D = T(D^*)$ ¿T es biyectiva? D es un paralelogramo, hallar su área



$T(0,1) = (b,d)$

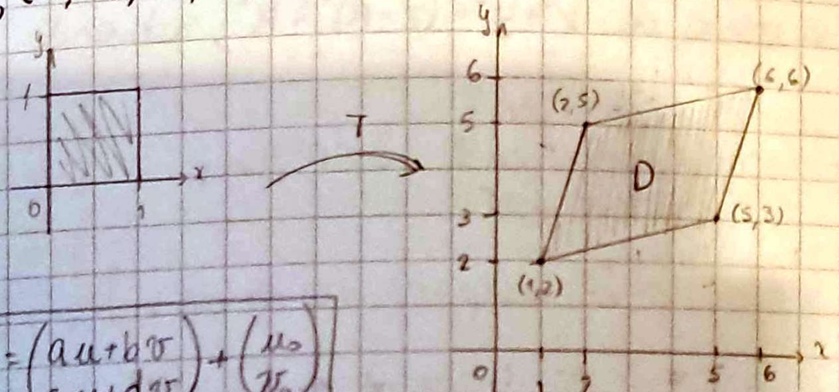
$T(0,3) = (3b,3d)$

$T(3,1) = (3a+b, 3c+d)$

$T(3,3) = (3a+3b, 3c+3d)$

⑯ D paralelogramo: $(1,2), (5,3), (2,5), (6,6)$. Calcular

(a) $\iint_D xy \, dx\, dy$



$T(0,0) = (1,2)$
$T(1,0) = (5,3)$
$T(0,1) = (2,5)$
$T(1,1) = (6,6)$

$$\boxed{T(u,v) = \begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}$$

$$T(0,0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

$$T(1,0) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 \\ c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$T(0,1) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b+1 \\ d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Verifico: $T(1,1) = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓

Luego $T(u,v) = (4u+v+1,\ u+3v+2)$, $|\det(J_T)| = \left|\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 11$

$$\int_0^1\int_0^1 (4u+v+1)\cdot(u+3v+2)\cdot 11\, du\, dv = 11\int_0^1\int_0^1 (4u^2+13uv+9u+3v^2+5v+2)\, du\, dv =$$

$$= 11\int_0^1 \left(\frac{4}{3}u^3+\frac{13}{2}u^2v+\frac{9}{2}u^2+3uv^2+5uv+2u\right)\Big|_0^1 dv = 11\int_0^1\left(\frac{47}{6}+\frac{23}{2}v+3v^2\right)dv$$

$$= 11\cdot\left(\frac{47}{6}v+\frac{23}{4}v^2+v^3\right)\Big|_0^1 = 11\cdot\left(\frac{163}{12}+\frac{12}{12}\right) = \frac{1925}{12}$$

(b) $\iint_D (x-y)\,dx\,dy = 11\int_0^1\int_0^1 (4u+v+1-u-3v-2)\,du\,dv = 11\int_0^1\int_0^1 (3u-2v-1)\,du\,dv =$

$$= 11\int_0^1\left(\frac{3}{2}u^2-2uv-u\right)\Big|_0^1 dv = 11\int_0^1\left(\frac{3}{2}-2v-1\right)dv = 11\left(\frac{1}{2}v-v^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 11\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{11}{2}$$

(17) $D^* = \{(r,\theta) : 0\le r\le 1;\ 0\le\theta\le 2\pi\}$, $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ y $P(r,\theta)=(x(r,\theta),y(r,\theta)) =$
$=(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

(a) Mostrar que $P(D^*) = D$ ¿Es biyectiva P?

Si $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow D=\{(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \underbrace{r^2(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)\le 1}_{\Updownarrow}\}$

$r^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le r\le 1$

Como $r\ge 0 \Rightarrow 0\le r\le 1$

Y no depende de $\theta \Rightarrow 0\le\theta\le 2\pi$

$\therefore P(D^*) = D$

No es biyectiva pues $\theta=0$ y $\theta=2\pi$ llegan a la misma imagen en D y por lo tanto no es inyectiva.

(b) En qué transforma P el rectángulo $[r, r+\Delta r]\times[\theta,\theta+\Delta\theta]$?

(18) $D_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$ y $P = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$

(a) Hallar $D = P(D_1)$ $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

(b) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ y $\iint_{D_1} r^2 J\,dr\,d\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación. ¿Dan igual los dos? ¿Por qué?

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1} dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}+y^2-\left(-\frac{1}{3}-y^2\right) dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}+2y^2\right) dy =$$

$$= \left(\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

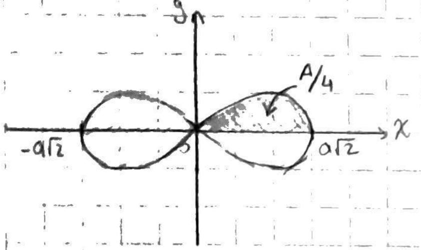
$$\int_0^{4\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{4\pi}{4}\, r^4\Big|_0^1 = \pi \approx 3{,}14\ldots$$

¿No dan lo mismo pues en D_1 son 2 vueltas al disco?

(19) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$. Escriba en coordenadas polares y haga un dibujo. Halle el área encerrada por la curva.

"Lemniscata"

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow [r^2(\underbrace{\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta}_{1})]^2 = 2a^2r^2(\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta)$$



$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta)$$
$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$
$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

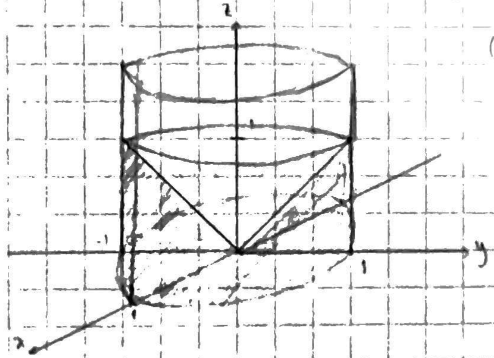
$r=0 \Rightarrow \theta = \pi/4$

$r = a\sqrt{2} \Rightarrow \theta = 0$

$$A = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = \cancel{4}^{2}\int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{\cancel{2}}\Big|_{0=r}^{r=a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta =$$

$$= \cancel{4}^{2}a^2 \cdot \frac{\text{sen}\,2\theta}{\cancel{2}}\Big|_0^{\pi/4} = \boxed{2a^2}$$

(20) Calcular $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ donde B es la región ~~del~~ sobre el plano xy dentro del cilindro de ecuación $x^2+y^2\leq 1$ y debajo del cono $z = (x^2+y^2)^{1/2}$



Usando coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$

$r^2 \leq 1$, $z = r$, $J = r$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r zr\,dz\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{2}\int_0^1 z^2 r\Big|_{z=0}^{z=r} dr = \pi\int_0^1 r^3\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{4} r^4\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(21) Sea E el elipsoide dado por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$

(a) Considere la transformación $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(x,y,z) = \left(\overbrace{\frac{x}{a}}^{u}, \overbrace{\frac{y}{b}}^{v}, \overbrace{\frac{z}{c}}^{w}\right)$ con inversa $g^{-1}(x,y,z) = (ax, by, cz)$

~~Calcu~~ Describa $g(E)$, calcule el Jacobiano y hallar el volumen de E

$g(E)$: $u^2+v^2+w^2\leq 1$ (Esfera $C=(0,0)$, $0\leq R\leq 1$)

$$J\Phi \quad \det\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix} = \frac{1}{abc}$$

V: $x = ar\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi$; $y = br\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$; $z = cr\cos\varphi$; $J = abcr^2\,\text{sen}\,\varphi$; $\begin{cases} 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq\varphi\leq\pi \end{cases}$

$$V \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 abcr^2\,\text{sen}\,\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta = 2abc\pi\int_0^{\pi}\frac{r^3}{3}\,\text{sen}\,\varphi\Big|_0^1 d\varphi = \frac{2abc}{3}\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} =$$

$= \frac{2abc\pi}{3}(1+1) = \frac{4}{3}abc\pi$

(b) Calcule $\iiint_E \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz =$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{\cancel{a^2}r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi}{\cancel{a^2}} + r^2\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi$$

$$= r^2\mathrm{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = r^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2\, abc\, r^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{2abc\pi}{5}\int_0^{\pi} r^5\Big|_0^1 \mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi = \frac{2abc\pi}{5}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4abc}{5}\pi$$

(22) Hallar el centro de masa del cilindro de ecuación $x^2+y^2 \leq 1$, $1<z<2$, si la densidad es $\rho = (x^2+y^2)\,z^2$

$M = \iiint_E \rho(x,y,z)\, dV$ Cilíndricas $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$; $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 < z < 2 \end{cases}$; $J = r$

$\rho = r^2 z^2$

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^2 r^3 z^2\, dz\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 r^3 z^3\Big|_{z=1}^{z=2} dr = \frac{2\pi}{3}\cdot 7\int_0^1 r^3\, dr = \frac{14\pi}{\cancel{12}_{6}}\, r^4\Big|_0^1 =$$

$M = \frac{7\pi}{6}$

$x_M = \frac{1}{M}\iiint_E x\,\rho(x,y,z)\, dV$; $y_M = \frac{1}{M}\iiint_E y\,\rho\, dV$; $z_M = \frac{1}{M}\iiint_E z\,\rho\, dV$

$$x_M = \frac{6}{7\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^2 r^4 z^2 \cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = \frac{6}{7\pi}\left[\frac{z^3}{3}\Big|_{z=1}^{z=2}\right]\left[\frac{r^5}{5}\Big|_{r=0}^{r=1}\right]\left[\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right] = 0$$

$$y_M = \frac{6}{7\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^2 r^4 z^2\, \mathrm{sen}\,\theta\, dz\, dr\, d\theta = \frac{6}{7\pi}\left[\frac{z^3}{3}\Big|_{z=1}^{z=2}\right]\left[\frac{r^5}{5}\Big|_{r=0}^{r=1}\right]\left[-\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right] = 0$$

$$z_M = \frac{6}{7\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^2 r^3 z^3\, dz\, dr\, d\theta = \frac{12}{7}\int_0^1 r^3\cdot \frac{z^4}{4}\Big|_{z=1}^{z=2} dr = \frac{\cancel{12}^{3}}{7}\cdot\frac{15}{\cancel{4}}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{45}{28} \approx 1{,}61$$

$\therefore (x_M, y_M, z_M) = \left(0, 0, \frac{45}{28}\right)$

23 Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el momento de inercia alrededor del eje x está definido por,

$$I_x = \iiint_W (y^2+z^2)\rho\, dx\, dy\, dz$$

y análogamente se definen I_y e I_z. Sea ahora W el sólido con densidad cte acotado por arriba por el plano $z=a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$ donde k cte $0<k<\pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} ; \quad J = r^2 \operatorname{sen}\varphi$$

$r\cos\varphi = a = z$ $\qquad \boxed{0<\varphi<\pi/2}$

Cuando $\varphi = 0$, $r = a$ $\Rightarrow$ $0 \leq a \leq r \Rightarrow \underbrace{0 \leq z \leq r}$, $\boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, $0 = a$

$\boxed{0 \leq r \leq z}$?

$$x^2+y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\varphi\,(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2\operatorname{sen}^2\varphi$$

$$\therefore\ I_z = \underbrace{\rho}_{cte} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{z} r^4 \operatorname{sen}^3\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$