NÚMEROS COMPLEJOS

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$

a) $(i+1)(i-1)(i+3) = -2(i+3) = -6-2i$

b) $\frac{2+i}{2-i} = (2+i)(2-i)^{-1} = (2+i)\frac{2+i}{5} = \frac{1}{5}(3+4i) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

c) $(1+i)^{65}+(1-i)^{65} = \left(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\right)^{65} + \left(\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}\right)^{65} = (\sqrt{2})^{65}\left(e^{65i\pi/4} + e^{-65\pi i/4}\right)$

$\arg\in[-\pi,\pi]$

$= (\sqrt{2})^{65}$

d) $\frac{1+i}{i} = (1+i)\cdot\frac{-i}{1} = 1-i$

e) $(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}\right)^{100} = 2^{\frac{100}{2}}\cdot e^{\frac{100}{4}\pi i} = 2^{50}\,e^{25\pi i} = 2^{50}\cdot(\overbrace{\cos(25\pi)}^{=-1} + i\overbrace{\operatorname{sen}(25\pi)}^{=0})$

$= -2^{50}$

f) $\frac{1}{-1+3i} = (-1+3i)^{-1} = \frac{-1-3i}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$

2. Expresar las partes reales e imaginarias de los siguientes complejos en términos de las de $z=a+ib$ con $a=\operatorname{Re}(z)$, $b=\operatorname{Im}(z)$

a) $z^2 = (a+bi)(a+bi) = (a^2-b^2)+2abi \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2)=a^2-b^2$, $\operatorname{Im}(z^2)=2ab$

b) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(z^{-1}) = \frac{a}{a^2+b^2}$, $\operatorname{Im}(z^{-1}) = \frac{-b}{a^2+b^2}$

c) $z^{-2} = (z^{-1})^2 = \left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)^2 = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}i$

d) $z^4 = (z^2)^2 = (a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4ab(a^2-b^2)i$

e) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+a+ib}{1-a-ib} = ((1+a)+ib)\frac{(1-a)+ib}{(1-a)^2+b^2} = \frac{(1-a^2)-b^2}{(1-a)^2+b^2} + \frac{2bi}{(1-a)^2+b^2}$

f) $\frac{i-z}{1+iz} = \frac{-a+(1-b)i}{(1-b)+ai} = (-a+(1-b)i)\frac{1-b-ai}{(1-b)^2+a^2} = \frac{[a^2+(1-b)^2]i}{(1-b)^2+a^2} = i$

g) $\frac{z}{z+1} = \frac{a+ib}{(a+1)+ib} =$

3 Sean z y w dos complejos. Demostrar que

a) $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$) Supongamos $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = a$ con $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = a = z$ ✓

$\Rightarrow$) Sea $z = a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Qvq $b = 0$ dado que $\bar{z} = z$

$\bar{z} = a - ib \underset{hip}{=} a+ib = z \Rightarrow -ib = ib \Rightarrow -b = b \iff b = 0$

b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ con $z = a+ib$, $w = c+id$

$\overline{z+w} = \overline{a+ib+c+id} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = a-ib+c-id = \bar{z}+\bar{w}$

c) $\overline{zw} = \bar{z}.\bar{w}$

$\overline{zw} = \overline{(ab-cd)+(ad+bc)i} = (ab-cd)-(ad+bc)i = (a-ib).(c-id) = \bar{z}\,\bar{w}$

d) $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad z = a+bi$

$Re(z) = a$ Qvq $\dfrac{z+\bar{z}}{2} = a$

$\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{a+ib+a-ib}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

$\Big\} \; Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

e) $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$\dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{a+ib-a+ib}{2i} = \dfrac{2ib}{2i} = b = Im(z)$

4. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_n X^n + a_{n-1} X^{n+1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\bar{a}_n X^n + \bar{a}_{n-1} X^{n-1} + \dots + \bar{a}_0$.
Concluir que si $P \in \mathbb{R}[X]$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz de P entonces $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ también es raíz de P.

Si z_0 es raíz $\Rightarrow a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n+1} + \dots + a_0 = 0$

Conjugando a ambos lados:

$$0 = \bar{0} = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0} \overset{3.b)}{=} \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \bar{a}_0 \overset{3.c)}{=}$$

$$= \bar{a}_n \overline{z_0^n} + \bar{a}_{n-1} . \overline{z_0^{n-1}} + \dots + \bar{a}_0 = \bar{a}_n . \bar{z}_0^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \bar{a}_0$$

$\overline{z^n} = \bar{z}^n$ por 3 c)

$\Rightarrow \bar{z}_0$ es raíz de $\bar{a}_n X^n + \bar{a}_{n-1} X^{n-1} + \dots + \bar{a}_0$:)

Si $P \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow \bar{a}_i = a_i \ \forall\, 0 \leq i \leq n$ luego, $\bar{z}_0$ es raiz de P ☺

5. Para $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$. Notar $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bien definido y que si $z = x+iy$ $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Para $z, w \in \mathbb{C}$ probar que.

a) $|zw| = |z|.|w|$

$$|zw| = \sqrt{zw.\overline{zw}} = \sqrt{z\bar{z}.w.\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}}\ \sqrt{w\bar{w}} = |z|\,|w|$$

b) si $w \neq 0$. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ y $w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\frac{z}{w}.\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}} = \sqrt{\frac{z}{w}.\frac{\bar{z}}{\bar{w}}} = \frac{\sqrt{z\bar{z}}}{\sqrt{w\bar{w}}} = \frac{|z|}{|w|}$$

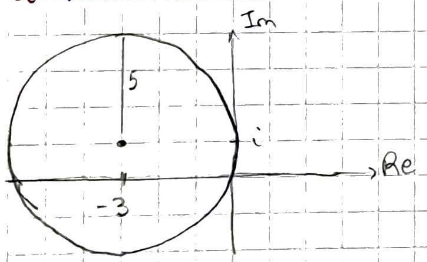
$$w.\frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{|w|^2}{|w|^2} = 1 \Rightarrow w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

c) $-|z| \leq Re(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq Im(z) \leq |z|$ $\quad z = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$-|z| = -\sqrt{a^2+b^2} \leq \underset{\substack{\text{ó} \\ b}}{a} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

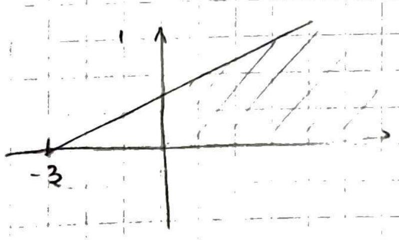
6. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$.

a) $|z - i + 3| = 5$



b) $|z - i + 3| \leq 5$ ← lo de adentro del circulo con el borde

c) $Re(2z+3) \geq 0$?
$\quad = 2Re(z)+3$



d) $Re((1+2i)z) \geq 0$

8 Probar que $d: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z,w)=|z-w|$ es una métrica y que ésta hace de $\mathbb{C}$ un espacio métrico completo y separable

1º d es métrica:

i) $d(z,w)=|z-w|=|-(w-z)|=|w-z|=d(w,z)$ ✓simétrica

ii) $d(z,w)=0 \iff z=w$

$d(z,w)=0 \iff |z-w|=0 \overset{\text{módulo}}{\iff} z=w$ ✓

iii) $d(z,w) \overset{?}{\leq} d(z,u)+d(z,w)$

$|z-w|=|z-u+u-w| \leq |z-u|+|u-w|$ } ✓ Desig. Δ

$\therefore (\mathbb{C},d)$ es un espacio métrico.

2º $\mathbb{C}$ completo:

Pero sabemos que $\mathbb{R}^2$ es completo, en particular $(\mathbb{R}^2,d)$ lo es

$\Rightarrow$ como existe $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ isometría, $(\mathbb{C},d)$ es un e.m. completo

3º $\mathbb{C}$ separable:

Análogo a 2º como $\mathbb{R}^2$ es separable ($\mathbb{Q}^2$ es un denso numerable tq $\overline{\mathbb{Q}^2}=\mathbb{R}^2$) y $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ son "lo mismo" métricamente $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ separable.

9. Notando $z=x+iy$, $w=a+ib$ definimos $d_1, d_\infty: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como:

$$d_1(z,w)=|x-a|+|y-b| \text{ y } d_\infty(z,w)=\max\{|x-a|,|y-b|\}$$

Demostrar $(\mathbb{C},d_1)$ y $(\mathbb{C},d_\infty)$ son espacios métricos.

1º d_1 es métrica:

i) $d_1(z,w)=|x-a|+|y-b|=|a-x|+|b-y|=d_1(w,z)$

ii) $d_1(z,w)=0 \iff z=w$

$z=w \iff a=x \wedge b=y \iff |x-a|=0 \wedge |y-b|=0 \iff |x-a|+|y-b|=0$ ✓

iii) $d_1(z,w)=|x-a|+|y-b|=|x-c+c-a|+|y-d+d-b| \leq$

$\leq |x-c|+|y-d|+|c-a|+|d-b| = d_1(z,u)+d_1(u,w)$ con $u=c+id$

2º d_∞ es una métrica

i) $d_\infty(z,w) = máx\{|x-a|, |y-b|\} = máx\{|a-x|, |b-y|\} = d_\infty(w,z)$

ii) $d_\infty(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$

$d_\infty(z,w) = 0 \Leftrightarrow máx\{|x-a|, |y-b|\} = 0 \Leftrightarrow |x-a| = 0 = |y-b| \Leftrightarrow z = w$

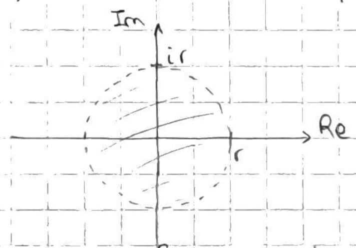
iii) $u = c + id$

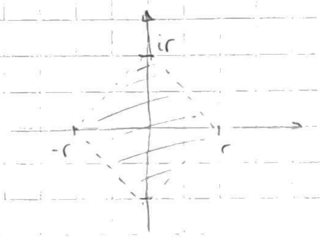
$d_\infty(z,w) = máx\{|x-a|, |y-b|\} = máx\{|x-c+c-a|, |y-d+d-b|\} \leq$

$\leq máx\{|x-c|, |y-d|\} + máx\{|c-a|, |d-b|\} = d_\infty(z,u) + d_\infty(u,w)$

10. Para $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ fijos, describir geométricamente los conjuntos

a) $B(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : d(z,w) < r\}$ b) $B_1(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : d_1(z,w) < r\}$





c) $B_\infty(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : d_\infty(z,w) < r\}$

SUCESIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS

11. Considerar $\mathbb{C}$ con la topología usual

a) Probar que $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(z)$ y $\lim_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(z)$

$\Leftarrow$) Sabemos que $\begin{cases} Re(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} Re(z) \\ Im(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} Im(z) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{Re(z_n) + i\,Im(z_n)}_{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{Re(z) + i\,Im(z)}_{z}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} z_n = z$

$\Rightarrow$) Como $\exists\, \phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ isometría tq $\phi(z) = (Re(z), Im(z))$

Si $z_n \longrightarrow z \Rightarrow \phi(z_n) \longrightarrow \phi(z) \Rightarrow (Re(z_n), Im(z_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (Re(z), Im(z))$

Como deben converger lugar a lugar $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(z) \\ \lim_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(z) \end{cases}$

b) Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$

$$\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

c) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca

$(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$, $z_n = (-1)^n$

$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1 := z$ pero $\lim_{n\to\infty} z_n \neq z$, de hecho diverge.

12. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < 1$

a) Calcular $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$ y probar que vale $\underbrace{\lim_{n\to\infty} (1+\alpha+\dots+\alpha^n) = \frac{1}{1-\alpha}}_{}$

Wikipedia xd

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n \underset{|\alpha|<1}{=} 0$$

13. Calcular en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones

a) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

Vemos que $\left|\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1+i}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ por 12.a)

Luego, como $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

$$\left|n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right| = |n| \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ exponencialmente}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

c) $\cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}(n/2)}{n^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(n\pi) = \pm 1 \\ \left|i\frac{\operatorname{sen}(n/2)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \nexists \text{ límite}$$

d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$

$$\left|\frac{(-1)^n+1}{3}\right|^n \leq \left(\frac{\overbrace{|-1|^n}^{=1}+1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e) $n i^{2n+1}$

$$2n+1 \equiv \begin{cases} 1 \ (4) & \text{si } n \equiv 0 \ (2) \\ 3 \ (4) & \text{si } n \equiv 1 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases}$$

Considero la subsuc. de los n pares
$\Rightarrow n i^{2n+1} = n.i \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
Ahora la subsuc. de los n impares
$\Rightarrow n i^{2n+1} = -ni \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

$\nexists$ límite

FORMA POLAR Y RAÍCES N-ÉSIMAS

17. Escribir los siguientes números complejos en forma polar. $\arg \in [0, 2\pi)$

a) $1+i$ sabemos que $\arg(1+i) = \pi/4$ y $|1+i| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b) $-5i$ $\quad \arg(5i) = 3\pi/2$ y $|-5i| = 5$. $\Rightarrow -5i = 5e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) -3 $\quad \arg(-3) = \pi$ y $|-3| = 3$ $\Rightarrow -3 = 3e^{i\pi}$

18. Escribir los siguientes números complejos en la forma $a+ib$:

a) $3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

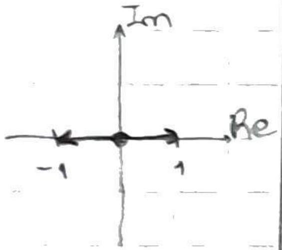
b) $e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\underbrace{\mathrm{sen}(-\pi)}_{0} = -1$

c) $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}} = \pi\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \pi\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - i\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

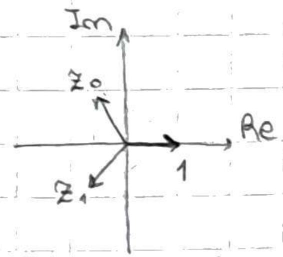
19. Mostrar que si $\alpha = re^{i\theta}$ es la forma polar del complejo $\alpha \neq 0$, entonces la transformación lineal $T\alpha$ del ejercicio 15 se factoriza como una rotación de ángulo θ seguida de una homotecia de factor r. Deducir que $T\alpha$ preserva los ángulos entre dos vectores.

21. Para $n=2,3,4,5$ dibujar todos los números z tq $z^n=1$

$n=2$:



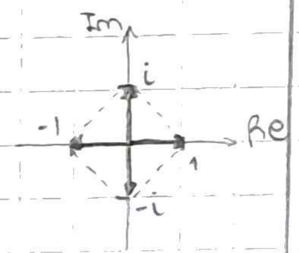
$n=3$:



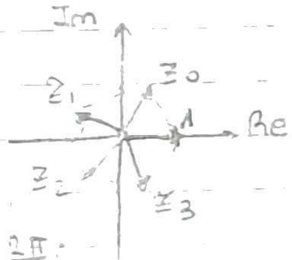
$z_0 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$

$z_1 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$

$n=4$:



$n=5$:



$z_0 = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ $\qquad z_2 = e^{\frac{6\pi}{5}i}$

$z_1 = e^{\frac{4\pi}{5}i}$ $\qquad z_3 = e^{\frac{8\pi}{5}i}$

22. Calcular las siguientes raíces:

a) $(-1+i)^{1/3}$

$|-1+i| = \sqrt{2}$, $z_k = \sqrt{2}\, e^{\frac{2k\pi}{3}}$ con $k=0,1,2$

b) $(\sqrt{3}+3i)^{1/2}$

$|\sqrt{3}+3i| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3} \Rightarrow z_k = 2\sqrt{3}\, e^{k\pi}$ con $k=0,1$

c) $i^{\frac{2}{3}} = (i^2)^{1/3} = (-1)^{\frac{1}{3}}$

$|-1| = 1 \Rightarrow z_k = e^{(2k+1)\frac{\pi}{3}}$ con $k = 0, 1, 2$

d) $64^{1/6}$

$|64| = 64 \Rightarrow z_k = 64\, e^{\frac{k\pi}{6}}$ con $k = 0, 1, \dots, 5$

e) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$

$|-2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{12+4} = 4 \Rightarrow z_k = 4\, e^{\frac{k\pi}{2}}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

f) $(-4+4i)^{1/5}$

$|-4+4i| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \Rightarrow z_k = 4\sqrt{2}\, e^{\frac{2k\pi}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

23. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Demostrar que hay n números complejos distintos tq $z^n = \alpha$.

Demo en el apunte de Teresa de Álgebra 1

24. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3-i)z - (1+2i) = 0$.

$$z_0 = \frac{-(3-i) \pm \sqrt{(3-i)^2 + 4i(1+2i)}}{2i} = \frac{-3+i \pm \sqrt{9 - 6i - 1 + 4i - 8}}{2i} =$$

$$= \frac{-3+i \pm \sqrt{-2i}}{2i}$$ ← Estas son las raíces de la ecuación

25. Probar que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ se tiene $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) + (\overbrace{\cos(-\theta)}^{\cos(\theta)} + i\overbrace{\operatorname{sen}(-\theta)}^{-\operatorname{sen}(\theta)})}{2} = \frac{2\cos(\theta)}{2} = \cos(\theta)$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) - (\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta))}{2i} = \frac{2i\operatorname{sen}(\theta)}{2i} = \operatorname{sen}(\theta)$$

26. Sea $z = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ para un entero $n \geq 2$. Demostrar que $1 + z + \dots + z^{n-1} = 0$.

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = 1 + e^{\frac{2\pi}{n}i} + \dots + e^{\frac{2\pi}{n}i(n-1)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)^k}_{\text{geométrica}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi}{n}i \cdot n} - 1}{e^{\frac{2\pi}{n}i} - 1} = \frac{1-1}{e^{\frac{2\pi}{n}i} - 1} = 0$$ ☺

27. Probar que vale $1+z+\cdots+z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ para $z \neq 1$ y, asumiendo $0<\theta<2\pi$, deducir una fórmula para $1+\cos(\theta)+\cdots+\cos(n\theta)$

Sea $z=|z|.e^{i\theta}$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} |z|^k e^{ik\theta}$

$$\left.\begin{array}{l} S_n = 1+z+\cdots+z^n \\ zS_n = z+z^2+\cdots+z^{n+1} \end{array}\right\} \underbrace{S_n - zS_n}_{S_n(1-z)} = 1-\cancel{z}+\cancel{z}-z^2+z^2-\cdots-\cancel{z^n}+z^n-z^{n+1} = 1-z^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

Por otra parte, $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k + \sum_{k=0}^{n}(e^{-i\theta})^k\right) =$

Como $0<\theta<2\pi$
$e^{i\theta} \neq 1 \neq e^{-i\theta}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}} + \frac{1-e^{-i\theta(n+1)}}{1-e^{-i\theta}}\right) =$$

FUNCIONES EXPONENCIAL, SENO Y COSENO...

28. Para $z=a+bi \in \mathbb{C}$ con $a,b \in \mathbb{R}$ se define $e^z = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b)$

a) Demostrar que para $z,w \in \mathbb{C}$ cualesquiera vale $e^{w+z}=e^w e^z$

$$e^{w+z} = e^{(a+c)+(b+d)i} = e^{a+c}(\cos(b+d)+i\operatorname{sen}(b+d)) =$$

$$= e^a.e^c(\cos(b)\cos(d)-\operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(d)+i[\operatorname{sen}(b)\cos(d)+\cos(b)\operatorname{sen}(d)])$$

$$= e^a e^c(\cos(b)[\cos(d)+i\operatorname{sen}(d)]+i\operatorname{sen}(b)[\cos(d)+i\operatorname{sen}(d)]) =$$

$$= e^a e^c(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b)).(\cos(d)+i\operatorname{sen}(d))$$

$$= e^a.(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b)).e^c(\cos(d)+i\operatorname{sen}(d)) = e^w.e^z$$

b) Describir los z tq $e^z=1$

$$e^z = e^a(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b)) = e^a\cos(b) + \underbrace{ie^a\operatorname{sen}(b)}_{\text{debe ser cero}}$$

y como $e^a \neq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow b=k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Ahora quiero $e^a\cos(b) = 1$

Reemplazo $b=k\pi$, $e^a\cos(k\pi) = \begin{cases} e^a & \text{si } k \text{ par} \\ -e^a & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$

Pero ahora $-e^a \leq -1 \ \forall a \in \mathbb{R}$

¡No puede pasar $\Rightarrow$ k debe ser par: $\exists n \in \mathbb{Z}$ tq $k=2n$

Por último $e^a = 1 \Rightarrow a = 0$

$\therefore z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$ son todos los z que cumplen lo pedido

c) Demostrar que si $e^z = e^w \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $z = w + 2k\pi i$

Como $e^z = e^w \iff e^{z-w} = 1$

Por ítem b), $z - w = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = w + 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$

d) Probar que $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

$e^{\bar{z}} = e^{a-ib} = e^a \cdot (\cos(-b) + i\,\mathrm{sen}(-b)) = e^a(\cos(b) - i\,\mathrm{sen}(b)) = \overline{e^z}$

29. Generalizando las igualdades del ejercicio 25, se definen $\cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ y $\mathrm{sen}(z) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Comprobar que $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene $\cos^2(z) + \mathrm{sen}^2(z) = 1$ y $e^{iz} = \cos(z) + i\,\mathrm{sen}(z)$

1° $\cos^2(z) + \mathrm{sen}^2(z) = \left(\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \dfrac{e^{2zi}+e^{-2zi}+2}{4} + \dfrac{e^{2zi}+e^{-2zi}+2}{-4}$

$= \dfrac{4}{4} = 1$

2° $\cos(z) + i\,\mathrm{sen}(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} + \cancel{i}\,\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\cancel{i}} = \dfrac{2e^{iz}}{2} = e^{iz}$

30. Mostrar que $\mathrm{sen}(z)$ y $\cos(z)$ tienen período 2π

Qvq $\mathrm{sen}(z) = \mathrm{sen}(z + 2\pi)$. Para $\cos(z)$ es análogo

$\mathrm{sen}(z+2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \dfrac{e^{iz} \cdot \overbrace{e^{2\pi i}}^{=1} - e^{-iz} \cdot \overbrace{e^{-2\pi i}}^{=1}}{2i} = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \mathrm{sen}(z)$

31. Mostrar que los únicos ceros ~~de~~ $\cos(z)$ y $\mathrm{sen}(z)$ son los ceros reales usuales

Quiero hallar $z \in \mathbb{C}$ tq $\cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2zi} = -1 = e^{i\pi}$

$\Rightarrow e^{(2z-\pi)i} = 1$

Por 28. b), $(2z - \pi)\cancel{i} = 2k\pi\cancel{i} \iff 2z = (2k+1)\pi \iff z = \dfrac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

El seno es análogo.

32. Probar que $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$

Qvq $\overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\bar{z})$ (Analogo el coseno)

$$\overline{\operatorname{sen}(z)} = \overline{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)} = \frac{\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}}{-2i} = \frac{e^{\overline{iz}} - e^{\overline{-iz}}}{-2i} = \frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i}$$

$= \operatorname{sen}(\bar{z})$.

33. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tq $\cos(z) \in \mathbb{R}$ y lo mismo para $\operatorname{sen}(z)$

Busco para $\cos(z)$. El seno es análogo.

Quiero $z \in \mathbb{C}$ tq $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \in \mathbb{R}$ considero $z = a + ib$

$$\Rightarrow \cos(z) = \frac{e^{-b+ia} + e^{b-ia}}{2} = \frac{e^{-b}\cos a + ie^{-b}\operatorname{sen}(a) + e^{b}\overset{\cos a}{\cos(-a)} - ie^{b}\operatorname{sen}(-a)}{2}$$

$$= \frac{\cos(a)(e^{-b} + e^{b})}{2} + i\,\frac{\operatorname{sen}(a)(e^{-b} + e^{b})}{2} = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2}(\cos(a) + i\operatorname{sen}(a))$$

Para que $\cos(z) = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2}(\cos(a) + i\operatorname{sen}(a)) \in \mathbb{R}$ debe ser $\operatorname{sen}(a) = 0$

$\Rightarrow a = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, Luego, los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen lo pedido son $z = k\pi + ib$. con $k \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{R}$.

34. Probar que $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Lo hago para $\operatorname{sen}(z)$ (Coseno es análogo)

Sea $w \in \mathbb{C}$ qvq $\exists z \in \mathbb{C}$ tq $\operatorname{sen}(z) = w$

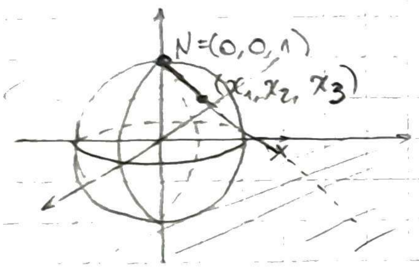
Paja pero tiene sentido porque $\operatorname{sen}(z)$ es suma de una exp positiva y una negativa entonces cubre todo.

EL PLANO COMPLEJO AMPLIADO Y LA ESFERA DE RIEMANN

36. Muy largo

a) Probar que $\psi(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$ para $(x_1, x_2, x_3) \neq N = (0,0,1)$

Dada una recta $(0,0,1) + \lambda((x_1, x_2, x_3) - (0,0,1))$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ que pase por N y (x_1, x_2, x_3), quiero un λ tq la 3ª es cero. Es decir, quiero ver para qué valor de λ la recta interseca al plano $\mathbb{C}$.



Para esto miro la 3º coordenada de mi recta:

$$1 + \lambda(x_3 - 1) = 0 \iff \lambda = \frac{-1}{x_3 - 1} = \frac{1}{1 - x_3}$$

Reemplazando en la ecuación de mi recta encuentro que el punto que me interesa es:

$$(0,0,1) + \frac{1}{1-x_3}((x_1, x_2, x_3) - (0,0,1)) = (0,0,1) + \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, \underbrace{\frac{x_3 - 1}{1 - x_3}}_{=-1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$$

Entonces $\psi(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_1}{1-x_3}, \dfrac{x_2}{1-x_3}, 0\right) = \dfrac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$

Notemos además que definimos $\psi(0,0,1) = \infty$

HOMOGRAFÍAS

39. Probar que $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición

$\mathcal{H} = \left\{ T: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \text{ donde } a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ tq } ad-bc \neq 0 \right\}$

Qvq $(\mathcal{H}, \circ)$ es un grupo. Para eso debo ver:

1° Si $T, S \in \mathcal{H}$, qvq $T\circ S \in \mathcal{H}$: Sup $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $S(z) = \dfrac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$

$$T\circ S(z) = T\left(\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}\right) = \frac{a\left(\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}\right)+b}{c\left(\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}\right)+d} =$$

$$= \frac{\frac{a(\tilde{a}z+\tilde{b})+b(\tilde{c}z+\tilde{d})}{\tilde{c}z+\tilde{d}}}{\frac{c(\tilde{a}z+\tilde{b})+d(\tilde{c}z+\tilde{d})}{\tilde{c}z+\tilde{d}}} = \frac{(a\tilde{a}+b\tilde{c})z+a\tilde{b}+b\tilde{d}}{(c\tilde{a}+d\tilde{c})z+c\tilde{b}+d\tilde{d}}$$

Para ver que eso está en $\mathcal{H}$ veamos que cumple la condición

$(a\tilde{a}+b\tilde{c}).(c\tilde{b}+d\tilde{d})-(a\tilde{b}+b\tilde{d})(c\tilde{a}+d\tilde{c}) \overset{?}{\neq} 0$

$\cancel{a\tilde{a}c\tilde{b}}+a\tilde{a}d\tilde{d}+b\tilde{c}c\tilde{b}+\cancel{b\tilde{c}d\tilde{d}}-\cancel{a\tilde{b}c\tilde{a}}-a\tilde{b}d\tilde{c}-b\tilde{d}c\tilde{a}-\cancel{b\tilde{d}d\tilde{c}} =$

$= ad(\tilde{a}\tilde{d}-\tilde{b}\tilde{c})-bc(\tilde{a}\tilde{d}-\tilde{b}\tilde{c})$

$= \underbrace{(ad-bc)}_{\neq 0}\underbrace{(\tilde{a}\tilde{d}-\tilde{b}\tilde{c})}_{\neq 0} \neq 0$ ✓

2° $\circ$ verifica asociatividad: Que $(T\circ S)\circ R = T\circ(S\circ R)$ ✓

3° $\mathcal{H}$ tiene elemento neutro: Id ✓

4° Toda $T\in\mathcal{H}$ tiene $T^{-1}\in\mathcal{H}$ tq $T\circ T^{-1} = Id$: Busco T^{-1} y verifico

$\dfrac{az+b}{cz+d} = w \iff az+b = czw+dw \iff (a-cw)z = dw-b \Rightarrow z = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$

$\Rightarrow T^{-1}(w) = \dfrac{dw-b}{-cw+a} \in \mathcal{H}$ pues $da-(-b)(-c) = ad-bc \neq 0$

$$T\circ T^{-1}(w) = T\left(\frac{dw-b}{-cw+a}\right) = \frac{a\left(\frac{dw-b}{-cw+a}\right)+b}{c\left(\frac{dw-b}{-cw+a}\right)+d} = \frac{\frac{adw-ab+ab-bcw}{-cw+a}}{\frac{\cancel{cdw}-cb-\cancel{dcw}+ad}{-cw+a}} =$$

$$= \frac{(ad-bc)w}{ad-bc} = w.$$

Así, $(\mathcal{H},\circ)$ es un grupo. (Seguro es abeliano pero hacer la demo)

4a Sean z_2, z_3, z_4 puntos de $\hat{\mathbb{C}}$ distintos. Probar que $\exists!\, T$ homografía que verifica $T(z_2)=0$, $T(z_3)=1$ y $T(z_4)=\infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\hat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

Propongo $T(z) = \dfrac{z-z_2}{z-z_4} \cdot \dfrac{z_3-z_4}{z_3-z_2}$ y cumple $T(z_2)=0, T(z_3)=1, T(z_4)=\infty$

¿Unicidad? Sup. $\exists S: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ homografía tal que $S(z_2)=0, S(z_3)=1, S(z_4)=\infty$

Luego, $S^{-1} \circ T$ fija z_2, z_3 y z_4 (distintos)

Por lema visto en clase sabemos $S^{-1} \circ T = id_{\hat{\mathbb{C}}} \Rightarrow T = S \circ id_{\hat{\mathbb{C}}} = S$:)

Ahora queda probar que si $w_2, w_3, w_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ son ptos distintos, $\exists!\, \tilde{T}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ homografía tq $\tilde{T}(z_2)=w_2$, $\tilde{T}(z_3)=w_3$ y $\tilde{T}(z_4)=w_4$

Sabemos que
$$z_2 \xmapsto{T} 0 \qquad \text{por enunciado.}$$
$$z_3 \longmapsto 1$$
$$z_4 \longmapsto \infty$$

Además, por la primera parte del ejercicio dados $w_2, w_3, w_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos $\exists!\, R: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ homografía tal que
$$w_2 \xmapsto{R} 0$$
$$w_3 \longmapsto 1$$
$$w_4 \longmapsto \infty$$

Defino $\tilde{T} = R^{-1} \circ T \Rightarrow \tilde{T}(z_2) = R^{-1}(T(z_2)) = R^{-1}(0) = w_2$
$$\tilde{T}(z_3) = \quad (\dots) \quad = w_3$$
$$\tilde{T}(z_4) = \quad (\dots) \quad = w_4$$

¿Unicidad? Sea $\tilde{S}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ homografía tal que $\tilde{S}(z_2)=w_2, \tilde{S}(z_3)=w_3, \tilde{S}(z_4)=w_4$

Luego, $\tilde{S}^{-1} \circ \tilde{T}$ fija z_2, z_3 y z_4 que son distintos por enunciado

Por lema visto en clase vale que $\tilde{S}^{-1} \circ \tilde{T} = id_{\hat{\mathbb{C}}} \Rightarrow \tilde{T} = \tilde{S} \circ id_{\hat{\mathbb{C}}} = \tilde{S}$ ▨

41. Hallar una homografía que transforme

a) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$

$$T_1(z) = \frac{z}{z+i} \cdot \frac{i+i}{i} = \frac{z}{z+i} \cdot 2 = \frac{2z}{z+i}$$

b) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq $T_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \cong \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix}$

$T_A(0) \cong \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dfrac{b}{d} = 1 \Rightarrow b = d \cdots ①$

$T_A(i) \cong \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai+b \\ ci+d \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} ai+b \\ ci+b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dfrac{ai+b}{ci+b} = -1$

$\Rightarrow ai+b = -ci-b \Rightarrow 2b = -(a+c)i \cdots ②$

$T_A(-i) \cong \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ai+b \\ -ci+d \end{pmatrix} \overset{①}{=} \begin{pmatrix} -ai+b \\ -ci+b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dfrac{-ai+b}{-ci+b} = 0$

$\Rightarrow -ai+b = 0 \Rightarrow b = ai \cdots ③$

Juntando ③ en ②. $2ai = -ai - ci \Rightarrow 3a\cancel{i} = -c\cancel{i} \Rightarrow c = -3a$

$\therefore b = ai,\ c = -3a,\ d = ai \Rightarrow T_2(z) = \dfrac{az+ai}{-3az+ai}$

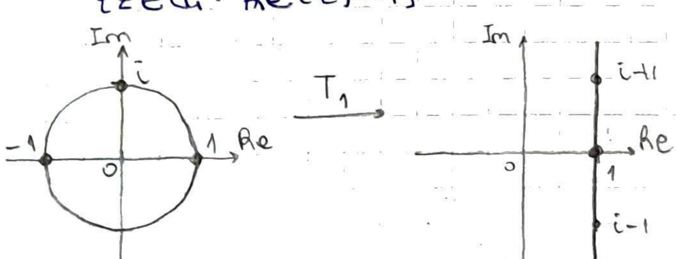
Habría que agregar que
$a \cdot ai - ai \cdot (-3a) \neq 0$
$a^2 i + 3a^2 i \neq 0$
$4a^2 i \neq 0$
$a^2 \neq 0$
$a \neq 0$
$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Verifico: $T_2(0) = \dfrac{ai}{ai} = 1$ ✓

$T_2(i) = \dfrac{ai+ai}{-3ai+ai} = \dfrac{2ai}{-2ai} = -1$ ✓

$T_2(-i) = \dfrac{-ai+ai}{3ai+ai} = 0$ ✓

42. Probar que la imágen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primera homografía del ej. anterior es la recta $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 1\}$



La idea va a ser plantear una homografía $T: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que

$$\begin{cases} T(1) = i+1 \\ T(i) = 1 \\ T(-1) = i-1 \end{cases}$$

Jajan't.

Como $-1, i, 1 \in \mathbb{C}$ y son todos distintos $\Rightarrow \exists!\, S: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ homografía tal que

$$\begin{cases} S(-1) = 0 \\ S(i) = 1 \\ S(1) = \infty \end{cases}$$

Análogamente, $i-1, 1, i+1 \in \hat{\mathbb{C}}$ todos distintos $\Rightarrow \exists!\, R: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ homografía tal que

$$\begin{cases} R(i-1) = 0 \\ R(1) = 1 \\ R(i+1) = \infty \end{cases}$$

Propongo $T = R^{-1} \circ S \Rightarrow \begin{cases} T(-1) = R^{-1}(S(-1)) = R^{-1}(0) = i-1 \\ T(i) = \quad (\dots) \quad = 1 \\ T(1) = \quad (\dots) \quad = i+1 \end{cases}$

Esta homografía cumple lo que queríamos.

Por otra parte, por lema/Teo visto en clase las homografías mandan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas. Como no hay ninguna circunferencia que pase por $i-1, 1$ y $i+1$ a la vez, T envía mi circunferencia a una recta. Esa recta es $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 1\}$ $\boxtimes$

43. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$ demostrar que la homografía $T(z) = \frac{z - \alpha}{-\bar{\alpha} z + 1}$ manda α en 0 y transforma $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en sí misma.

1º $T(\alpha) = \alpha - \alpha \quad = 0$ pues $|\alpha| \neq 1$. ✓

44. A cada matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con $\det(A) = a\overset{d}{\cancel{b}} - c\overset{b}{\cancel{d}} \neq 0$ le asignamos la homografía

$$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

y decimos que A representa la homografía T_A

a) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow T_A = \frac{az}{d} \rightsquigarrow$ son las homotecias si $\frac{a}{d} \neq 0$

b) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$ son distintas (o sea, alguna de sus coordenadas lo son).

Pero $T_A = T_{\tilde{A}} \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} \Leftrightarrow (az+b)(\tilde{c}z+\tilde{d}) = (\tilde{a}z+\tilde{b})(cz+d)$

$\Leftrightarrow a\tilde{c}z^2 + (a\tilde{d}+b\tilde{c})z + b\tilde{d} = \tilde{a}cz^2 + (\tilde{a}d+\tilde{b}c)z + \tilde{b}d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a\tilde{c}-\tilde{a}c)z^2 + (a\tilde{d}+b\tilde{c}-\tilde{a}d-\tilde{b}c)z + b\tilde{d}-\tilde{b}d = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a\tilde{d}-b\tilde{c}+\tilde{a}d+\tilde{b}c \pm \checkmark$

etc. etc. demasiada cuenta (!)

¿Camino más fácil?

Evalúo en 3 ptos (porque 3 ptos definen una homografía).

$T_A(1) = \frac{a+b}{c+d}$, $T_A(0) = \frac{b}{d}$, $T_A(\infty) = \frac{a}{c}$

Así, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$ representan la misma homografía ⇔

$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\tilde{c}+\tilde{d}}$, $\frac{\tilde{b}}{\tilde{d}} = \frac{b}{d}$ y $\frac{a}{c} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{c}}$

Si A y B representan T_A y T_B respectivamente.

c) ¿Qué homografía representa a la matriz AB?

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a\tilde{a} + b\tilde{c} & a\tilde{b} + b\tilde{d} \\ c\tilde{a} + d\tilde{c} & c\tilde{b} + d\tilde{d} \end{pmatrix}$

Luego, $T_{AB} = \dfrac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + a\tilde{b} + b\tilde{d}}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + c\tilde{b} + d\tilde{d}}$

Por otra parte,

$$T_A \circ T_B(z) = T_A\left(\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}\right) = \frac{\dfrac{a\tilde{a}z + a\tilde{b} + b\tilde{c}z + b\tilde{d}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}}{\dfrac{c\tilde{a}z + c\tilde{b} + d\tilde{c}z + d\tilde{d}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}} = \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + a\tilde{b} + b\tilde{d}}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + c\tilde{b} + d\tilde{d}}$$

Por lo tanto, AB representa a $T_A \circ T_B$, que es homografía por composición de homografías.

d) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

Sabemos que $AA^{-1} = Id$

Como AA^{-1} representa $T_A \circ T_{A^{-1}} \Rightarrow T_A \circ T_{A^{-1}} = Id_{\hat{\mathbb{C}}}$

$\Rightarrow T_{A^{-1}} = (T_A)^{-1}$

Así, A^{-1} representa a $(T_A)^{-1}$, la inversa de T_A.

45. Demostrar que una homografía $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ aplica $\hat{\mathbb{R}}$ en $\hat{\mathbb{R}}$ si y sólo si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ las imágenes por T de $-b/a, -d/c, \infty$

46. En el plano ampliado $\hat{\mathbb{C}}$ se definen ... (Muy largo)

a) Caracterizar las imágenes de circunferencias y rectas por dichas transformaciones.

Lo vamos a hacer con $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \cdot |z|=1\}$ S^1, los otros son múltiplos y traslaciones, es lo mismo.
Y sea $mz+b$ la recta.

Inversión: $R(z) = z^{-1}$

¿circunferencia?

·) Si $z \in S^1$, $|z|=1$, $|R(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = 1 \Rightarrow R(S^1) = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} : \left|\frac{1}{z}\right| = 1 \right\}$

·) $R(mz+b) = \dfrac{1}{mz+b}$?

Homotecia: circun $\rightarrow$ circun con otro radio
rectas $\rightarrow$ rectas

Traslación: circun $\rightarrow$ circun con otro centro
rectas $\rightarrow$ rectas con otra ordenada al origen

b) Probar que toda homografía ~~se escribe~~ puede escribirse como composición de a lo sumo cuatro transformaciones elementales.

Sea $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc \neq 0$.

Si $c=0$: $T(z) = \dfrac{az+b}{d} = \dfrac{az}{d} + \dfrac{b}{d}$

$$z \xmapsto{H} \frac{a}{d}z \xmapsto{T} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \checkmark$$

Si $a=0$: $T(z) = \dfrac{b}{cz+d}$

$$z \xmapsto{H} cz \xmapsto{T} cz+d \xmapsto{R} \frac{1}{cz+d} \xmapsto{H} \frac{b}{cz+d} \quad \checkmark$$

Si $a \neq 0, c \neq 0$. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{\left(z+\frac{b}{a}\right) \pm \frac{d}{c}}{\left(z+\frac{d}{c}\right)} = \dfrac{a}{c}\left(1 + \dfrac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)$

$$z \xmapsto{T} z+\frac{d}{c} \xmapsto{R} \frac{1}{z+d/c} \xmapsto{H} \frac{a}{c}\,\frac{b/a-d/c}{z+d/c} \xmapsto{T} \frac{a}{c} + \frac{a}{c}\cdot\frac{b/a-d/c}{z+d/c} \quad \checkmark$$

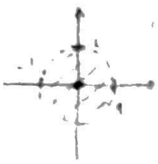
c) Describir las imágenes de circunferencias y rectas por homografías arbitrarias.

Como una homografía T cualquiera es composición de homografías elementales, y las imágenes de las elementales son circunf. y rectas

$\Rightarrow$ Las imágenes de circunf y rectas por T son circunf. y rectas

47. Determinar las imágenes de las siguientes regiones por las homografías

a) el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$

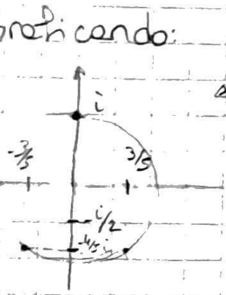


Primero, como las homografías mandan círculos/rectas en círculos/rectas veamos a dónde va el borde de mi región evaluando f en $1, i, -1$ (tres puntos definen unívocamente una circunferencia)

$$f(1) = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} i$$

$$f(i) = \frac{2i - i}{2+1} = i \quad ; \quad f(-1) = \frac{-2-i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{-3-4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} i$$

Graficando:

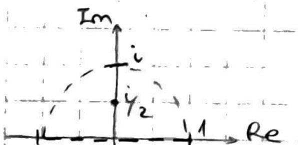


es una circunferencia ¿cuál? No sé, pero una recta seguro no es

Ahora, $f : \mathbb{C} \setminus \partial D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus f(\partial D)$ sigue siendo cont. y biy. porque f lo era. Tanto el dominio como el codominio tienen dos componentes conexas. Una adentro de la circunf. y otra afuera. Evalúo un punto de D y veo a qué comp. conexa de la imagen la lleva. Luego como f continua, llevo todo el disco (comp. conexa) a la misma comp. conexa

$f(0) = \dfrac{-i}{2} \Rightarrow$ la lleva al disco que encierra $f(\partial D)$.

b) el medio disco $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0, |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$ Mismo razonamiento



Si completaramos la circunf es lo mismo que en a).
Analicemos el segmento $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$:

Pero ya sabemos $f(1)$, $f(0)$ y $f(-1)$ $\leftarrow$ es una circunf. que interseca con

$\Rightarrow$ es una única comp. conexa
(la intersección de comp. conexa es comp. conexa)

Para ver si mi semidisco va a ella evalúo f en $i/2$

$f(i/2) = \dfrac{i - i}{2 - 1/2} = 0$ $\leftarrow$ está en esa comp. conexa rara lo agregaron después

35* Para $z \in \mathbb{C}$ se definen el coseno hiperbólico y el seno hiperbólico como

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Notar que $\cosh(z)$ y $\operatorname{senh}(z)$ son, respectivamente, las partes par e impar de e^z.

a) Sin hacer cuentas, escribir las series de MacLaurin de $\cosh(z)$, $\operatorname{senh}(z)$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \operatorname{senh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Justamente porque $\cosh(z)$ es la parte par de e^z y $\operatorname{senh}(z)$ la impar $\left(e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)$

b) Deducir las igualdades $\cosh(iz) = \cos(z)$ y $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{senh}(z)$ para $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z) \text{ por ejercicio 29} \checkmark$$

$$\operatorname{senh}(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \cdot \frac{i}{i} = i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \operatorname{senh}(z) \checkmark$$

c) Verificar $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$ para $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = \frac{e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}{4} =$$

$$= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \checkmark$$

d) ¿Son $\cosh(z)$ y $\operatorname{senh}(z)$ funciones periódicas? ¿Son suryectivas?

Si son periódicas:

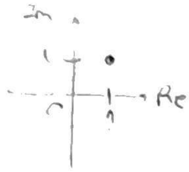
$$\cosh(z + 2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} + e^{-z-2\pi i}}{2} = \frac{e^z \overbrace{e^{2\pi i}}^{=1} + e^{-z} \overbrace{e^{-2\pi i}}^{=1}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh(z)$$

Para el senh es análoga la cuenta

¿Son suryectivas?

Tienen misma imagen que el sen y el cos

47\. c) el cuadrante $\{z \in \mathbb{C} : Im(z)>0, Re(z)>0\}$ por $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$



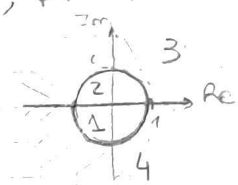
Nos vamos a fijar a dónde manda la recta real y la imaginaria.

Re: $f(0)=-1$, $f(1)=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-2i-1}{2}=-i$, $f(\infty)=1$

$\Rightarrow f(Re)$ es la circunferencia $\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$

Im: $f(0)=-1$, $f(i)=\frac{i-i}{2i}=0$, $f(-i)=\frac{-2i}{0}=\infty$, $f(\infty)=1$

$\Rightarrow f(Im)$ es la recta real



Otra vez, hay 4 comp. conex en $\mathbb{C}\setminus\{Im, Re\}$ que son los cuatro cuadrantes

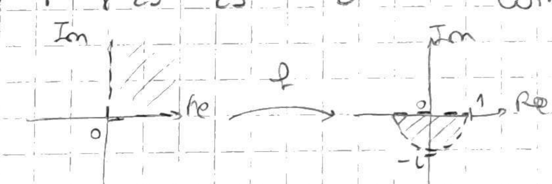
Y en el codominio hay cuatro comp

Evalúo f en $1+i$ que está en la componente que yo quiero:

$f(1+i) = \frac{1+i-i}{1+i+i} = \frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

Eso está en la componente 1 o 4. Veamos su módulo:

$\left|\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right| = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ está dentro de la circunf. y en la comp. 1



50\. Un punto fijo de una homografía T es un punto $z\in\hat{\mathbb{C}}$ tal que $T(z)=z$

a) Probar que ∞ es punto fijo de T si y sólo si $T(z)=\alpha z+\beta$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ y $\alpha\neq 0$

$\Leftarrow$) Sea $T(z)=\alpha z+\beta$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq0$. Vale $T(\infty)=\infty$ ✓

$\Rightarrow$) T homografía, $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ tq $T(\infty)=\infty$ con $a,b,c,d\in\mathbb{C}$

$T(\infty) = \frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \infty$

Si $a=0$, $c=0$: $T(\infty) = \frac{b}{d} \neq 0$

Si $a=0$, $c\neq 0$ $\quad T(\infty) = \dfrac{b}{c\infty + d} = 0 \neq \infty$

Si $a\neq 0$, $c\neq 0$ $\quad T(\infty) = \dfrac{a\infty + b}{c\infty + d} = 1 \neq \infty$

$\Rightarrow a\neq 0,\ c=0,\quad T(\infty) = \dfrac{a\infty + b}{d} = \underbrace{\dfrac{a}{d}}_{\alpha}\infty + \underbrace{\dfrac{b}{d}}_{\beta} = \infty$

b) Probar que S y T tienen la misma cantidad de puntos fijos si son conjugadas, es decir, si $\exists \phi \in \mathcal{H}$ tq $S = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$

Sea $A = \{z\in\hat{\mathbb{C}} : S(z) = z\}$ y $B = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : T(z) = z\}$ Qvq $A = B$

$A\subseteq B$. Sea $z_0 \in A$, qvq $z_0 \in B$ es decir $T(z_0) = z_0$

Como $S = \phi\circ T\circ\phi^{-1}$ y $S(z_0) = z_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 = S(z_0) = \phi\circ T\circ\phi^{-1}(z_0) \Rightarrow \phi^{-1}(z_0) = T\circ\phi^{-1}(z_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi^{-1}\circ\phi(z_0) = T(z_0) \Rightarrow z_0 = T(z_0) \Rightarrow z_0 \in B$

$B\subseteq A$: análogo

c) Concluir que toda homografía $T \neq id_{\hat{\mathbb{C}}}$ tiene exactamente 1 o 2 puntos fijos

Sup. que T tiene 3 puntos fijos $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos $\Rightarrow T(z_1) = z_1$, $T(z_2) = z_2$, $T(z_3) = z_3$

Pero si T fija 3 puntos distintos $\Rightarrow T = id_{\hat{\mathbb{C}}}$ abs!

Sup. que T no tiene punto fijo: $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$, $T(z) \neq z$

Como T inyectiva: $T(z) = w_1$ para algún $w_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ $\quad \cdots (1)$

" " sobreyectiva $T^{-1}(z) = w_2$ " " $w_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ $\quad \cdots (2)$

De (2), $\underbrace{T(T^{-1}(z))}_{T(w_2)} = z \quad \Rightarrow T(z) = T(T(w_2)) \cdots (3)$

Como T biyectiva, de (1) y (3) $T(w_2) = w_1 \Rightarrow w_2 = T^{-1}(w_1)$

En (2), $T^{-1}(z) = T^{-1}(w_1) \Rightarrow z = w_1$ y en (1) $T(z) = z$ Abs!

Luego, T tiene 1 o 2 puntos fijos