Chapitre 1

Espace affine

Dans ce chapitre, $\vec{E}$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1.1 Définition

Définition (Espace affine). On appelle espace affine tout ensemble E muni de l'application $\Psi : \vec{E} \times E \to E$ définie par

$$\forall(\overrightarrow{u}, x) \in \vec{E} \times E,\ \Psi(\overrightarrow{u}, x) = \overrightarrow{u} + x$$

qui vérifie

1. $\forall x \in E,\ \Psi\left(0_{\vec{E}}, x\right) = x$ (identité)
2. $\forall(\vec{u}, \vec{v}, x) \in \vec{E}^2 \times E,\ \Psi\left(\vec{u}, \Psi\left(\vec{v}, x\right)\right) = \Psi\left(\Psi\left(\vec{u}, \vec{v}\right), x\right)$ (compatibilité)
3. $\forall(x, y) \in E^2,\ \exists \vec{u} \in \vec{E},\ \Psi\left(\vec{u}, x\right) = y$ (transitive)

Si tel est le cas, on dit que E est la direction de cet espace affine et on note $(\vec{E}, E)$ cet espace affine muni de E.

Les éléments de E sont appelés « point » et ceux de $\vec{E}$ sont appelés « vecteur ».

Complément. Les points 1 et 2 définisse $(\vec{E}, E)$ comme une action de groupe pour le groupe $(E, +, 0_{\vec{E}})$ où $0_{\vec{E}}$ désigne l'élément neutre de E pour la loi additive. Si le point 3 est, de surcroît, vérifié, on dit que cette action de groupe est transitive.

Notation. Afin d'entrer dans un concept plus géométrique, nous noterons par des lettres capitales, telles que A, B, C etc..., les éléments de E. Puis les éléments de $\vec{E}$ par la notation vectorielle de deux points : $\vec{u} = y - x \Rightarrow \vec{u} := \vec{xy}$.

Définition (dimension). On appelle dimension de l'espace affine $\vec{E}$ la dimension de E.

Définition (repère affine). On appelle repère affine de l'espace affine $\vec{E}$ le couple $(0_{\vec{E}}, \mathscr{B})$ où
— $0_{\vec{E}}$ l'élément neutre (origine du repère)
— $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, avec $n = \dim \vec{E}$, une base de $\vec{E}$.

Si tel est le cas, les scalaires sur lesquelles tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \vec{E}$ se décompose s'appelle les coordonnées affines de $\overrightarrow{u}$.

Exemple. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{u} = (2, 4, 5)$ a pour coordonnée affine $2, 4, 5$ dans la base canonique.

1.2 Propriétés

Proposition (propriétés élémentaires des espaces affines).

1. $\forall P, Q \in E,\ \overrightarrow{PQ} = 0_{\vec{E}} \Leftrightarrow P = Q$
2. $\forall P, Q \in E,\ \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Proposition (caractérisation dimensionnelle).

1. $\dim E = 0 \Rightarrow E$ est l'ensemble d'un point.

2. $\dim E = 1 \Rightarrow E$ est une droite. (droite affine)
3. $\dim E = 2 \Rightarrow E$ est un plan. (plan affine)

Chapitre 2

Application affine

2.1 Définitions

Définition (application affine). On appelle application affine toute application $f : \vec{E} \to \vec{E}'$ où $\vec{E}$ et $\vec{E}'$ disposent d'une structure d'un espace affine.

2.2 Caractérisation des applications affines