

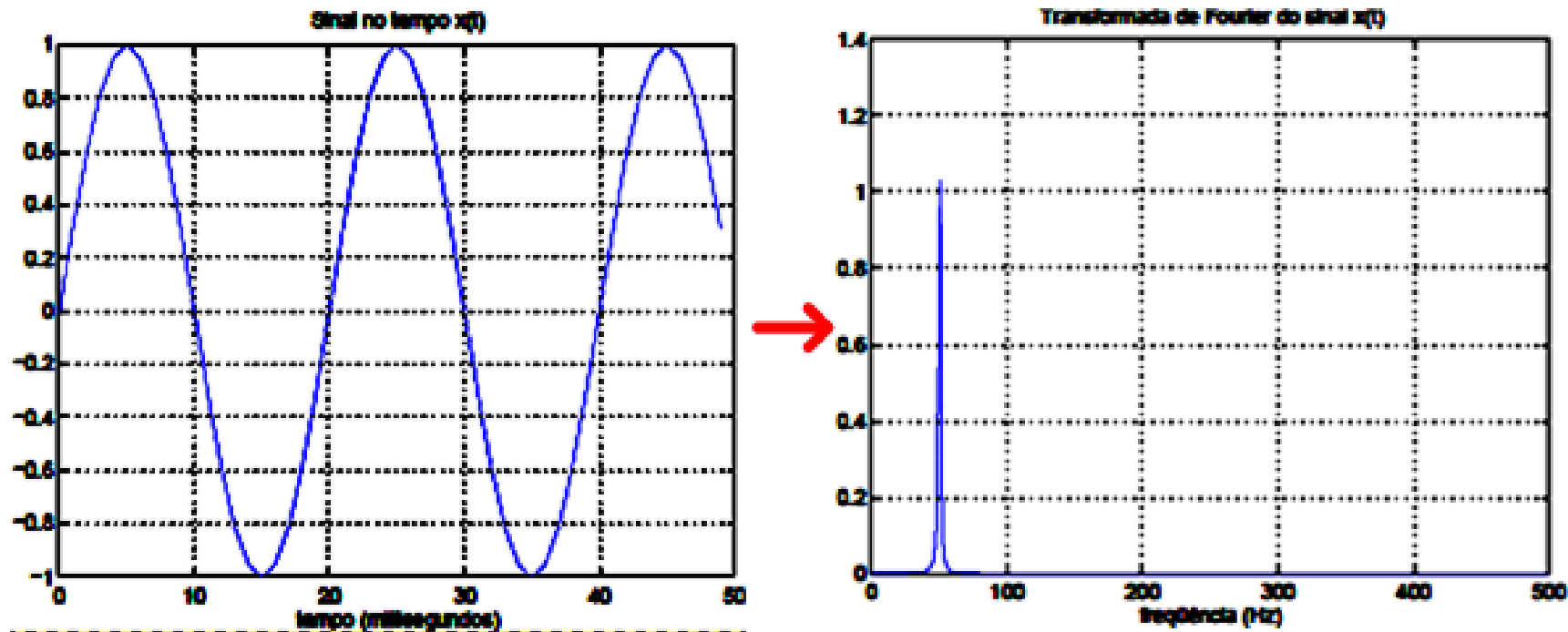
Tópico 05:

Transformada de Fourier 1D e 2D

Prof. Dr. Matheus Cardoso Moraes

Transformada de Fourier 1D

- O que é uma Transformada?
 - Operação que leva funções de um domínio para outro.
- Ex. Módulo da TF: tempo \rightarrow frequência



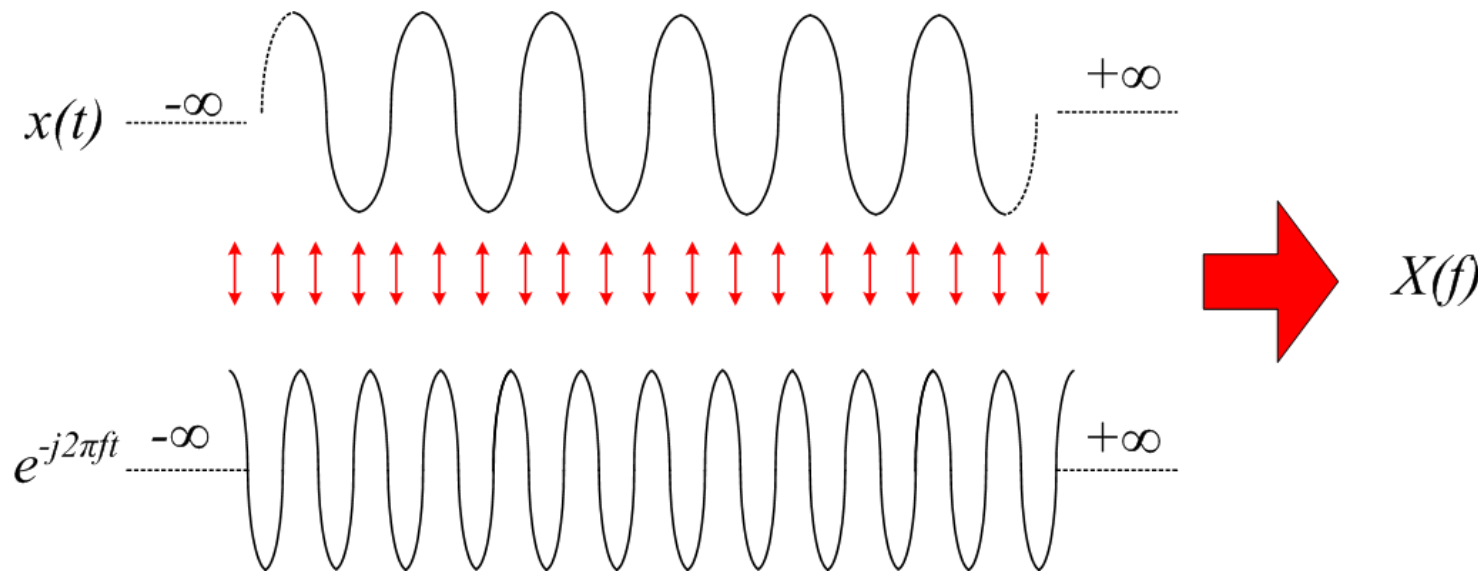
- Permite tirar informações de sinais, que não podem ou são difíceis de serem vistos com o sinal em sua forma original.

Transformada de Fourier (TF)

- Representação Matemática e Características

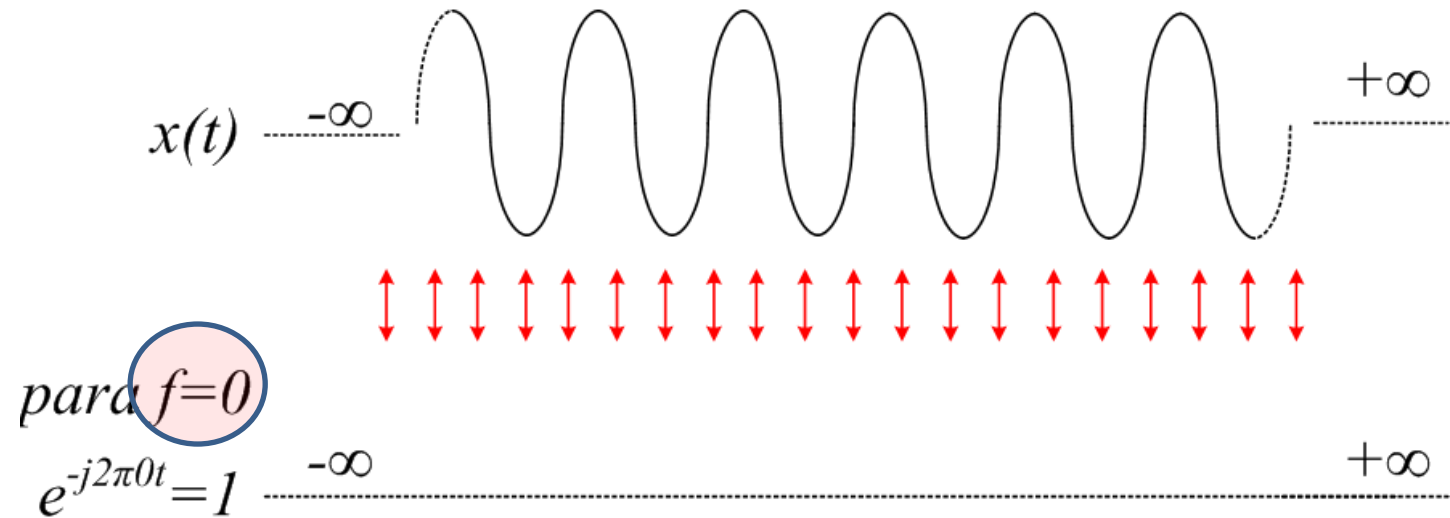
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Projeção entre um sinal $x(t)$ e sua função de transformação
- Possui **1** função de transformação $e^{-j2\pi ft}$
- Projeção (**Correlação**) é feita ao longo de todo o sinal.



Processo de Transformação

- Como a TF é uma função de 1 variável $f \rightarrow$ Os coeficientes são computados apenas com a variação de f



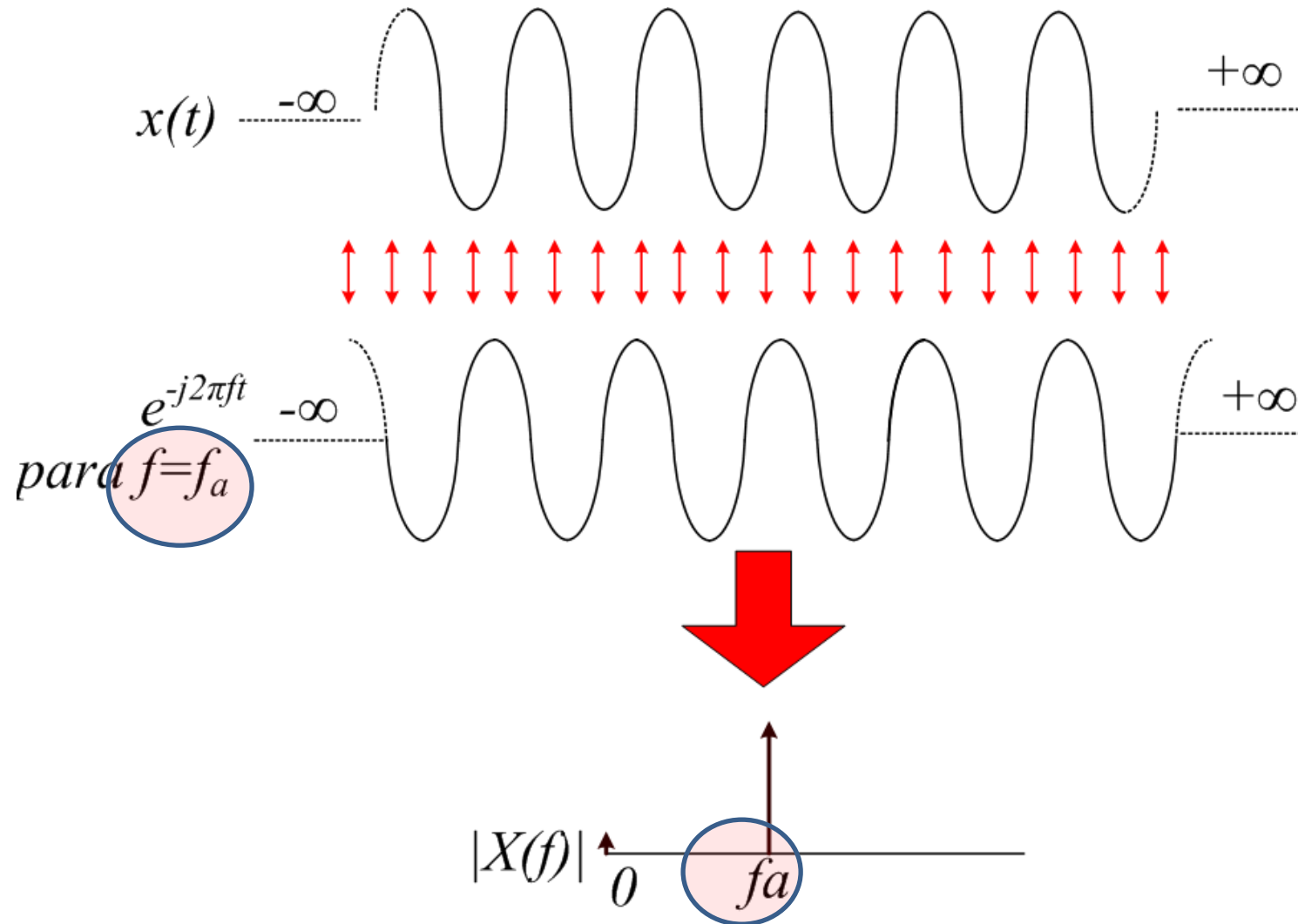
$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) 1 dt$$

Diagram illustrating the Fourier Transform process for a periodic signal $x(t)$. The top plot shows a sinusoidal signal $x(t)$ over time t from $-\infty$ to $+\infty$. Below it, a series of red double-headed vertical arrows represent the sampling process. The bottom plot shows the resulting spectrum, which is a single impulse at $f=0$, labeled "para $f=0$ " and $e^{-j2\pi 0t} = 1$.

Processo de Transformação

- Para $f = f_a$

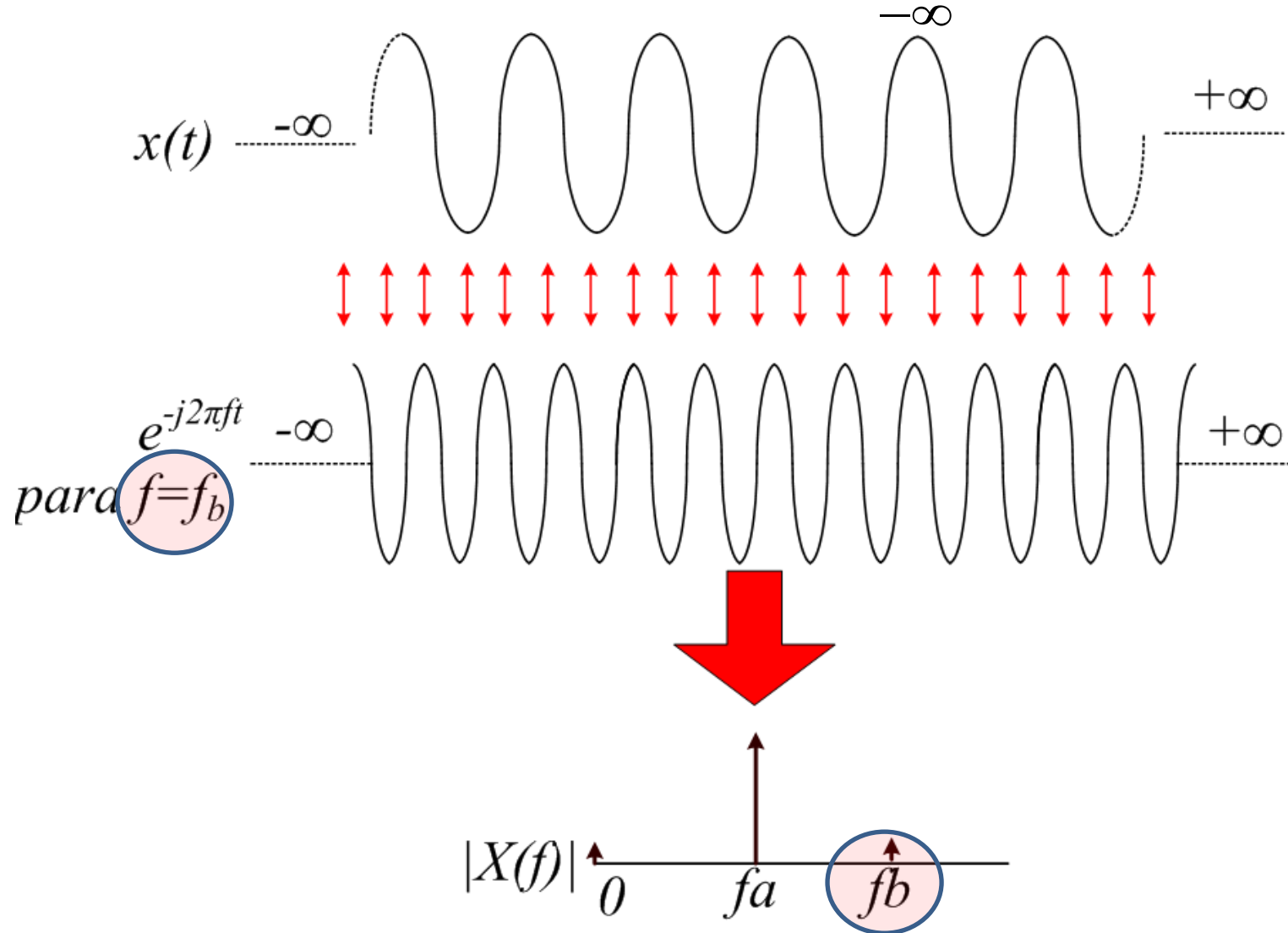
$$X(f_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_a t} dt$$



Processo de Transformação

- Para $f = f_b$

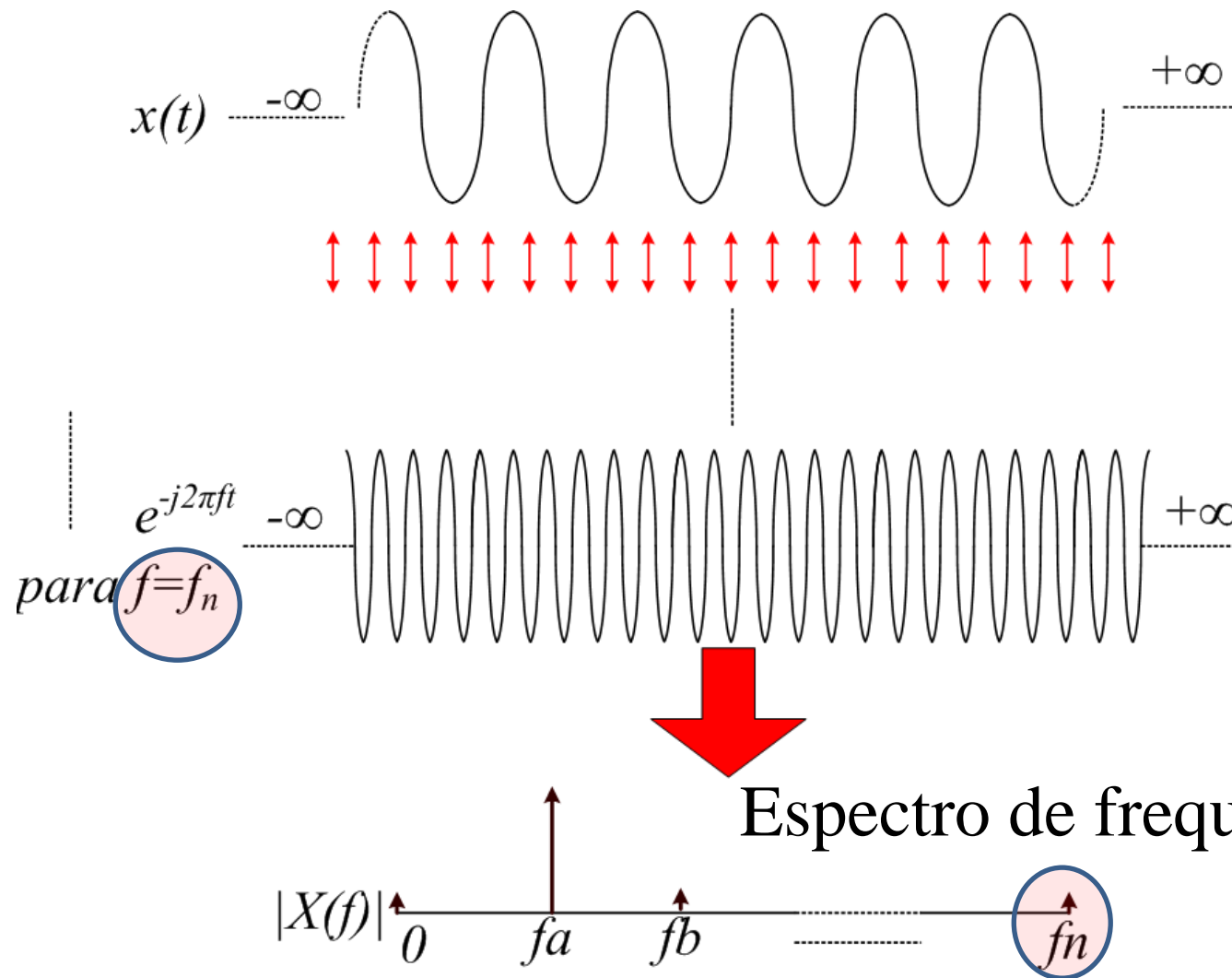
$$X(f_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_b t} dt$$



Processo de Transformação

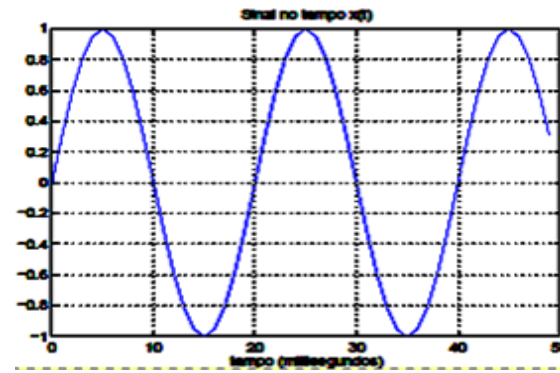
- Para $f = f_n$

$$X(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

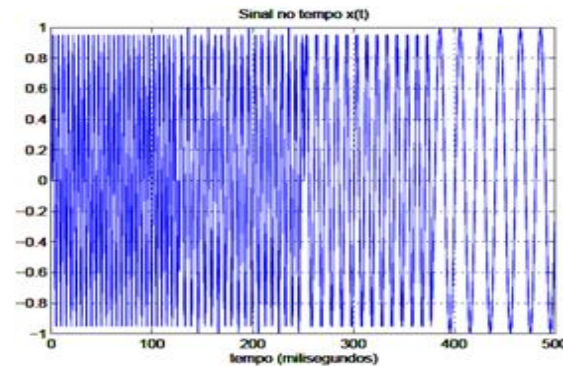
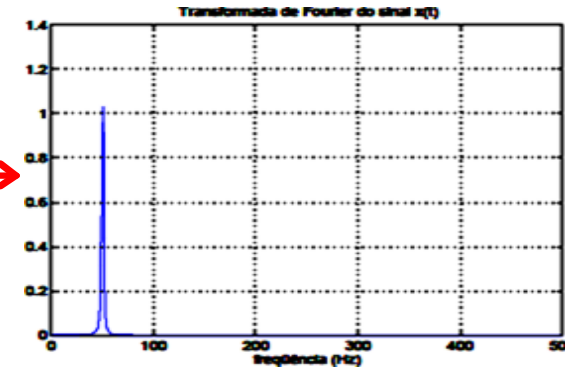


Objetivo

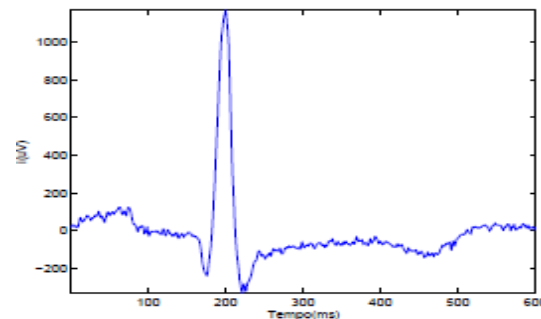
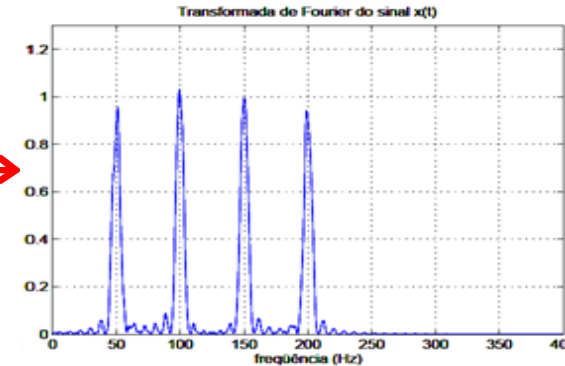
- Trazer informação de frequência de sinais
 - Representação formal Matemática tem f de $-\infty$ à $+\infty$



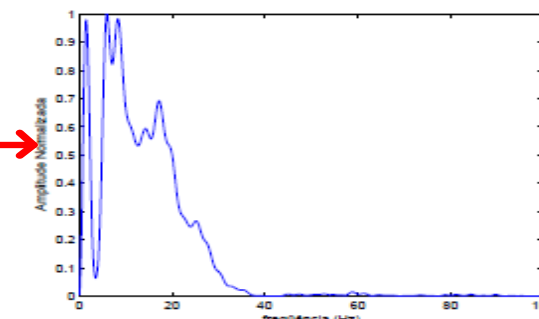
TF



TF

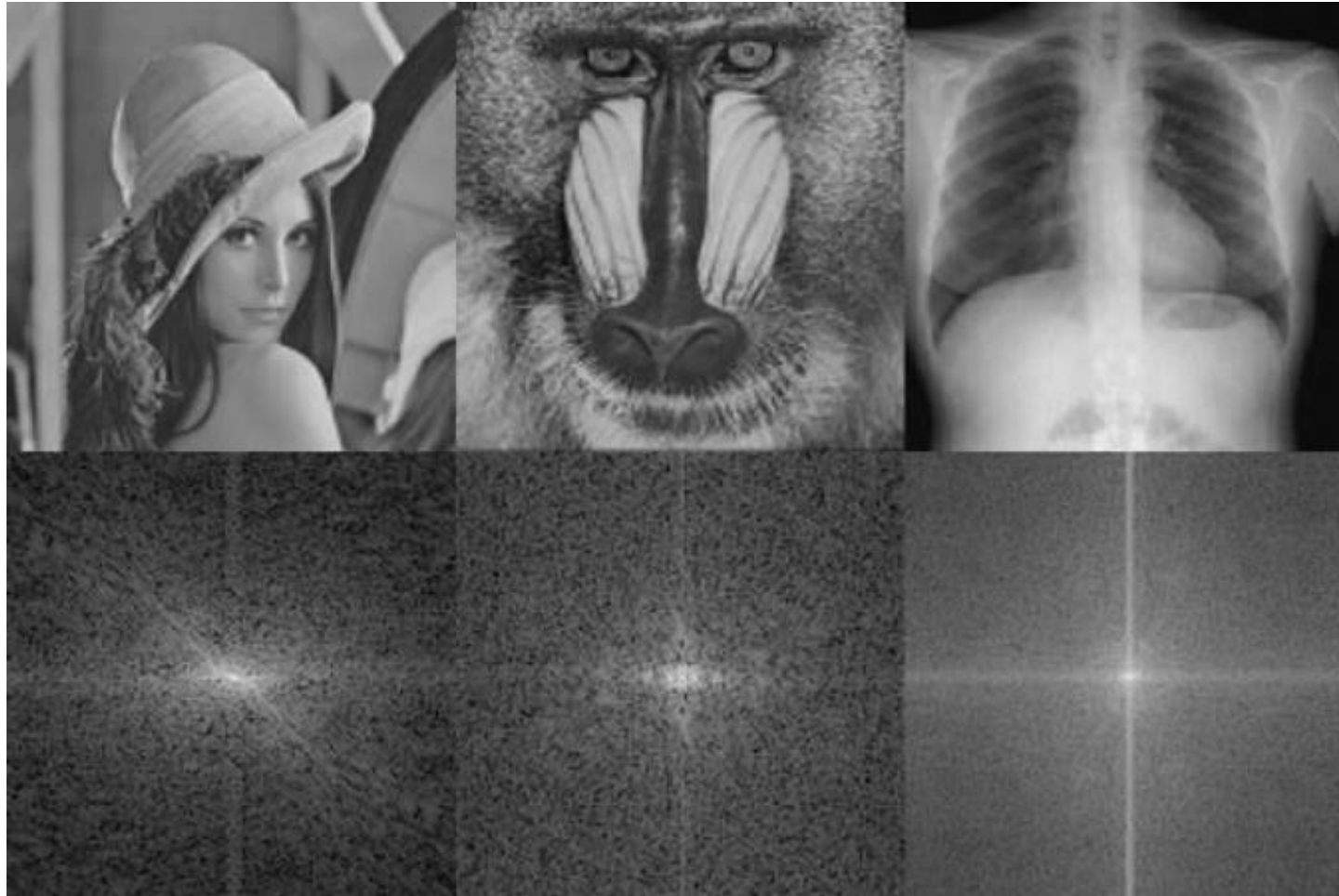


TF



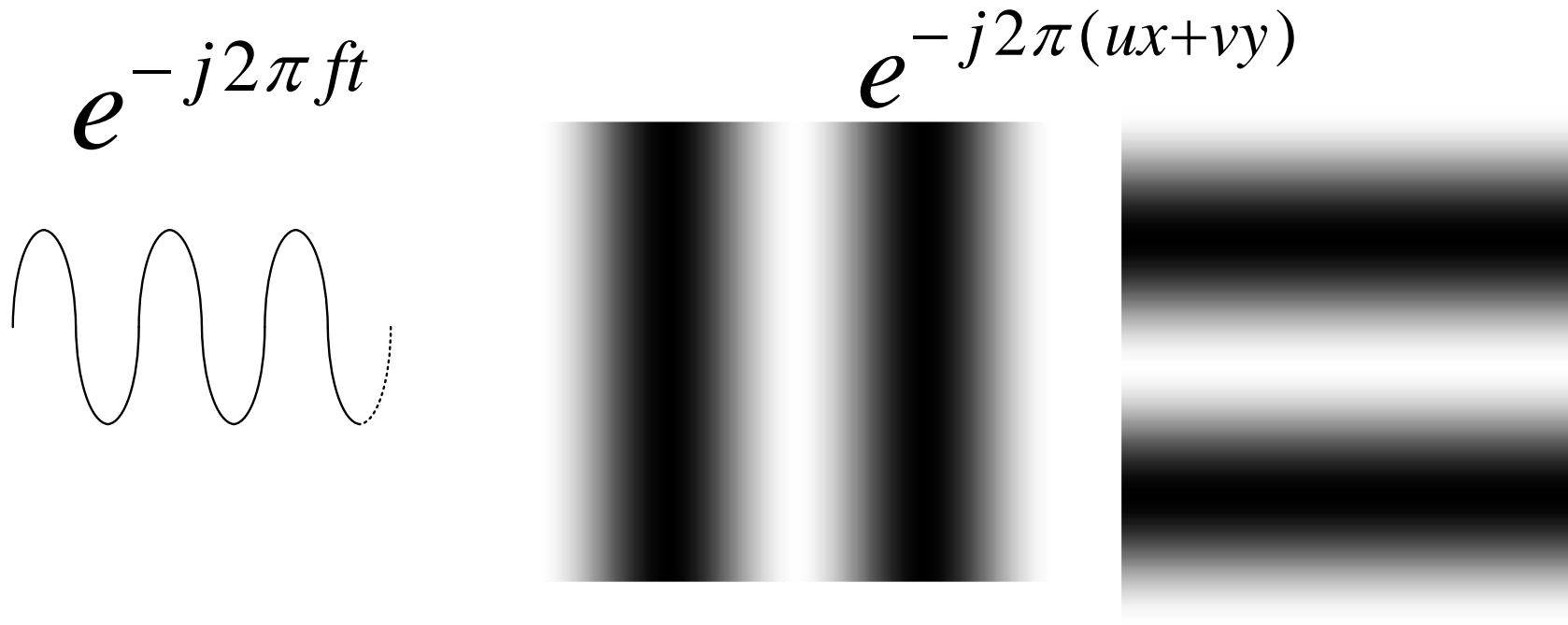
Transformada de Fourier 2D

- Operação que obtém componentes de frequência em funções de 2 variáveis.
- Ex. Módulo da TF: espacial \rightarrow frequência espacial



Analogia entre Fourier 1D e 2D

- As função possuem 2 variáveis.
- $f \rightarrow$ frequência temporal (*oscilações / unidade temporal - ex. segundo*)
- $t \rightarrow$ posição temporal (*unidade temporal - ex. segundo*)
- u e $v \rightarrow$ frequência espacial horizontal e vertical (*oscilações / unidade espacial - ex. metro*)
- x e $y \rightarrow$ posição espacial horizontal e vertical (*unidade espacial - ex. metro*)

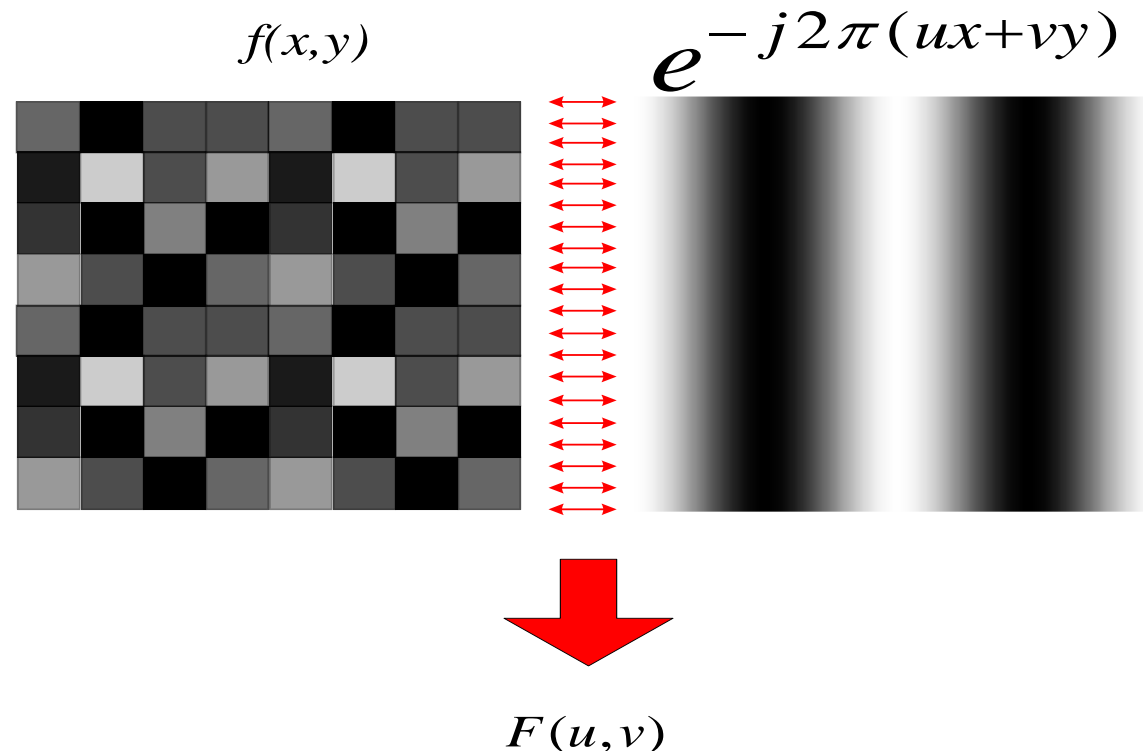


Transformada de Fourier 2D ($TF2$)

- Representação Matemática e Características

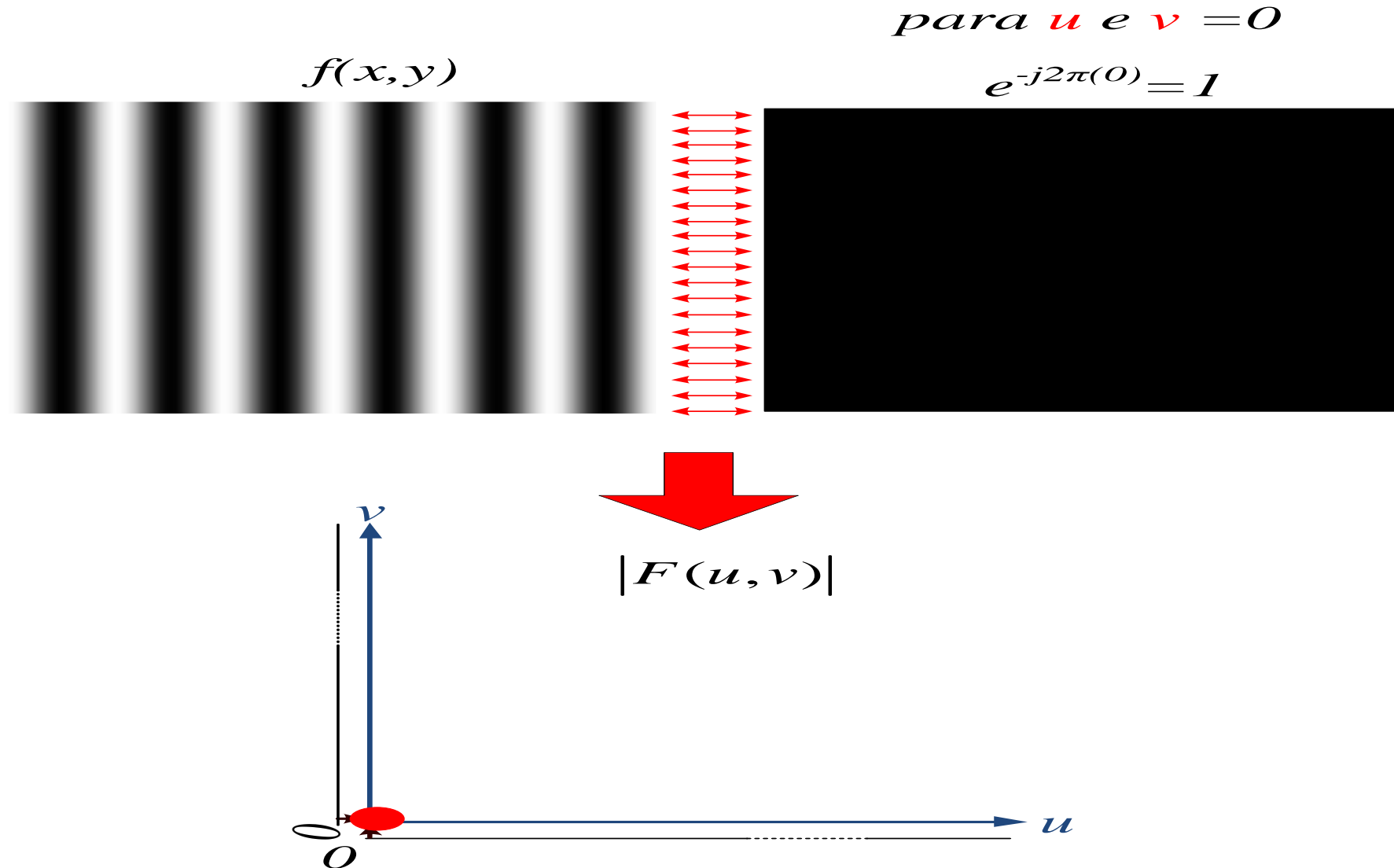
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- Projeção entre uma imagem $f(x, y)$ e a função de transformação



Processando a $TF2D$

- Correlação entre f e e com a variação de u e v

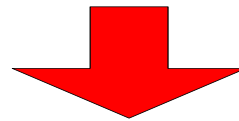
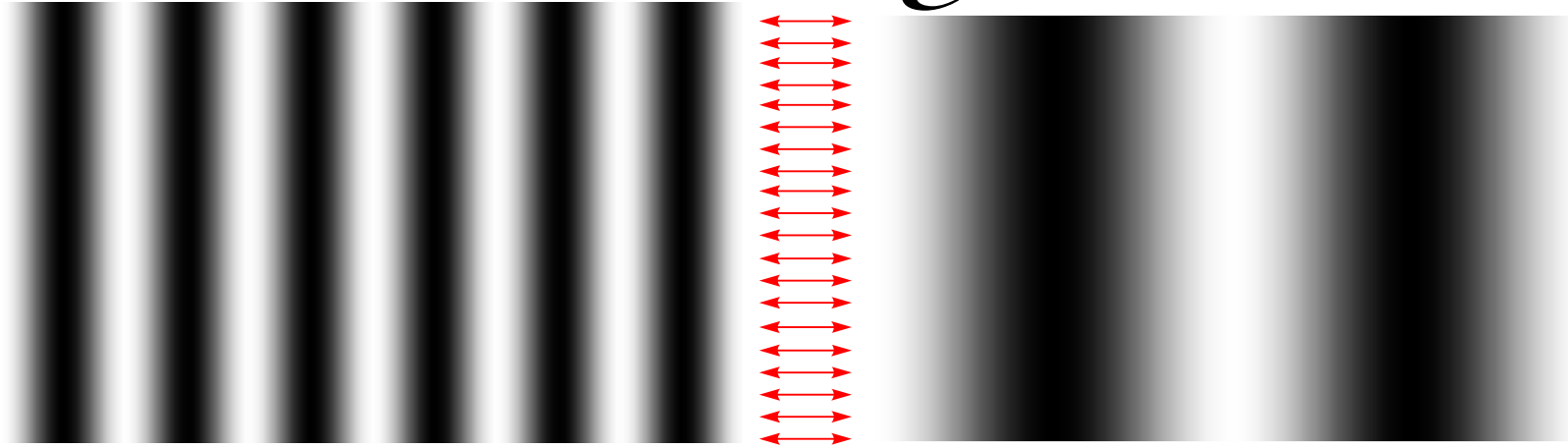


Processando a $TF2D$

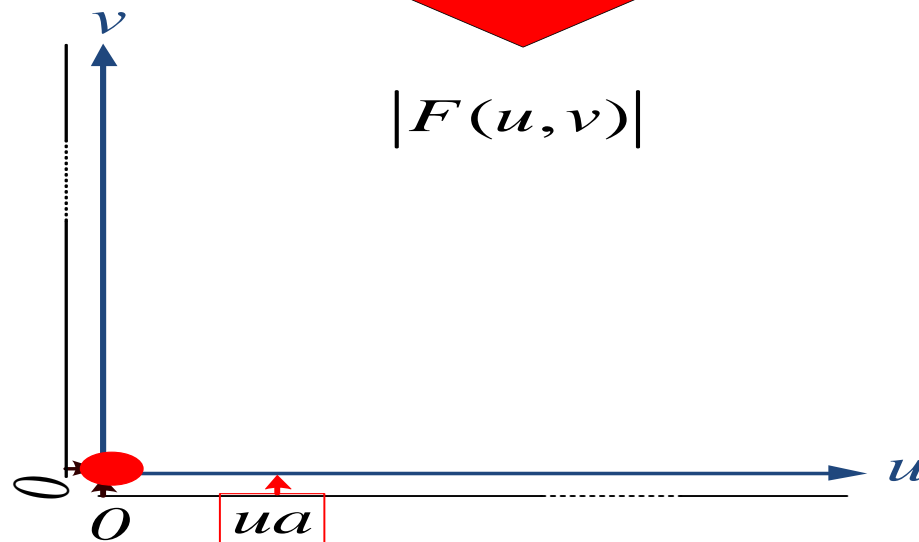
para $u = ua$ e $v = 0$

$f(x, y)$

$e^{-j2\pi(ux+vy)}$



$|F(u, v)|$

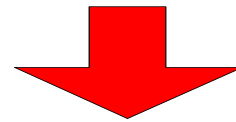
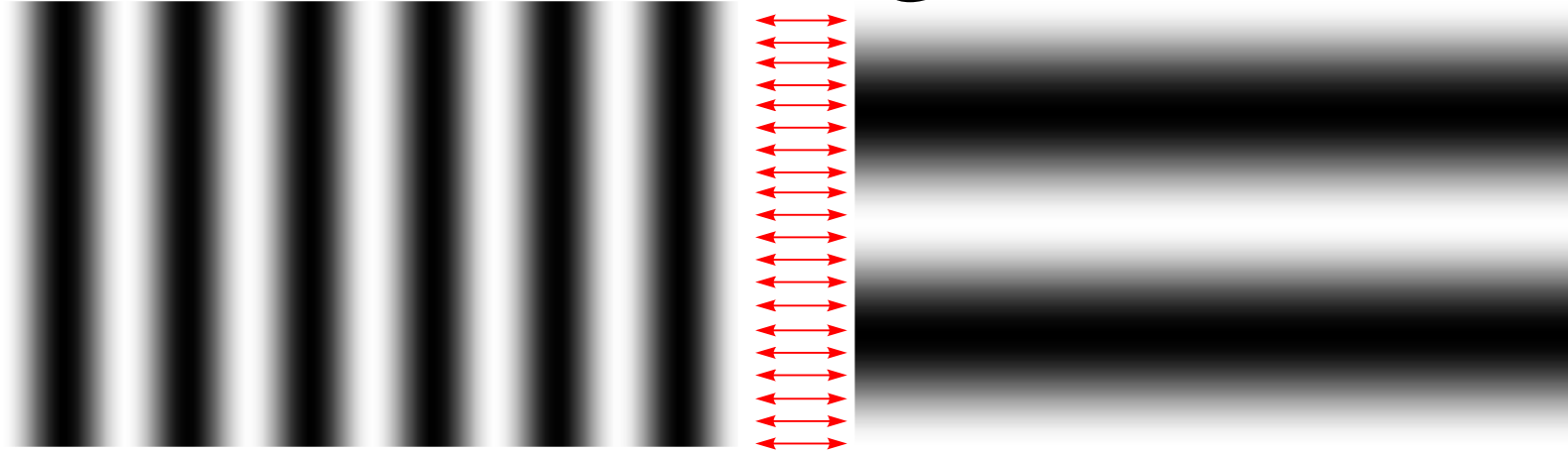


Processando a $TF2D$

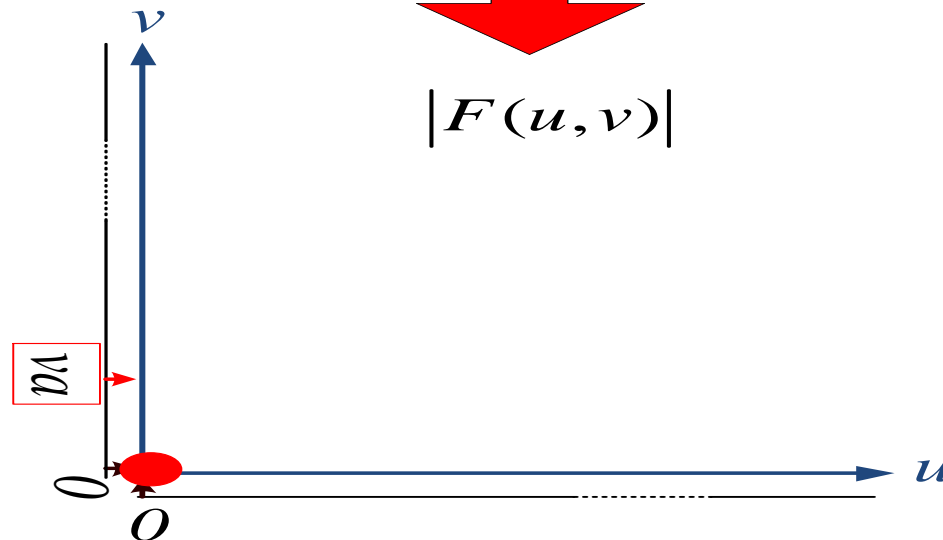
para $u = 0$ e $v = va$

$f(x, y)$

$e^{-j2\pi(ux+vy)}$



$|F(u, v)|$

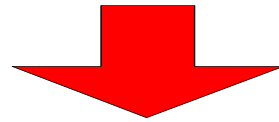
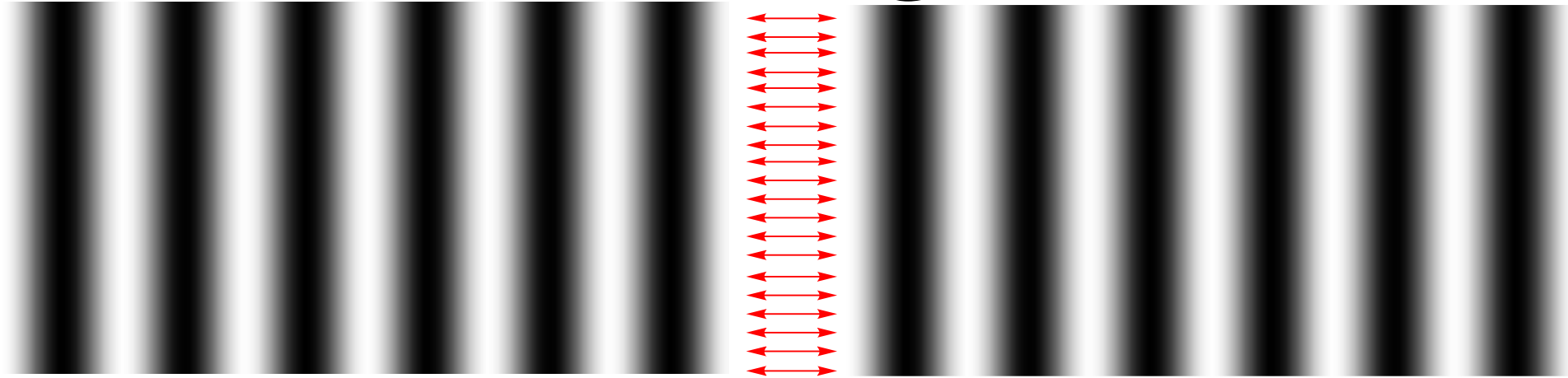


Processando a $TF2D$

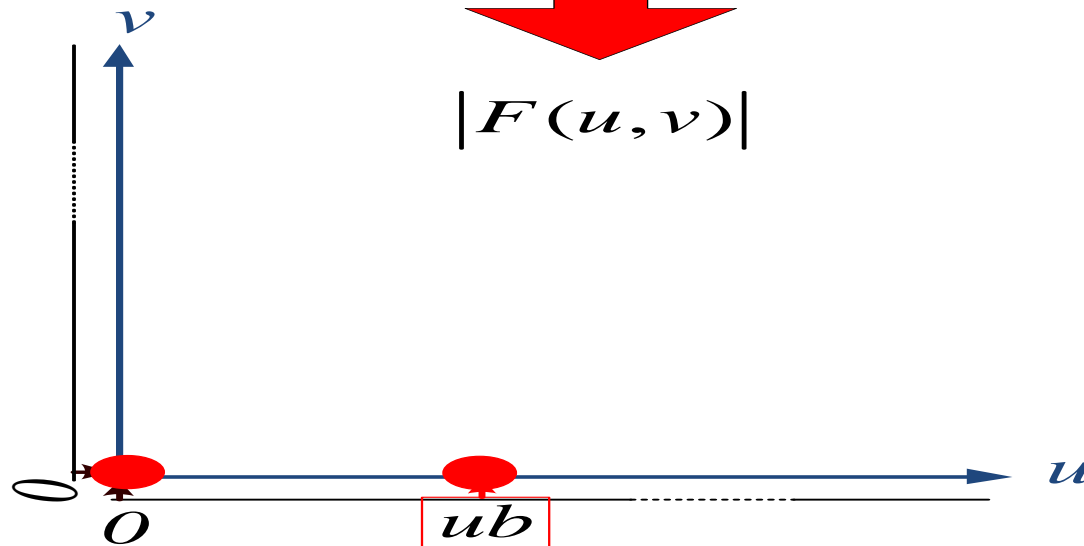
para $u = ub$ e $v = 0$

$f(x, y)$

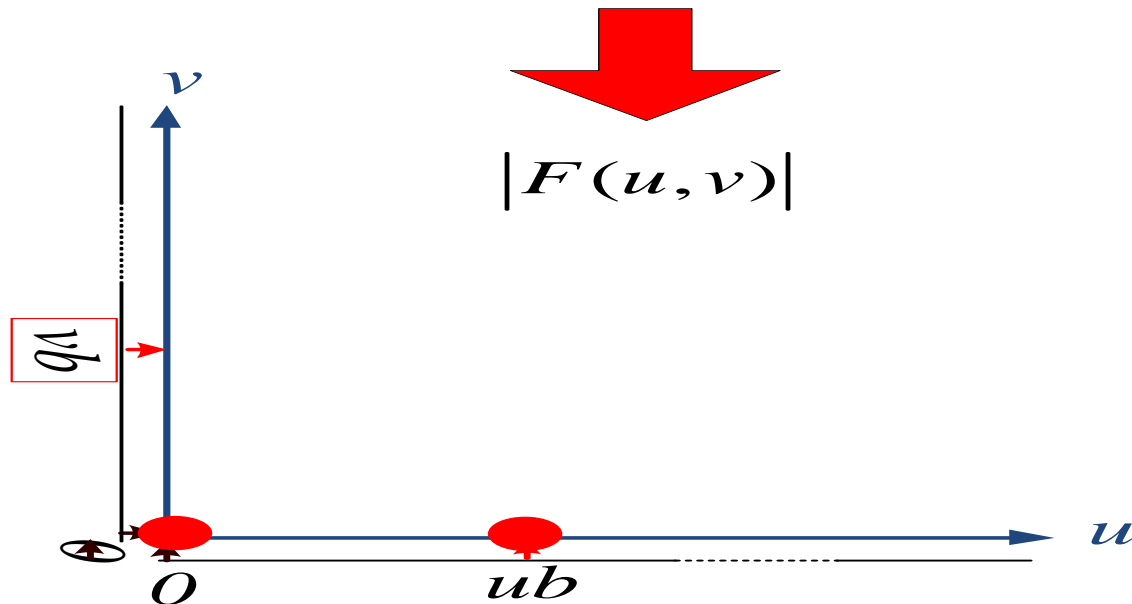
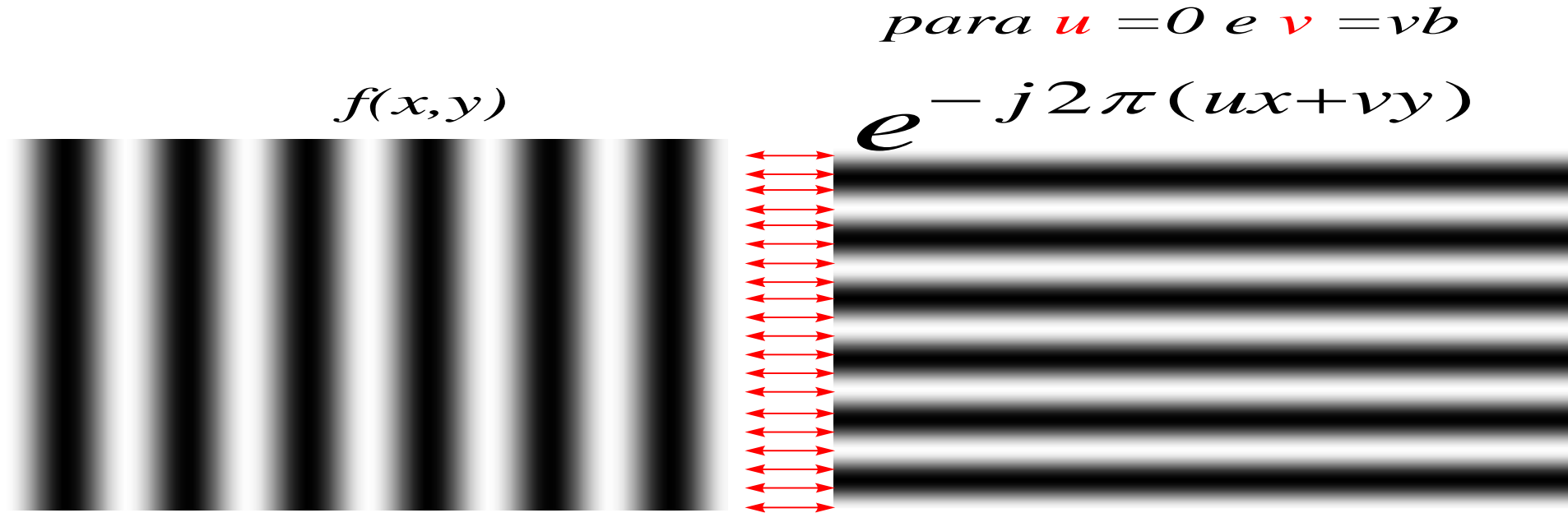
$e^{-j2\pi(ux+vy)}$



$|F(u, v)|$



Processando a $TF2D$

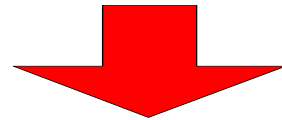
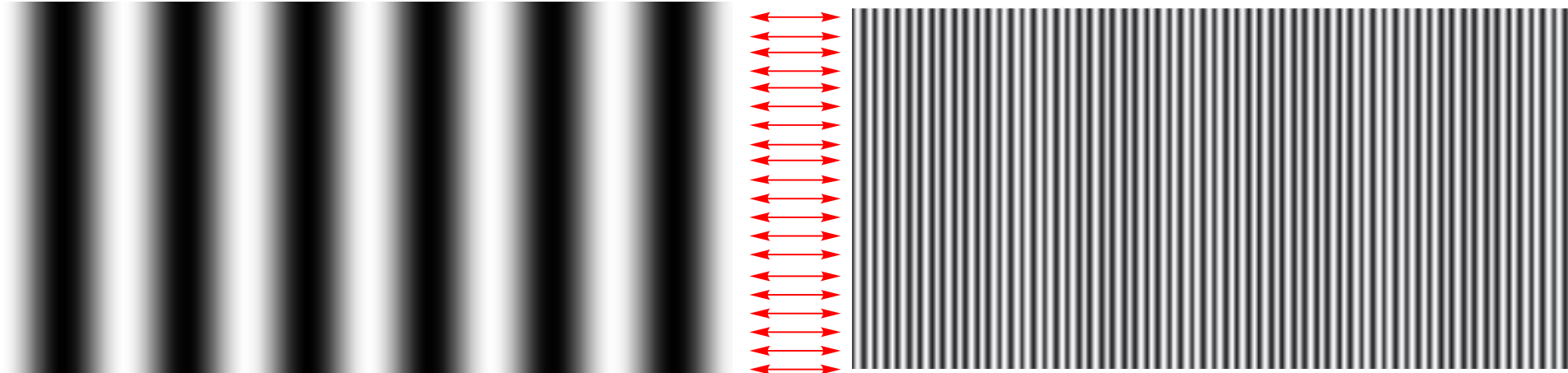


Processando a $TF2D$

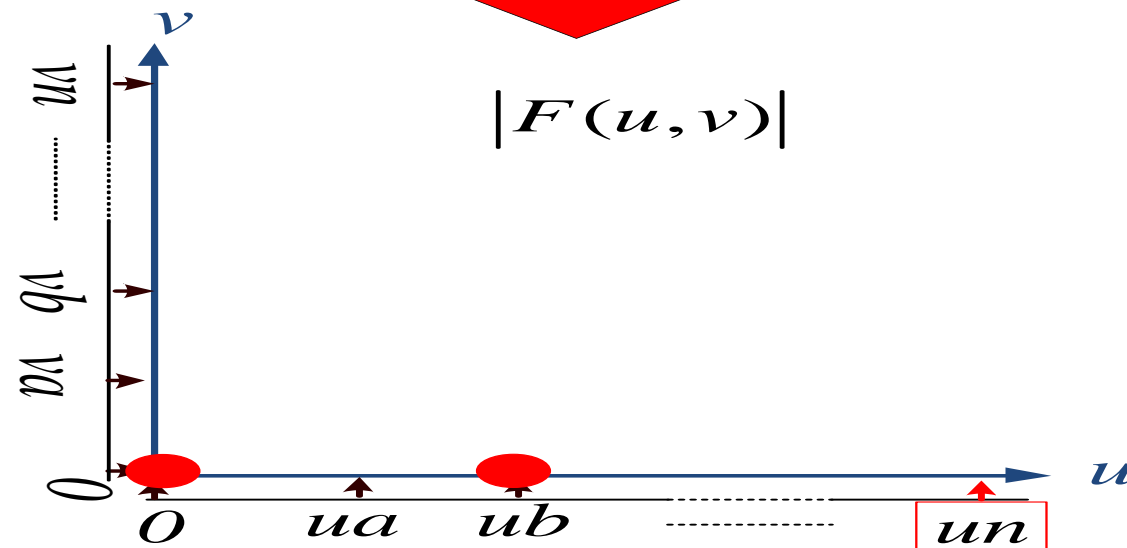
para $u = un$ e $v = 0$

$f(x, y)$

$e^{-j2\pi(ux+vy)}$



$|F(u, v)|$

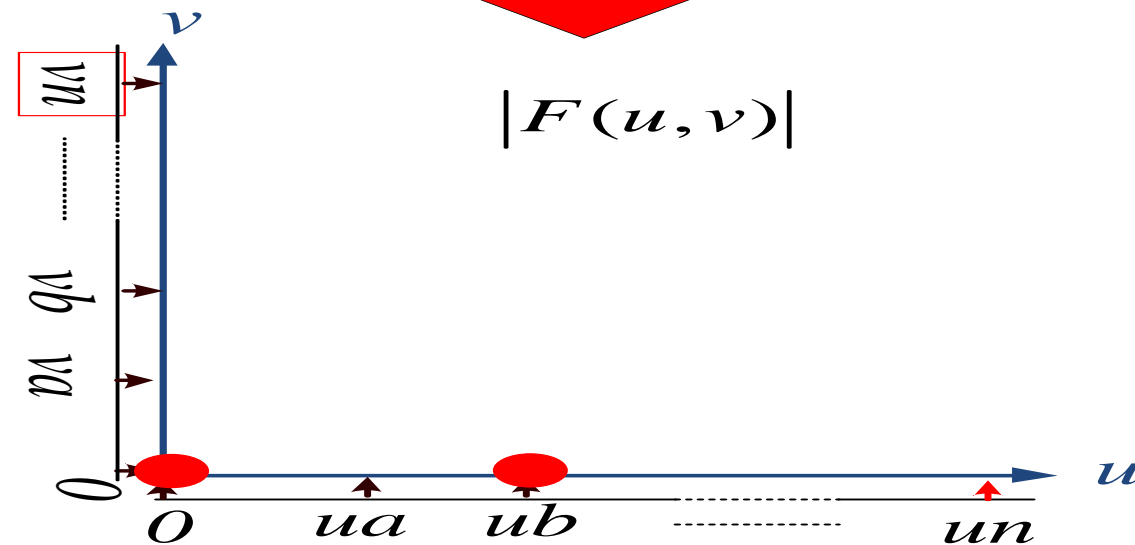
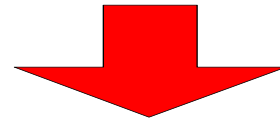
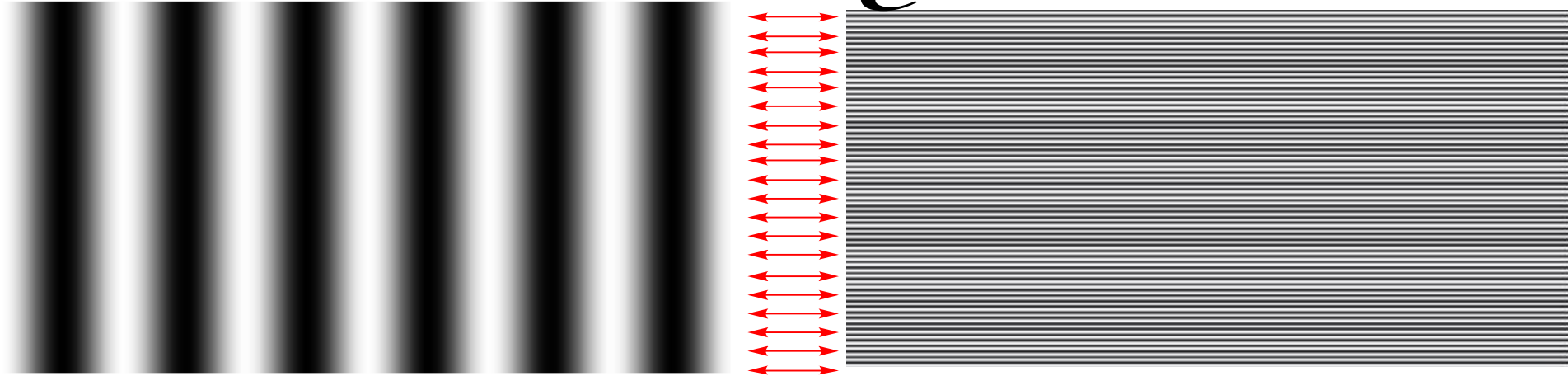


Processando a $TF2D$

para $u = 0$ e $v = vn$

$f(x, y)$

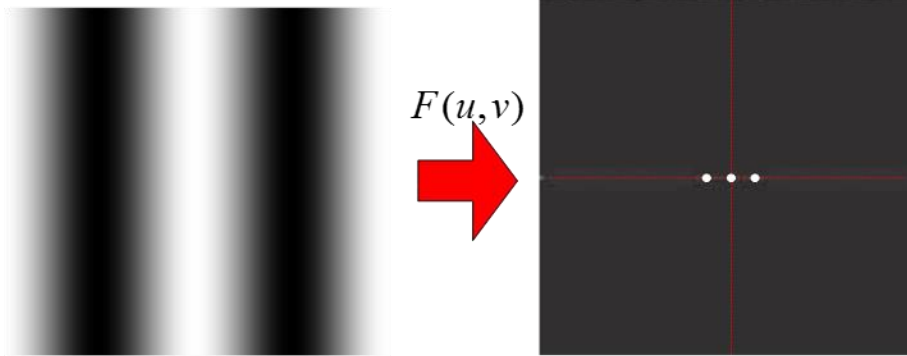
$e^{-j2\pi(ux+vy)}$



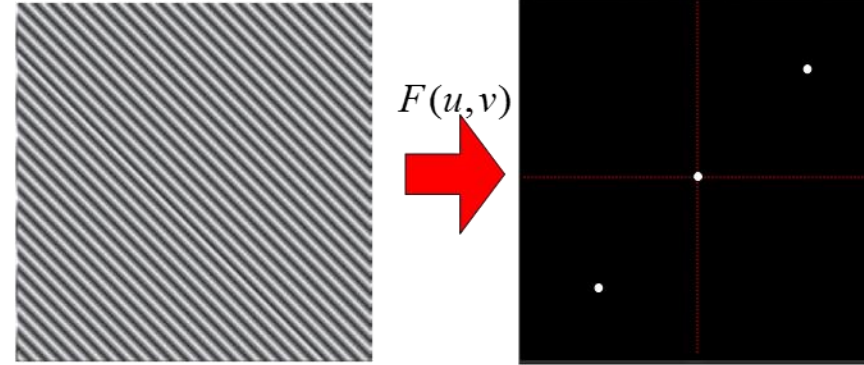
Objetivo

- Trazer componentes de frequência vertical e horizontal de imagens.
 - Representação formal Matemática tem u e v de $-\infty$ à $+\infty$

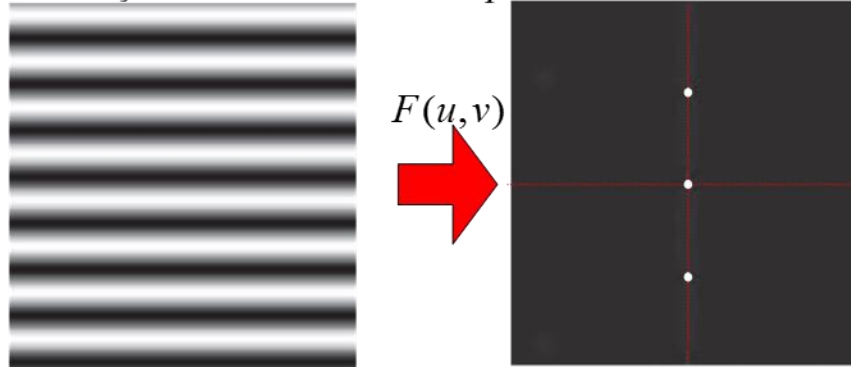
Variações horizontais → Componentes horizontais



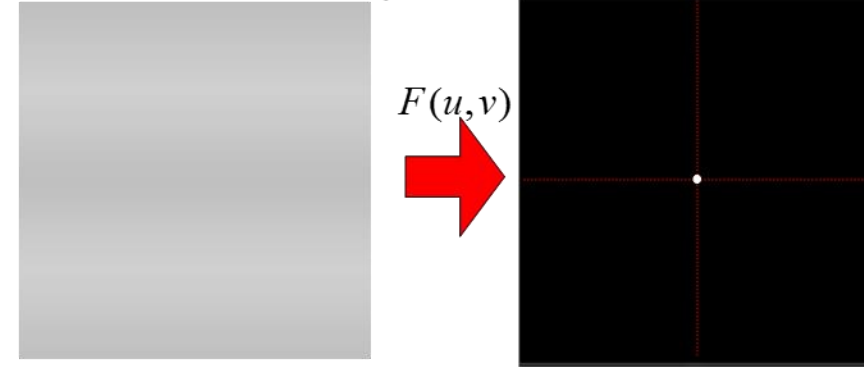
Variações diagonais → Componentes diagonais



Variações verticais → Componentes verticais

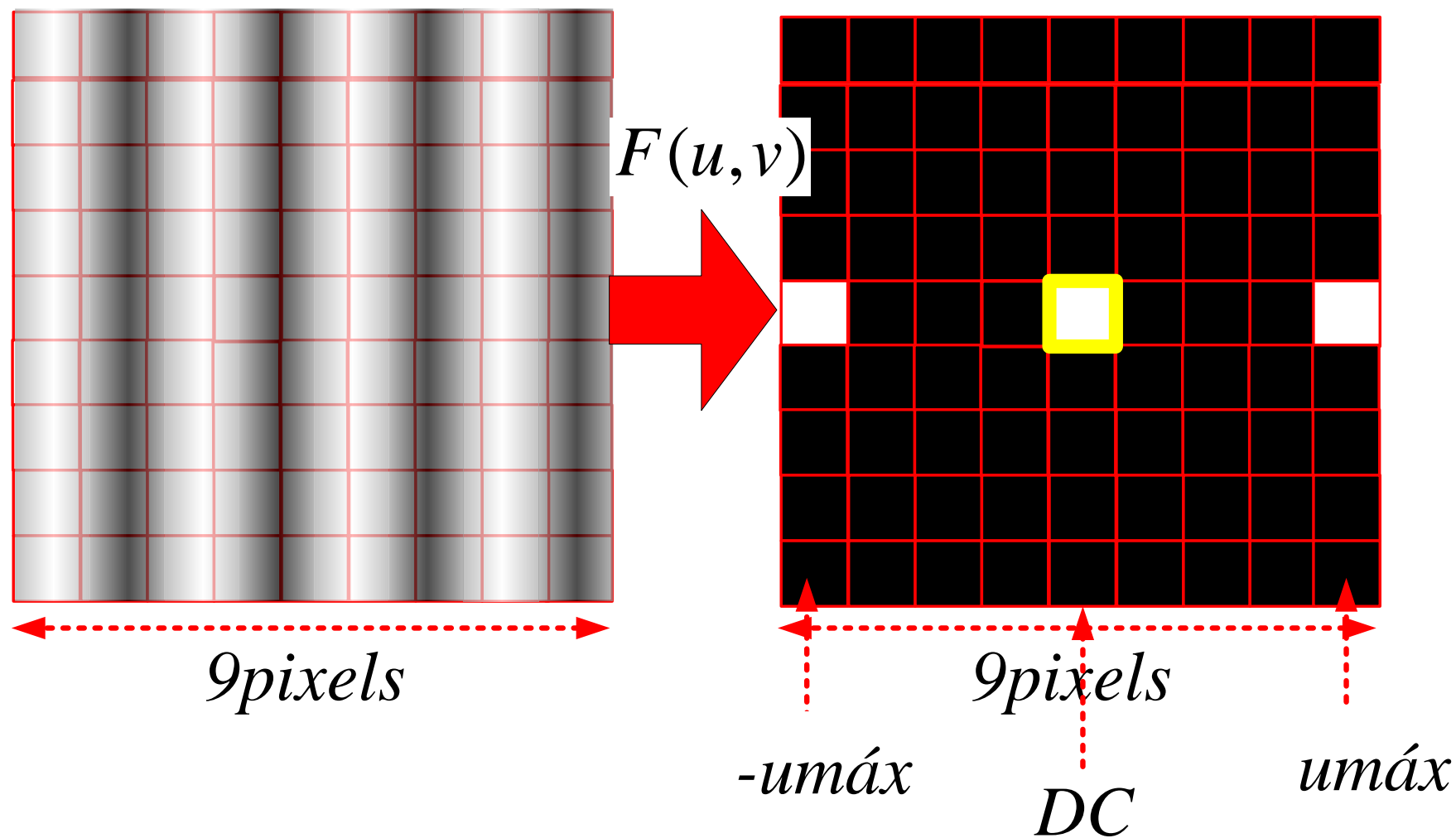


Sem variações → Nivel DC



Características

- O tamanho da representação espacial e frequência são os mesmos
- O espectro contém as correspondentes frequências negativas na vertical e horizontal.



Características

– *Resolução espacial*

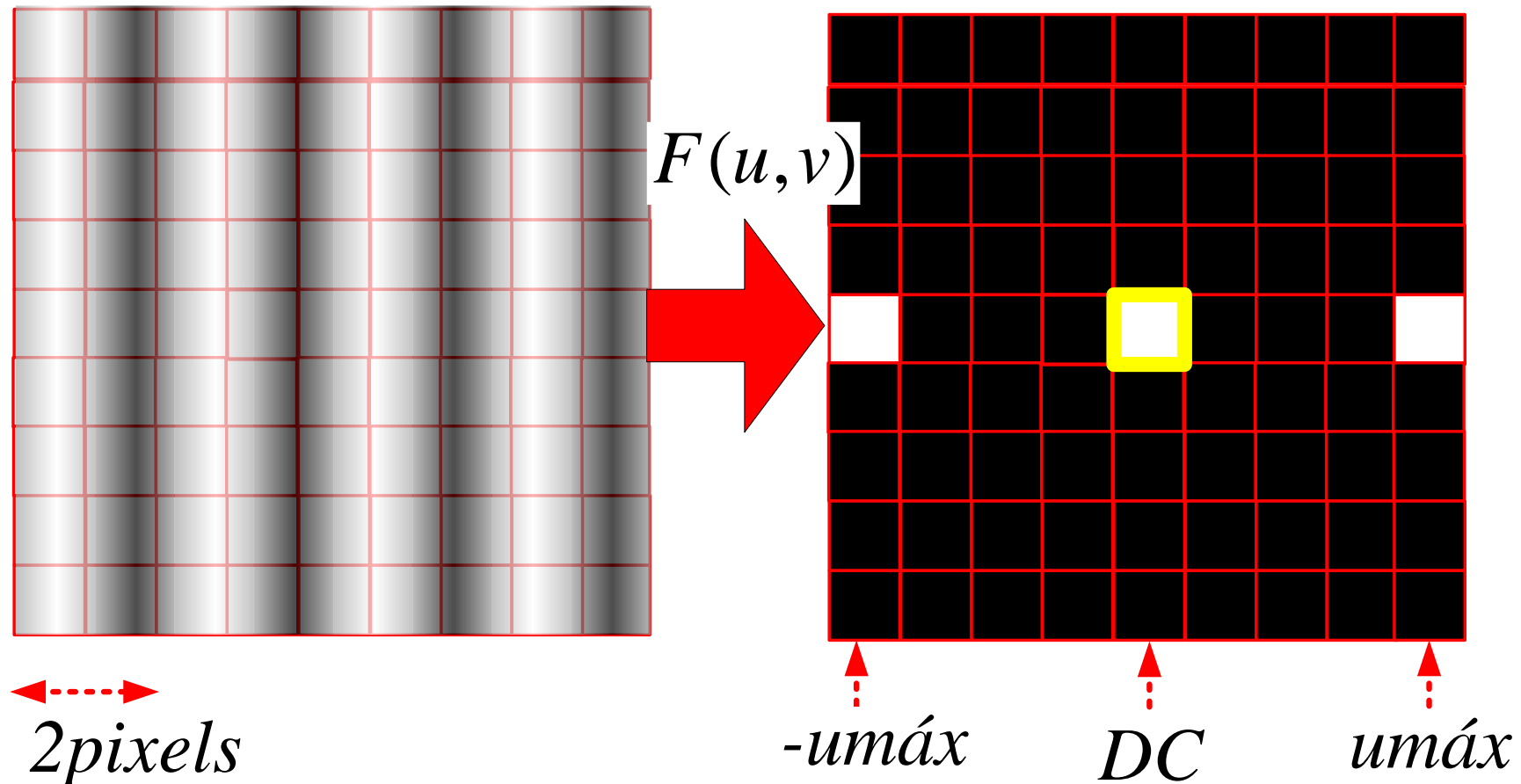
– *Período mínimo*

- $p_{min} = 2pixels$
- *Exemplo resolução do pixel = 0,5m*
- $p_{min} = 1m$

– *Resolução em frequência.*

– *Frequência Máxima*

- $u_{máx} = (1/p_{min}) =$
- $(1/2 pixels) =$
- $(1/1m) =$
- $u_{máx} = 1ciclo/m$



Características

– *Resolução espacial*

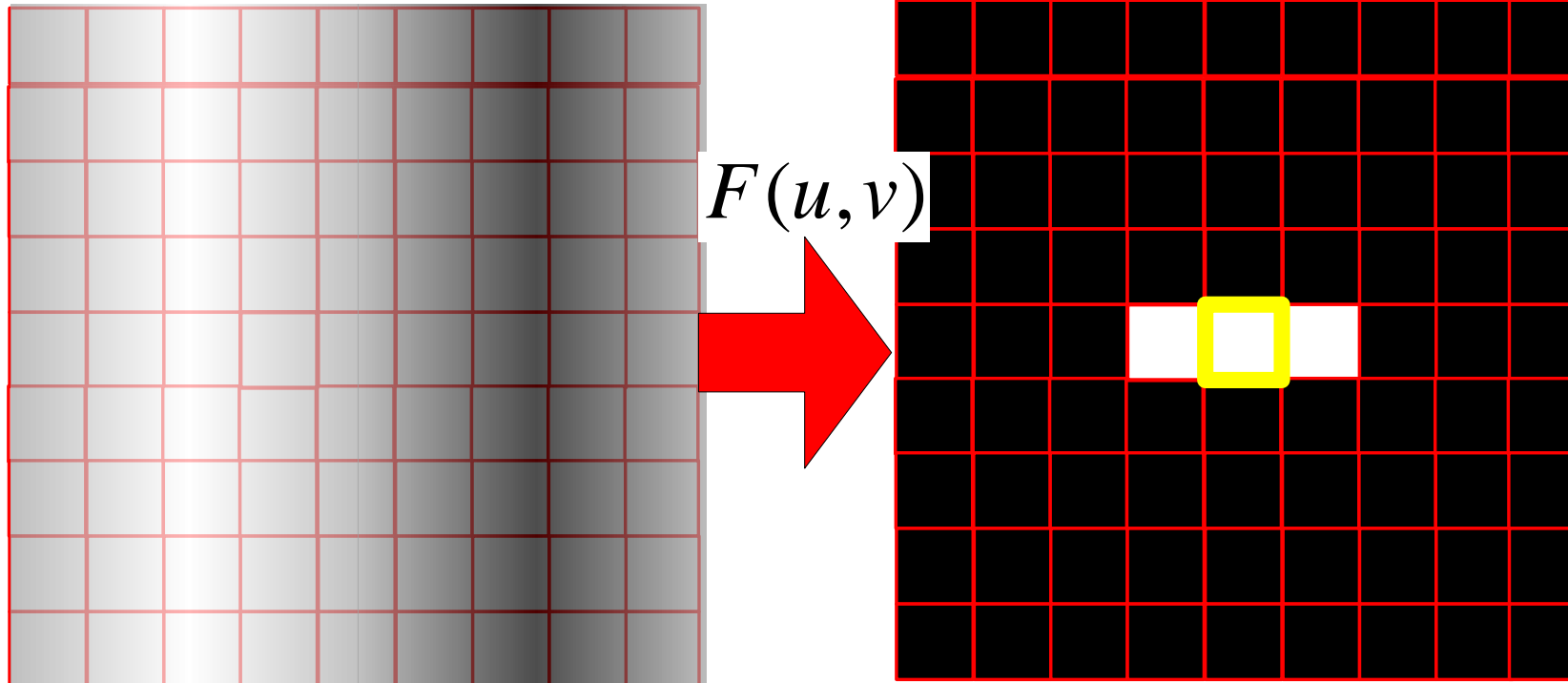
– *Período máximo*

- $p_{max} = 9 \text{ pixels}$
- *Exemplo resolução do pixel = 0,5m*
- *$p_{max} = 4,5 \text{m}$*

– *Resolução em frequência.*

– *Frequência Mínima*

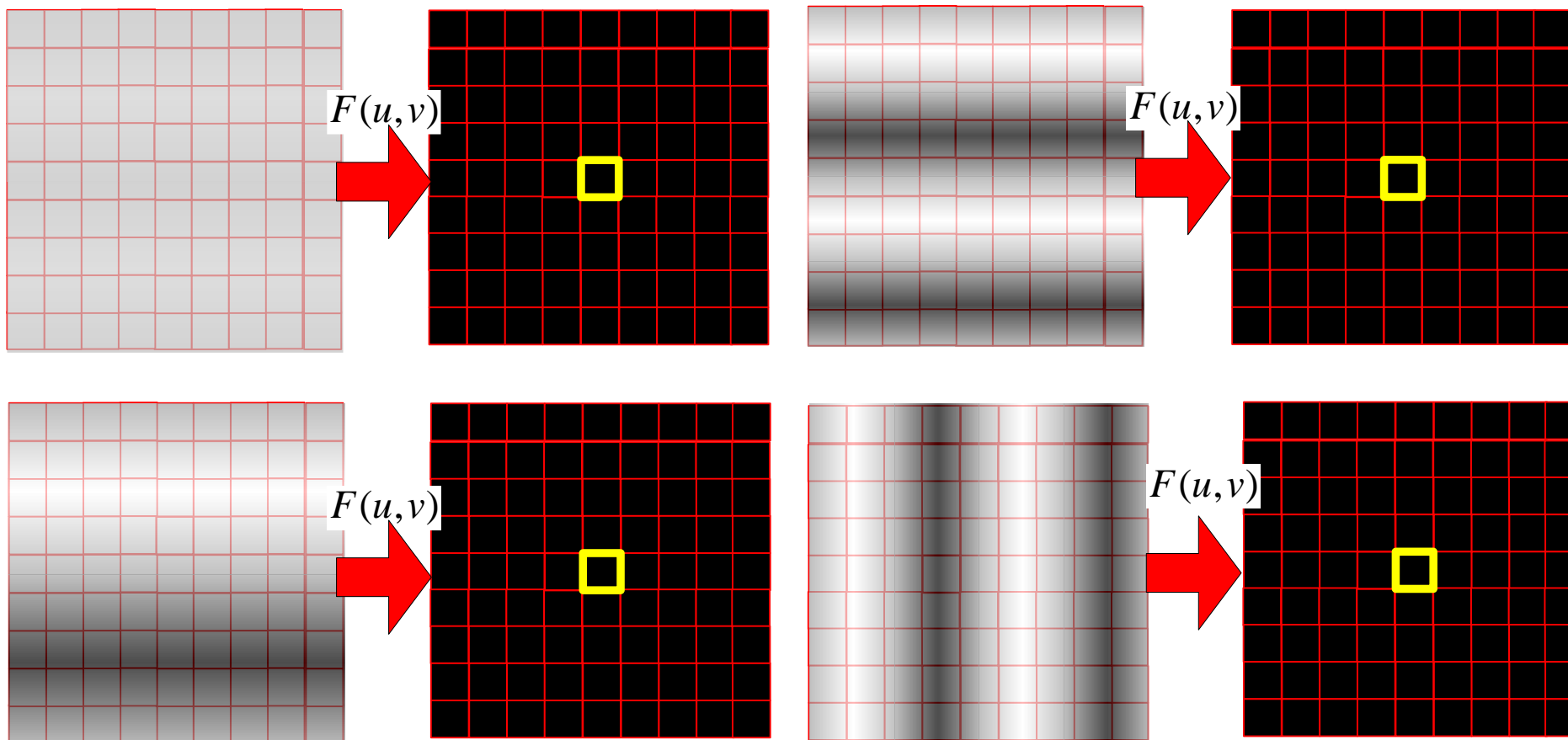
- $u_{min} = (1/p_{max}) =$
- $(1/9 \text{ pixels}) =$
- $(1/4,5 \text{m}) =$
- *$u_{min} = 0,2222.. \text{ciclos/m}$*
- *$ResHor = 0,2222.. \text{ciclos/m}$*
- *$u_{máx} = ResHor \times 4,5 = 1 \text{ciclo/m}$ (confere com slide anterior)*



Exemplo

- Assinale onde se encontra a(s) raia(s) de frequência(s) das transformadas abaixo.

– *Pause o Vídeo*



Resposta

– $u = 0$

– $v = 0$

– $u = 0$

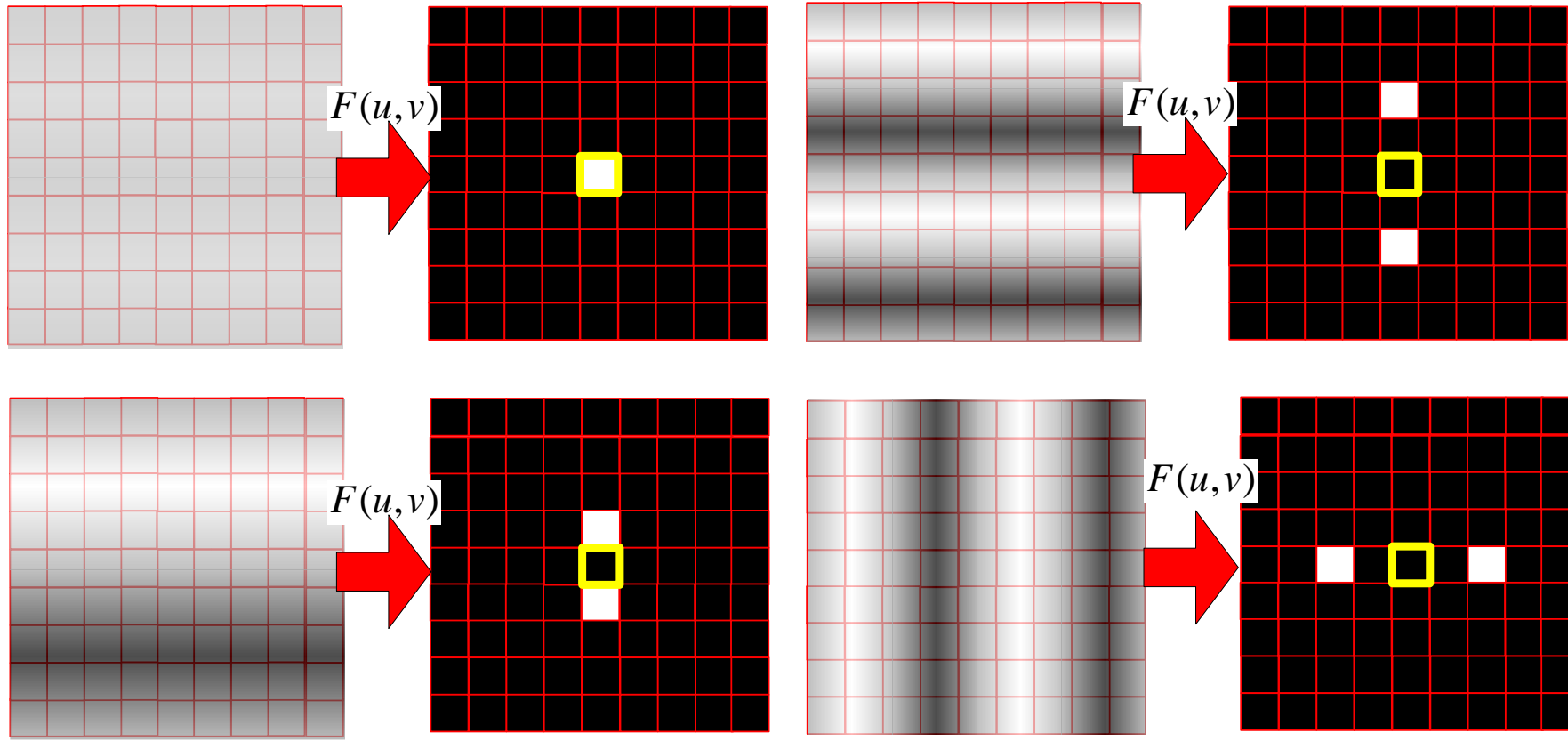
– $v = 0,2222 = 1 \text{ pixel no domínio de Fourier}$

– $u = 0$

– $v = 0,4444 = 2 \text{ pixels no domínio de Fourier}$

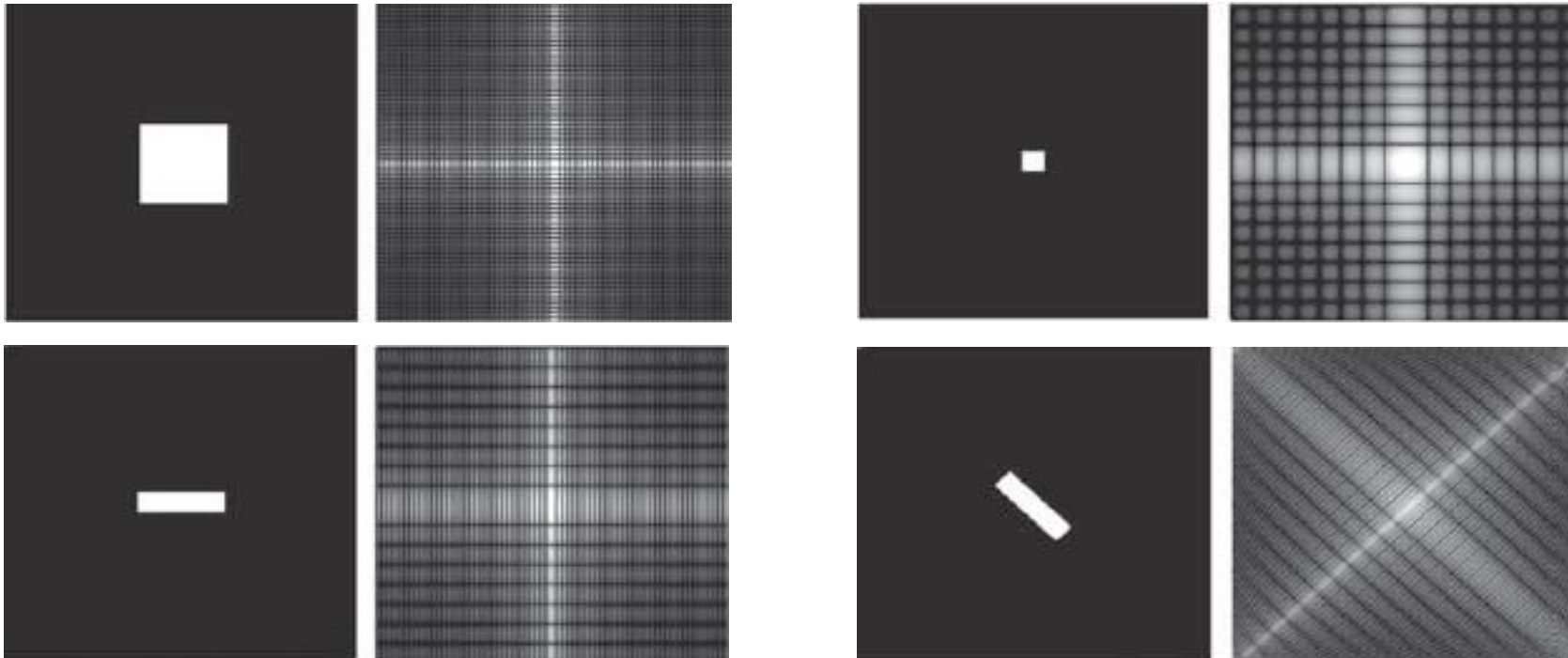
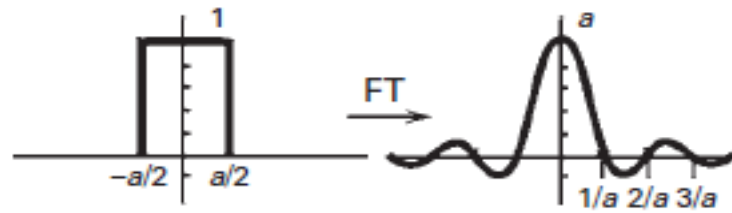
– $u = 0,4444 = 2 \text{ pixels no domínio de Fourier}$

– $v = 0$

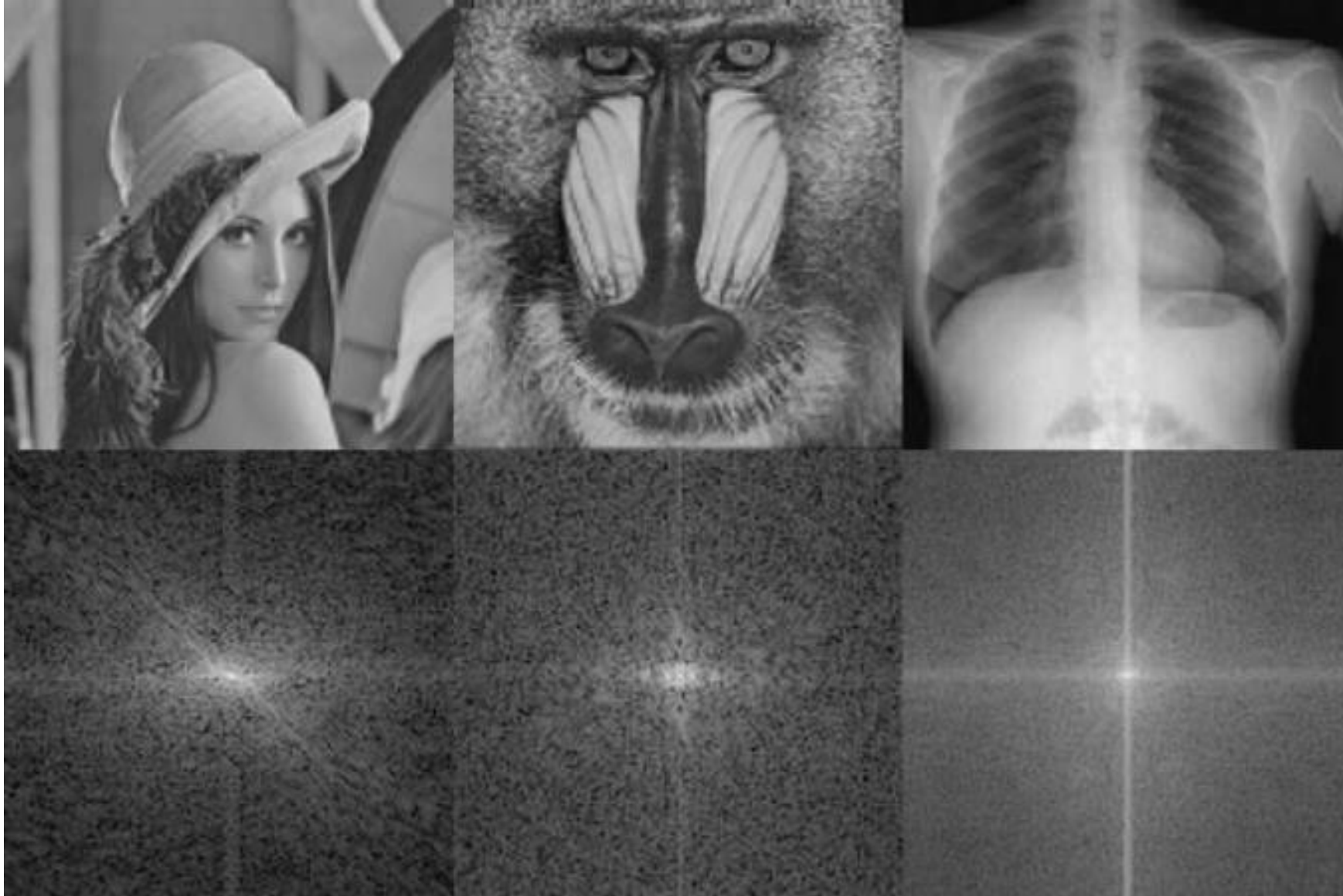


Exemplos

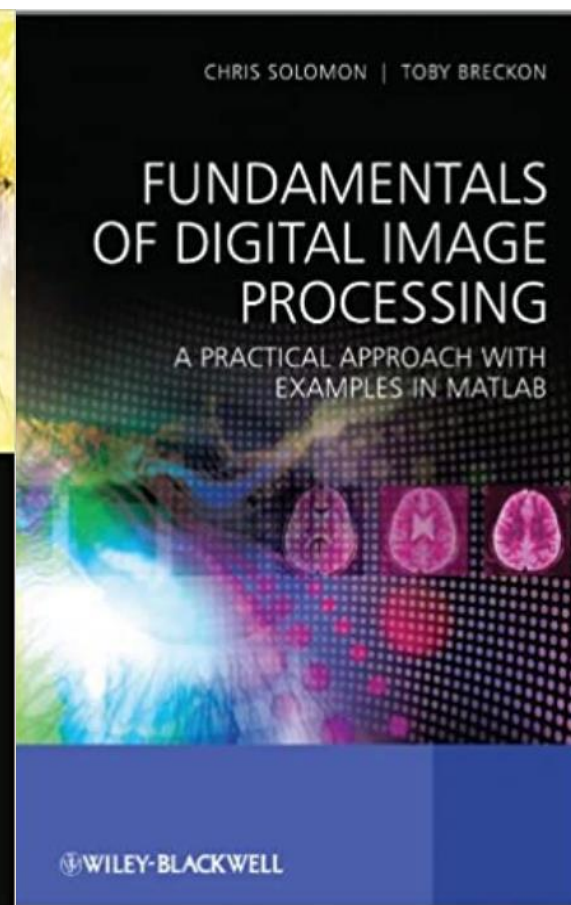
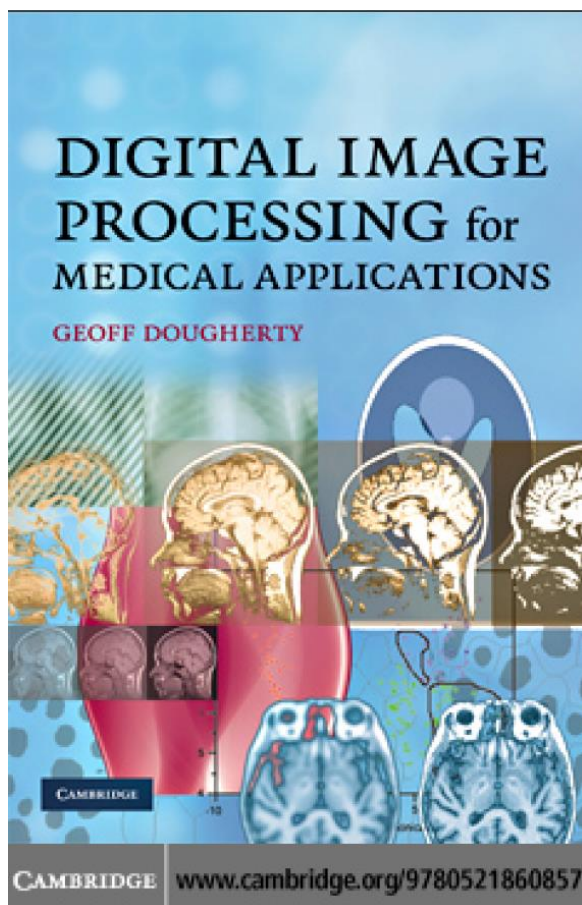
- Onda quadrada e *Sinc*
 - *Frequência espacial inversamente proporcional ao período*



Exemplos



Referências



Lab05