

Лабораторная работа №4
Численное интегрирование

Выполнил студент 2 курса 3 группы ФПМИ
Сараев Владислав Максимович

Минск, 2020

Теоретические сведения

Даны функции $f(x) = \sin(1 - \cos(e^{x^5}))$ (1), $\rho = (1 - x)^5(1 + x)^3$ (2).

Необходимо вычислить интеграл $\int_{-1}^1 f(x)\rho(x)dx$ (3) используя составную квадратурную формулу трапеций с точностью $\epsilon = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-6}, \epsilon = 10^{-8}$. Для оценки погрешности использовать правило Рунге.

Используя систему компьютерной алгебры (в данном случае Wolfram Mathematica) произвести вычисление интеграла (3) и сравнить с ранее полученным.

Для данного вида интегралов построить квадратурную формулу НАСТ с 8 узлами. Используя формулу НАСТ произвести вычисление (3).

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \quad (4)$$

Правило Рунге имеет вид: $\Delta_{2n} \approx \Theta |I_{2n} - I_n|$ (5), где для формулы трапеций $\Theta = \frac{1}{3}$.

Для вычисления формулы НАСТ $\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$, необходимо вычислить A_i, x_i .

Для их нахождения необходимо систему $\psi_i = \varphi_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle \varphi_i, \psi_j \rangle}{\langle \psi_i, \psi_j \rangle} \psi_j$.

x_i являются корнями ψ_n , а $A_i = \int_a^b \rho(x) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$.

Полученное решение

EXACT = 0.436547 – точное решение интеграла

$A = [0.00775384, 0.0761026, 0.231437, 0.331254, 0.251019, 0.0995173, 0.0178684, 0.000920897]$ – вектор A_i

$X = [-0.866595, -0.69679, -0.482143, -0.235601, 0.0275523, 0.291019, 0.538768, 0.757123]$ – вектор x_i

Тип квадратурной формулы	Требуемая точность, используемая в правиле Рунге	Достигнутая точность	Количество вычислений подынтегральной функции
Составная формула трапеций	10^{-4}	0.0001641387122007787	12
Составная формула трапеций	10^{-6}	2.5035616774138347e-06	18
Составная формула трапеций	10^{-8}	4.3115348458133695e-08	25
НАСТ	-	1.418600626412747e-07	8

Исходный код

```
from math import sin, cos, e

L = -1
R = 1
EXACT = 0.436547
A = [0.00775384, 0.0761026, 0.231437, 0.331254, 0.251019, 0.0995173,
0.0178684, 0.000920897]
X = [-0.866595, -0.69679, -0.482143, -0.235601, 0.0275523, 0.291019,
0.538768, 0.757123]

def f(t):
    return sin(1 - cos(e ** (t ** 5)))

def ro(t):
    return ((1 - t) ** 5) * ((1 + t) ** 3)

def quadrature_formula(n):
    x = L
    h = abs(L - R) / (n - 1)
    Q = f(x) / 2
    for k in range(0, n - 1):
        x += h
        Q += f(x) * ro(x)
    x += h
    Q += f(x) / 2
    Q *= h
    return Q

faults = [10 ** (-4), 10 ** (-6), 10 ** (-8)]
for fault in faults:
    n = 3
    answers = [quadrature_formula(n)]
    n *= 2
    current_fault = 1
    while current_fault > fault:
        answers.append(quadrature_formula(n))
        current_fault = 1 / 3 * abs(answers[len(answers) - 1] -
answers[len(answers) - 2])
        n *= 2
        print("answer = " + str(answers[len(answers) - 1]) + " - " + "num = " +
str(len(answers)) + " - " + str(
abs(answers[len(answers) - 1] - EXACT)))

res = 0
for i in range(8):
    res += A[i] * f(X[i])
print("answer = " + str(res) + " - " + str(abs(res - EXACT)))
```

$$\text{In[1]:= } \mathbf{N} \left[\int_{-1}^1 \mathbf{Sin} \left[1 - \mathbf{Cos} \left[e^{x^5} \right] \right] (1-x)^5 (1+x)^3 dx \right]$$

[чи] -1 синус [косинус]

$$\text{Out[1]= } 0.436547$$

$$\text{In[2]:= } \mathbf{norm}[\mathbf{l_}, \mathbf{r_}] := \int_{-1}^1 \mathbf{l} * \mathbf{r} * (1-x)^5 * (1+x)^3 dx$$

$$\mathbf{Orthogonalize}[\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8\}, \mathbf{norm}]$$

[ортогонализировать]

$$\text{Out[3]= } \left\{ \frac{3\sqrt{7}}{8}, \frac{5}{16} \sqrt{\frac{231}{2}} \left(\frac{1}{5} + x \right), \frac{33}{16} \sqrt{\frac{39}{2}} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right), \right.$$

$$\frac{273}{64} \sqrt{\frac{55}{2}} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right),$$

$$\frac{65}{32} \sqrt{\frac{1309}{2}} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right),$$

$$\frac{153}{128} \sqrt{\frac{19019}{2}} \left(\frac{3}{143} + x^5 - \frac{5}{39} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{2}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) - \right.$$

$$\frac{25}{34} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) + \frac{5}{9} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \right.$$

$$\left. \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right),$$

$$\frac{4845}{128} \sqrt{\frac{91}{2}} \left(-\frac{1}{65} + x^6 + \frac{1}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{33}{119} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \right.$$

$$\frac{15}{34} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) - \frac{55}{57} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \right.$$

$$\left. \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) +$$

$$\frac{3}{5} \left(\frac{3}{143} + x^5 - \frac{5}{39} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{2}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) - \right.$$

$$\frac{25}{34} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) + \frac{5}{9} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{18}{35} \right.$$

$$\left. \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) \right),$$

$$\frac{3553}{512} \sqrt{6279} \left(\frac{7}{715} + x^7 - \frac{14}{221} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{17} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) - \right.$$

$$\frac{315}{646} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) + \frac{35}{57} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \right.$$

$$\left. \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) - \frac{25}{34} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) + \\
& \frac{5}{9} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) + \\
& \frac{2}{3} \left(\frac{7}{715} + x^7 - \frac{14}{221} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{17} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) - \frac{315}{646} \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) + \right. \\
& \quad \frac{35}{57} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{3}{143} + x^5 - \frac{5}{39} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{2}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) - \frac{25}{34} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{5}{9} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{7}{11} \left(-\frac{1}{65} + x^6 + \frac{1}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{33}{119} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{15}{34} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{55}{57} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{3}{143} + x^5 - \frac{5}{39} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{2}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) - \frac{25}{34} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{5}{9} \left(-\frac{27}{715} + x^4 + \frac{2}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) - \frac{18}{35} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \left(\frac{3}{55} + x^3 - \frac{4}{13} \left(\frac{1}{5} + x \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{7}{55} + x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + x \right) \right) \right) \right) \right) \right) = 0, x]
\end{aligned}$$

Out[4]= { {x → -0.866595}, {x → -0.69679}, {x → -0.482143}, {x → -0.235601},
{x → 0.0275523}, {x → 0.291019}, {x → 0.538768}, {x → 0.757123} }

In[5]= $\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (-0.8665946385607297 - i),$
[произведение

{i, {-0.6967901301340584,
-0.4821430883449604, -0.235600883967831, 0.02755234536996465,
0.29101854578422154, 0.5387678479025229, 0.7571233352842041} }] dx

Out[5]= 0.00775384

In[6]:= $\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (-0.6967901301340584 - i),$
[произведение
 $\{i, \{-0.8665946385607297,$
 $-0.4821430883449604, -0.235600883967831, 0.02755234536996465,$
 $0.29101854578422154, 0.5387678479025229, 0.7571233352842041\}\} \, dx$

Out[6]= 0.0761026

In[7]:= $\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (-0.4821430883449604 - i),$
[произведение
 $\{i, \{-0.8665946385607297,$
 $-0.6967901301340584, -0.235600883967831, 0.02755234536996465,$
 $0.29101854578422154, 0.5387678479025229, 0.7571233352842041\}\} \, dx$

Out[7]= 0.231437

In[8]:= $\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (-0.235600883967831 - i),$
[произведение
 $\{i, \{-0.8665946385607297,$
 $-0.6967901301340584, -0.4821430883449604, 0.02755234536996465,$
 $0.29101854578422154, 0.5387678479025229, 0.7571233352842041\}\} \, dx$

Out[8]= 0.331254

In[9]:= $\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (0.02755234536996465 - i),$
[произведение
 $\{i, \{-0.8665946385607297,$
 $-0.6967901301340584, -0.4821430883449604, -0.235600883967831,$
 $0.29101854578422154, 0.5387678479025229, 0.7571233352842041\}\} \, dx$

Out[9]= 0.251019

In[10]:= $\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (0.29101854578422154 - i),$
[произведение
 $\{i, \{-0.8665946385607297,$
 $-0.6967901301340584, -0.4821430883449604, -0.235600883967831,$
 $0.02755234536996465, 0.5387678479025229, 0.7571233352842041\}\} \, dx$

Out[10]= 0.0995173

In[11]:= $\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (0.5387678479025229 - i),$
[произведение
 $\{i, \{-0.8665946385607297,$
 $-0.6967901301340584, -0.4821430883449604, -0.235600883967831,$
 $0.02755234536996465, 0.29101854578422154, 0.7571233352842041\}\} \, dx$

Out[11]= 0.0178684

```

In[12]:= 
$$\int_{-1}^1 (1-x)^5 * (1+x)^3 * \text{Product}[(x-i) / (0.7571233352842041 - i),$$

└─ произведение
      {i, {-0.8665946385607297,
        -0.6967901301340584, -0.4821430883449604, -0.235600883967831,
        0.02755234536996465, 0.29101854578422154, 0.5387678479025229}}] dx
Out[12]= 0.000920897

```