

# کارگاه نسبیت عام و محاسبات تانسوری در Mathematica

## تمرین‌های سری دوم

سجاد آقاپور\*

۱. ۴- بردار سرعت را با استفاده از رابطه زیر تعریف کنید و (با استفاده از متریک مینکوفسکی) نرم آن را محاسبه کنید.

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1)$$

توضیح: در رابطه بالا  $x^\mu = (t, x, y, z)$  مختصات فضا-زمانی ذره و  $\tau$  زمان-ویژه ذره (زمان در دستگاه ناظر همراه ذره) است که بنابر رابطه زیر ناورداست

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2)$$

بنابراین داریم

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad (3)$$

که در آن  $\gamma$  فاکتور لورنتس است.

۲. نشان دهید که تبدیلات لورنتس متریک مینکوفسکی را ناوردا نگه می‌دارند:

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta \quad (4) \quad \text{در نمایش ماتریسی}$$

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (5) \quad \text{در نمایش اندیسی}$$

---

\* پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM)، ایمیل: sajad.aghapour2020@gmail.com

۳. مقدار اسکالر ریمان روی یک رویه کروی را محاسبه کنید.

راهنمایی: با استفاده از بسته xCoba یک خمینه (manifold) دو-بعدی و متریک روی آن را تعریف کنید. یک دستگاه مختصات با مختصه‌های  $(\theta, \phi)$  روی آن تعریف کنید. مشابه محاسبات انجام شده در کلاس با استفاده از دستور MetricCompute اسکالر ریمان را در دستگاه مختصات تعریف شده محاسبه کنید.

۴. (امتیازی) با استفاده از نمایش مؤلفه‌های تانسور  $F^{\mu\nu}$  به صورت

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & Ex & Ey & Ez \\ -Ex & 0 & Bz & -By \\ -Ey & -Bz & 0 & Bx \\ -Ez & By & -Bx & 0 \end{pmatrix} \quad (۶)$$

مؤلفه‌های تانسور دوگان

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (۷)$$

را به دست آورید.

راهنمایی: تانسور کاملاً پادمتقارن لوی-چویتا  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  در xAct (همزمان با تعریف متریک) با نماد epsilon[metric name] تعریف می‌شود. برای مقدارگذاری آن در محاسبات یک عبارت در دستگاه مختصات باید قبل از ToBasis از دستور زیر به صورت rule استفاده کنید:

$$\text{expr} /. \text{epsilonToetaDown}[\text{metric}, \text{chart}] \quad (۸)$$

توجه: پاسخ تمرین‌ها را به صورت یک فایل متممیکای اجرا شده (شامل خروجی‌ها) در فرم زیر بارگذاری کنید. توضیحات لازم در مورد هر سؤال و مراحل حل به صورت متن در فایل وارد شوند.

[https://scischool.ir/courses/gr\\_in\\_mathematica/lessons/problemset۲/](https://scischool.ir/courses/gr_in_mathematica/lessons/problemset۲/)