Equation de Cauchy-Riemann

Théorème (Cauchy-Riemann)**.** *Toute fonction complexe f est holomorphe dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées*

$$\partial_x P(x,y) = \partial_y Q(x,y) \text{ et } \partial_y P(x,y) = -\partial_x Q(x,y)$$

avec P et Q des fonctions vérifiant $f(x,y) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$.

Ici, ∂_x et ∂_y désignent respectivement la dérivée partielle par rapport à x et par rapport à y. On note i le nombre complexe vérifiant $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Utilisation du résultat. Ce résultat s'utilise essentiellement pour

— montrer qu'une fonction est holomorphe.

— montrer qu'une fonction n'est pas holomorphe.

Pour prouver ce résultat, ce papier utilisera divers outils de l'analyse qui sont les suivantes

— la dérivée au sens complexe.

— la caractérisation des fonctions différentiables.

1 Preuve avec la définition de la dérivée au sens complexe

Effectuons une étude locale de la dérivée de f. On pose $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in U$ et $f(x,y) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$. On écrit

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x+\mathrm{i}y) - f(x_0 + \mathrm{i}y_0)}{z - z_0}$$

En utilisant l'expression de f et de z, en homogénéisant l'écriture en séparant proprement la partie réelle et la partie imaginaire dans le numérateur et dans le dénominateur, on obtient

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{P(x,y) - P(x_0,y_0) + \mathrm{i}(Q(x,y) - Q(x_0,y_0))}{(x-x_0) + \mathrm{i}(y-y_0)}$$

En posant $y = y_0$, alors

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{P(x,y_0) - P(x_0,y_0) + \mathrm{i}(Q(x,y_0) - Q(x_0,y_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{P(x,y_0) - P(x_0,y_0)}{x - x_0} + \mathrm{i} \lim_{z \to z_0} \frac{(Q(x,y_0) - Q(x_0,y_0))}{x - x_0} \\
&= \partial_x P(x_0,y_0) + \mathrm{i}\partial_x Q(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

En posant $x = x_0$, alors

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{P(x_0,y)-P(x_0,y_0)+\mathrm{i}\left(Q(x_0,y)-Q(x_0,y_0)\right)}{\mathrm{i}(y-y_0)} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{P(x_0,y)-P(x_0,y_0)}{\mathrm{i}(y-y_0)} + \mathrm{i}\lim_{z\to z_0} \frac{(Q(x_0,y)-Q(x_0,y_0))}{\mathrm{i}(y-y_0)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_y P(x_0,y_0) + \partial_y Q(x_0,y_0) \\
&= -\mathrm{i}\partial_y P(x_0,y_0) + \partial_y Q(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

La dernière égalité étant vraie car $-\mathrm{i} = \frac{1}{\mathrm{i}}$. Par égalité des quantités, on peut écrire

$$\partial_x P(x_0,y_0) + \mathrm{i}\partial_x Q(x_0,y_0) = -\mathrm{i}\partial_y P(x_0,y_0) + \partial_y Q(x_0,y_0)$$

L'équation obtenue est une équation complexe qui est vraie si et seulement si la partie complexe et la partie réelle sont égales. Cela équivaut à résoudre le système

$$\begin{cases} \partial_x P(x_0,y_0) & = \partial_y Q(x_0,y_0) \\ \partial_x Q(x_0,y_0) & = -\partial_y P(x_0,y_0) \end{cases}$$

En arrangeant les termes correctement, on obtient la forme de l'équation de l'énoncé. Ce qui clos la preuve.

2 Preuve avec la caractérisation des fonctions différentiables

La fonction f est holomorphe en U si et seulement si

$$\partial_x f(x,y) + \mathrm{i}\partial_y f(x,y) = 0$$

En posant $f(x,y) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$, d'une part on calcule

$$\partial_x f(x,y) = \partial_x P(x,y) + \mathrm{i}\partial_x Q(x,y)$$

D'autre part, on obtient

$$\mathrm{i}\partial_y f(x,y) = \mathrm{i}\partial_y P(x,y) + \mathrm{i}^2\partial_y Q(x,y) = \mathrm{i}\partial_y P(x,y) - \partial_y Q(x,y)$$

En injectant ces quantités dans l'équation principale, elle est équivalente à l'équation suivante

$$\partial_x P(x,y) - \partial_y Q(x,y) + \mathrm{i}\left(\partial_x Q(x,y) + \partial_y P(x,y)\right) = 0$$

L'équation obtenue est une équation complexe qui est vérifiée si et seulement si les parties réelles et imaginaires sont égales. En particulier, cela équivaut à résoudre le système suivante

$$\begin{cases} \partial_x P(x,y) - \partial_y Q(x,y) & = 0 \\ \partial_x Q(x,y) + \partial_y P(x,y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x P(x,y) & = \partial_y Q(x,y) \\ \partial_y P(x,y) & = -\partial_x Q(x,y) \end{cases}$$

Ce qui clos la preuve.