# ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

**Segundo Cuatrimestre 2022**

## Práctica 2: Teorema de Green.

**Ejercicio 1.** Verificar el Teorema de Green para el disco $D$ con centro $(0,0)$ y radio $R$ y las siguientes funciones:

(a) $P(x,y) = xy^2$, $\quad Q(x,y) = -yx^2$.

(b) $P(x,y) = 2y$, $\quad Q(x,y) = x$.

**Ejercicio 2.** Verificar el Teorema de Green y calcular $\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ la curva recorrida en sentido positivo:

(a) Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.

(b) Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x$, $x \in [0,1]$, y $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, $x \in [0,1]$.

**Ejercicio 3.** Usando el teorema de Green, hallar el área de:

(a) El disco $D$ con centro $(0,0)$ y radio $R$

(b) La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**Ejercicio 4.** Sea $D$ la región encerrada por el eje $x$ y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta, \; y = 1 - \cos\theta, \; 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de $D$.

**Ejercicio 5.** Hallar el área entre las curvas dadas en polares por

$$\begin{array}{lll} r = 1 + \cos\theta & \text{con} & -\pi \le \theta \le \pi, \\ r = \sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} & \text{con} & -\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}. \end{array}$$

**Ejercicio 6.** Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, $\partial D$ su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a $D$, entonces

$$\iint_D u\, v_x\, dx\, dy = -\iint_D u_x\, v\, dx\, dy + \int_{\partial D} u\, v\, n_1\, ds,$$

para todo par de funciones $u$, $v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

**Ejercicio 7.** Sean $P$ y $Q$ funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Verificar que el Teorema de Green para estas funcionnes es válido cuando la región $D$ es el anillo

$$D = \{(x,y) \,/\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Sugerencia: Aplicar el Teorema de Green en los discos de radios 1 y 2.

**Ejercicio 8.** Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{array}{ll} x = 0, & 0 \le y \le 4, \\ y = 4, & 0 \le x \le 4, \\ y = x, & 0 \le x \le 1, \\ y = 2 - x, & 1 \le x \le 2, \\ y = x - 2, & 2 \le x \le 3, \\ y = 4 - x, & 2 \le x \le 3, \\ y = x, & 2 \le x \le 4, \end{array}$$

orientada positivamente. Calcular

$$\int_C \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dx + \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\,dy.$$

**Ejercicio 9.** Sea $D = \{(x,y)\,/\,1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$. Calcular

$$\int_{\partial D} x^2 y\,dx - xy^2\,dy.$$

Como siempre, $\partial D$ está recorrido en sentido directo (el contrario a las agujas del reloj).

**Ejercicio 10.** Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (y+3x, 2y-x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2+y^2=4$ en el sentido de las agujas del reloj.

**Ejercicio 11.** Sea $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot ds$ donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x - P_y$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

**Ejercicio 12.** Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple y suave orientada positivamente que encierra la circunferencia unitaria centrada en el origen. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot ds$ para el campo $\mathbf{F}$ definido en el ejercicio 11.

**Ejercicio 13.** Calcular $\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy$ siendo

$$f_1(x,y) = \frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_2(x,y) = \frac{y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

y

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y = x+1 & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ y = 1-x & \text{si } \ \ 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

recorrida del $(-1,0)$ al $(1,0)$.

**Ejercicio 14.** Determinar todas las circunferencias $\mathcal{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ sobre las cuales vale la siguiente igualdad

$$\int_{\mathcal{C}} -y^2\,dx + 3x\,dy = 6\pi.$$

**Ejercicio 15.** Calcular la integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot ds$ donde

$$\mathbf{F}(x,y) = (y^2 e^x + \cos x + (x-y)^2\,,\, 2\,y\,e^x + \operatorname{sen} y),$$

y $\mathcal{C}$ es la curva

$$x^2+y^2=1, \quad y \ge 0,$$

orientada de manera tal que comience en $(1,0)$ y termine en $(-1,0)$.

**Ejercicio 16.** Sean $u$, $v \in C^1(D)$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$. Consideremos los campos definidos por $\mathbf{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, $\mathbf{G}(x,y) = (v_x - v_y, u_x - u_y)$. Calcular

$$\iint_D (\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x,y)\,dx\,dy$$

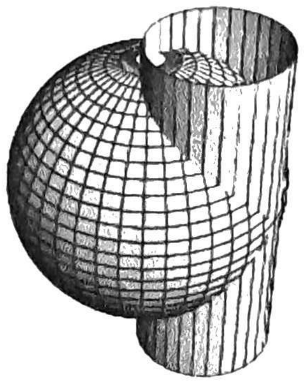
sabiendo que sobre el borde de $D$ se tiene $u(x,y) = x$, $\ v(x,y) = 1$.

**Ejercicio 8.** Sea $\phi(u,v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ ($D$ el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u,v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

**Ejercicio 9.** Calcular el área de la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2 = R^2$ con $(x-R/2)^2+y^2 \leq (R/2)^2$. Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.



**Ejercicio 10.** Si tenemos una curva en el plano $xz$ dada por $\{(x, 0, f(x)) : x \in [\alpha, \beta]\}$ con $\alpha$ positivo, y consideramos la superficie de revolución alrededor del eje $z$, muestre que el área de esta superficie es

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

~~**Ejercicio 11.**~~ Sea $C$ la curva dada por

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos^3\theta \\ y(\theta) = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano $xy$. Sea $S$ la superficie que se obtiene al girar la curva $C$ alrededor del eje $x$

(a) Hallar una parametrización de $S$.
(b) Hallar el área de $S$.

**Ejercicio 12.** Calcular $\iint_S xy\, dS$ donde $S$ es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

**Ejercicio 13.** Calcular $\iint_S (x + y + z) dS$ donde

(a) $S$ es el borde de la bola unitaria, es decir $S = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(b) $S$ es la parte superior de la esfera unitaria: $S = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

**Ejercicio 14.** Hallar la masa de una superficie esférica de radio $r$ tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre $(x,y,z)$ y el punto $(0,0,r)$.

*Recordamos que una superficie $S$ es <u>orientable</u> si hay una forma de elegir en cada punto $P$ de $S$ un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre $S$ resulte continua.*

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es un gráfico, $\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente $z$ positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de $\Omega$.

Recordamos que una superficie con una parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S} = Im(T)$, verifica que para cada $P \in \mathcal{S}$, $P = T(u_0, v_0)$, $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \neq 0$. En ese caso,

$$\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \quad \text{donde } (u,v) \text{ es tal que } P = T(u,v).$$

es un versor normal que orienta la superficie $\mathcal{S}$. Con esa elección de orientación decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización $T$.

Recordamos que si $\mathcal{S}$ es una superficie suave orientada con parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$, entonces el flujo de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$ se define como

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}} &:= \iint_D \langle \vec{F}(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle \, dudv \\ &= \iint_D \langle \vec{F}(T(u,v)), \tfrac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \rangle \|T_u \times T_v\| \, dudv \\ &= \iint_D \langle \vec{F}(T(u,v)), \nu(T(u,v)) \rangle \, \|T_u \times T_v\| \, dudv = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \nu \, dS \end{aligned}$$

**Ejercicio 15.** Demuestre la siguiente propiedad: '*Si $\mathcal{S}$ es una superficie suave orientada con parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de $T$ con misma orientación, entonces para todo $\vec{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$, el cálculo de $\int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización $T$ o la parametrización $T_1$. Si $T_1$ invierte la orientación, los cálculos difieren en el signo.*

**Ejercicio 16.** Evaluar el flujo saliente del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

**Ejercicio 17.** Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

**Ejercicio 18.** Sea $S$ la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial y $F_r$ su componente radial. Probar que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

**Ejercicio 19.** Sea $S$ la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con $z$ entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ con $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

**Ejercicio 20.** Sea $\vec{F}(x, y, z) = (ax, bx^2, cyx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo, $a, b, c$ constantes). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano $xy$ a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (las coordenadas $x$ e $y$ medidas en metros).

**Ejercicio 21.** (Superficies de revolución) Dada una curva en el plano $yz$:

$$\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$Im(\sigma) \subset$ plano $yz$:

$$\sigma(t) = (0, y(t), z(t))$$

supongamos que $\sigma$ es una parametrización regular y que $y(t) > 0 \forall t \in [a, b]$.

1. Muestre que la superficie de revolución alrededor del eje $z$ se puede parametrizar por
$$T : [a, b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$T(\theta, t) = \big(y(t)\cos\theta, y(t)\operatorname{sen}\theta, z(t)\big)$$
y que es una superficie regular (con la propiedad adicional $T_\theta \perp T_t$).
2. Si $\sigma$ parametriza un segmento, entonces la superficie es o bien un cilindro o bien un sector de un cono. Haga un dibujo de un cono de cierta altura y cierto radio y calcule su área en función de esos parámetros.
3. Si $\sigma$ es un círculo entonces la superficie es un toro (volver a mirar desde este punto de vista la parametrización del toro dada en el ejercicio 2 (b).
4. La parametrización de la superficie de una esfera es un ejemplo de esta construcción, donde $\sigma$ es un semicírculo.

**Ejercicio 22.** Con la notación del ejercicio anterior, calcule $T_\theta \times T_t$ y su norma, y de una fórmula integral general del área de una superficie de revolución en función de los datos de la curva $\sigma(t)$.

**Ejercicio 23.** Considerar la superficie dada en forma paramétrica por
$$\begin{cases} x = \cos(\theta)(2 + t\cos(\frac{\theta}{2})) \\ y = \operatorname{sen}(\theta)(2 + t\cos(\frac{\theta}{2})) \\ z = t\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$$
Probar que la superficie obtenida es suave (grafíquela por ejemplo en geogebra). Observar que se trata de la cinta de Moebius, que no es orientable (observe que para cada $\theta$ fijo, variando $t$ se parametriza un segmento, contenido en un plano vertical apuntando en la dirección del ángulo $\theta$, que va variando de inclinación a la "mitad de velocidad de $\theta$"). En esta superficie está definida la integral de campos escalares (por ejemplo su cálculo de área) pero no está definido el cálculo de flujo de un campo a través de ella.

-PRÁCTICA 2-

① Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro (0,0) y radio R y las siguientes funciones

a) $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = -yx^2$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)\,dA = \int_{\partial D^+} (P,Q) \quad \leftarrow \text{Teorema de Green}$$

$$\iint_D (-2yx - 2xy)\,dA = -4\iint_D xy\,dA \overset{\text{Polares}}{=}$$

$\partial D = \mathcal{C}$, $\sigma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, $R \in [0, r]$

$$= -4\int_0^{r}\int_0^{2\pi} R^2 \operatorname{sen}t\cos t\,\underbrace{R}_{J}\,dt\,dR = -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}t\cos t\,dt = -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{-\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\cdot(1-1) = 0$$

$$\int_{\partial D^+}(P,Q) = \int_0^{2\pi}\langle (xy^2, -yx^2)(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle = \int_0^{2\pi}\langle (R^3\cos t\operatorname{sen}^2 t, -R^3\operatorname{sen}t\cos^2 t), (-R\operatorname{sen}t, R\cos t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi}(-R^4\cos t\operatorname{sen}^3 t - R^4\operatorname{sen}t\cos^3 t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -R^4(\cos t\operatorname{sen}^3 t - \operatorname{sen}t\cos^3 t)\,dt = -R^4\left[\frac{\operatorname{sen}^4 t}{4} + \frac{\cos^4 t}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -R^4\left(0 + \frac{1}{4} - \left(0 + \frac{1}{4}\right)\right) = 0$$

Obs: Es campo gradiente

Luego $0 = 0 \Rightarrow$ Se cumple el Teorema de Green

b) $P(x,y) = 2y$, $Q(x,y) = x$ Polares

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_D (1-2)\,dA \overset{\downarrow}{=} \int_0^R\int_0^{2\pi}(-1)R\,dt\,dR = \int_0^R -2\pi R\,dR = -2\pi\frac{R^2}{2}\Big|_0^R = -\pi R^2$$

$$\int_{\partial D}(P,Q) = \int_0^{2\pi}\langle (2y, x)(R\cos t, R\operatorname{sen}t); (-R\operatorname{sen}t, R\cos t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi}\langle (2R\operatorname{sen}t, R\cos t); (-R\operatorname{sen}t, R\cos t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi}(-2R^2\operatorname{sen}^2 t + R^2\cos^2 t)\,dt = R^2\left[\int_0^{2\pi}(-2\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt\right]$$

$$= R^2\int_0^{2\pi}(-2 + 3\cos^2 t)\,dt = R^2\left[-2t + 3\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}2t}{4}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

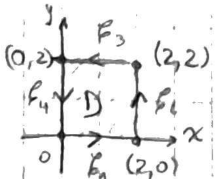
$$= R^2\left[-4\pi + 3(\pi + 0)\right] =$$

$$= -\pi R^2$$

$\Rightarrow -\pi R^2 = -\pi R^2 \Rightarrow$ Se cumple el Teorema de Green

② Verificar el Teorema de Green y calcular $\int_{\mathscr{C}} \underbrace{y^2 dx}_{\partial Q/\partial x} + \underbrace{x\,dy}_{\partial P/\partial y}$, siendo $\mathscr{C}$ la curva recorrida en sentido positivo:

a) Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$




D es Tipo III ✓
$\mathscr{C}$ es $C^+$ ✓
$F = (yx, xy^2)$ es $C^1$ ✓

$$\left.\right\} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D^+} (P,Q)\cdot ds \quad \text{Vale}$$

Parametrizando: $\mathscr{C}_1: (t,0)\ t\in[0,2]$, $\sigma_1'(t) = (1,0)$
$\mathscr{C}_2: (2,t)\ t\in[0,2]$, $\sigma_2'(t) = (0,1)$
$\mathscr{C}_3: (2-t,2)\ t\in[0,2]$, $\sigma_3'(t) = (-1,0)$
$\mathscr{C}_4: (0,2-t)\ t\in[0,2]$, $\sigma_4'(t) = (0,-1)$

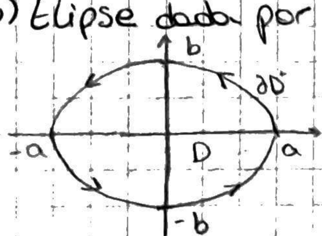
$$\int_{\mathscr{C}^+}(P,Q) = \int_{\mathscr{C}_1^+}(P,Q) + \int_{\mathscr{C}_2^+}(P,Q) + \int_{\mathscr{C}_3^+}(P,Q) + \int_{\mathscr{C}_4^+}(P,Q)$$

$$= \int_0^2 \underbrace{\langle (0,0);(1,0)\rangle}_{0} dt + \int_0^2 \langle(-2t, 2t^2);(0,1)\rangle dt + \int_0^2 \langle(-4+2t, 8-4t);(-1,0)\rangle dt +$$

$$+ \int_0^2 \underbrace{\langle(0,0);(0,-1)\rangle}_{0} dt = \int_0^2 2t^2\,dt + \int_0^2 (4-2t)\,dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_0^2 + (4t-t^2)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{16}{3} + 4 = \boxed{\frac{28}{3}}$$

b) Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es tipo III ✓




$$\sigma(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t) \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\sigma'(t) = (-a\,\text{sen}\,t, b\cos t)$$

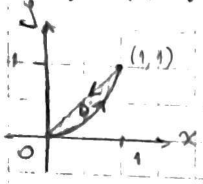
$$\int_0^{2\pi} \langle(-ab\cos t\,\text{sen}\,t, ab^2\cos t\,\text{sen}^2 t);(-a\,\text{sen}\,t, b\cos t)\rangle dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 b\cos t\,\text{sen}^2 t + ab^3\cos^2 t\,\text{sen}^2 t)\,dt = \frac{a^2 b}{3}\,\text{sen}^3 t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} ab^3\left(\frac{1}{2}\text{sen}\,2t\right)^2 dt =$$

$$= 0 + \frac{ab^3}{4}\int_0^{2\pi}\text{sen}^2(2t)\,dt = \frac{ab^3}{4}\left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}\,4t}{8}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \boxed{\frac{ab^3}{4}\cdot\pi}$$

c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x, x \in [0,1]$ y $\mathcal{C}_2 : y = x^2, x \in [0,1]$




Es TIPO III ✓ $\quad \sigma_2(t) = (t, t^2),\ t \in [0,1],\ \sigma_2'(t) = (1, 2t)$

$\sigma_1(t) = (1-t, 1-t),\ t \in [0,1],\ \sigma_1'(t) = (-1,-1)$

$$\int_{\mathcal{C}} (P,Q) = \int_{\mathcal{C}_1} (P,Q) + \int_{\mathcal{C}_2} (P,Q) = \int_0^1 \langle (-(1-t)^2, (1-t)^3); (-1,-1) \rangle dt + \int_0^1 \langle (-t^3, t^5); (1, 2t) \rangle dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^2 - (1-t)^3\, dt + \int_0^1 -t^3 + 2t^6\, dt =$$

$$= \int_0^{1} (1-2t+t^2) - (1-3t+3t^2-t^3)\, dt + \left(-\frac{t^4}{4} + \frac{2}{7}t^7\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3) dt + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{7}\right) = \frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \Big|_0^1 + \frac{1}{28} =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{28} = \frac{1}{12} + \frac{1}{28} = \frac{40}{336} = \frac{10}{84} = \boxed{\frac{5}{42}}$$

③ Usando el Teorema de Green, hallar el área de:

¿Uso siempre este para el área? sí o cualquiera tq $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \text{cte.}$

a) El disco D con centro (0,0) y radio R $\quad F: \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

$\sigma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t),\ \sigma'(t) = (-R\,\mathrm{sen}\,t, R\cos t),\ t \in [0, 2\pi]$

$$A = \iint_D 1\, dA \overset{\text{Teo Green}}{=} \int_{\mathcal{C}^+} (P,Q) = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{R\,\mathrm{sen}\,t}{2}, \frac{R\cos t}{2}\right); (-R\,\mathrm{sen}\,t, R\cos t) \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2\mathrm{sen}^2 t + R^2\cos^2 t}{2}\, dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} 1\, dt = \frac{R^2}{2} 2\pi = \boxed{\pi R^2}$$

b) La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad F: \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

$\sigma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t),\ \sigma'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, b\cos t),\ t \in [0, 2\pi]$

$$A = \iint_D 1\, dA \overset{\text{Teo Green}}{=} \int_{\mathcal{C}^+} (P,Q) = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-b\,\mathrm{sen}\,t}{2}, \frac{a\cos t}{2}\right); (-a\,\mathrm{sen}\,t, b\cos t) \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{ab}{2}\mathrm{sen}^2 t + \frac{ab}{2}\cos^2 t\right) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} 1\, dt = \boxed{ab\pi}$$

$-(1-\cos\theta)^2 = -(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)$

④ Sea D la región encerrada por el eje $x$ y el arco de cicloide:

$$x=\theta-\operatorname{sen}\theta,\ y=1-\cos\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de D.


$\sigma_1(\theta)=(\theta-\operatorname{sen}\theta,\ 1-\cos\theta),\ \sigma_1'(\theta)=(1-\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta),\ \theta\in[0,2\pi]$

$\sigma_2(\theta)=(2\pi-\theta,\ 0),\ \sigma_2'(\theta)=(-1,0),\ \theta\in[0,2\pi],\ F=\left(-\frac{y}{2},\frac{x}{2}\right)$

Como es en sentido horario (negativo), pongo un menos adelante

$$A=-\iint_D 1\,dA=-\int_0^{2\pi}\left\langle\left(\frac{\cos\theta-1}{2},\frac{\theta-\operatorname{sen}\theta}{2}\right);(1-\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\right\rangle d\theta+\left(-\int_0^{2\pi}\left\langle\left(0,\frac{2\pi-\theta}{2}\right);(-1,0)\right\rangle d\theta\right)$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{-1+2\cos\theta-\cos^2\theta+\theta\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{2}\,d\theta+0=-\int_0^{2\pi}\left(-1+\cos\theta+\frac{\theta\operatorname{sen}\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=-\left(-\theta+\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)=-\left(-2\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)=\circledast$$

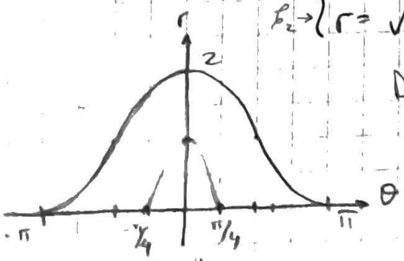
$$\int\theta(-\cos\theta)'d\theta=-\theta\cos\theta-\int-\cos\theta\,d\theta=(-\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)$$

$$\circledast=-\left(-2\pi+\frac{1}{2}(-\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)\Big|_0^{2\pi}\right)=-\left(-2\pi+\frac{1}{\cancel{2}}(-\cancel{2}\pi)\right)=$$

$$=-(-3\pi)=\boxed{3\pi}$$

⑤ Hallar el área entre las curvas dadas en polares por:

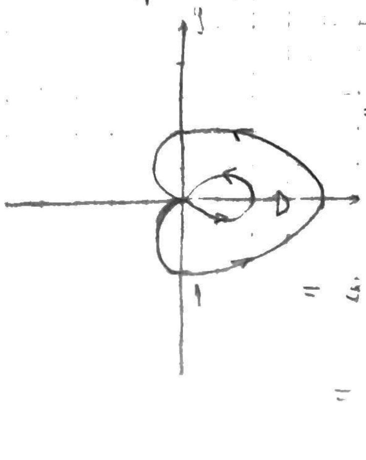
$$\begin{cases} \gamma_1\to r=1+\cos\theta, & \theta\in[-\pi,\pi] \\ \gamma_2\to r=\sqrt{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}, & \theta\in[-\pi/4,\pi/4]\end{cases}\qquad F=\left(-\frac{y}{2},\frac{x}{2}\right)$$




Del gráfico 1: $\int_\gamma F.ds=\int_{\gamma_1}F.ds-\int_{\gamma_2}F.ds$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\sqrt{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}\right)^2d\theta$$

$$=\theta+2\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)d\theta$$




$$=\pi-(-\pi)+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}-\operatorname{sen}^2\theta\right)d\theta$$

$$=2\pi+\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

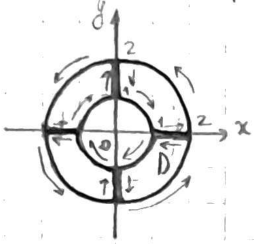
$$=3\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{13\pi}{4}+\frac{1}{2}-\left(\frac{\cancel{\pi}}{4}-1-\left(\frac{\cancel{\pi}}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{13\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(7) Sean P y Q funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Verificar que el Teorema de Green para estas funciones es válido cuando la región D es el anillo.

$$D = \{(x,y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Sugerencia. Aplicar el Teorema de Green en los discos de radios 1 y 2.




$F = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$ Para usar Green tengo que partir la región en regiones de tipo 3

Queda $\underbrace{\int_{\sigma_1} F \cdot ds}_{(1)} + \underbrace{\int_{(2)} F \cdot ds}_{(2)} = \int_{\partial D^+} F \cdot ds$

(1) $\sigma_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\sigma_1'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$

$$\int_{\sigma_1} \langle F(\sigma_1(t)); \sigma_1'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{\cancel{2}\operatorname{sen} t}{\cancel{2}}, \frac{\cancel{2}\cos t}{\cancel{2}}\right), (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t) \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$$

(2) $\sigma_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\sigma_2'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ Como esta en sentido opuesto al pedido, le agrego un $\ominus$

$$\int_{(2)} \langle F(\sigma_2(t)); \sigma_2'(t) \rangle dt = -\int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{2}, \frac{\cos t}{2}\right); (-\operatorname{sen} t, \cos t) \right\rangle dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dt = -\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D^+} F \cdot ds = 4\pi + (-\pi) = 3\pi$$

$$= \int_{\sigma_1} F \cdot ds - \int_{(2)} F \cdot ds$$

$$\frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{(t+1)} + \frac{B}{(t-1)} \qquad \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}$$

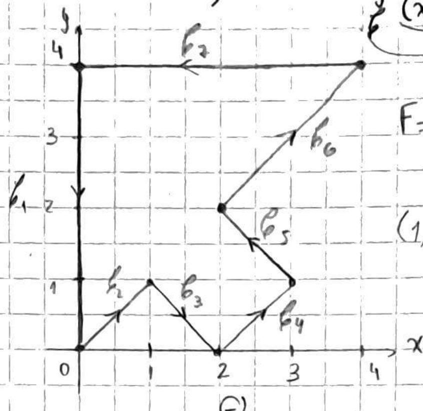
$$1 = A(t-1) + B(t+1) \qquad \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right]_0^4 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{5}{3}\right|$$

si $t=1$, $B=\frac{1}{2}$

$t=-1$, $A=-\frac{1}{2}$

⑧ Sea $\mathcal{C}$ la curva orientada positivamente, calcular $\underbrace{\int \frac{y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}dy}$

$$\begin{cases} x=0, & 0\le y\le 4 \\ y=4, & 0\le x\le 4 \\ y=x, & 0\le x\le 1 \\ y=2-x, & 1\le x\le 2 \\ y=x-2, & 2\le x\le 3 \\ y=4-x, & 2\le x\le 3 \\ y=x, & 2\le x\le 4 \end{cases}$$




$$F = \left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

$(1,0) \notin D \Rightarrow F$ está bien definido en $D$

$$\int_{\mathcal{C}} F.ds = \int_{\substack{\mathcal{C}_i \\ i\in[1,7]}} F.ds$$

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1: \sigma_1(t)=(0,t), \ t\in[0,4], \text{ antihorario} \times^{\ominus}, \ \sigma_1'(t)=(0,-1) \\ \mathcal{C}_2: \sigma_2(t)=(t,t), \ t\in[0,1], \text{ antihorario} \checkmark, \ \sigma_2'(t)=(1,1) \\ \mathcal{C}_3: \sigma_3(t)=(1+t,1-t), \ t\in[0,1] \text{ antihorario} \checkmark, \ \sigma_3'(t)=(1,-1) \\ \mathcal{C}_4: \sigma_4(t)=(2+t,t), \ t\in[0,1], \text{ antihorario} \checkmark, \ \sigma_4'(t)=(1,1) \\ \mathcal{C}_5: \sigma_5(t)=(3-t,1+t), \ t\in[0,1], \text{ antihorario} \checkmark, \ \sigma_5'(t)=(-1,1) \\ \mathcal{C}_6: \sigma_6(t)=(2+t,2+t), \ t\in[0,2], \text{ antihorario} \checkmark, \ \sigma_6'(t)=(1,1) \\ \mathcal{C}_7: \sigma_7(t)=(4-t,4), \ t\in[0,4], \text{ antihorario} \checkmark, \ \sigma_7'(t)=(-1,0) \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{C}} F.ds = -\int_0^4 \left\langle\left(\frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{t^2+1}\right),(0,-1)\right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle\left(\frac{t}{2t^2-2t+1}, \frac{1-t}{2t^2-2t+1}\right),(1,1)\right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle\left(\frac{1-t}{2t^2-2t+1}, \frac{-t}{2t^2-2t+1}\right),\right.$$

$$\left.(1,-1)\right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle\left(\frac{t}{2t^2+2t+1}, \frac{-1-t}{2t^2+2t+1}\right),(1,1)\right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle\left(\frac{1+t}{(t^2-4t+4)+(t^2+2t+1)}, \frac{-t}{2t^2-2t+5}\right),(-1,1)\right\rangle dt$$

$$+\int_0^1 \left\langle\left(\frac{2+t}{(t^2+2t+1)+(t^2+4t+4)}, \frac{-1-t}{2t^2+6t+5}\right),(1,1)\right\rangle dt + \int_0^4 \left\langle\left(\frac{4}{t^2-6t+25}, \frac{-3+t}{t^2-6t+25}\right),(-1,0)\right\rangle dt =$$

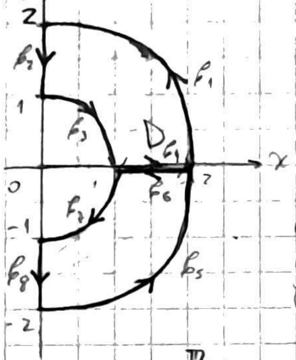
$$= -\int_0^4 \frac{-1}{t^2+1}dt + \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}dt + \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}dt + \int_0^1 \frac{-1}{2t^2+2t+1}dt + \int_0^1 \frac{-2t+1}{2t^2-2t+5}dt + \int_0^1 \frac{1}{2t^2+6t+5}dt + \int_0^4 \frac{-4}{t^2-6t+25}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{5}{3}\right| + \frac{\pi}{2} +$$

Se supone que da cero. Me da paja hacer estas integrales pero la idea está.

(9) Sea $D = \{(x,y) / 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$. Calcular $\int_{\partial D} x^2y\,dx - xy^2\,dy$

y Como siempre, $\partial D$ está recorrido en sentido directo (positivo)




$F = (x^2y, -xy^2)$. Obs! $\mathcal{C}_4$ se cancela con $\mathcal{C}_6$

$\mathcal{C}_1: \sigma_1 = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta),\ \theta \in [0, \pi/2],\ \sigma_1' = (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta)$

$\mathcal{C}_2: \sigma_2 = (0, 2-\theta),\ \theta \in [0,1],\ \sigma_2' = (0,-1)$ ¿Junto?

$\mathcal{C}_3: \sigma_3 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),\ \theta \in [0, \pi/2],\ \sigma_3' = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$\mathcal{C}_5: \sigma_5 = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta),\ \theta \in [-\pi/2, 0],\ \sigma_5' = (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta)$ ¿Junto? Ambos horario $\Downarrow$ $\ominus$

$\mathcal{C}_7: \sigma_7 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),\ \theta \in [-\pi/2, 0],\ \sigma_7' = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$\mathcal{C}_8: \sigma_8 = (0, -1-\theta),\ \theta \in [0,1],\ \sigma_8' = (0,-1)$

$$\int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_5} F.ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (8\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta, -8\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta), (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta)\rangle d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-32\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta =$$

$$= -8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = -8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\,d\theta = -8 \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -8 \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{-4\pi}$$

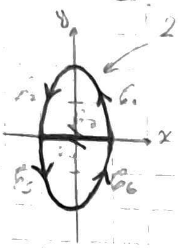
$$\int_{\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_7} F.ds = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\rangle d\theta = +\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} F.ds = \int_0^1 \langle (0,0), (0,-1)\rangle d\theta = 0 \quad , \quad \int_{\mathcal{C}_8} F.ds = \int_0^1 \langle (0,0), (0,-1)\rangle d\theta = 0$$

Luego, $\int_{\mathcal{C}} F.ds = -4\pi + \frac{\pi}{4} = \boxed{-\frac{15\pi}{4}}$

(10) Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x,y)=(y+3x,2y-x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2+y^2=4$ en sentido horario



2 regiones tipo 3 para usar Green y $C_3$ se cancela con $C_4$

Luego puedo unificar $C_{1,2,3,4} = \underbrace{C: \sigma(t)=(\cos t, 2\operatorname{sen} t),\ t\in[0,2\pi] \quad \sigma'(t)=(-\operatorname{sen} t, 2\cos t)}$

Es antihorario y como la quiero horario agrego un $\ominus$

Trabajo: $\int_{\partial D^+} F\cdot ds = \iint_D (Q_x-P_y)\,dA = \iint_D (-2)\,dA$

$$\int_{\partial D^-} F\cdot ds = -\int_0^{2\pi}\langle(2\operatorname{sen}t+3\cos t,\ 4\operatorname{sen}t-\cos t),(-\operatorname{sen}t,2\cos t)\rangle\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi}(-2\operatorname{sen}^2t-3\operatorname{sen}t\cos t+8\operatorname{sen}t\cos t-2\cos^2t)\,dt = -\int_0^{2\pi}(-2+5\operatorname{sen}t\cos t)\,dt$$

$$= -\left[-2t\Big|_0^{2\pi}+\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(2t)\,dt\right] = 4\pi+\frac{5}{4}\cdot\cos(2t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi+\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\right)$$

$$=\boxed{4\pi}$$

(11) Sea $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=\left(\overbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}^{P},\overbrace{\frac{-x}{x^2+y^2}}^{Q}\right)$. Calcular $\int_C F\cdot ds$ donde $C$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x-P_y$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

$C: \sigma(\theta)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta),\ \theta\in[0,2\pi],\ \sigma'(\theta)=(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)$

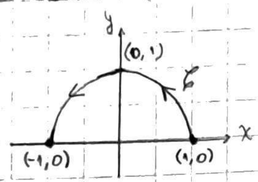
$$\int_0^{2\pi}\langle(\operatorname{sen}\theta,-\cos\theta),(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)\rangle\,d\theta = \int_0^{2\pi}(-1)\,d\theta = \boxed{-2\pi}$$

$$Q_x-P_y = \frac{-(x^2+y^2)+x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

No satisface Green pues $\iint_D (Q_x-P_y)\,dA \neq \int_{\partial D^+} F\cdot ds$. Pasa porque F no está definido en $(0,0)\in D$

(15) Calcular la integral $\int_{\mathscr{C}} F \cdot ds$ donde $F(x,y) = (y^2e^x + \cos x + (x-y)^2, 2ye^x + \operatorname{sen} y)$ y $\mathscr{C}$ es la curva $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$ orientada de manera tal que comience en $(1,0)$ y termine en $(-1,0)$

Graficando $\mathscr{C}$ obtenemos:




Parametrizándola:

$\sigma_1(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

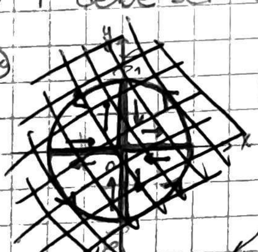
$\sigma_1'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

Para poder usar Green necesito que $\mathscr{C}$ sea

- Orientada positivamente ✓
- Cerrada, suave X
- Diferenciable por trozos ✓
- Encierre región de Tipo III X (*)

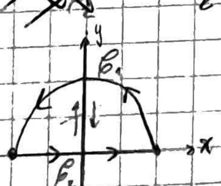
y F debe ser $C^1$ ✓

(*)



Le agrego la recta $\underbrace{y=0, \ -1 \leq x \leq 1}_{\mathscr{C}_2:\ \sigma_2 = (x,0),\ x\in[-1,1],\ \sigma_2'(x) = (1,0)}$ y divido la circunferencia en 2 regiones de Tipo 3.

Ahora cumple todo para usar Green y




$$\int_{\mathscr{C}} F \cdot ds = \int_{\mathscr{C}_1} F \cdot ds - \int_{\mathscr{C}_2} F \cdot ds \overset{\text{Green}}{=}$$

$$= \iint_D (Q_x - P_y)\, dA - \int_{-1}^{1} \langle F(\sigma_2(x)), \sigma_2'(x) \rangle dx$$

$$= \iint_D (2ye^x - 2ye^x + 2(x-y))\, dA - \int_{-1}^{1} \langle (\cos x + x^2, 0); (1,0) \rangle\, dx$$

$$= \iint_D (2x - 2y)\, dA - \int_{-1}^{1} (\cos x + x^2)\, dx \overset{\text{Polares}}{=} \int_0^1 \int_0^{\pi} (2r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta) \underset{J}{r}\, d\theta\, dr - \left[\operatorname{sen} x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \int_0^1 2r^2 (-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\pi} dr - \left(2\operatorname{sen} 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} r^3 \Big|_0^1 \cdot (1 - (-1)) - 2\operatorname{sen}(1) - \frac{2}{3} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} - 2\operatorname{sen}(1)}$$