

گزارش پروژه کیهان شناسی

سارا غلامحسینیان

راہبرد کلی:

1. خواندن پایان نامه ارشد مرتبط با شبیه سازی موردنظر
2. خواندن پایان نامه دکتری مرتبط با شبیه سازی موردنظر
3. یادگیری کد ها و ران کردن شبیه سازی
4. خواندن مقالات مرتبط

مقدمه :

بیشتر آنچه که درباره کیهان می دانیم، با استفاده از مشاهدات تابش زمینه کیهان، مشاهدات مربوط به ابر نو اختر ها و همچنین نقشه ساختار های بزرگ مقیاس قابل مشاهده به دست آمده است. برای آنکه فرضیات کیهان شناسی خود را بیازماییم، به این نیاز داریم که علاوه بر مشاهدات دقیق، پیش بینی های دقیق نیز داشته باشیم که این کار با استفاده از شبیه سازی های N -body در کیهان شناسی میسر است. این شبیه سازی ها تغییرات کیهان و همچنین محتویات آن را میتوانند برای ما پیش بینی کنند. از جمله کاربردهای این شبیه سازی ها این است که میتوانیم مقدار نظری مربوط به انرژی تاریک و ماده تاریک را با پیش بینی خود مقایسه کنیم و در واقع این می تواند معیاری از نتایجی باشد که تا کنون در قسمت نظری به دست آورده ایم. شبیه سازی موردنظر در این پروژه، استفاده از شبیه سازی $concept$ می باشد. (cosmological N-body code in python). چندین اصطلاحی که در شبیه سازی باید با آن ها آشنا شویم به شرح زیر هستند : ذرات شبیه سازی، در یک جعبه مکعبی و تناوبی (ویژگی های متغیر با زمان) زندگی می کنند که جهان شبیه سازی شده را تشکیل می دهند. فایلی که شامل وضعیت کل سیستم (یعنی موقعیت و سرعت تمام N ذره) در هر زمان معین است snapshot نامیده می شود. سپس snapshot اولیه که شرایط اولیه را تشکیل می دهد، فایل initial conditions نامیده می شود. علاوه بر شرایط اولیه، یک شبیه سازی خاص با مقادیر مجموعه ای از پارامترها تعریف می شود که کیهان شناسی، فیزیک و دقت شبیه سازی را کنترل می کند. فایلی که حاوی مجموعه ای از مقادیر پارامترها باشد، فایل پارامتر نامیده می شود. ورودی تعریف شده توسط کاربر برای هر شبیه سازی، باید یک فایل شرایط اولیه و یک فایل پارامتر باشد. سپس می توان شبیه سازی انجام شده را run کرد.

کیهان شناسی :

با توجه به این که طبق اصل اساسی کیهان شناسی، کیهان را همگن و همسانگرد فرض می کنیم، تمام مختصات های فضایی در مقیاس های بزرگ دقیقاً معادل با یکدیگر هستند. (هیچ جهت ارجحی وجود ندارد). بنابراین خمیدگی محلی باید ثابت باشد یعنی خمیدگی را در ناحیه های کوچک تر که بررسی می کنیم⁽¹⁾ نباید تغییر کند. تنها منیفولد هایی که چنین ویژگی هایی را دارند منیفولد های هذلولی، اقلیدسی و بیضوی هستند که المان خط یعنی $d\Sigma$ را در آن ها می توان به صورت زیر نشان داد:

$$d\Sigma^2 = \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\Omega^2$$

که در رابطه بالا، x نقاط منیفولد در مختصات دکارتی را نشان میدهد و x^2 مجذور فاصله شعاعی هر یک از نقاط روی منیفولد است. همچنین $d\Omega^2$ زاویه فضایی است که به زوایای قطبی و سمتی با رابطه $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ مربوط می شود. K نیز یک ثابت می باشد که برحسب علامتی که دارد، انواع مختلف منیفولد ها را نشان میدهد. اگر که تحول زمانی را نیز در رابطه بالا لحاظ کنیم، المان خط فضا-زمان که با ds^2 نمایش می دهیم به صورت زیر استنتاج می شود که همان متریک رابرتسون واکر است :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2 \quad (2)$$

$a(t)$ که تابعی از زمان می باشد scale factor نامیده می شود. لازمه ی همسانگردی این است که تمام بردارهای سرعت شعاعی باشند (یعنی وابستگی به زاویه های قطبی و سمتی نداشته باشند) و همچنین لازمه ی همگنی این است که بدون در نظر گرفتن هیچ نقطه ارجحی، تمام بردار های شعاعی سرعت یکسان باشند. از آنجایی که ما تصمیم داریم کیهان مطابق با نظریات را بررسی کنیم و ثابت شده است که کیهان با تقریب بسیار خوبی تخت است، ما نیز خود را تنها محدود به مدل های تخت می کنیم ($k = 0$) :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + x^2 d\Omega^2) \quad (3)$$

همچنین تانسور $g_{\mu\nu}$ که متریک مربوط به المان خط می باشد به صورت زیر تعریف می شود :

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2, a^2 x^2, a^2 x^2 \sin^2\theta) \quad (4)$$

حال هدف ما این است که ارتباط میان این متریک و $a(t)$ را به دست آوریم که این کار با توجه به معادله میدان انیشتین که به صورت زیر است، قابل انجام می باشد:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (5)$$

در معادله ی بالا، $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تنش است که چگالی و شار انرژی و تکانه را در فضا زمان توصیف می کند ، همچنین $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی و R اسکالر ریچی می باشند. لازم به ذکر است که یک ثابت کیهانی از سمت چپ معادله کنار گذاشته می شود، زیرا ما باید آن را به عنوان یک مؤلفه تحت عنوان انرژی تاریک، در تانسور $T_{\mu\nu}$ که در سمت راست است در نظر بگیریم. سه مورد ذکر شده در معادله میدان انیشتین، به صورت زیر توصیف می شوند :

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad (6)$$

که در معادله ی بالا، خود نماد های کریستوفل به صورت مشتقات تانسور متریک بیان می شوند:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha})$$

بعد از آن که مولفه های مختلف تانسور را جایگذاری کنیم و تانسور ریچی را به دست آوریم، می توان با تریس گرفتن از این تانسور، اسکالر ریچی را بر حسب scale factor به دست آورد:

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \quad (8)$$

بنابراین تا اینجا، سمت چپ معادله میدان انیشتین را در اختیار داریم و حال به توصیف سمت راست معادله یعنی تانسور تنش-انرژی می پردازیم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$T_{\mu\nu} = diag \left(\rho_c, \frac{\bar{P}}{a^2}, \frac{\bar{P}}{a^2 x^2}, \frac{\bar{P}}{a^2 x^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (9)$$

در معادله بالا، علامت بار نشان دهنده میانگین مکانی است که البته وقتی همگنی داشته باشیم تفاوتی ایجاد نمی کند. اما از آنجایی که قصد داریم بعداً جهان را بعداً در اختلالات بررسی کنیم، علامت بار برای تشخیص فیلدها از مقادیر میانگین آنها ضروری هستند. همچنین زیرنویس چگالی نشان می دهد که این نیز به عنوان یک میدان به کار نمی رود، بلکه به عنوان چگالی بحرانی، دقیقاً مقداری از چگالی است که به یک کیهان تخت منجر می شود. ما به محتوای جهان که به طور کامل توسط تانسور $T_{\mu\nu}$ توصیف می شود به عنوان یک سیال نگاه خواهیم کرد که با چهار بردار $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ توصیف می شود. در این صورت تانسور تنش-انرژی به شکل زیر در خواهد آمد:

$$T_{\nu}^{\mu} = diag(-\rho_c, \bar{P}, \bar{P}, \bar{P}) \quad (10)$$

حال که هر دو طرف این معادله را در اختیار داریم، می توانیم با حل آن به معادلات فریدمن برسیم که در واقع انبساط عالم را به محتویات آن مربوط می کنند. معادله زیر، معادله اول فریدمن است که انبساط عالم را به چگالی متوسط مربوط ساخته است:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} \rho_c \quad (11)$$

معادله زیر نیز معادله دوم فریدمن می باشد :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho_c + 3\bar{P}) \quad (12)$$

با استفاده از دو معادله بالا می توان معادله پیوستگی را استخراج کرد که پایستگی انرژی را نمایش می دهد:

$$\dot{\rho}_c = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_c + \bar{P})$$

با توجه به معادله حالت هر سیال یعنی $P = w\rho$ ، می توان رابطه فوق را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{a^{3(1+w)}} \quad (14)$$

که در آن $\bar{\rho} = \bar{\rho}(a)$ چگالی متوسط سیال است و مقدار کنونی آن برابر می شود با $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(a = 1)$. بنا بر این معادله اول فریدمن به صورت زیر در می آید:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\sum_s \frac{\Omega_{s,0}}{a^{3(1+w_s)}}} \quad (15)$$

در معادله فوق، $H = \dot{a}/a$ پارامتر هابل و $\Omega = \bar{\rho}/\rho_c$ کمیت بی بعدی به نام پارامتر چگالی می باشد. و اندیس های s و 0 به ترتیب نشان دهنده نوع سیال و زمان حال می باشند.

حال باید به معرفی انواع مختلف سیال که در کیهان وجود دارند بپردازیم. ماده غیرنسبیتی برای نامگذاری تمام سیالاتی به کار می رود که هیچ فشاری ندارند و از انواع آن می توان به ماده تاریک سرد و ماده باریونی اشاره کرد. با توجه به معادله حالت سیال می توان گفت بدون فشار به این معنی است که $w = 0$ باشد بنابراین می توان نتیجه گرفت برای این نوع سیال $\Omega_m \propto a^{-3}$. با توجه به معادله اخیری که به عنوان معادله اول فریدمن استنتاج کردیم، هیچ تمایزی بین ماده باریونی و ماده تاریک نمی توان قائل شد پس می توان نتیجه گرفت که این دو، در کل اثر یکسانی روی کیهان می گذارند. نوع دیگری از سیال که باید آن را بررسی نمود، ماده نسبیتی یا همان تابش می باشد که فوتون ها و نوترینو ها را شامل می شود. تابش دارای جرم سکون ناپایدار است و بنابراین تمام چگالی انرژی آن از توزیع تکانه آن پیروی می کند. از آنجایی که تکانه آن به صورت همسانگرد توزیع شده است، $w = 1/3$ است و $\Omega_r \propto a^{-4}$. مهم ترین مولفه ی جهان کنونی ما انرژی تاریک می باشد که در حال حاضر طبیعت آن برای ما ناشناخته است. یکی از کاندید های انرژی تاریک، ثابت کیهان شناسی است که فشار منفی دارد و برای آن که چگالی انرژی ثابت بماند باید $\Omega_\Lambda \propto 1$ باشد و $w = -1$. با توجه به معادله دوم فریدمن، متوجه می شویم که انرژی تاریک تنها گونه ای از این سه نوع سیال است که در انساط شتابدار کیهان نقش مثبت دارد. کیهان ما با این 3 مولفه به صورت زیر توصیف می شود:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}} \quad (16)$$

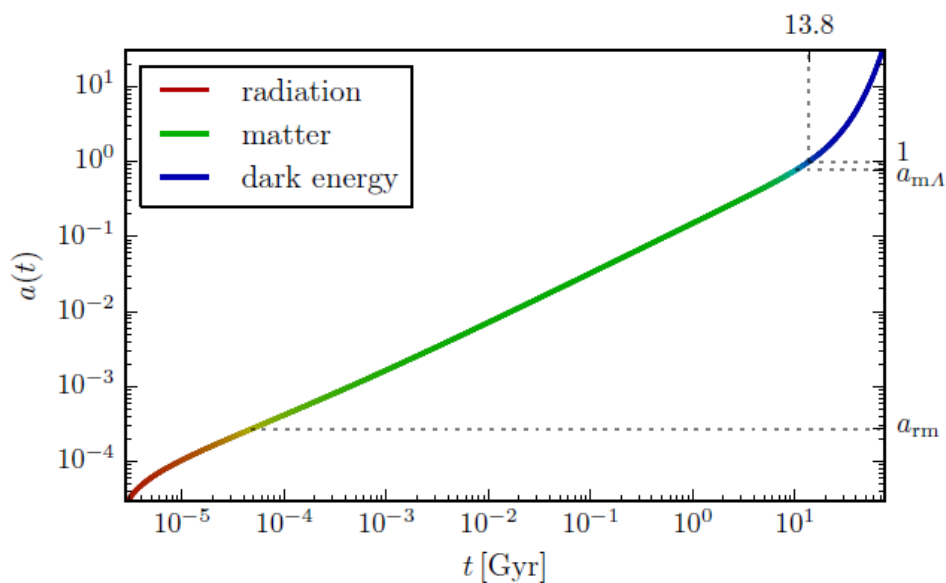
مبرهن است که در زمان های اولیه، تابش غالب بوده است و در زمان های میانی ماده، و پس از آن انرژی تاریک. از آنجایی که کیهان اکنون تابش بسیار کمی دارد، می توان از آن صرف نظر کرد و این زمان مربوط می شود به پس از دوران $\Omega_r = \Omega_m$ یعنی $a_{rm} = 2.7 \times 10^{-4}$. به طور مشابه، برابری ماده و انرژی

تاریک در زمان $a_{m\Lambda} = 0.76$ رخ داده است. با توجه به معادله فریدمن و انجام محاسبات مربوطه، می توان برای هر دوره روابط زیر را برای a و \dot{a} تعریف نمود:

$$a = \begin{cases} H_0 a^{-1} \\ H_0 a^{-1/2} \\ H_0 a \end{cases}$$

$$\dot{a} = \begin{cases} (2H_0 t)^{1/2} & \text{(radiation)} \\ \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} & \text{(matter)} \\ C e^{H_0 t} & \text{(dark energy)} \end{cases} \quad (18)$$

که c یک ثابت انتگرال گیری می باشد. شکل مربوط تغییرات **scale factor** در این جهان سه مولفه ای را از زمان $t_0 = 13.8 \text{ Gyr}$ تا زمان حال می توان در شکل زیر مشاهده کرد:



شکل 1. تغییرات $a(t)$ از گذشته تا اکنون در یک جهان سه مولفه ای

کیهان شناسی نیوتنی:

در این قسمت سعی داریم حد نیوتنی کیهان شناسی ارائه شده در بالا را پیدا کنیم و پیچیدگی تحلیل های فراتر را تا حد زیادی کاهش دهیم.

ابتدا حد نیوتونی نسبیت عام را بررسی می کنیم. این حد با سرعت های کم و تغییرات ضعیف و آهسته میدان گرانشی تعریف می شود. در حدی که هیچ سرعتی نداشته باشیم، مربوط به دنیای ماده غالب ($\bar{P} = 0$)، تنها جرم سکون در تانسور انرژی-تنش نقش خواهد داشت. بنابراین مولفه های موجود به شکل زیر خواهند بود:

$$T_{00} = \rho \quad T_{\mu i} = 0 \quad (19)$$

که ρ یک میدان از چگالی ماده به صورت همگن است. بنابراین در حد گرانش نیوتنی، 10 مولفه مستقلی که در معادله میدان انیشتین ظاهر می شدند تنها به یک مولفه کاهش می یابند. هدف ما این است که در پایان، گرانش نیوتنی را تقریب بزنیم، اما اثر کلی نسبیت عام، یعنی انبساط پس زمینه را حفظ کنیم. به طور محلی، متریک رابرتسون-واکر همانطور که گفته شد متریک مینوفسکی می باشد که در مختصات دکارتی به صورت زیر است:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1) \quad (20)$$

حال رویکرد ما این است که متریک مینکوفسکی را به عنوان "متریک نیوتنی" بپذیریم، و سپس با تغییر آن به متغیرهای همراه (comoving variables)، انبساط پس زمینه را لحاظ کنیم. بنابراین، متریک مینوفسکی را به دو روش به کار می گیریم. اول آن که اگر هیچ گرانشی نداشته باشیم، از متریک مینکوفسکی تخت استفاده می کنیم و دوم اگر که میدان گرانشی ضعیف داشته باشیم، از متریک مینکوفسکی اختلالی یا همان (perturbed Minkowski metric) بهره می گیریم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (21)$$

که در آن دینامیک فضا زمان که مربوط به گرانش می شود، به طور کامل در $h_{\mu\nu}$ جایگذاری شده است. برای پیدا کردن تانسور ریچی و یا اسکالر ریچی، می توان به جای آن که تریس تانسور ریچی را محاسبه نمود از روش trace-reversing استفاده کرد که در این صورت در خواهیم یافت که $R = -T$. بنابراین معادله (5) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (22)$$

از آنجایی که طبق معادله (19) تانسور تنش-انرژی فقط یک مولفه ی T_{00} داشت، تانسور ریچی نیز فقط این مولفه را دارد که می شود $R_{00} \approx 4\pi\rho$. با استفاده از محاسبات مربوطه و برابر قرار دادن $h_{00} = 2\phi$ ، میتوان به معادله ی مهم پوآسون برای گرانش نیوتنی رسید که با معادله زیر توصیف می شود:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$$

(23)

که در آن ϕ پتانسیل نیوتن گرانشی می باشد. بنابراین در این آنالیز، ما از متریک اختلالی مینکوفسکی استفاده کردیم تا هندسه ی فضا زمان را توصیف کنیم. اما در مدل واقعی که می خواهیم از جهان در دست داشته باشیم، لازم است که انبساط کیهانی نیز لحاظ شود. برای این کار، ما مختصات خود را به مختصات همراه (comoving coordinates) تغییر می دهیم. همانطور که از متریک رابرتسون-واکر مشخص است، می توان با این تبدیل به مختصات همراه رفت:

$$r = ax \Rightarrow \dot{r} = \dot{a}x + \dot{x}a \equiv Hr + u \quad (24)$$

که در رابطه بالا، $u \equiv a\dot{x}$ سرعت ویژه می باشد. درواقع u سرعت یک المان سیال است وقتی که در مختصات همراه دیده می شود. بنابراین اکنون می توان معادله حرکت نیوتونی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\nabla_r \phi \quad (25)$$

اندیس عملگر دل، نشان دهنده این است که باید توجه کنیم مشتق گیری نسبت به مختصات مناسب انجام می شود، مخصوصاً هنگامی که با مختصات های متعدد مواجه می شویم. همچنین با توجه به اهمیت مشتق گیری نسبت به مختصات مرجع، معادله پواسون را نیز می توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla_r^2 \phi = 4\pi\rho \quad (26)$$

نظریه اختلالی نیوتنی:

با ایجاد گرانش به عنوان نیروی نیوتنی، می توانیم میدان چگالی کاملاً همگن را مختل کنیم. از آنجایی که نه تابش و نه انرژی تاریک در خوشه بندی شرکت نمی کنند، از این به بعد به طور خاص به ρ به عنوان میدان چگالی ماده نگاه خواهیم کرد. از آنجایی که ماده به عنوان یک سیال مدل می شود، مکانیک نیوتنی باید برای تکامل ρ در گذر زمان استفاده شود. بنابراین علاوه بر معادله پواسون، به معادلات اوایلر هم نیاز داریم که این دو به ترتیب پایستگی جرم و تکانه را به ما می دهند.

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_r + \nabla_r \cdot (\rho \dot{r}) = 0 \\ \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial t} \right|_r + \dot{r} \cdot \nabla_r \dot{r} = -\nabla_r \phi \end{cases} \quad (27)$$

که تا وقتی سیال فشار نداشته باشد، تنها نیرویی که روی آن اثر می کند نیروی گرانشی است یعنی $-\nabla_r \phi$. برای آن که انبساط کیهان را وارد معادله پواسون کنیم، باید آن را نیز در مختصات همراه بازنویسی کنیم. برای این امر یک پتانسیل ویژه به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\varphi(x) \equiv a\phi(ax) + \frac{1}{2}a^2\ddot{a}x^2$$

که با انجام محاسبات لازم و تعریف $\varrho = a^3 \rho$ به عنوان چگالی همراه، رابطه پوآسون را در مختصات همراه می توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla_x^2 \varphi(x) = 4\pi(\varrho(x) - \bar{\varrho}) \quad (29)$$

لازم به ذکر است که معادله پوآسون حاصل در رابطه (29) مربوط به نوسانات چگالی (در مختصات همراه) است، نه خود چگالی. این فقط می تواند به منزله تغییر در پتانسیل باشد و بنابراین هیچ اثر فیزیکی ندارد. در واقع به نظر می رسد که لازم است فقط نوسانات را در نظر بگیریم، زیرا معادله پوآسون معمولی هیچ راه حلی در یک کیهان نامحدود ندارد. همچنین، معادلات اوایلر در مختصات همراه به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_x + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot (\rho u) \quad (30)$$

در معادله فوق، دو عبارت اول که دقیقاً معادله (13) را برای یک سیال همگن و بدون فشار در یک جهان در حال انبساط بیان می کنند، و مورد سوم عبارت دیورژانس سرعت است که اکنون در مختصات همراه می باشد. معادله دوم اوایلر در مختصات همراه به صورت زیر می باشد:

$$\dot{u} + \frac{1}{a} u \cdot \nabla_x u + \frac{\dot{a}}{a} u + \frac{1}{a^2} \nabla_x \varphi = 0 \quad (31)$$

به این ترتیب مجموعه معادلات ما برای توصیف تحول ρ در مختصات همراه کامل می شوند. از آنجایی که ما به اختلالات کوچک ρ حول $\bar{\rho}$ علاقه مند هستیم، کمیتی تحت عنوان تباین چگالی (density contrast) تعریف می کنیم:

$$\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (32)$$

معادله پوآسون و معادلات اوایلر بر حسب δ به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\begin{cases} \nabla_x^2 \varphi = 4\pi a^3 \delta \bar{\rho} \\ \delta + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot u = 0 \\ \dot{u} + \frac{\dot{a}}{a} u + \frac{1}{a^2} \nabla_x \varphi = 0 \end{cases} \quad (33)$$

به این ترتیب، با ادغام معادلات فوق می توان به رابطه مهمی دست یافت که نتیجه نهایی خطی شدن معادلات سیال است. تنها فرض مورد استفاده همگنی تقریبی بوده است که این تقریبی بودن به معنای اختلال در ρ می باشد و در یک کیهان در حال انبساط، به ما امکان استفاده از مکانیک نیوتنی را می دهد. بنابراین معادله (34) زیر برای هر مولفه ماده در هر کیهان شناسی که با این فرض مطابقت دارد، معتبر است:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi\delta\bar{\rho} = 0$$

معادله (34) برای هر دوره غالبی می تواند به صورت تحلیلی حل شود و به این ترتیب رفتار کیفی اختلالات و رشد آن ها را برای ما توصیف کند که این کار با استفاده از معادلات (17) و (18) انجام پذیر است. معادله اختلال چگالی خطی برای دوران ماده غالب به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0 \quad (35)$$

که جواب های آن به صورت زیر است:

$$\delta = C_1 a + C_2 a^{-3/2}$$

عبارت دوم که به کاهش δ اشاره دارد، در نهایت ناپدید می شود و آنچه که در رشد اختلالات نقش دارد عبارت اول است. بنابراین در یک کیهان ماده غالب رشد اختلالات به صورت $\delta \propto a$ می باشد و با $a(t)$ به صورت خطی رابطه دارد که در نتیجه به خوشه بندی منجر می شود.

حال اگر کیهان تابش غالب را در نظر بگیریم، معادله (34) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\ddot{\delta} + \dot{\delta}t^{-1} - 4\pi\delta\bar{\rho} = 0 \quad (36)$$

از آنجایی که $\rho_c = \bar{\rho}_r + \bar{\rho}$ و در کیهان اولیه $\rho_c \approx \bar{\rho}_r$ ، سهم $\bar{\rho}$ بسیار ناچیز بوده است و می توان از عبارت سوم معادله (36) صرف نظر کرد. بدین ترتیب جواب های معادله فوق به صورت زیر در می آیند:

$$\delta = C_1 \log(a) + C_2$$

از آنجایی که اختلاط ماده در زمان تابش غالب تنها به صورت لگاریتمی رشد می کنند، هیچ ساختار قابل توجهی قبل از زمان ماده غالب نمی تواند ساخته شود.

اکنون اگر معادله (34) را برای دوران انرژی تاریک غالب بررسی کنیم، معادله به شکل زیر در می آید:

$$\ddot{\delta} + 2H_0\dot{\delta} = 0 \quad (37)$$

جواب های معادله فوق به شرح زیر است:

$$\delta = C_1 a^{-2} + C_2$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که اختلالات چگالی ماده وقتی که کیهان وارد فاز انرژی تاریک غالب می شود، متوقف می شود. نتیجه نهایی که می توان استنتاج کرد این است که خوشه بندی ماده تنها در زمان ماده غالب رخ داده است که رشد اختلالات در آن دوره متناسب با scale factor بوده است.

روش N-body:

با توجه به مطالب گفته شده در بخش قبل، نظریه خطی اختلال، به ما یک توصیف کیفی از تحول ساختارهای کیهانی ارائه می کند. با توجه به برخی از نوسانات چگالی اولیه، کدهای عددی می توانند برای حل معادلات دیفرانسیل خطی حاکم بر نوسانات ماده استفاده شوند. نمونه ای از چنین کدهایی camb است. این محاسبات معمولاً در فضای فوریه انجام می شوند بنابراین خروجی آن ها به صورت $\delta(k)$ که تبدیل فوریه $\delta(x)$ می باشد، خواهد بود. اغلب بر حسب طیف توان P بیان می شوند که تبدیل فوریه تابع همبستگی دو نقطه $\overline{\delta(x_1)\delta(x_2)}$ می باشد (علامت بار به نشانه میان گیری فضایی است):

$$P(k) = \left| \int \overline{\delta(x_1)\delta(x_2)} e^{-ikx} dx \right|^2 \quad (38)$$

با توجه به همسانگردی جهان در مقیاس های بزرگ، می توان گفت $|P(k)|$ نشان دهنده میزان ساختار ها در مقیاس $1/|k|$ می باشد. با توجه به آن که گفتیم در دوره ماده غالب $\delta \propto a$ می باشد، یعنی تحولات چگالی در طول این دوران به شدت غیر خطی بوده است. بنابراین نظریه اختلال دیگر فایده ای ندارد و شبیه سازی عددی مستقیم تنها گزینه است. برای این شبیه سازی، یک تابع فضا-فاز تعریف می شود به طوری که $f(x, u, t) dx du$ چگالی احتمال پیدا کردن المان سیال در بازه $[x \pm dx, u \pm du]$ می باشد. بنابراین برای چگالی ماده می توان گفت:

$$\rho \propto \int f du$$

با نمونه برداری تابع توزیع فضا-فاز در N نقطه، ویژگی های کلی آماری سیستم با خطایی متناسب با $N^{-1/2}$ متناسب خواهد بود. اگر این کار را از طریق رویکرد لاگرانژی انجام دهیم، با ردیابی مسیرهای فضای فاز N ذره در طول زمان مطابقت خواهد داشت، که ایده اصلی شبیه سازی های N-body می باشد. با شبیه سازی تعداد زیاد N ذره، که هر کدام در طول زمان مطابق با معادلات حرکت نیوتنی تکامل یافته اند، می توانیم با موفقیت میدان چگالی را شبیه سازی کنیم. برای شبیه سازی N-body، شرایط اولیه مناسب، موقعیت و سرعت ذرات مورد نیاز است. این ها با اختلال یک شبکه یکنواخت از ذرات به گونه ای ایجاد می شوند که آمار میدان چگالی نمونه برداری شده با طیف توان به دست آمده از نظریه اختلال برابر باشد. بنابراین مهم است که شبیه سازی را در زمان اولیه شروع کنیم، به طوری که نوسانات ماده به طور دقیق توسط نظریه اختلال خطی توصیف شوند. با رویکرد N-body، بقیه این کار بر روی تکنیک های عددی در چنین شبیه سازی هایی تمرکز دارد. در این کار ما فقط بر دو جنبه مهم، یعنی گرانش و تکامل زمانی تمرکز خواهیم کرد.

گرانش نیوتنی:

در این قسمت سعی خواهیم کرد که فرمالیسم مربوط به گرانش نیوتنی را در حوزه شبیه سازی های N-body به دست آوریم. می توان گفت که قلب هر کد مربوط به شبیه سازی N-body، حل کننده گرانشی

آن می باشد. هم از آن جهت که بخش زیادی از بدنه کد را در بر می گیرد و هم از آن جهت که بیشترین زمان مربوط به محاسبه، در آن بخش صرف می شود زیرا گرانث عامل اصلی در شکل گیری ساختارها در مقیاس های کیهانی است. در این بخش با سه روش مجزا برای شبیه سازی ها آشنا خواهیم شد که به ترتیب، بر اساس میزان پیچیدگی و کاربردشان به شرح زیر هستند :

1. روش $P - P$ (روش ذره-ذره) : این روش ساده ترین نوع حل کننده گرانثی می باشد.
2. روش PM (روش ذره-شبکه) : در این روش، با توجه به آموخته هایی که از روش پیشین داشته ایم سعی خواهیم کرد که محاسبات مربوطه را با اعمال تغییراتی، بهینه تر کنیم.
3. روش P^3M (روش ذره-ذره-ذره-شبکه) : در این روش، آموخته های خود از دو روش قبل را ادغام خواهیم کرد تا بتوانیم به یک حل کننده گرانثی با دقت بیشتر و همچنین محاسباتی بهینه تر دست یابیم.

لازم به ذکر است که گرانث نیوتنی در کیهان شناسی با گرانث نیوتنی در مکانیک کلاسیک از دو جنبه تفاوت هایی دارد. اول آن که ، یک کیهان تخت یعنی جهانی که در آن زندگی می کنیم ، شامل بی نهایت ذره است که این موضوع از جهاتی که بعداً متوجه خواهیم شد ، منجر به مشکلاتی می شود. و مورد دوم این است که ما می خواهیم ذرات سیستم را در مختصات همراه بررسی کنیم. اما مورد دوم برای ما مشکل جدی محسوب نمی شود. زیرا از آن جایی که انبساط عالم همگن و همسانگرد است و این یعنی $scale$ factor تنها به زمان بستگی دارد، انتقال بین یک نیروی کلاسیکی در فضای اقلیدسی و یک نیرو در مختصات همراه در حال انبساط، تنها باید به صورت مضربی از $scale$ factor یا مضربی از یکی از توان های آن باشد. بنابراین، می توانیم از مورد دوم چشم پوشی کنیم و فرض کنیم که ذره مورد نظر ما در یک فضای اقلیدسی ایستاست. اکنون، به شرح مفصل هر یک از روش های اشاره شده می پردازیم :

1. روش $P - P$: همانطور که می دانیم ، ساده ترین فرمالیسم برای گرانث نیوتنی، همان قانون جهانی گرانث می باشد که در این روش، ماده از ذراتی تشکیل شده است که به صورت دو به دو ، اثر متقابل دارند. در واقع این همان فرمالیسمی است که در روش $P-P$ از آن استفاده خواهیم کرد. برای این کار ، ابتدا مختصات فضایی در فضای مورد نظرم را با r نمایش خواهیم داد. با توجه به رابطه (23) ، رابطه پواسون برای نیوتن گرانثی به صورت زیر خواهد بود :

$$\nabla^2 \phi(r) = 4\pi G \rho(r) \quad (39)$$

که البته در رابطه بالا، G اضافه شده است که همان ثابت جهانی گرانث است. قانون جهانی گرانث نیوتن، گرانث را بر اساس نیروها توضیح می دهد که برابر است با منفی گرادیان پتانسیل گرانثی.

بنابراین لازم است که عبارت لاپلاسی معادله فوق را به شکل گرادیان دریاوریم. این کار را با استفاده از عملگر دیورژانس معکوس انجام خواهیم داد که با ما یک انتگرال با یک بردار کرنل G_{∇} خواهد داد که درواقع تابع گرین عملگر دیورژانس می باشد :

$$\nabla\phi(r) = 4\pi G \int G_{\nabla}(r, r')\rho(r')dr'$$

حال اگر از رابطه (40) دیورژانس بگیریم خواهیم داشت :

$$\nabla \cdot G_{\nabla}(r, r') = \delta(r' - r)$$

در رابطه فوق، $\delta(r)$ تابع دلتا در سه بعد است و جواب این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$G_{\nabla}(r, r') = \frac{-1}{4\pi} \frac{r' - r}{|r' - r|^3} \quad (41)$$

با جایگذاری جواب فوق در رابطه (40)، به معادله زیر دست خواهیم یافت:

$$\nabla\phi(r) = -G \int \frac{r' - r}{|r' - r|^3} \rho(r')dr' \quad (42)$$

اما رابطه (42) همچنان به جرم به عنوان یک کمیت پیوسته نگاه می کند بنابراین برای گسسته کردن این کمیت، می توان چگالی جرمی را به صورت زیر نوشت (زیرا ما می خواهیم جرم چندین ذره را در نظر گیریم و این گسسته سازی جرم برای ما سودبخش خواهد بود) :

$$\rho(r) = \sum_{j=1}^N m_j \delta(r_j - r)$$

که طبق رابطه بالا، N تا ذره j را با موقعیت r_j و جرم m_j را جمع زده ایم. با توجه به رابطه بالا، رابطه (42) به شکل زیر خواهد بود:

$$\nabla\phi(r) = -G \sum_{j=1}^N m_j \frac{r_j - r}{|r_j - r|^3} \quad (43)$$

در نتیجه می توان گفت رابطه فوق، نشان دهنده میدان گرانشی حاصل از ذرات j در نقاط r خواهد بود و نیروی وارد بر ذره i به خاطر وجود ذرات دیگر به صورت زیر است:

$$F_i = Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} \quad (44)$$

شاید تصور کنید که در معادله فوق وارد کردن عبارت $j \neq i$ کار صحیحی نباشد زیرا آن را به صورت دستی و ناگهان وارد کردیم. لازم به ذکر است که اگر این کار را انجام ندهیم، در رابطه (42) نیز به مشکل بر خواهیم خورد زیرا در $r = r'$ یک تکینگی داریم. اما از آنجایی که این انتگرال حول تکینگی ضد متقارن است، هر نیرویی خنثی می‌شود. بنابراین اگر هم مشکلی با گنجاندن عبارت $j \neq i$ ایجاد شود، قطعاً کمتر از وجود عبارت $j=i$ خواهد بود. به کارگیری عددی رابطه (44) بسیار آسان خواهد بود. کد 1، یک چرخه زمانی کامل *N-body* را نشان می‌دهد:

```

:
# Time loop
while not done:
    # Force computation (equation 2.6)
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            if j == i:
                continue
            F[i] += (G*m[i]*m[j]*(r[j] - r[i])
                    /norm(r[j] - r[i])**3)
    # Time integration
    p += F*dt
    r += p/m*dt
:

```

کد 1. چرخه زمانی کامل یک کد *N-body* با استفاده از رابطه (44) که در پایتون نوشته شده است.

نکته ای که وجود دارد این است که شاید کسی فکر کند که کد های واقعی شبیه سازی های *N-body* از الگوریتم های بسیار پیچیده تری استفاده می کنند. بله آن ها پیچیده تر هستند اما نه برای آن که دقت بیشتری داشته باشند، بلکه برای آن که زمان محاسبات را کاهش دهند. درواقع می توان گفت چالش اصلی ما در ساختن کد های *N-body* عموماً اجرا کردن فیزیک مسئله نیست بلکه اجرا کردن کد در زمان کم تر و به صورت بهینه تر است.

جمع زنی اوالد: (Ewald summation)

آنچه که ما در کیهان شناسی به دنبال آن هستیم، توصیف سیستم هایی با بی نهایت ذره است. اگر به سیستم اجازه دهیم که بی نهایت ذره را شامل شود، در این صورت نیاز بی نهایت عملیات منطقی و همچنین بی نهایت زمان محاسبه دارد تا بتواند شبیه سازی را یک بار کامل کند. در دنیای واقعی که تحت قوانین نسبیت عام می باشد، ذرات می توانند روی یکدیگر تاثیر بگذارند و باهم برهم کنش داشته باشند تنها زمانی که در افق کیهانی یکدیگر باشند و این یعنی هر ذره به مقدار محدودی از اطلاعات دسترسی خواهد داشت. راه حلی که برای این مشکل، یعنی بی نهایت بودن تعداد ذرات

پیشنهاد می شود این است که $N < \infty$ ذره را درون جعبه های مکعبی با مرزهای متناوب قرار دهیم. بنابراین ذرات و برهم کنش های گرانشی میان آن ها در سه تراشه وجود خواهد داشت. بنابراین ما لازم است که نیروهای وارد بر $N < \infty$ ذره را که هر کدام تحت تاثیر ذرات دیگر هستند را به دست آوریم که بی نهایت است زیرا که برهمکنش گرانشی می تواند به دفعات دلخواه در اطراف هر یک از ابعاد سه تراشه وجود داشته باشد. بنابراین حتی با انتخاب $N < \infty$ همچنان یک بی نهایت دیگر وجود دارد که باید آن را حل کنیم. از آن جایی که مرزهای تناوبی انتخاب کردیم، می توان گفت این بی نهایت هم به صورت تناوبی است و تنها حاوی اطلاعات محدودی می باشد که به صورت تکرار شونده هستند پس می توان آن ها را تنها در زمان های مشخصی بررسی نمود. تفسیر نهایی ما از منیفولدی که ذرات روی آن وجود دارند، یک فضای تخت سه بعدی نامحدود است که مجتویات آن (N ذره) به صورت تکرار شونده و تناوبی در آن تکرار می شوند. همچنین واضح است که یکی از مزیت های دیگر این تناوبی بودن این است که همگنی را در مقیاس های بزرگ تر از سایز جعبه برای ما فراهم میکند. چگالی جرمی را در این منیفولد می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho(r) = \sum_{j=1}^N m_j \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \delta(r_j + nL - r)$$

که در رابطه فوق، n عدد صحیح و L اندازه هر ضلع جعبه است. حال می خواهیم از همان روشی که در قسمت قبل استفاده کردیم، در اینجا هم بهره گیریم. به ذرات موجود در $n=0$ ذرات حقیقی می گوئیم. و به کپی های آن ها replicas یا به عبارتی نسخه چین ها می گوئیم. ذرات و کپی های آن ها با یکدیگر به صورت جمعی به تصویر مربوط می شوند.

برای آن که نیروهای گرانشی در یک سیستم تناوبی را محاسبه کنیم از جمع بندی اوالد استفاده می کنیم. در این تکنیک بهتر است که ابتدا پتانسیل را حساب کنیم و سپس نیرو را، و مستقیماً به سراغ نیرو نرویم. بنابراین ابتدا باید معادله پواسون برای پتانسیل گرانشی را حل کنیم. سپس، بعد از این که گرادیان پتانسیل را از این طریق به دست آوردیم، باید تابع گرین مربوطه را که همان کرنل ⁽⁴⁶⁾ انتگرال و معکوس لاپلاسین می باشد را به دست آوریم. اکنون با توجه به محاسبات قسمت قبل و معادله $\nabla^2 G_{\nabla^2} = \delta(r' - r)$ ، تابع گرین به صورت زیر خواهد بود:

$$G_{\nabla^2} = -\frac{1}{4\pi|r|}$$

بنابراین جواب معادله پواسون با رابطه زیر توصیف خواهد شد:

(47)

$$\phi(r) = -G \int \frac{\rho(r')}{|r' - r|} dr'$$

با جایگذاری معادله (45) در معادله (47) به عبارات زیر برای پتانسیل گرانشی دست خواهیم

یافت:

$$\phi(r) = -G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{|r_j + nL - r|} \quad (48)$$

$$= 4\pi G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} G_{\nabla^2}(r_j + nL - r)$$

نیروی تناوبی بر واحد جرم، منفی گرادیان پتانسیل می شود، که با توجه به معادله (47) به شکل زیر خواهد بود:

$$\nabla\phi(r) = -G \sum_{j=1}^N m_j \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{r_j + nL - r}{|r_j + nL - r|^3} \quad (50)$$

حال باید راهی بیابیم برای آن که این جمع های بی نهایت را به شکلی دیگر تبدیل کنیم تا محاسبات ما راحت تر شود. اولین روش این است که به سادگی این جمع را کوتاه کرده و در جایی آن را قطع کنیم. اما این روش مشکلاتی دارد. مشکل اول این است که جمع مورد نظر ما تنها تحت شرایط خاصی همگراست و این یعنی مقدار آن به این موضوع بستگی دارد که جمع را تا کجا ادامه دهیم. پس ابتدا باید مرتبه مورد نظر برای همگرایی جمع را پیدا کنیم و سپس آن را با توجه به این مرتبه کوتاه کنیم. مشکل دوم این است که حتی اگر مرتبه مورد نظر برای این کار را پیدا کنیم، ممکن است این همگرایی بسیار آرام رخ دهد به طوری که به علت زمان زیادی که می طلبد، محاسبه را از نظر عددی غیر ممکن سازد. برای رفع هر دوی این مشکلات، به سراغ تکنیک جمع بندی اوالد می رویم. ایده اصلی این است که برهم کنش های گرانشی را به دو قسمت تقسیم کنیم: برهم کنش های کوتاه برد و بلند برد. در این صورت به جای یک جمع، دو جمع بی نهایت خواهیم داشت. با انجام این کار، جمع مربوط به برهم کنش های کوتاه برد قطعا در فواصل زیاد و به سرعت بعد از مدت زمان کوتاهی متوقف خواهد شد و هم گرا خواهد بود، در این صورت دیگر با دو مشکل حالت پیشین رو به رو نخواهیم شد. در این صورت رفتار بد همگرایی تنها در فواصل بلند برد رخ خواهد داد. اما خوشبختانه به علت خاصیت تناوبی مسیری که ذره در آن وجود دارد، می توانیم به فضای فوریه برویم و در این حالت که فواصل بلند برد را بررسی می کنیم، نبود فواصل کوتاه برد به این معنی است که اجزای فوریه ای با k بزرگ می توانند نادیده گرفته شوند. همزمان، تناوبی بودن فضای واقعی به این معنی

است که باید یک کوچک ترین مقدار غیر صفری برای k وجود داشته باشد. بنابراین با انتقال جمع بلند برد به فضای فوریه، خواهیم توانست که به هدف مورد نظر خود یعنی همگرایی با سرعت مناسب برسیم.

به این منظور ابتدا تابع گرین را به صورت جمع تابع های گرین کوتاه برد و بلند برد می نویسیم و خواهیم داشت $G_{\nabla^2} = G_l + G_s$. بنابراین می توانیم معادله (49) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\phi(r) = 4\pi G \sum_{j=1}^N m_j \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} G_s(r_j + nL - r) + \frac{1}{L^3} \sum_{k \in \{2\pi/Lh \mid h \in \mathbb{Z}^3\}} \tilde{G}_l(k) e^{ik(r_j - r)} \right] \quad (51)$$

اولین جواب هایی که برای معادله فوق توسط اوالد پیشنهاد شد، به صورت زیر بود:

$$G_s = -\frac{1}{4\pi|r|} \operatorname{erfc}\left(\frac{|r|}{2r_s}\right) \quad (52)$$

$$G_l = -\frac{1}{4\pi|r|} \operatorname{erf}\left(\frac{|r|}{2r_s}\right) \quad (53)$$

که تابع erfc یا همان تابع خطای تعارفی به صورت $\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x)$ تعریف می شود و r_s مقیاس طول مورد نظر برای جدایی نیروهای کوتاه برد و بلند برد می باشد. برای به دست آوردن \tilde{G}_l از G_l تبدیل فوریه منظم شده (*regularized Fourier transform*) می گیریم و پس از انجام محاسبات لازم به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$\tilde{G}_l(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dr G_l(r) e^{-\epsilon|r|} e^{-ikr} = -\frac{1}{k^2} e^{-k^2 r_s^2} \quad (54)$$

با جایگذاری روابط (54) و (52) در رابطه (51) به رابطه نهایی زیر برای پتانسیل خواهیم رسید:

$$\phi(r) = -G \sum_{j=1}^N m_j \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{\operatorname{erfc}((r_j + nL - r)/2r_s)}{|(r_j + nL - r)|} + \frac{4\pi}{L^3} \sum_{k \in \{2\pi/Lh \mid h \in \mathbb{Z}^3\}} \frac{\exp(-k^2 r_s^2)}{k^2} \cos(k[r_j - r]) \right] \quad (55)$$

همانطور که از رابطه فوق مشخص است، به علت وجود ترم $1/k^2$ ، این رابطه در $k = 0$ خوش رفتار نخواهد بود. اما لازم به ذکر است که این کمیت مستقل از r می باشد و به همین علت اگرچه $1/k^2$ نامتناهی می شود، از نظر فیزیکی این موضوع برای ما بی اهمیت است زیرا تنها یک تغییر فضایی یکنواخت در پتانسیل را به ما نشان می دهد. به هر حال، شاید این تصور وجود داشته باشد که این رابطه معتبر نخواهد بود زیرا ما

انتظار وجود یک پتانسیل خوش رفتار به عنوان جواب معادله پواسون را داریم. برای حل این موضوع می توانیم روی پتانسیل ویژه تمرکز کنیم که دقیقا همان پتانسیلی است که از معادله پواسون به دست می آوریم و به راحتی $k = 0$ را کنار می گذاریم. پس از این پس وقتی صحبت از ϕ می کنیم منظورمان همان پتانسیل ویژه است که البته چون سیستم ما تنها به همین پتانسیل حساس است، از این پس آن را همان پتانسیل در نظر خواهیم گرفت. حال با داشتن پتانسیل، می توانیم نیروی گرانشی را محاسبه کنیم:

$$F_i = Gm_i \sum_{j=1, j \neq i} m_j \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{(r_j + nL - r_i)}{|r_j + nL - r_i|^3} \left[\operatorname{erfc}((r_j + nL - r_i)/2r_s) + \frac{|r_j + nL - r_i|}{\sqrt{\pi}r_s} \exp\left(-|r_j + nL - r_i|^2/4r_s^2\right) \right] + \frac{4\pi}{L^3} \sum_{k \in \{2\pi/Lh | h \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}\}} k \frac{\exp(-k^2 r_s^2)}{k^2} \sin(k[r_j - r_i]) \right\}$$

در رابطه فوق، هر دو ترم تابع خطای تعارفی و تابع گوسی به سرعت با افزایش n و k افت می کنند. بنابراین به راحتی می توانیم این دو جمع بی نهایت را با جمع جزیی تقریب بزنیم که در آن n و k فقط مقادیری را بر می گزیند که در فواصل مناسب نسبت به مبدا آنها باشند. این فواصل بستگی به نرخ همگرایی این دو جمع دارد که توسط r_s کنترل می شود. بنابراین، اگرچه عبارت کلی رابطه (56) مستقل از r_s می باشد اما هر کدام از جمع ها به طور مجزا به r_s وابستگی دارند. کاهش دادن r_s بازه نیروهای کوتاه برد را کاهش می دهد و متعاقبا بازه نیروهای بلند برد را افزایش می دهد. در این صورت، مقادیر کمتری از n برای تقریب مجموع مورد نیاز خواهد بود. هزینه این کار این است که اجزای نیروی کوتاه بردی که اکنون کم شده اند باید توسط جمع مربوط به نیروهای بلند برد تامین شوند. در نتیجه با انتخاب مقادیر مناسب برای ماکزیمم مقادیر $|k|$ و $|n|$ و r_s می توانیم دقت محاسبات و میزان همگرایی این جمع ها را کنترل کنیم.

در شکل زیر، یک نیروی تناوبی و یک نیروی غیر تناوبی رسم شده اند. برای فواصل جدایی کوچک، این دو نیرو تقریبا برابر هستند، هرچند که نیروی تناوبی کمی کوچک تر است.

پیاده سازی عددی:

در قسمت قبل، عبارتی را برای نیروی گرانشی تناوبی به دست آوردیم. پیش از آن که بتوانیم از این عبارت در کدهای مربوطه استفاده کنیم، با چندین مانع رو به رو هستیم. اول آن که رابطه (56) یک پارامتر آزاد r_s دارد که باید مقیدار آن معین شود. به یاد داریم که مقدار این پارامتر مقیاس جدایی نیروهای کوتاه برد و بلند برد و متعاقبا نرخ همگرایی جمع های بی نهایت را اندازه گیری می کرد. در سال 1990، مقادیر زیر (57) پیشنهاد شدند که درواقع همان مقادیری هستند که ما در شبیه سازی concept از آن ها استفاده می کنیم:

$$r_s = L/4, \quad |r_j + nL - r_i| < 3.6L, \quad h^2 < 10$$

لازم به ذکر است که قطع کردن مقادیر n و h که مد نظرممان بود همانطور که از روابط فوق مشخص است به طول هر کدام از این پارامترها بر میگردد. این به "جمع کروی" مربوط می شود که در واقع بر خلاف "جمع مکعبی" می باشد. زیرا کاری که در مورد دوم می کنیم این است که اندازه هر یک از مولفه های n و h را محدود می کنیم و با روش مورد استفاده ما در اینجا تفاوت دارد.

اگرچه مقادیر به کار رفته در (57) جمع های رابطه (56) را محدود می کند و مقدار مشخصی از هر یک از ترم ها را شامل می شود، اما همچنان نسبت به محاسبه نیروی غیر تناوبی برای ما بسیار پرهزینه است. از آن جایی که نیروی وارد بر ذره i از طرف ذره j و تمام کپی های آن با $r_j - r_i$ به آرامی تغییر می کند، می توان قبل از اجرای شبیه سازی، آن را جدول بندی کرد. بنابراین هنگام اجرای شبیه سازی، می توان نیروی تناوبی بین هر جفت ذره را از این جدول نگاه کرد. چون که در رابطه (56) ثابت نیوتن و همچنین جرم ها خارج از جمع ها هستند، می توانیم آن ها را هنگام جدول بندی کردن، کنار گذاریم و به جدول بندی خود عمومیت بیشتری ببخشیم. اما این کار، برای اندازه جعبه یعنی L صادق نیست. زیرا اولین براکت در رابطه (56) یکای $1/L^2$ دارد و می توانیم آن را بر حسب $1/L^2$ بنویسیم، بنابراین در جمع های مورد نظر ما دخیل است. اگر نیروی تناوبی را بر همین اساس جدول بندی کنیم، از همین جدول می توانیم برای هر اندازه جعبه ای استفاده کنیم و هزینه آن تنها این است که براکت اول را در L^2 ضرب نماییم. سپس به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} & \frac{L^2}{Gm_j m_i} F_{cor}(\zeta_{ij}) \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^3 \\ |\zeta_{ij} + n| < 3.6}} \frac{\zeta_{ij} + n}{|\zeta_{ij} + n|^3} \left[\operatorname{erfc}(2|\zeta_{ij} + n|) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} |\zeta_{ij} + n| e^{-4|\zeta_{ij} + n|} \right] \\ &+ 4\pi \sum_{k \in \{2\pi h | h \in \mathbb{Z}^3, h \neq 0, |h| < 10\}} \frac{k}{k^2} \exp\left(-\frac{k^2}{16}\right) \sin(k\zeta_{ij}) - \frac{\zeta_{ij}}{|\zeta_{ij}|^3} \end{aligned} \quad (58)$$

که در رابطه بالا :

$$\zeta_{ij} = \frac{r_j - r_i}{L}$$

همچنین r_i و r_j در رابطه فوق باید موقعیت در جعبه ی $n = 0$ باشند. نیروی بدون بعد حاصل از ذرات واقعی، $\zeta_{ij}/|\zeta_{ij}|^3$ ، از سمت راست رابطه (58) کم شده است. این کار، تصحیح نیروی تناوبی را به جای نیروی تناوبی کل به ما می دهد. این که نیروی تناوبی کل را، یعنی نیروی ناشی از هم

ذرات واقعی و هم کپی آن ها جدول بندی کنیم و خواهیم دید که احتمالا مجبور باشیم این کار را به صورت دستی انجام دهیم.

قبل از جدول بندی کردن رابطه (58)، بهتر است به تقارن های موجود در مسئله نگاه کنیم تا بتوان این کار را به صورت بهینه تری انجام داد. هر جزء از ζ_{ij} می تواند عددی از -1 تا 1 باشد. اما به هر حال، اندازه نیرو فقط به فاصله میان دو ذره بستگی دارد و $|\zeta_{ij}|$ برای 1 یا -1 تفاوتی ندارد. بنابراین فقط لازم است اصلاح نیروی تناوبی را برای ζ_{ij} با مولفه ی 0 یا 1 جدول بندی کنیم. کار دیگری که در حفظ حافظه به ما کمک می کند و عملیات را بهینه تر می کند این است که فاصله بین نزدیک ترین تصویر به ذره j و ذره i نمی تواند مولفه ای بزرگ تر از $L/2$ داشته باشد. مثلا برای یک تصویر با فاصله $3/5 L$ در جهت x ، می توانیم بگوییم یک همسایه با فاصله $2/5 L - L = -3/5 L$ وجود خواهد داشت که همانطور که می بینیم کوچک تر از $L/2$ است. بنابراین می توانیم با جستجوی نیرو بر روی نزدیک ترین تصویر، باز هم از هزینه ی محاسبات خود بکاهیم. تقارن های موجود در مسئله را می توان به صورت زیر نوشت که در آن، \circ نشانه ضرب درایه ای می باشد:

$$F(\zeta_{ij}) = \mathcal{S} \circ F(\mathcal{S} \circ \zeta_{ij}), \quad \mathcal{S} = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

$$F(\zeta_{ij}) = F(\zeta_{ij} + n), \quad n \in \mathbb{Z}^3$$

نیروی تناوبی کل با رابطه زیر به نیروی تناوبی اصلاحی مربوط خواهد شد:

$$F(\zeta_{ij}) = \frac{G m_i m_j}{L^2} \frac{\zeta_{ij}}{|\zeta_{ij}|^3} + F_{cor}(\zeta_{ij}) \quad (59)$$

آنچه که باقی مانده است تا درباره آن صحبت شود، روش دقیق انجام جست و جو ها و یافتن مقادیر موردنظر از جدول است. ساده ترین راه ممکن برای یافتن مقدار F_{cor} این است که نزدیک ترین مقدار آن را به مقادیر واقعی، با توجه به مقادیر جدول بندی شده بر اساس ζ_{ij} پیدا کنیم. اما روش های دقیق تری نیز ابداع شده اند که با توجه به درون یابی چندین مقدار در جدول، می توانیم مقدار مورد نظر خود را پیدا کنیم. در این مورد هم *CONCEPT* از *GADGET-2* پیروی می کند از درون یابی *CIC* استفاده می کند که آن را در بخش های بعد توضیح خواهیم داد.

نرم سازی:

در قسمت قبل، قانون جهانی گرانش نیوتن را شرایط مرزی تناوبی سه گانه به دست آوردیم و توضیح دادیم که چگونه می توان آن را به صورت عددی اجرا کرد. هم چنین، ذرات را به صورت به صورت نقاط بی نهایت کوچک در نظر گرفتیم تا برهم کنش های میان آن ها را تا حد امکان ساده کنیم. مدل کردن چگالی یک تک ذره با تابع دلتا به این معنی است که برهم کنش گرانشی میان ذرات نا مقید است که در فاصله های کوچک خود به خود قوی می شود و این برای ما نا مطلوب است. زیرا از آن جایی که تحول زمانی سیستم هم گسسته است، این امر ممکن است که دو ذره ناگهان به هم خیلی نزدیک شوند و این سبب به وجود آمدن یک شتاب بزرگ شود.

حتی اگر فرض کنیم می توانیم از مراحل زمانی کوچک دلخواه استفاده کنیم، این موضوع که تمام جرم ذره در یک نقطه جمع شده باشد برای ما مطلوب نیست. زیرا سکون میان دو ذره را افزایش می دهد و باعث شکل گیری تعداد زیادی از سیستم های دو دویی می شود. همچنین این موضوع می تواند منجر به برخورد های شدید میان دو ذره شود. اگر ذرات شبیه سازی ما واقعاً ذرات فیزیکی و منفرد (مثلاً ستارگان) را باشند، این رفتار مطلوب است. اما ذرات ما نتیجه گسسته شدن عددی یک چگالی پیوسته در سراسر جهان هستند. یک مجموعه مونت کارلو از فضای فاز، ما می خواهیم ذرات موردنظرمان یک رفتار جمعی از یک توزیع جرمی پیوسته را به ما نشان دهند و نه رفتار N ذره منفرد را. افزایش N و هل دادن آن به سمت مقیاس های پایین تر می تواند در جلوگیری از کم نمونه برداری کردن (*under-sampling*) از توزیع جرمی موثر باشد. اما قطعاً برای ما بهینه تر خواهد بود که بتوانیم به کیفیت مورد نظرمان بدون افزایش N برسیم. بنابراین کاری که در اینجا می توانیم از آن بهره بگیریم، نرم کردن برهم کنش ها برای پیشگیری از برخورد های نزدیک غیر فیزیکی است. این کار می تواند با تغییر مدلی چگالی در نظر گرفته شده برای تک-ذره انجام پذیر باشد. وقتی که مدل چگالی به صورت تابع دلتا باشد، تکینگی های آن می توانند در پتانسیل و نیز در نیرو پخش شوند و باعث به وجود آمدن اثرات غیر فیزیکی نا مطلوب شوند. پس باید سعی کنیم به جای آن، یک توزیع چگالی جدید برای یک تک ذره ابداع کنیم. از قضیه پوسته می دانیم که هر توزیع جرم محدود و متقارن کروی، همان میدان گرانشی خارجی یک جرم نقطه ای را دارد. بنابراین ما آزادی زیادی در انتخاب شکل دقیق چگالی تک ذره داریم. یک انتخاب محبوب، توزیع چگالی کره پلامر (*Plummer sphere*) می باشد که در اصل برای توصیف توزیع چگالی خوشه های ستاره ای ابداع شد:

$$\rho_P(|r|) \equiv \frac{3m}{4\pi\epsilon^3} \left(1 + \frac{|r|^2}{\epsilon^2}\right)^{-5/2} \quad (60)$$

در رابطه فوق، m جرم ذره، و ϵ پارامتری با طول واحد برای اندازه گیری سایز هر ذره است. هم چنین واضح است که چگالی کره پلامر در جهت شعاعی به طور یکنواخت کاهش می یابد و چگالی

مرکزی معادل است با چگالی متوسط یک کره با جرم m و شعاع ϵ . پتانسیل تولید شده از یک توزیع چگالی به شکل کره پلامر، مطابق معادله پوآسون به شرح زیر است:

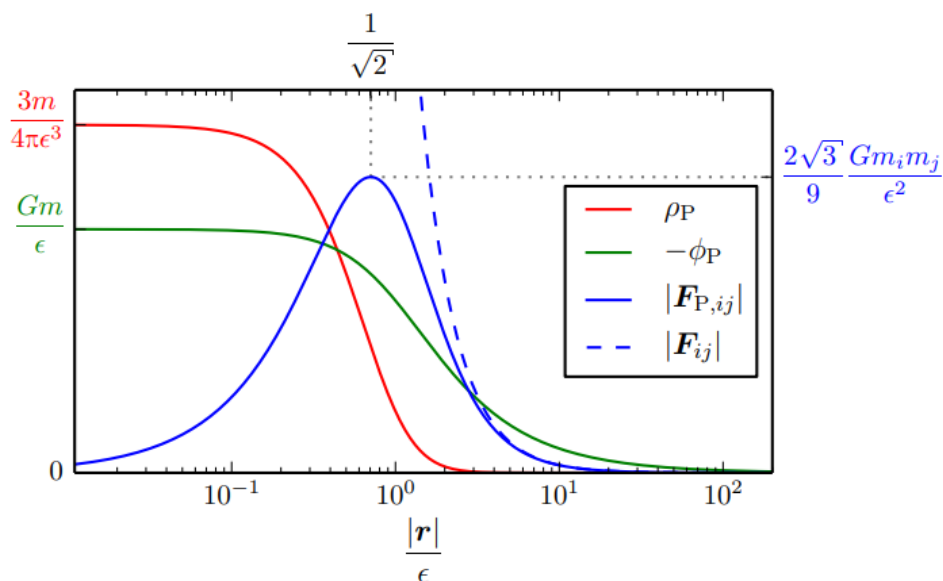
$$\phi_P(|r|) = -\frac{Gm}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}$$

از رابطه (60) مشخص است که وجود ترم ϵ تکینگی در نقطه $r = 0$ را برای ما از بین خواهد برد. نیروی گرانشی روی کره پلامر i به خاطر ذره نقطه ای j که به اندازه $r = r_j - r_i$ از هم فاصله دارند برابر است با گرادیان رابطه فوق :

$$F_{P,ij}(r) = Gm_i m_j \frac{r}{(\epsilon^2 + r^2)^{3/2}} \quad (62)$$

رابطه (62) به خوبی نیروی گرانشی حاصل از این توزیع چگالی را توصیف می کند البته تا جایی که دو جرم مورد نظر ما هم پوشانی قابل ملاحظه ای نداشته باشند. در شبیه سازی CONCEPT و همچنین سایر شبیه سازی های N-body، از همین روش برای نرم کردن بر هم کنش های گرانشی استفاده می شود و رابطه فوق به خوبی عمل می کند. البته لازم به ذکر است که در این برهم کنش ها واقعا فقط یک ذره را می توانیم با این چگالی توصیف کنیم و ذرات دیگر را باید به صورت نقطه ای در نظر بگیریم. اما از آنجایی که هدف اصلی ما مدل کردن بر هم کنش میان آن ها بود و نه مدل سازی خود ذرات، این مسئله مشکلی ایجاد نمی کند. روابط (60) تا (62) یعنی به ترتیب چگالی پلامر، پتانسیل پلامر، و نیروی گرانشی پلامر، در شکل 2 کشیده شده اند. همانطور که می بینیم، چگالی و پتانسیل، نمودار نسبتا تختی حول مبدا دارند که تفسیر آن یک نیروی خیلی کوچک در آن ناحیه است. به جای افزایش نیرو در حول مبدأ می بینیم که در $|r| = \epsilon/\sqrt{2}$ بیشترین اندازه را دارد. همچنین نیروی نرم نشده بین دو ذره یعنی F_{ij} نیز در شکل نشان داده شده است. می بینیم که نیروی نرم شده در همه جا کم تر از نیروی نرم نشده است اما در $|r|$ بزرگ تر از دو برابر ϵ با هم یکسان می شوند. اکنون می توانیم اصلاحات مربوط به نیروی نرم شده ی پلامر را در رابطه (59) وارد کنیم و به عبارت نهایی برای نیروی تناوبی کل برسیم:

$$\begin{aligned} F(\varsigma_{ij}) &= \frac{G m_i m_j}{L^2} \frac{\varsigma_{ij}}{(\varsigma_{ij}^2 + \epsilon^2/L^2)^{3/2}} + F_{cor}(\varsigma_{ij}) \\ &= F_{cor}(\varsigma_{ij}) - Gm_i m_j \frac{r_j - r_i}{(\epsilon^2 + |r_j + r_i|^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (63)$$



شکل 2. چگالی پلامر (60)، پتانسیل پلامر (61) و نیروی گرانشی پلامر (62) و نیروی نرم نشده بین ذرات. پتانسیل برای تطابق بهتر با شکل، منفی شده است. از آنجایی که چگالی، پتانسیل و نیرو دارای واحدهای متفاوتی هستند، نمی توانند در یک محور مشترک باشند. بنابراین به آنها محورهای مختصات جداگانه داده شده است که با 0 مشترک است و عبارت نوشته شده در کنار محور، حداکثر مقادیر تعریف شده مربوط به آنها می باشد. بنابراین نباید به مقیاس نسبی بین این سه اهمیت داد. با این حال، دو نیروی مورد نظر در یک مقیاس نشان داده شده اند.

نیروهای گرانشی در مقیاس کم تر از دو برابر ϵ ، با اعمال نرم کردن بسیار تغییر کرده اند. بنابراین تمام برهم کنش های موجود در این مقیاس باید نادیده گرفته شوند. زیرا حاصل یک گرانش مناسب نیستند و بیش از حد مطلوب تغییر یافته اند. بنابراین اعمال نرم کردن در شبیه سازی، محدودیتی هم برای ما دارد که آن معرفی کوچک ترین مقیاس فاصله ای است که ما باید به آن اعتماد کنیم. با توجه به این موضوع، ϵ های کوچک مورد علاقه ما خواهند بود اما نه آنقدر کوچک که اثرات نرم کردن روی نیروها ناپدید شود. معیاری برای ما مناسب خواهد بود که حجم کسری از جهان که با ذرات اشغال شده است بدون توجه به N و L ثابت بماند، یعنی $N\epsilon^3/L^3$ تغییری نکند. با در نظر گرفتن این معیار، مقدار بهینه برای ϵ در بازه زیر قرار دارد:

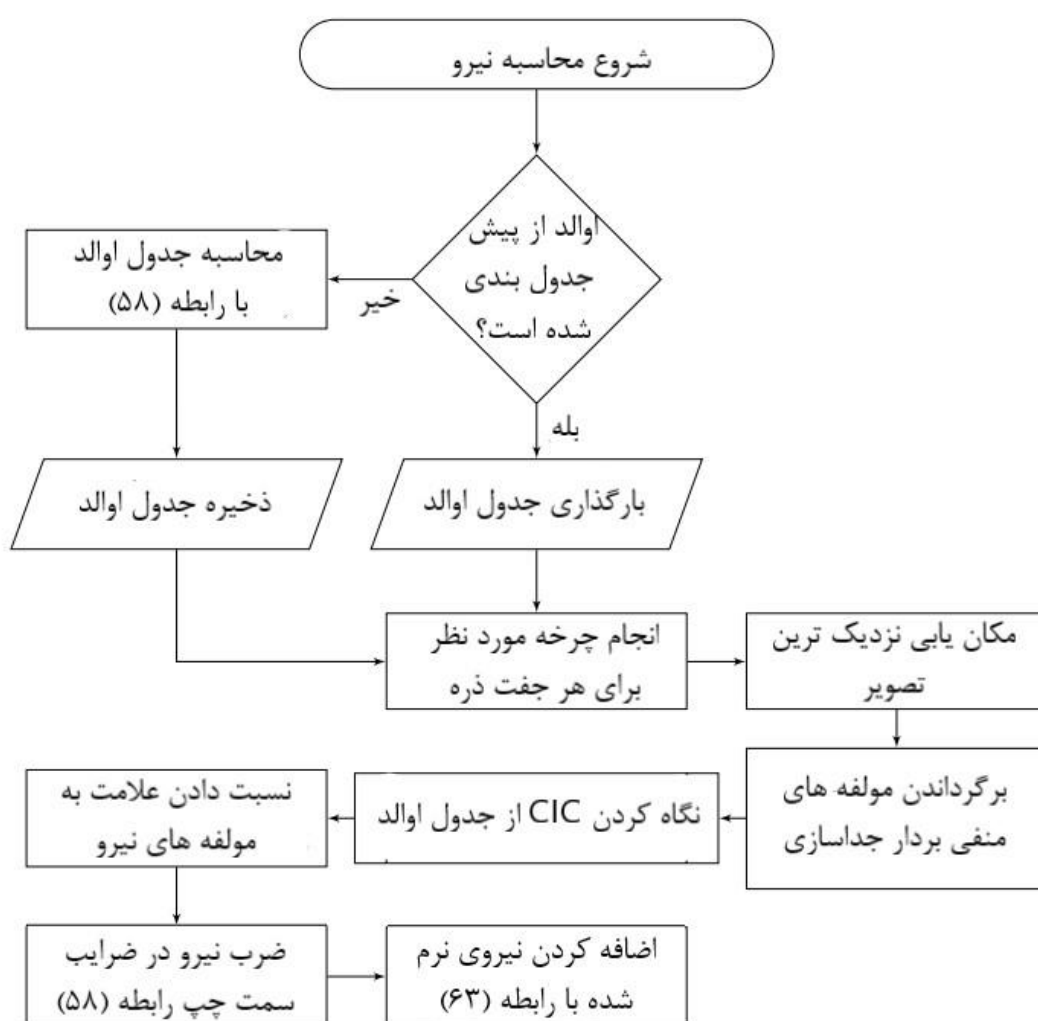
$$\epsilon \approx (2 - 4)\% \frac{L}{N^{1/3}}$$

در شبیه سازی *CONCEPT* ما از مقدار $\epsilon = 0.03 L/N^{1/3}$ استفاده خواهیم کرد هرچند که این مقدار با توجه به مسئله مورد نظر ما می تواند در فایل پارامترها تغییر کند.

خلاصه روش:

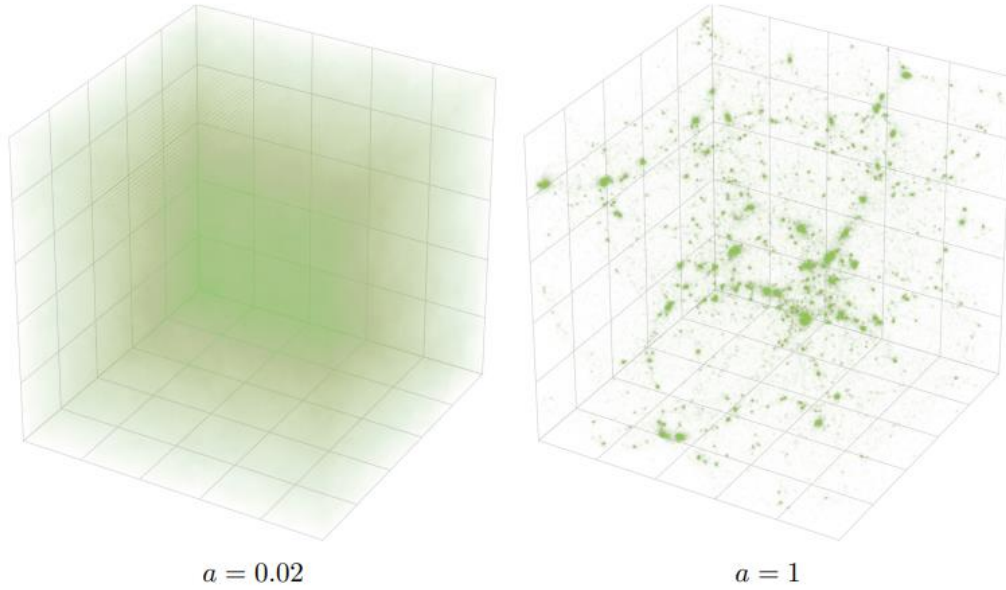
حال، اجزای مورد نیاز برای ساده‌ترین الگوریتم گرانشی مورد استفاده در شبیه‌سازی‌های کیهانی N -body را ساخته‌ایم. این الگوریتم جمع‌بندی اولیه کد (1) است که با اصلاحات تناوبی نیرو از طریق روش اوالد، همراه با نرم‌سازی پلامر گسترش یافته است. این مجموعه همان چیزی است که تحت عنوان روش P - P یا همان روش ذره-ذره شناخته می‌شود. در این قسمت سعی داریم تمام مراحل پیشین را جمع‌بندی کنیم و نتایج را اعلام کنیم.

شکل 3 فلوچارت این الگوریتم را به طور خلاصه در چندین بخش نشان می‌دهد که در ادامه هر کدام را توضیح می‌دهیم:



شکل 3. فلوچارت مربوط به الگوریتم روش P - P

- قبل از انجام چرخه شبیه سازی بر روی تمام جفت ذرات، جدول اوالد مورد نیاز است. اگر که از پیش این جدول آماده شده باشد، تنها لازم است آن را از روی دیسک بارگذاری کنیم و دیگر نیازی نیست که آن را قبل از هر اجرا دوباره محاسبه کنیم. اما اگر هیچ جدولی از قبل موجود نبود، لا استفاده از رابطه (58) آن را محاسبه می کنیم و در دیسک ذخیره می کنیم.
 - سپس، چرخه بر روی جفت ذره ها شروع به اعمال شدن می کند. در اینجا در نظر گرفته ایم که هر شامل ذره i و ذره j می شود. در هر تکرار واحد، هر دو نیروی F_{ij} و $F_{ji} = -F_{ij}$ محاسبه می شوند.
 - تصویر ذره j در نزدیک ترین فاصله نسبت به ذره i قرار دارد. این تصویر به جای خود ذره j (البته ممکن است که ذره واقعی، خود نزدیکترین تصویر باشد) در ادامه استفاده شده است. این به معنای بهره برداری از تقارن های موجود در مسئله است.
 - اگر بردار جدایی از ذره i تا تصویر ذره j مولفه های منفی داشته باشد، باز هم می توان با استفاده از تقارن هایی که به آن اشاره کردیم، این مولفه ها را چرخاند و البته علامت اولیه هر کدام از این مولفه ها برای بعدا ذخیره خواهد شد. اکنون میتوان گفت بردار جدایی، در ناحیه جدول بندی شده قرار دارد.
 - اکنون نیروی اصلاحی اوالد بین جفت ذرات باید از جدول چک شود و به روش CIC درون یابی شود تا کاملاً با بردار جدایی مطابقت داشته باشد. (همانطور که گفته شد CIC را در بخش های بعدی شرح خواهیم داد).
 - علائمی که قبلاً از مولفه های بردار جداسازی حذف شده بودند، اکنون باید روی مولفه های نیرو قرار گیرند، زیرا منفی سازی برای هر بعد به صورت خطی انجام می شود.
 - ضریب $Gm_i m_j / L^2$ در نیروی هنوز بدون بعد به دست آمده ضرب می شود که صورت آن از قانون جهانی گرانش نیوتن و مخرج آن از اصلاحات اوالد آمده است.
 - در نهایت، نیروی نرم شده از نزدیک ترین تصویر ذره j مانند رابطه (63) محاسبه می شود و به نیروی تناوبی اصلاحی اضافه می شود. اکنون، کل نیروی تناوبی F_{ij} بین ذرات i و j محاسبه شده است.
- این تمامی مراحل بود که در روش P-P مورد نیاز است. اگر تحول زمانی را نیز به این روش اضافه کنیم، یک کد کامل شبیه سازی N-body خواهیم داشت. سپس با در اختیار داشتن یک سری شرایط اولیه، سیستم ذره می تواند در طول زمان تکامل یابد. شکل 4 دو نمودار از ذرات را یکی در زمان های اولیه و یکی در اکنون شامل می شود. کد concept با استفاده از روش P-P به کار گرفته شده اند تا تکامل ذرات را در طول زمان بررسی کنیم.



شکل 4. نمودار های موقعیت ذرات در زمان های مختلف با کد CONCEPT و با استفاده از روش P-P

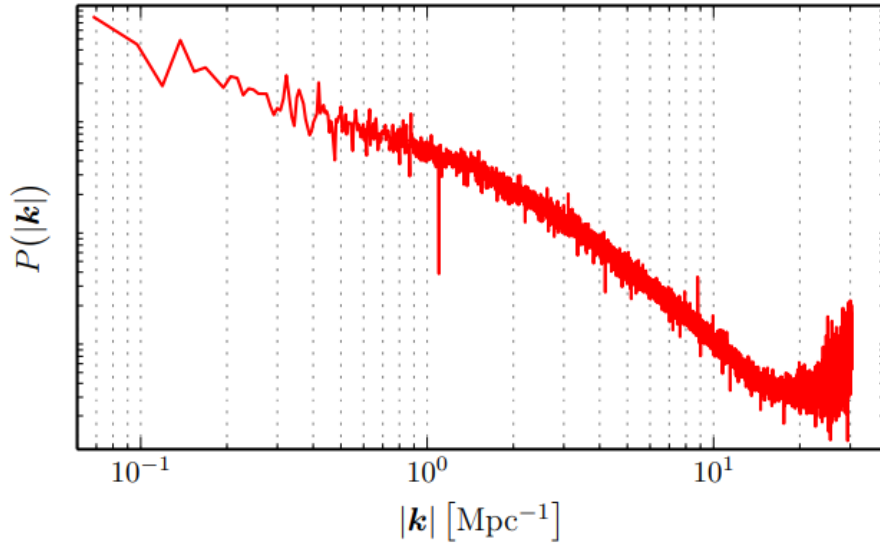
نمودار فوق، در عمل تشکیل ساختار ها را به ما نشان می دهد. شکل سمت چپ در $a = 0.02$ به شرایط اولیه شبیه سازی برمی گردد و همانطور که می بینیم، ذرات به صورت همگن در کیهان پخش شده اند و هیچ ساختاری مشاهده نمی شود. همان ذرات، 14 بیلیون سال بعد یعنی در $a = 1$ نشان داده شده اند و ساختارهای متعددی را در شبیه سازی مشاهده می کنیم. این شبیه سازی $N = 64^3$ ذره را در کد CONCEPT به ما نمایش می دهد که با روش P-P اجرا شده است. پارامتر های استفاده شده به این صورت هستند :

$$L = 64 \text{ Mpc}/h, \quad h = H_0/100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

همچنین کیهان شناسی مورد استفاده در شبیه سازی به این شکل می باشد:

$$\Omega_M = 0.7, \quad \Omega_m = 0.3, \quad H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

تجزیه و تحلیل بیشتر می تواند پیکربندی ذرات را به سایر داده های حتی قابل معنی تر تجزیه کند. که یکی از این موارد، طیف توان ماده است که در رابطه (38) آن را بیان کردیم. در اینجا، طیف توان ذرات شکل 4 در شکل 5 نشان داده شده است. چگالی نقاط به شدت با $|k|$ افزایش می یابد. زیرا یک فاصله جدایی کوچک (k بزرگ) به روش های بسیار بیشتری نسبت به فاصله های جدایی بزرگ درون جعبه قرار می گیرد. همانطور که ما انتظار داریم، می بینیم که ساختار با کاهش مقیاس بیشتر و بیشتر می شود. با این حال در $|k|$ بسیار بالا، به نظر می رسد که طیف توان افزایش یافته است. لازم به ذکر است که این نقص توسط روش P-P ایجاد نشده است بلکه این قسمت نتیجه روشی است که خود طیف توان محاسبه شده است.



شکل 5. طیف توان به دست آمده از شبیه سازی $P-P$ شکل 4 در زمان $a = 1$

2. روش $P-M$:

یکی از نقص های روش $P-P$ که در قسمت قبل به آن پرداختیم، زمانی است که جعبه ای با $N \geq 2$ ذره داریم. محاسبه نیروی گرانشی روی تمام ذرات در یک مرحله زمانی با روش $P-P$ نیاز به $\mathcal{O}(N^2)$ عملیات دارد. زیرا هر ذره $N - 1 \approx N$ جفت دیگر دارد. این نتیجه اجتناب ناپذیر طبیعت بلند برد گرانش همراه با فرمالیسم قانون گرانش جهانی نیوتن است، جایی که گرانش به عنوان یک ذره-ذره تعاملی توصیف می شود. چیزی که ما نیاز داریم یک روش عددی برای محاسبه گرانش است، به طوری که مقیاس بهتری از $\mathcal{O}(N^2)$ در روش پیشین داشته باشد. روش $P-M$ اسکالی از مرتبه $\mathcal{O}(N \log N)$ دراد که پیشرفت قابل توجهی نسبت به اسکال پیشین است. و به همین علت، برای شبیه سازی هایی با N های بزرگ، بسیار سریع تر از روش $P-P$ هم عمل می کند. علت اصلی این امر است که در این روش، به جای برهم کنش مستقیم ذره با ذره دیگر، ذرات با یک میدان گرانشی جهانی برهم کنش می کنند. بنابراین ما قانون گرانش جهانی نیوتن را به عنوان معادله اصلی گرانش خود، جایگزین معادله پواسون می کنیم. از نظر عددی، N ذره در ایجاد میدان شرکت می کنند، پس از آن هر ذره با یک برهمکنش ذره-میدان نیروی گرانشی دریافت می کند. بنابراین از یک توصیف جهانی به یک توصیف محلی برای گرانش حرکت کرده ایم. از نظر عددی، میدان گرانشی پیوسته با یک شبکه مجزا اما متراکم از مقادیر نشان داده می شود. سپس این برهمکنش ذره-مش است که نام روش $P-M$ از آن گرفته شده است. از آنجایی که اطلاعات ذخیره شده روی مش از توزیع ذرات محاسبه می شود، در واقع هیچ اطلاعات اضافی به جز خود ذرات ندارد. این بدان معناست که روش $P-M$ به حافظه کامپیوتری بیشتری نسبت به آنچه که برای محاسبه نیروهای گرانشی نیاز است نیاز دارد، در حالی که روشی مانند $P-P$ تقریباً به هیچ حافظه ای علاوه بر خود ذرات نیاز ندارد.

این ویژگی قربانی کردن حافظه (فضا) به منظور دستیابی به کارایی بیشتر (کاهش زمان محاسبات) یک الگوی رایج در محاسبات است.

مقدمه:

جواب معادله پواسون یعنی رابطه (47) می تواند بر حسب تابع گرین لاپلاسیون نوشته شود:

$$\phi(r) = 4\pi G G_{\nabla^2}(r) * \rho(r) \quad (64)$$

مانند روش $P-P$ ، راه های متعددی برای به کارگیری روش $P-M$ در شبیه سازی ها وجود دارد. سریع ترین روش از لحاظ محاسباتی، محاسبه کردن پتانسیل گرانشی در فضای فوریه می باشد. بنابراین رابطه (64) در فضای فوریه به شکل زیر خواهد بود:

$$\tilde{\phi}(k) = 4\pi G \tilde{G}_{\nabla^2}(k) \tilde{\rho}(k) \quad (65)$$

با توجه به رابطه (46)، تابع گرین را در عبارت بالا جایگذاری می کنیم و سپس تبدیل فوریه منظم شده (regularized Fourier transform) را به کار می بندیم:

$$\tilde{G}_{\nabla^2}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dr G_{\nabla^2}(r) e^{-\epsilon|r|} e^{-ikr} = -\frac{1}{k^2} \quad (66)$$

از آن جایی که این نتیجه نمی تواند بر $k = 0$ اعمال شود، تعریف می کنیم $0 \equiv \tilde{G}_{\nabla^2}(0)$. بنابراین اگر بخواهیم دقیق صحبت کنیم، پتانسیل به دست آمده از رابطه (65) همان پتانسیل ویژه می باشد. با ادغام روابط (65) و (66) می توان به پتانسیل در فضای فوریه رسید:

$$\tilde{\phi}(k) = -\frac{4\pi G}{k^2} \tilde{\rho}(k) \quad (67)$$

در روش $P-M$ ، معادله فوق می تواند معادله اصلی گرانش منسوب شود. زیرا شامل میدان های $\tilde{\phi}(k)$ و $\tilde{\rho}(k)$ می شود. از آنجایی که شبیه سازی معمولا در فضای واقعی انجام می شود، میدان های $\phi(k)$ و $\rho(k)$ هم نقش بسیار مهمی ایفا می کنند. این چهار میدان به صورت عددی، با مش های منظم و مکعبی از مقادیر نشان داده می شوند که در جعبه قرار می گیرند. به طور کلی روش $P-M$ را می توان در مراحل زیر توصیف کرد:

- نسبت دادن جرم ذرات به شبکه (مش) ρ
- تبدیل $\rho \xrightarrow{FFT} \tilde{\rho}$
- محاسبه $\tilde{\phi}$ از روی $\tilde{\rho}$ با استفاده از رابطه (67)
- تبدیل $\tilde{\phi} \xrightarrow{FFT^{-1}} \phi$

- محاسبه نیروها با استفاده از ϕ
- درون یابی کردن نیروهای تحت شبکه به موقعیت ذرات

در گام اول، میدان چگالی از توزیع ذرات ساخته شده است. از لحاظ فیزیکی هیچ تفاوتی میان این دو وجود ندارد زیرا ذرات همان چیزهایی هستند که در نهایت به میدان چگالی ختم می شوند. تفاوت تنها از لحاظ عددی پدیدار می شود ناشی از این موضوع که چنین میدانی از دو روش مجزا می تواند پیاده سازی شود. روش اول این است که جرم گسسته شود، که به تعداد محدودی از ذرات آزاد شناور با جرم ثابت منجر می شود که مقادیر میدان را نمونه برداری می کنند. این معمولاً همان چیز است که در شبیه سازی های N -body انجام می شود. روش دیگر این است که فضا به نقاط محدودی مجزا شود اما به جرم این امکان را دهیم که در هر نقطه پیوسته باشد. این دو روش به ترتیب تحت عنوان روش های لاگرانژی و اوپلری شناخته می شوند. اولین گام در فهرست بالا، چنین تغییری را نشان می دهد و ما را از روش لاگرانژی به اوپلری می برد.

مراحل 2 تا 4 معادله پواسون را برای ما حل می کنند. تمامی این چهار میدان اسکالر هستند و تنها به این علت استفاده می شوند که میدان مورد نیاز بعدی را بسازند. این به این معنی است که ما می توانیم یک مش واحد را پیاده سازی کنیم که مقادیر آن به نوبه خود با مقادیر هر یک از میدان های دیگر مطابقت دارد. بیشتر تلاش ما در روش قبل، صرف اجرای تناوب و نرم سازی شد. اما در روش $P-M$ ، ما این موارد را بدون هیچ تلاشی در اختیار داریم. به کار بستن تبدیل فوریه به تنهایی فرض متناوب بودن را در خود دارد. به این معنی که $\tilde{\rho}$ تبدیل فوریه میدان چگالی است که با تکرار بی نهایت جعبه در همه جهات ساخته شده است. همچنین مشکل سکون دو جرم در روش $P-P$ اصلاً در روش $P-M$ وجود نخواهد داشت زیرا در این روش جرم های منفرد نخواهیم داشت. نیازی به نرم کردن نیرو هم نخواهد بود. همچنین کوچکترین مقیاس فاصله به طور طبیعی به این دلیل رخ می دهد که مش ها حاوی نقاط بسیار زیادی هستند. کوچکترین فاصله معنی دار، جدایی بین نقاط مش مجاور است. ساختار توزیع ذرات زیر این مقیاس طبیعتاً نادیده گرفته می شود. این مقیاس معمولاً بسیار بزرگتر از طول نرم شدن ϵ متناظر از روش $P-P$ است و از نظر وضوح نسبت به روش $P-M$ برتری دارد.

در مرحله پنجم و آخر، نیروها از پتانسیل استخراج می شوند که سپس می توانند به N ذره اعمال شوند. نیروها توسط گرادیان منفی پتانسیل داده می شوند. همانطور که لاپلاسن با ضرب شدن در $-k^2$ به فضای فوریه می رود، گرادیان با ضرب شدن در ik به این فضا می رود. با ضرب کردن $\tilde{\phi}$ در ik قبل از رفتن به فضای واقعی، نیروها به طور مستقیم استنتاج می شوند بدون این که نیازی به محاسبه ϕ باشد. بنابراین این روش می تواند حتی دقیق تر عمل کند.

در واقعیت، اجرای عددی روش $P-M$ پیچیده تر از طرح ارائه شده بالاست. اما قبل از پرداختن کامل به این پیچیدگی ها، در بخش بعدی به فرمالیسم و تکنیک های مربوط به مش های عددی خواهیم پرداخت.

عملکرد مش (شبکه):

ما اندازه هر ضلع مش را با N_m نشان می دهیم. بنابراین هر مش شامل N_m^3 نقطه درونی می شود. (زیرا هر مش به شکل یک مکعب است). سپس، هر نقطه مشخص درون مش با $(x_m, y_m, z_m) \in \mathbb{N}^3$ لیبل گذاری می شود که در آن $0 \leq x_m, y_m, z_m \leq N_m - 1$ می باشد. معمولاً، میدان مورد نظر ما یک میدان فیزیکی در فضای حقیقی می باشد. بنابراین تصور می کنیم که مش در یک جعبه باشد و هر نقطه از آن یک موقعیت مشخص و ثابت در فضا داشته باشد. نقطه p از مش را با مختصات $(x_p, y_p, z_p) \equiv r_p = H_p$ نشان می دهیم که H نشان دهنده فاصله جدایی بین نقاط مجاور می باشد. پس کوچک ترین حجم مکعبی که با نقاط مجاور هم در مش پوشانده شده باشد، حجمی به اندازه H^3 خواهد داشت که آن را تحت عنوان سلول می شناسیم. نکته لازم به ذکر این است که مش هایی که درون جعبه را پوشانده اند، باید به صورت کروی ساخته شوند. زیرا از آن جایی که جعبه را با مرزهای متناوب انتخاب کردیم، فقط در این صورت می توانند با تناوبی بودن جعبه هم خوانی داشته باشند. برای این که به این خاصیت تناوبی بودن دست یابیم، شبه نقاطی را با مختصات $x_m = N_m$ ، $y_m = N_m$ ، $z_m = N_m$ به مش اضافه می کنیم و درواقع یک لایه از این شبه نقاط در سه وجهی که در راستای x_m, y_m, z_m هستند اضافه می کنیم و مش را بزرگ تر می کنیم.

یک مش معمولاً برای این امر استفاده می شود که یک میدان پیوسته را نشان دهد. هرگاه به واژه "مش" اشاره می کنیم، منظورمان یک آرایه مکعبی از اعداد می باشد. در این قسمت سعی داریم عمل هایی که بر روی مش ها در روش $P-M$ انجام می شود را بررسی کنیم که شامل روش های درون یابی و تفاضل محدود می شود. سپس وجه های مخالف این مش را مشخص می کنیم که به عنوان مثال، به این صورت نمایش داده می شوند: $r_p = H(p \bmod N_m)$. از آنجایی که لایه ای از شبه نقاط در بیرونی ترین لایه ی مش اضافه شده اند، تعداد نقاط مش اولیه تغییری نمی کند زیرا همانطور که نقاطی اضافه کرده ایم، حجم مش هم به اندازه همان نقاط بیشتر شده است. پس این نقاط جای مخصوص خود را دارند و در بیرون از مش اولیه با N_m^3 نقطه واقع هستند. بنابراین، اگرچه تعداد نقاط تغییری نکرده است، اما اندازه هر سلول دچار تغییر می شود زیرا اکنون یک لایه اضافی هم باید درون جعبه قرار بگیرد. پس به ترتیب برای مش تناوبی (کروی) و غیر تناوبی (مکعبی) می توان نوشت :

$$H = \frac{L}{N_m} \quad (\text{تناوبی})$$

$$H = \frac{L}{N_m - 1} \quad (\text{غیر تناوبی})$$

درون یابی:

اکنون که با هندسه مش ها آشنا شدیم، می توانیم به درون یابی بپردازیم. معمولاً درون یابی به معنای نسبت دادن یک مقدار مشخص به یک میدان در نقطه ای با فاصله r ، بر اساس مقادیر مشخصی در نزدیکی نقاطی به فاصله r_p می باشد. در این درون یابی که در اینجا انجام خواهیم داد، ما به نوعی از معکوس این فرآیند استفاده می کنیم. یعنی مقادیر مشخص در فاصله r را بین نقاط شبکه مجاور آن که در فاصله r_p هستند توزیع می کنیم. و در نهایت مش ρ را با استفاده از مقادیر به دست آمده برای تمام نقاط، به دست می آوریم.

برای انجام این درون یابی، ابتدا شکل ذرات را تابع $S_i(r)$ نشان می دهیم. فرض می کنیم تمام نقاط i شکلی یکسان به صورت S داشته باشند اما هر S_i در حول مرکز مختص خودش، در فاصله r_i واقع شده باشد یعنی در حول محلی که ذره i واقع است. بنابراین می توانیم هر $S_i(r)$ را به صورت زیر نشان دهیم:

$$S_i(r) = S(r - r_i) \quad (68)$$

که در آن $S(r)$ یک تابعی است که حول مبدا متمرکز شده است. یک انتخاب برای S می تواند چگالی پلامر (رابطه 60) با $m = 1$ باشد. سپس کمیت مهم دیگری تعریف می کنیم. نسبت جرمی که ذره i در نقطه مش p ایجاد کرده است را به صورت یک کسر می نویسیم که آن کسر نشان می دهد تابع $S_i(r)$ که شکل هر ذره را مشخص می کرد، با سلولی به مرکز r_p چقدر هم پوشانی دارد. این کسر را با $w_{p,i}$ نشان می دهیم.

$$w_{p,i} = w_p(r)|_{r=r_i} \quad (69)$$

که با توجه به رابطه (68) آن را به صورت زیر هم می توان نوشت :

$$w_p(r) = w(r - r_p) \quad (70)$$

سپس با استفاده از سه رابطه فوق، هم پوشانی $S_i(r)$ و حجم سلول را می توان از این طریق به دست آورد:

$$w_{p,i} = \int_{z'_p - \frac{H}{2}}^{z'_p + \frac{H}{2}} \int_{y'_p - \frac{H}{2}}^{y'_p + \frac{H}{2}} \int_{x'_p - \frac{H}{2}}^{x'_p + \frac{H}{2}} S_i(r') dx' dy' dz' =$$

$$= \int_{z'_p - \frac{H}{2}}^{z'_p + \frac{H}{2}} \int_{y'_p - \frac{H}{2}}^{y'_p + \frac{H}{2}} \int_{x'_p - \frac{H}{2}}^{x'_p + \frac{H}{2}} S_i(r' - r_i) dx' dy' dz' \quad (71)$$

در اینجا نیاز داریم با تابع *top-hat* آشنا شویم که به صورت زیر است :

$$\Pi(x/b) \equiv \begin{cases} 1 & |x| < b/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال تابع *top-hat* برای آن که محاسبات مربوط به رابطه (71) را آسان تر کنیم، به صورت زیر به کار می رود:

$$\Pi(r) \equiv \begin{cases} 1 & |x|, |y|, |z| < 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

بنابراین رابطه 71 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$w_{p,i} = \int \Pi\left(\frac{r' - r_p}{H}\right) S(r' - r_i) dr' \quad (72)$$

حال برای آن که $w_p(r)$ را به دست آوریم، کافیت زیروند i را حذف کنیم و به جای آن r را به کار گیریم:

$$w_p(r) = \int \Pi\left(\frac{r' - r_p}{H}\right) S(r' - r) dr' \Rightarrow$$

$$w(r) = \int \Pi\left(\frac{r' - r_p}{H}\right) S(r' - r + r_p) dr'$$

همچنین، با یک تغییر متغیر $r' \rightarrow r' - r_p$ می توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$w(r) = \int \Pi\left(\frac{r}{H}\right) * S(r) \quad (73)$$

بنابراین می توان گفت که $S_A(r)$ به صورت زیر به دست می آید :

$$S_A(r) = H^{-3A} \prod_{a=1}^A \Pi\left(\frac{r}{H}\right) \quad (74)$$

که در آن اپراتور Π نشان دهنده A حلقه تکرار شونده بر روی تابع سمت راست است. حلقه خالی، $A = 0$ ، به صورت تابع دلتا تعریف می شود. سلسله مراتب پارامتر A می تواند تا بی نهایت افزایش یابد اما آنچه که در کدهای عددی برای ما حائز اهمیت است، تنها سه مرتبه پایین A می باشد. با صرف نظر کردن از ضریب H^{-3A} و با توجه به روابط (73) و (74) می توان

گفت که وقتی $S_A(r)$ تا مرتبه A رفته باشد، مرتبه $w(r)$ تا $A-1$ پیش رفته است و به همین ترتیب مرتبه $A+1$ متناظر است با مرتبه A تابع $w(r)$:

$$\begin{aligned} S_{A+1}(r) &= H^{-3} w_A(r) \Rightarrow \\ w_{A+1}(r) &= H^{-3} \Pi\left(\frac{r}{H}\right) * w_A(r) \end{aligned} \quad (75)$$

مرتبه صفرم تابع S همان تابع ذلتاست پس می توان نتیجه گرفت که $w_{p,i}$ برای نزدیک ترین نقاط مش به ذره که تقریباً در همان جای ذره قرار گرفته اند برابر 1 و برای سایر نقاط صفر است. در این حالت که $A=0$ است، نام روش ما روش NGP (Nearest grid point) می شود:

$$\begin{aligned} w_{NGP}(r) &= w_0(r) = \Pi\left(\frac{r}{H}\right) * \delta(r) = \Pi\left(\frac{r}{H}\right) \\ &= \begin{cases} 1 & |x|, |y|, |z| < H/2 \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{aligned} \quad (76)$$

در مرتبه اول یعنی مرتبه $A=1$ ، روش مورد نظر را تحت عنوان روش CIC (Cloud in cell) می شناسیم. در این حالت تشکل تابع $w_A(r)$ به شکل یک تابع $top-hat$ نرمالایز شده در می آید که به این معنی است که ذره مورد نظر به صورت یک مکعب یکنواخت با اندازه یک سلول نمایش داده می شود:

$$\begin{aligned} w_{CIC}(r) &= w_1(r) = H^{-3} \Pi\left(\frac{r}{H}\right) * \Pi\left(\frac{r}{H}\right) \\ &= \begin{cases} \prod_{w \in \{x,y,z\}} \left(1 - \frac{|w|}{H}\right) & |x|, |y|, |z| < H \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{aligned} \quad (77)$$

بنابراین با توجه به رابطه (77) می توان نتیجه گرفت که $w_{CIC}(r)$ باید یک تابع خطی و زوج از تمام مختصات ها باشد، با توجه به این که $w_{CIC}(0) = 1$ و $w_{CIC}(x, y, z) = 0$ اگر یک کدام از $|x|, |y|, |z| < H$ باشند. لازم به ذکر است که $concept$ تنها از روش CIC برای درون یابی استفاده می کند. آخرین روش محبوب درون یابی، روشی می باشد که در آن $A=2$ و آن را به عنوان روش TSC (Triangle shaped cloud) می شناسیم. با استفاده از روابط (75) و (77) داریم :

$$w_{TSC}(r) = w_2(r) = H^{-3} \Pi\left(\frac{r}{H}\right) * w_{CIC}(r) \quad (78)$$

$$= \begin{cases} \prod_{w \in \{x,y,z\}} \left(\frac{3}{4} - \frac{w^2}{H^2} \right) & |x|, |y|, |z| < H/2 \\ \prod_{w \in \{x,y,z\}} \left(\frac{3}{2} - \frac{|w|}{H} \right)^2 & H/2 < |x|, |y|, |z| < 3H/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

برای اجرای عددی در روش $P-M$ ، ما به تبدیل فوریه تابع $w(r)$ نیاز داریم که به معنای تبدیل فوریه تابع $top-hat$ می باشد:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(k) &= \int \Pi(r) e^{-ikr} dr \\ &= \prod_{w \in \{x,y,z\}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-ik_w w} dw \\ &= \prod_{w \in \{x,y,z\}} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(k_w w) dw \\ &= \prod_{w \in \{x,y,z\}} \text{sinc}\left(\frac{k_w}{2}\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{r}{H}\right)\right](k) = H^3 \prod_{w \in \{x,y,z\}} \text{sinc}\left(\frac{Hk_w}{2}\right)$$

که در عبارت بالا \mathcal{F} نشان دهنده تبدیل فوریه است. همچنین $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. با توجه به روابط (73) و (74) می توان به رابطه زیر برای تبدیل فوریه تابع $w(r)$ رسید :

$$\tilde{w}_A(k) = H^3 \prod_{w \in \{x,y,z\}} \text{sinc}^{A+1}\left(\frac{Hk_w}{2}\right) \quad (79)$$

با توجه به اهمیت سه مرتبه اول A یعنی مراتب صفر تا دو، می توان از رابطه (79) روابط زیر را استخراج کرد که در مرتبه $A=0$ مربوط به $\tilde{w}_{NGP}(k)$ ، مرتبه $A=1$ مربوط به $\tilde{w}_{CIC}(k)$ ، و مرتبه $A=3$ مربوط به $\tilde{w}_{TSC}(k)$ می شود:

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{\text{NGP}}(k) &= H^3 \text{sinc} \left(\frac{Hk_x}{2} \right) \text{sinc} \left(\frac{Hk_y}{2} \right) \text{sinc} \left(\frac{Hk_z}{2} \right) \\
\tilde{W}_{\text{CIC}}(k) &= H^3 \text{sinc}^2 \left(\frac{Hk_x}{2} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{Hk_y}{2} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{Hk_z}{2} \right) \\
\tilde{W}_{\text{TSC}}(k) &= H^3 \text{sinc}^3 \left(\frac{Hk_x}{2} \right) \text{sinc}^3 \left(\frac{Hk_y}{2} \right) \text{sinc}^3 \left(\frac{Hk_z}{2} \right)
\end{aligned} \tag{80}$$

تفاضل محدود:

با توجه به تعریف مشتق داریم :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(x+H) - f(x)}{H} \\
\Rightarrow \hat{D}_f f_m(x_p) &= \frac{f_m(x_p + H) - f_m(x_p)}{H}
\end{aligned} \tag{81}$$

در رابطه فوق، f یک تابع پیوسته از X می باشد، اما f_m یک تابع گسسته است که تنها در نقاط x_p تعریف شده است. و همانطور که می دانیم H فاصله جدایی بین نقاط مش می باشد. رابطه (81) به خوبی تبدیل مشتق پیوسته را به مشتق گسسته (یا اصطلاحاً همان تفاضل محدود) نشان می دهد. اما در اینجا نیاز به یک تقریب داریم : $\hat{D}_f f_m(x_p) \approx df(x)/dx|_{x=x_p}$ رابطه (81) را تحت عنوان تفاضل مستقیم می شناسیم و این یعنی ما بازه x_p تا $x_p + H$ را در حد رابطه فوق در نظر میگیریم. برعکس این عمل تفاضل معکوس نام دارد که بازه $x_p - H$ تا x_p را شامل می شود. می توان از این دو یک تفاضل مرکزی ساخت هر دوی این بازه ها یعنی از $x_p - H$ تا $x_p + H$ را شامل می شود که به صورت زیر می باشد:

$$\hat{D}_2 f_m(x_p) = \frac{f_m(x_p + H) - f_m(x_p - H)}{2H} \tag{82}$$

اگر که میدان نمونه برداری شده هموار باشد، مقادیر نزدیک تر به میدان دیفرانسیل گیری شده نه تنها با جمع کردن اطلاعات از دو نقطه همسایه، بلکه از طریف ناحیه بزرگ تری به دست می آیند. برای این کار می توانیم با استفاده از بسط تیلور، تفاضل محدودی از مرتبه بالا تر بسازیم. به عنوان مثال، برای ساختن روش چهار-نقطه (Four-point method) که نقاط $x_p \pm H = x_{p \pm 1}$ و $x_p \pm 2H = x_{p \pm 2}$ را شامل می شود، از بسط تیلور f حول x_p تا مرتبه چهارم استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned}
f(x_{p\pm 1}) &\approx f(x_p) \pm H \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_p} + \frac{H^2}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_p} \\
&\quad \pm \frac{H^3}{6} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_p} + \frac{H^4}{24} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \Big|_{x=x_p} \\
f(x_{p\pm 2}) &\approx f(x_p) \pm 2H \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_p} + 2H^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_p} \\
&\quad \pm \frac{4H^3}{3} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_p} + \frac{2H^4}{3} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \Big|_{x=x_p}
\end{aligned} \tag{83}$$

همانطور که می بینیم، ترم های زوج بدون در نظر گرفتن این که مربوط به تفاضل مستقیم هستند یا تفاضل معکوس، مثبت هستند. بنابراین می توانیم با عملیات تفریق زیر، ترم های زوج را حذف کنیم :

$$\begin{aligned}
f(x_p + 1) - f(x_p - 1) &\approx 2H \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_p} + \frac{H^3}{3} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_p} \\
f(x_p + 2) - f(x_p - 2) &\approx 4H \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_p} + \frac{8H^3}{3} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_p}
\end{aligned}$$

اکنون می توانیم مشتق مرتبه سوم f را نیز با انجام عملیاتی اینچنینی (تنها کمی پیچیده تر) حذف کنیم و در نهایت مشتق مرتبه اول f را به صورت عبارت زیر به دست آوریم:

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_p} &\approx \frac{f(x_{p-2}) - 8f(x_{p-1}) + 8f(x_{p+1}) - f(x_{p+2})}{12H} \\
&= \frac{f_m(x_{p-2}) - 8f_m(x_{p-1}) + 8f_m(x_{p+1}) - f_m(x_{p+2})}{12H} \\
&\equiv \hat{D}_4 f_m(x_p).
\end{aligned} \tag{84}$$

در کد *CONCEPT* مانند کد *GADGET-2* ، در صورت استفاده از روش $P-M$ از تفاضل محدود مرتبه چهارم یعنی رابطه (84) استفاده می شود که نحوه استخراج آن را شرح دادیم. از آنجایی که مش استفاده شده در کدها سه بعدی می باشد، عملگر تفاضل محدود یعنی \hat{D} را نیز باید در سه بعد اعمال کنیم که به صورت زیر می شود:

$$\hat{D} f_m(r) = (\hat{D}^x f_m(r), \hat{D}^y f_m(r), \hat{D}^z f_m(r)) \tag{85}$$

اندیس ها متغیری را نشان می دهند که باید نسبت به آن تفاضل محدود را اعمال کنیم. به طور کلی در مرتبه های بالاتر، تفاضل مرکزی با رابطه زیر داده می شود که روش استخراج آن خارج از این بحث است. A مرتبه تفاضل محدود مورد نظر ماست.

$$\hat{D}_A f_m(x_p) = \frac{1}{H} \sum_{\substack{j=-A/2 \\ j \neq 0}}^{A/2} \frac{d}{d\xi} \prod_{\substack{i=-A/2 \\ i \neq j}}^{A/2} \frac{\xi - i}{j - i} \bigg|_{\xi=0} f_m(x_{p+j}) \quad (86)$$

محاسبه نیرو:

مدل استاندارد نمایش ذرات، با استفاده از مدل لاگرانژی می باشد که در آن هر ذره در نقطه مشخصی قرار گرفته است. بنابراین می توانیم مجموعه ای از جرم ها و موقعیت های ذرات به صورت $\{m_i, r_i\}$ داشته باشیم که میدان چگالی زیر با آن ها ساخته می شود:

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(r - r_i)$$

با توجه به این که در رابطه فوق دلتای دیراک دخیل است و می دانیم جواب آن در $r = r_i$ برابر یک می باشد، پس در این نقطه $\rho = Nm_i$. و از آنجایی که هر ذره فضای بسیار بسیار کوچکی را اشغال کرده است، می توان گفت N عددی است که به بی نهایت میل می کند و در نتیجه ρ نیز در $r = r_i$ به بی نهایت میل می کند. در توصیف اوپلری، فضا گسسته شده است. به این معنی که مقدار چگالی در هر نقطه مش باید مقداری محدود باشد. درواقع، چگالی در هر نقطه مش برابر است با جرم محصور شده در سلول تقسیم بر حجم سلول. جرم محصور شده بستگی به شکل ذره دارد. و هم چنین نسبت جرم ذره i محصور شده در حجم سلول با تابع $w_{p,i}$ داده میشود. بنابر این در توصیف اوپلری چگالی معین هر مش با رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \rho_m(r_p) &= \sum_{i=1}^N w_{p,i} \frac{m_i}{H^3} = H^{-3} \sum_{i=1}^N w(r_i - r_p) m_i \\ &= H^{-3} \int w(r - r_p) \sum_{i=1}^N m_i \delta(r - r_i) dr \\ &= \frac{w(r_p) * \rho(r_p)}{H^3} \end{aligned} \quad (87)$$

در نتیجه رابطه فوق در فضای فوریه به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\rho}_m(k) = \frac{\tilde{w}(k)\tilde{\rho}(k)}{H^3} \quad (88)$$

در اینجا برای به دست آوردن تبدیل فوریه توابع بالا نمی توانیم از شکل انتگرالی تبدیل فوریه استفاده نماییم زیرا برای استفاده از این نوع تبدیل میدان مورد نظر ما باید پیوسته باشد. بلکه چون ρ_m تنها در نقاط خاص r_p تعریف شده است، باید تبدیل فوریه را به صورت سری استفاده کنیم. برای حل این مشکل باید به ρ_m اجازه دهیم در هر موقعیت بتواند مقداری به خود بگیرد و این امر تنها در مقادیر خاصی اتفاق نیفتد. برای این کار از $\text{Dirac comb}(\mathbb{W})$ استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(\zeta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \delta(\zeta - n) \Rightarrow \\ \mathbb{W}\left(\frac{r}{H}\right) &= H^3 \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \delta(r - Hn) \\ &= H^3 \sum_p \delta(r - r_p) \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از رابطه فوق، می توان چگالی $\rho_m(r)$ را به صورت زیر نوشت تا بتوان تبدیل فوریه را روی آن اعمال کرد:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{W}}(r) &= \rho_m(r)\mathbb{W}(r/H) \Rightarrow \\ H^3 \rho_m(r_p) &= \int_{z_p - \frac{H}{2}}^{z_p + \frac{H}{2}} \int_{y_p - \frac{H}{2}}^{y_p + \frac{H}{2}} \int_{x_p - \frac{H}{2}}^{x_p + \frac{H}{2}} \rho_{\mathbb{W}}(r) dx dy dz \end{aligned}$$

ممکن است این فکر به وجود بیاید که برای انجام محاسبات مش و حل معادله پواسون، بهتر است از $\rho_{\mathbb{W}}(r)$ که در واقع لاگرانژی $\rho(r)$ است به جای $\rho_m(r)$ استفاده شود. در صورتی که می بینیم که در فضای فوریه این دو تفاوتی ندارند :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\mathbb{W}}(k) &= \int \rho_{\mathbb{W}}(r) e^{-ikr} dr \\ &= H^3 \int \sum_p \rho_m(r) e^{-ikr} \delta(r - r_p) dr \\ &= H^3 \sum_p \rho_m(r_p) e^{-ikr_p} \end{aligned}$$

$$= \tilde{\rho}_m(k) \quad (89)$$

حال تبدیل فوریه را بر روی چگالی معین مش ها اعمال می کنیم:

$$\tilde{\rho}_m(k_p) = FFT(\rho_m(r_p)) \quad (90)$$

که در رابطه فوق، k_p نشان دهنده نقاط مش در فضای فوریه است و با رابطه $k_p = (2\pi/L)p$ داده می شود. لازم به ذکر است که $\tilde{\rho}_m(k_p)$ نتیجه ی چگالی درون یابی شده می باشد. برای یافتن مقادیر اصلی چگالی می توان از رابطه (88) استفاده نمود :

$$\tilde{\rho}(k_p) = \frac{H^3}{\tilde{w}(k_p)} FFT(\rho_m(r_p)) \quad (91)$$

مرحله بعدی حل معادله پواسون در فضای فوریه می باشد:

$$\tilde{\phi}(k_p) = -\frac{4\pi G}{k^2} \tilde{\rho}(k_p) \quad (92)$$

حال با یک تبدیل فوریه معکوس (FFT^{-1}) می توانیم از فضای فوریه خارج شویم و به فضای اصلی برویم:

$$\phi(r_p) = FFT^{-1}(\tilde{\phi}(k_p)) \quad (93)$$

با داشتن مقادیر پتانسیل در نقاط مش، می توانیم از تفاضل محدود برای به دست آوردن نیرو در نقاط مش استفاده کنیم. اما از آنجایی که جرم نقاط مش لزوماً با جرم ذرات برابر نیست (زیرا ممکن است در بعضی مش ها بیشتر از یک ذره قرار گرفته باشد)، نیرو بر واحد جرم یا اصطلاحاً همان میدان گرانشی g را به دست خواهیم آورد:

$$g(r_p) = -\hat{D}\phi(r_p) \quad (94)$$

در کدهای مربوط به شبیه سازی *CONCEPT* از \hat{D}_4 یعنی اپراتور تفاضل محدود مرتبه چهارم استفاده می شود که دقت محاسبات تا حد ممکن زیاد باشد. حال با همان روشی که تابع $w(r)$ را در صفحه (32) به دست آوردیم، شتاب حاصل از هر نقطه مش را به دست می آوریم. همچنین مانند تابع چگالی که با استفاده *Dirac comb* آن را اصلاح کردیم، برای تابع g نیز همین کار را انجام می دهیم:

$$g_{\text{III}}(r) = g(r)\text{III}\left(\frac{r}{H}\right) \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
g(r_i) &= \sum_p w_{p,i} g(r_p) \\
&= \sum_p w(r_i - r_p) g(r_p) \\
&= \int w(r_i - r) \sum_p g(r) \delta(r - r_p) dr \\
&= H^{-3} \int W(r_i - r) g_{\square}(r) dr \\
&= \frac{W(r_i) * g_{\square}(r_i)}{H^3} \tag{96}
\end{aligned}$$

بنابراین نیروی گرانشی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$F_i = m_i g(r_i)$$

اجرای عددی:

1. جرم ذرات را به نقاط مش نسبت می دهیم و در نتیجه تابع چگالی $\rho_m(r)$ را به ما می دهد. تمام جرم نسبت داده شده به نقطه p با رابطه (87) توصیف می شود. با این حال محتمل تر است که جرم هر ذره را، به نقاط مش اطراف آن نسبت دهیم. به این ترتیب مجموعه ای از جرم ها و موقعیت ها خواهیم داشت که با رابطه زیر داده می شود:

$$\{m_i, r_i\} \rightarrow \Delta_i \rho_m(r_p) = w_{p,i} \frac{m_i}{H^3}$$

که در رابطه بالا $\Delta_i \rho_m(r_p)$ چگالی اضافه شده به $\rho_m(r_p)$ ناشی از ذره i می باشد. لازم به ذکر است که هر ذره در نقطه p می تواند $(A + 1)^3$ نقطه مش را بپوشاند. پس به عنوان مثال در روش CIC که $A=1$ بود، می توان گفت جرم ذره i در هشت نقطه مش به اشتراک گذاشته شده است. بنابر این:

$$p_{CIC} = ([\frac{x_i}{H}], [\frac{y_i}{H}], [\frac{z_i}{H}]) \tag{97}$$

که در عبارت فوق هر $[\zeta]$ به معنای اعمال تابع کف بر روی پارامتر مورد نظر و $[\zeta]$ به معنای اعمال تابع سقف بر روی پارامتر مورد نظر است. که در اینجا چون هر دو وجود دارند، هر کدام می توانند انتخاب شوند. بنابراین مقادیر تابع w_{CIC} به صورت زیر خواهد بود:

$$w_{p_{CIC},i} = \prod_{w \in \{x,y,z\}} \left| \frac{w_i}{H} - [\frac{x_i}{H}]_w \right| \tag{98}$$

مقادیری نیز با رابطه (97) به شبه نقاط p_{ps} نسبت می دهیم. کار این شبه نقاط همانطور که گفته شد این است که تناوبی بودن مش را برای ما برقرار می کنند.

2. تبدیل فوریه $\rho_m(r_p) \xrightarrow{FFT} \tilde{\rho}_m(l_p)$ را انجام می دهیم که $k_p = (2\pi/L)p$ و بنابراین، مقادیر چگالی حاصل از تبدیل فوریه را جایگزین مقادیر چگالی نقاط مش می کنیم.

3. برای حل معادله پواسون، باید مقادیر مش را به نقادیر پتانسیل تبدیل کنیم که این کار را با استفاده از رابطه (92) انجام می دهیم. اما یک تفاوتی که این بار دارد این است که همانطور که برای حل پیچیدگی های مسئله در رابطه (96) از تابع $w(r)$ استفاده کردیم، در اینجا هم این تابع را روی پتانسیل اثر می دهیم و در نهایت خواهیم داشت.

$$\tilde{\phi}'(k_p) = -\frac{4\pi G}{k_p^2} \frac{H^6}{\tilde{w}^2(k_p)} \tilde{\rho}(k_p) \quad (99)$$

که علامت پرایم در عبارت فوق به خوبی نشان می دهد که پتانسیل همان پتانسیل تحت تبدیل فوریه نیست و یک بار دیگر با تابع $w(r)$ تغییر کرده است. همچنین باید $\tilde{\phi}'(0) = 0$ باشد زیرا رابطه (99) در $k_p = 0$ به سمت بی نهایت می رود.

4. در این مرحله باید تبدیل $\tilde{\phi}'(k_p) \xrightarrow{FFT} \tilde{\phi}'(r_p)$ را انجام دهیم. اکنون باید به صورت دستی مقادیر را به شبه نقاط اختصاص دهیم، زیرا این مقادیر برای درونیایی پیش رو مورد نیاز است:

$$\tilde{\phi}'(r_{ps}) \rightarrow \tilde{\phi}'(r_{(ps \bmod N_m)})$$

عبارت فوق به این معناست که مقادیر این شبه نقاط دقیقاً کپی مقادیر نقاط واقعی متناظر آنهاست. مرحله بعد با استفاده از اپراتور تفاضل محدود یا همان \hat{D} می باشد که در روابط (85) و (86) توصیف شد. کاملاً واضح است که این اپراتور تنها می تواند مشتق را در نقاطی که $A/2$ نقاط همسایه را دارند تقریب بزند که A مرتبه دقت اپراتور می باشد. بنابراین برای اینکه \hat{D} کار کند، ما باید شبه نقاط اضافی را در اطراف کل مش بسازیم. به این نقاط شبه اضافی به عنوان نقاط شب (ghost points) گفته می شود. برای اینکه \hat{D} برای همه نقاط عادی و شبه نقطه های اصلی قابل اجرا باشد، باید مش را با لایه های $A/2$ از نقاط شب بیچانیم که هر شش وجه مش را بپوشاند. بنابراین نقاط شب را تنها در بازه های $-A/2 \leq w_m < 0$ و $N_m < w_m \leq N_m + A/2$ پیدا کرد. مقادیر این نقاط شب (p_g) باید کپی هایی از نقاط واقعی باشند تا متناوب بودن مش برقرار باشد:

$$\tilde{\phi}'(r_{pg}) \rightarrow \tilde{\phi}'(r_{(pg \bmod N_m)})$$

5. در این مرحله میدان گرانشی در نقاط مش را (به جز نقاط شب یا همان p_g) همانطور که در رابطه (94) گفته شد به دست می آوریم:

$$g'(r_p) = -\hat{D}\phi'(r_p)$$

یکی از گزینه های ممکن برای اپراتور تفاضل محدود، رابطه (84) یعنی اپراتور با دقت مرتبه چهار است. این عملگر از نقاط شبیح برای انجام تفاضل بیرونی ترین نقاط استفاده می کند و پس از آن که $g'(r_p)$ پیدا شد دیگر نیازی به p_g نخواهیم داشت. ما نمی توانیم خود مش را به میدان گرانشی g_0 تبدیل کنیم زیرا یک میدان برداری است. ما می توانیم g_0 را به صورت سه مش، معادل مش $3 \times N_m \times N_m \times N_m$ ایجاد کنیم، اما جای بسیاری در حافظه می گیرد. در عوض، ما فقط یک مش اضافی ایجاد می کنیم و هر بار یک جزء از g_0 را در آن محاسبه و ذخیره می کنیم.

6. در این مرحله، میدان گرانشی در نقاط مش را (از جمله شبه نقاط) به موقعیت ذرات، درون یابی می کنیم به روشی مشابه روشی که در مرحله 1، انجام دادیم.

$$\{g'(r_p)\} \rightarrow \Delta_p g_i = w_{p,i} g'(r_p)$$

$$g_i = \sum_p \Delta_p g_i$$

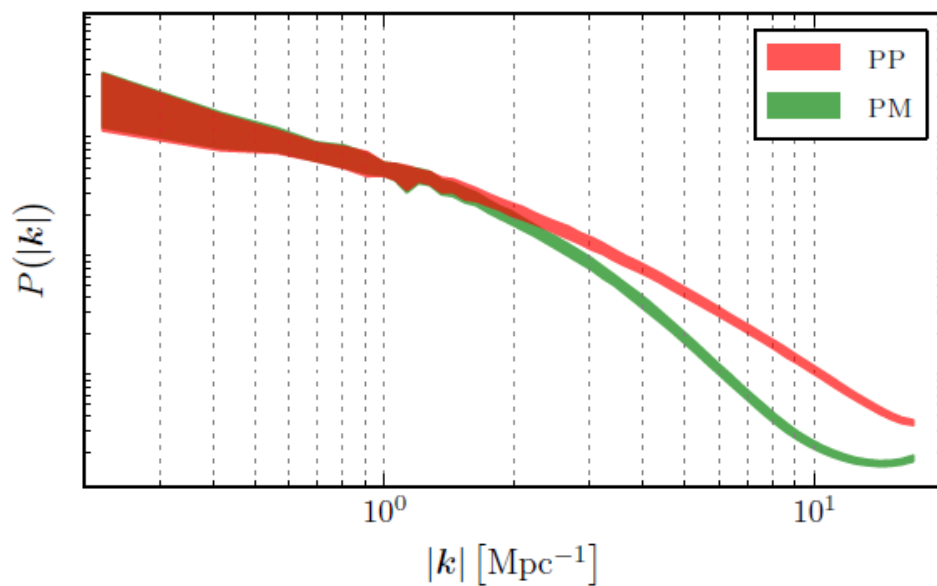
در رابطه فوق همانطور که مشخص است پرایم حذف می شود و در نتیجه شتاب واقعی در هر موقعیت ذره ایجاد می شود. برای درون یابی به روش CIC طبق رابطه (97) فقط هشت نقطه همسایه هستند که به شتاب یک ذره خاص کمک می کنند، و وزن ها را می توان به طور موثر با (98) محاسبه کرد. سپس نیرو ها با رابطه $F_i = m_i g(r_i)$ به دست خواهند آمد.

اکنون، ما می خواهیم نتایج یک شبیه سازی PM را با نتایج یک شبیه سازی PP مقایسه کنیم. مقایسه نتایج مستقیم حاصل از این شبیه سازی ها به طور مستقیم دشوار است. بهتر است طیف توان را که در رابطه (38) با آن آشنا شدیم در هر روش را محاسبه کرد و سپس آنها را با هم مقایسه کنیم. برای آن که $P(k_p)$ را محاسبه کنیم، همانطور که $\rho_m(r_p)$ را در مرحله اول ساختیم عمل می کنیم. ابتدا از آن تبدیل فوری می گیریم، سپس تابع $w(r)$ را بر آن تاثیر می دهیم و در نهایت با تقسیم آن بر $\tilde{w}(k)$ به رابطه زیر برای طیف توان خواهیم رسید:

$$P(k_p) = \left| \frac{H^3}{\tilde{w}(k_p)} FFT(\rho_m(r_p)) \right|^2$$

حال با مشخص شدن کامل طیف توان، روش PM را با روش PP مقایسه کنیم. این دو روش باید نتایج مشابهی داشته باشند، اگرچه انتظار داریم در مقیاس های کوچک متفاوت باشند. در مقیاس های کوچک روش PM نسبت به روش PP درست کار نمی کند. شکل (5) نیز چنین مقایسه ای را نشان می دهد، جایی که می بینیم که روش PM نسبت به روش PP ساختار بسیار کمی در مقیاس های کوچک تولید می کند. البته لازم به ذکر است که در مقیاس های بزرگ، آنها تقریباً مطابقت دارند. اگرچه روش PM سرعت بیشتری نسبت به روش PP برای ما فراهم می کند، اما این

که دقت آن در مقیاس های کوچک کاهش می یابد مسئله بسیار مهمیست که نمی توان از آن چشم پوشی کرد.



شکل 5. طیف توان حاصل از روش PP (خط قرمز رنگ) و روش PM (خط سبز رنگ) با شرایط اولیه یکسان. دیتایی که این طیف توان از آن استخراج شده است، همان دیتای مربوط به شکل (3) می باشد.