Analyse réel

Sarah S. Sawyer

Table des matières

1 Fonction réelle **3**
1.1 Définition . . . 3
1.2 Continuité . . . 3
1.3 Propriétés sur la continuité . . . 3
1.4 Dérivabilité . . . 3
1.5 Propriétés sur la dérivabilité . . . 3

2 Suite de nombre **4**

3 Série de suite de nombre **5**

4 Suite de fonction **6**

5 Série de suite de fonction **7**

Introduction

Ce cours d'analyse introduit les concepts propres aux mathématiques : nombre, ensemble, fonction et suite. Nous manipulons ces objets sur l'ensemble $\mathbb{R}$ car il s'agit d'obtenir leur bonne manipulation pour pouvoir traiter ces mêmes concepts vers quelque chose de plus générale : le calcul différentiel.

Attention. Ce cours est rédigé de sorte à ce qu'il soit vivement accessible aux étudiants n'ayant aucunes bases mathématiques sur ce thème.

Chapitre 1

Fonction réelle

Ce chapitre vise à comprendre la notion de fonction d'une variable réelle ainsi que les caractères qui lui sont propres : continuité et dérivabilité.

1.1 Définition

Définition 1. *On appelle fonction de E vers F toute application f définie par*

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Si tel est le cas, E est appelé ensemble de départ et F est appelé ensemble d'arrivée.
On note l'ensemble des fonctions de E vers F par $\mathscr{F}(E,F)$.

En pratique, on manipule toujours une fonction sur un intervalle car elle possède des propriétés intéressantes qui se gagne et qui se perd suivant la « taille » de l'intervalle. Ce même exercice peut se faire sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais, rares sont les fonctions qui maintiennent leurs propriétés sur cet ensemble.

— monotonie de la fonction.
— bornitude de la fonction.
— correspondance de la fonction.

Définition 2. *On dit qu'une fonction f est*

— *croissante (resp. strictement croissante) sur E si f vérifie*

$$\forall x \leq y \in E,\ f(x) \leq f(y) \quad (\textit{resp. } f(x) < f(y))$$

— *décroissante (resp. strictement décroissante) sur E si f vérifie*

$$\forall x \leq y \in E,\ f(x) \geq f(y) \quad (\textit{resp. } f(x) > f(y))$$

— *constante sur E si f vérifie*

$$\forall x \leq y \in E,\ f(x) = f(y)$$

Définition 3. *On dit qu'une fonction f est*

— *majoré sur E si f vérifie*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) \leq M$$

— *minoré sur E si f vérifie*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) \leq m$$

— *borné sur E si f est majoré et minoré. Formellement,*

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ m \leq f(x) \leq M$$

Définition 4. *On dit qu'une fonction f est*

— *injective sur E si f vérifie*

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

— *surjective sur E si f vérifie*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

— *bijective sur E si f est injective et surjective. Formellement,*

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$$

Définition 5. *On dit qu'une fonction f est*

— *paire sur E si f vérifie*

$$\forall x \in E, f(-x) = f(x)$$

— *impaire sur E si f vérifie*

$$\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$$

1.2 Propriétés

Proposition 1. *Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) sur E alors leur somme $f+g$ et leur produit fg sont croissantes sur E.*

Démonstration. On raisonne directement. Supposons que f et g sont croissantes sur E alors $\forall x \leq y \in E$, $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$ par définition. Par somme d'inégalité, on obtient l'inégalité suivante $f(x)+g(x) \leq f(y)+g(y)$. □

1.3 Continuité

1.4 Propriétés sur la continuité

1.5 Dérivabilité

1.6 Propriétés sur la dérivabilité

Chapitre 2

Suite de nombre

Chapitre 3

Série de suite de nombre

Chapitre 4

Suite de fonction

Chapitre 5

Série de suite de fonction