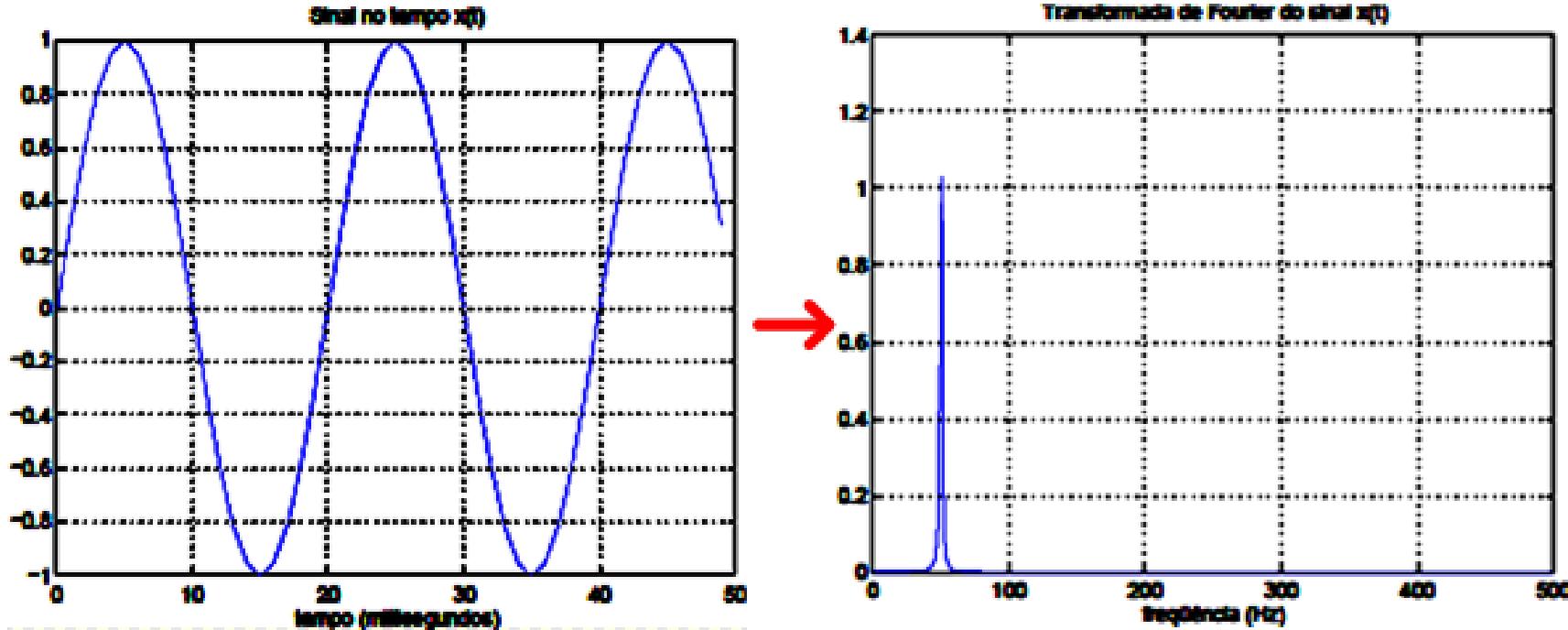


Tópico 05: Transformada de Fourier 1D e 2D

Prof. Dr. Matheus Cardoso Moraes

Transformada de Fourier 1D

- O que é uma Transformada?
 - Operação que leva funções de um domínio para outro.
- Ex. Módulo da TF: tempo → frequência



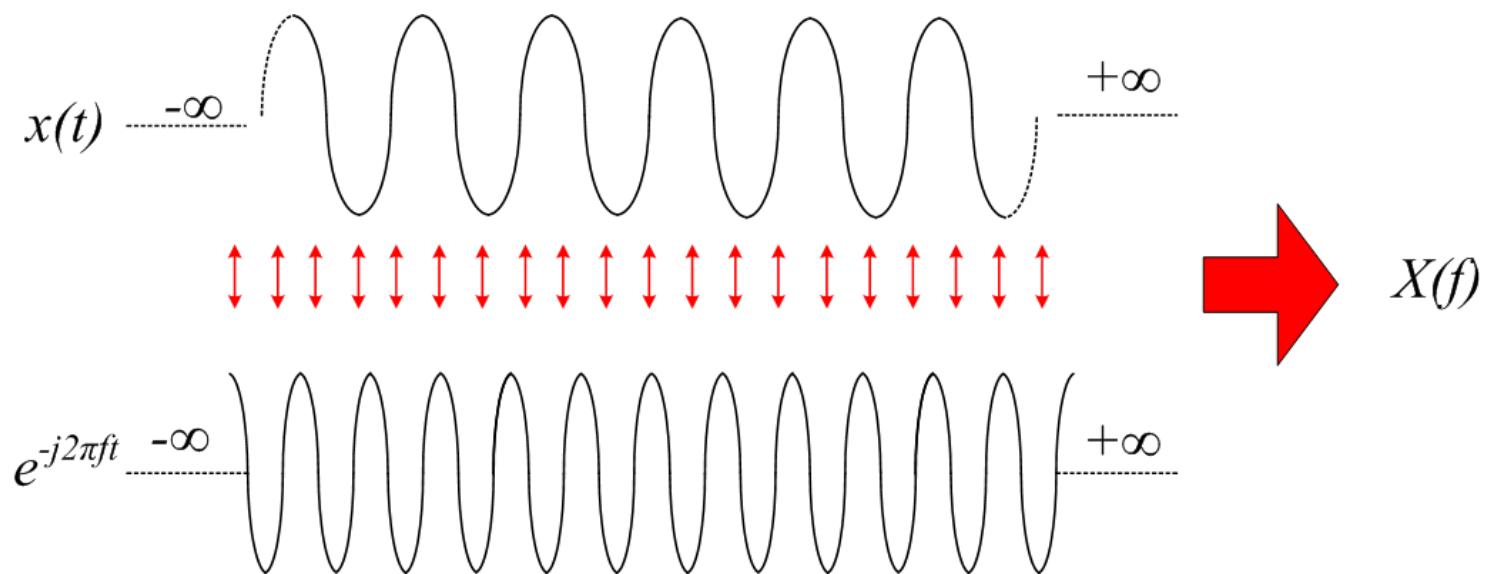
- Permite tirar informações de sinais, que não podem ou são difíceis de serem vistos com o sinal em sua forma original.

Transformada de Fourier (TF)

- Representação Matemática e Características

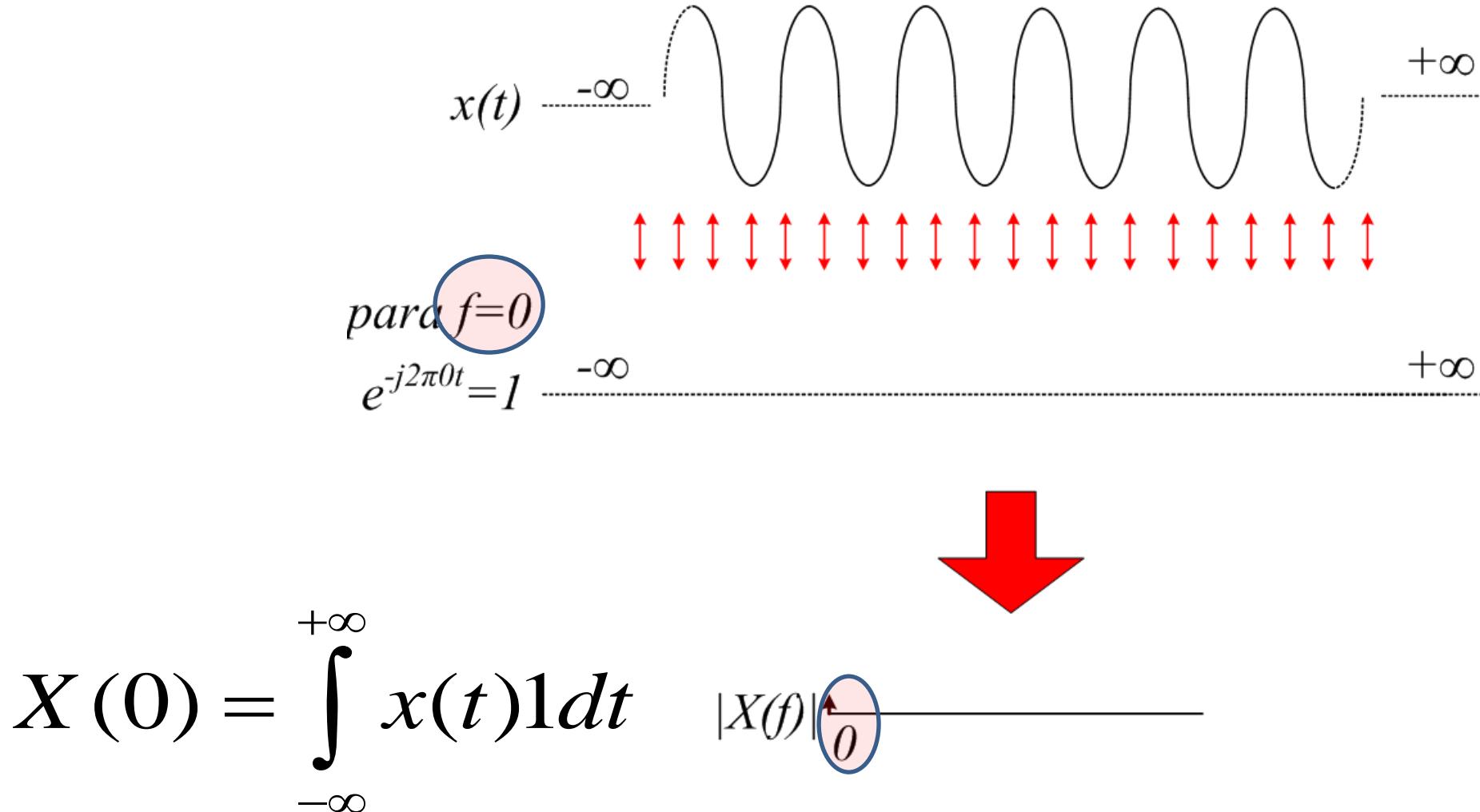
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Projeção entre um sinal $x(t)$ e sua função de transformação
- Possui **1** função de transformação $e^{-j2\pi ft}$
- Projeção (**Correlação**) é feita ao longo de todo o sinal.



Processo de Transformação

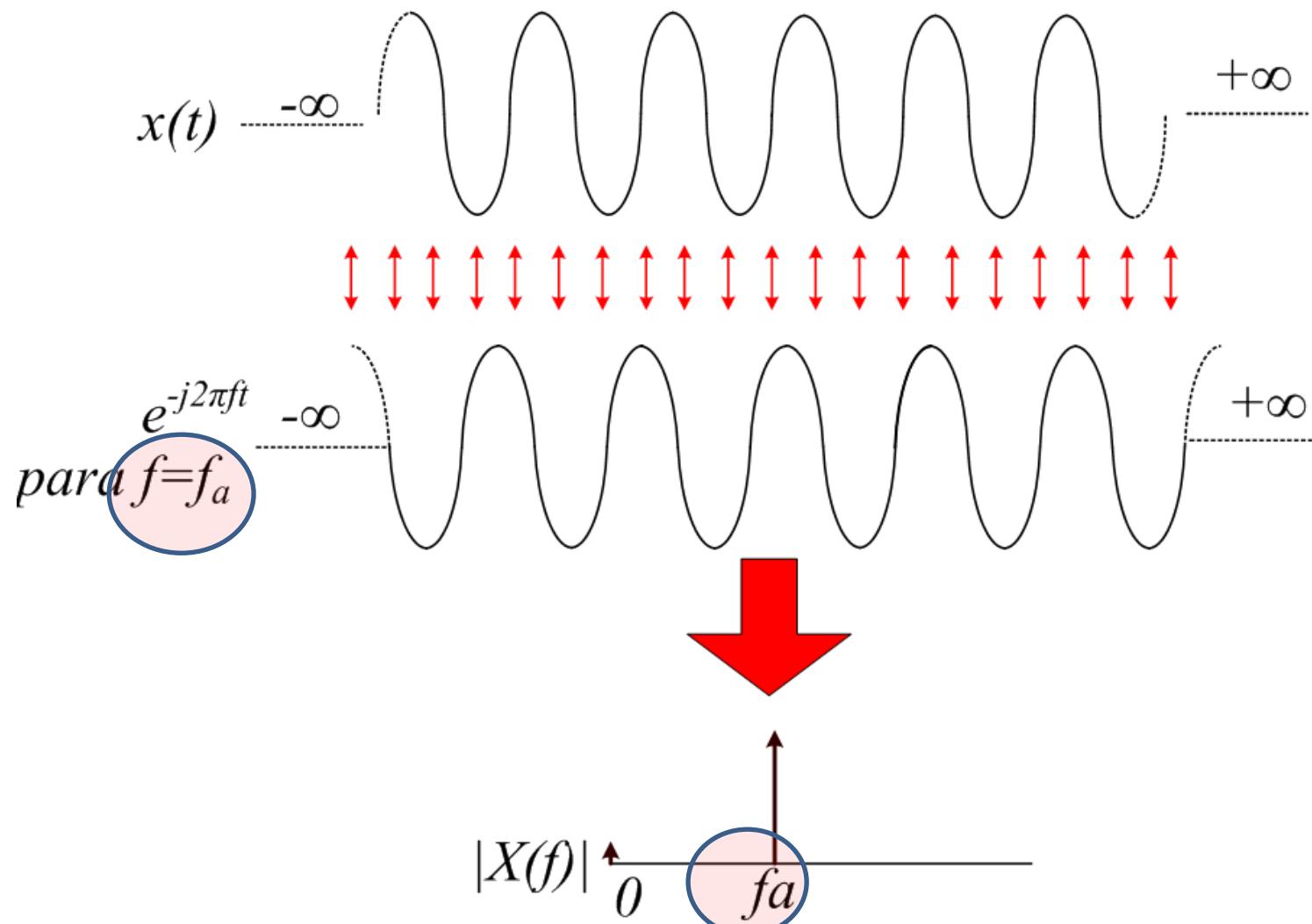
- Como a TF é uma função de 1 variável $f \rightarrow$ Os coeficientes são computados apenas com a variação de f



Processo de Transformação

- Para $f = f_a$

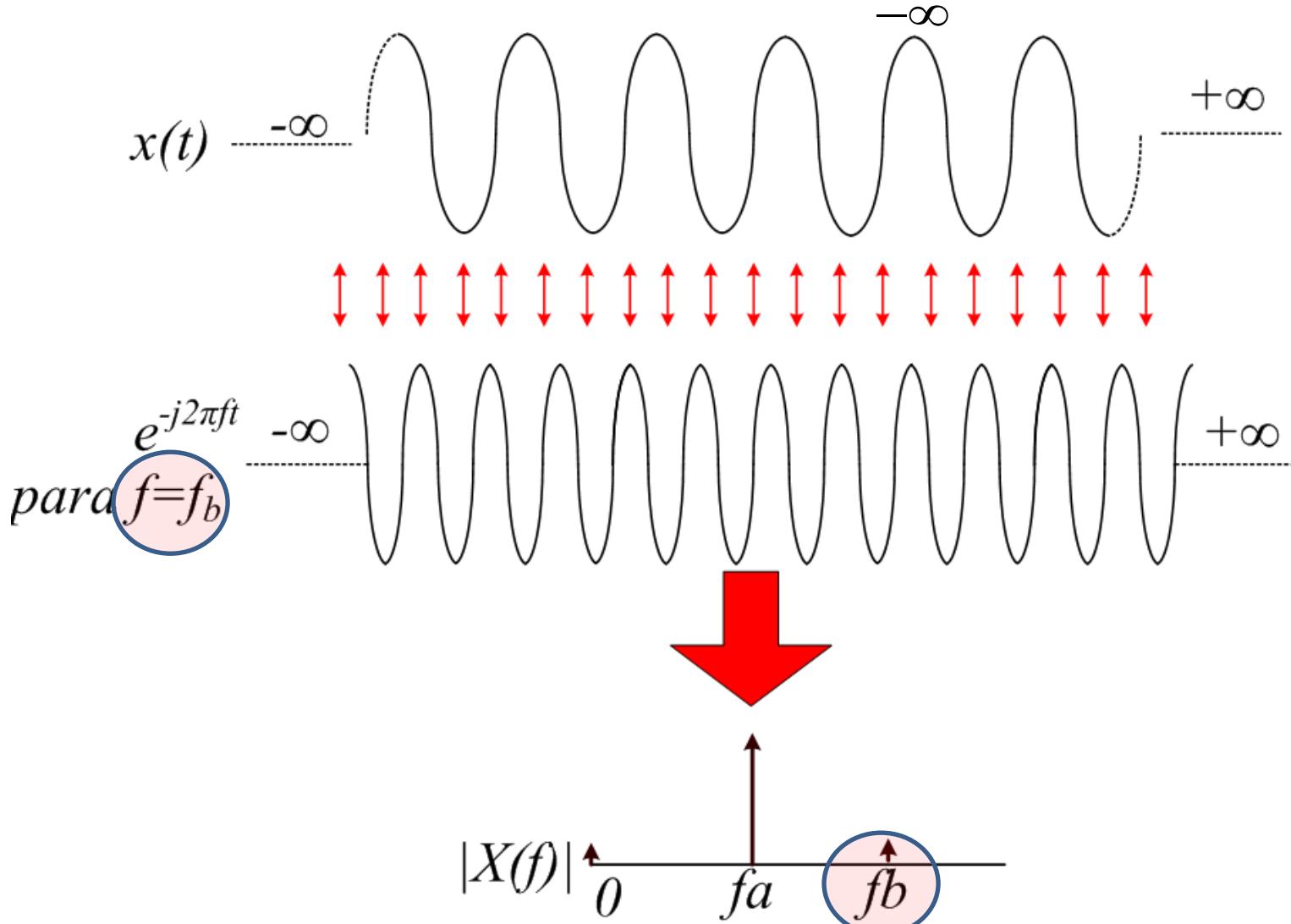
$$X(f_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_a t} dt$$



Processo de Transformação

- Para $f = f_b$

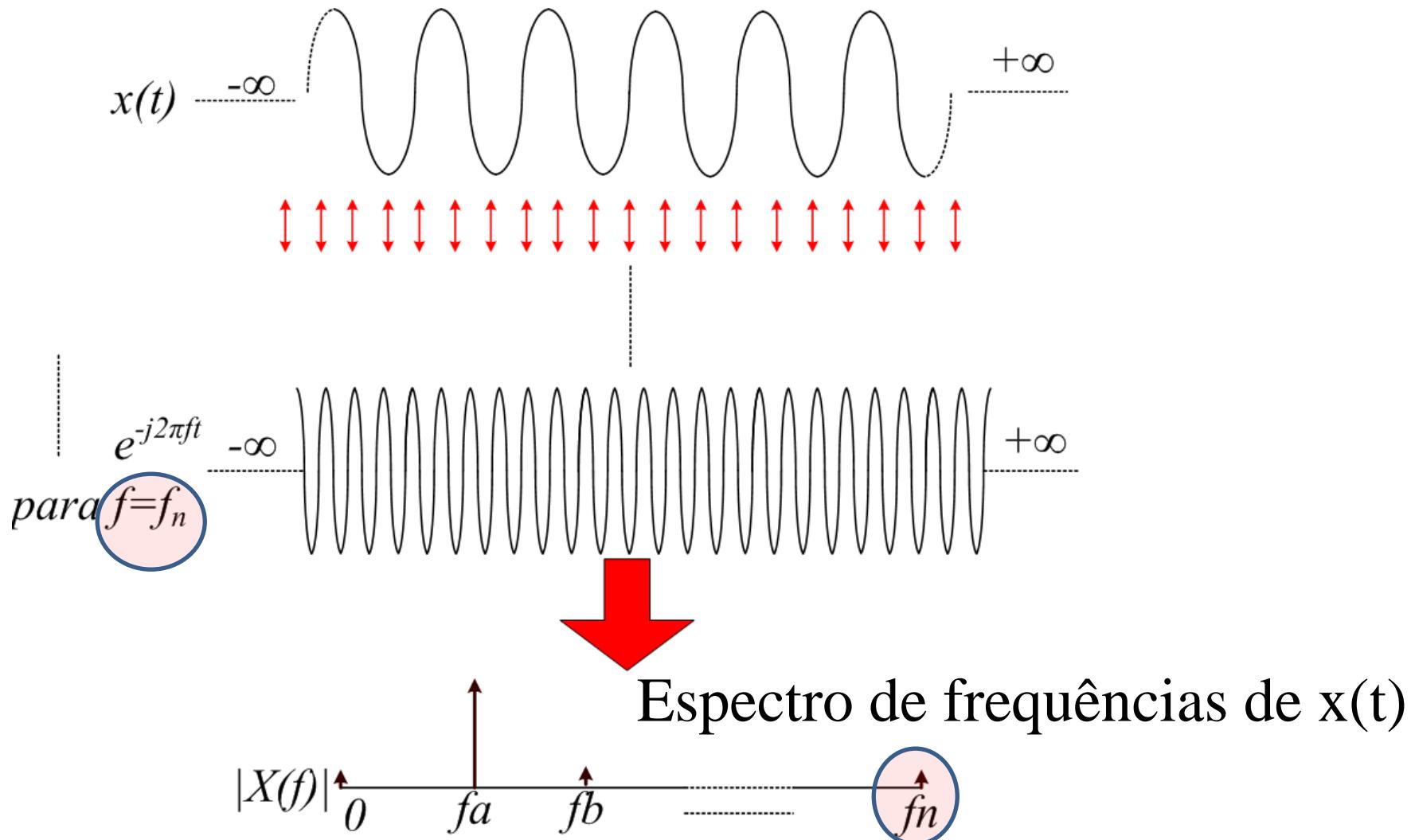
$$X(f_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_b t} dt$$



Processo de Transformação

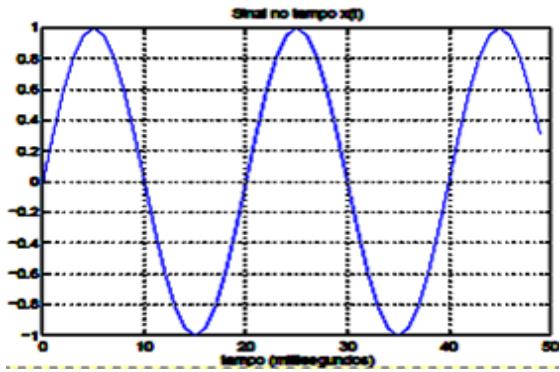
- Para $f = f_n$

$$X(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

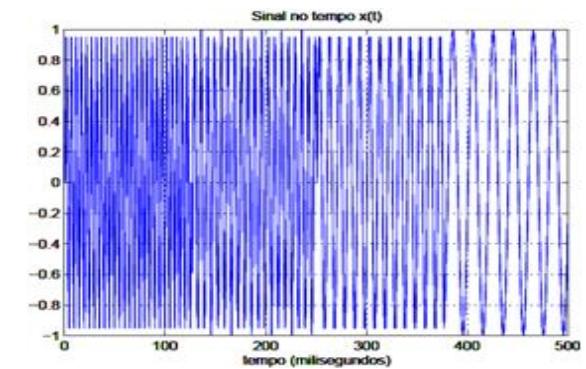
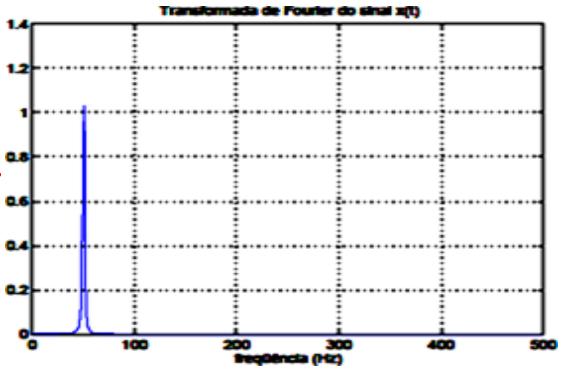


Objetivo

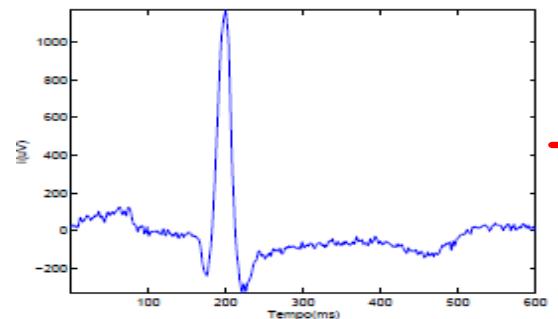
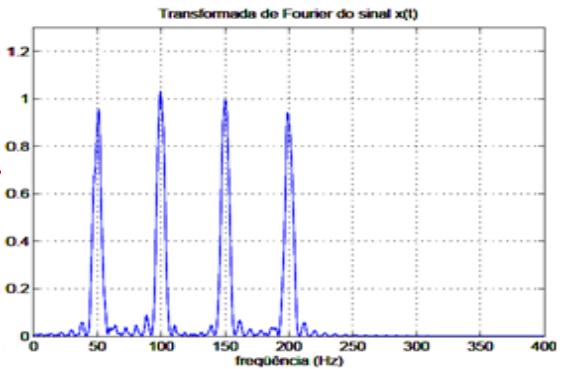
- Trazer informação de frequência de sinais
 - Representação formal Matemática tem f de $-\infty$ à $+\infty$



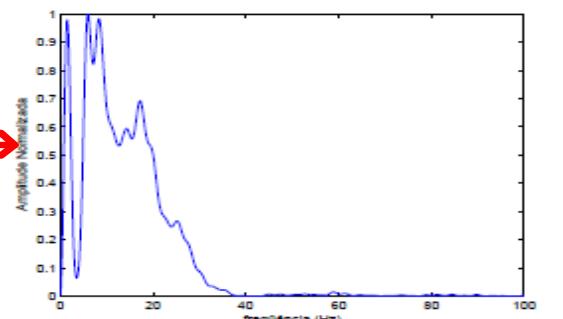
TF

TF

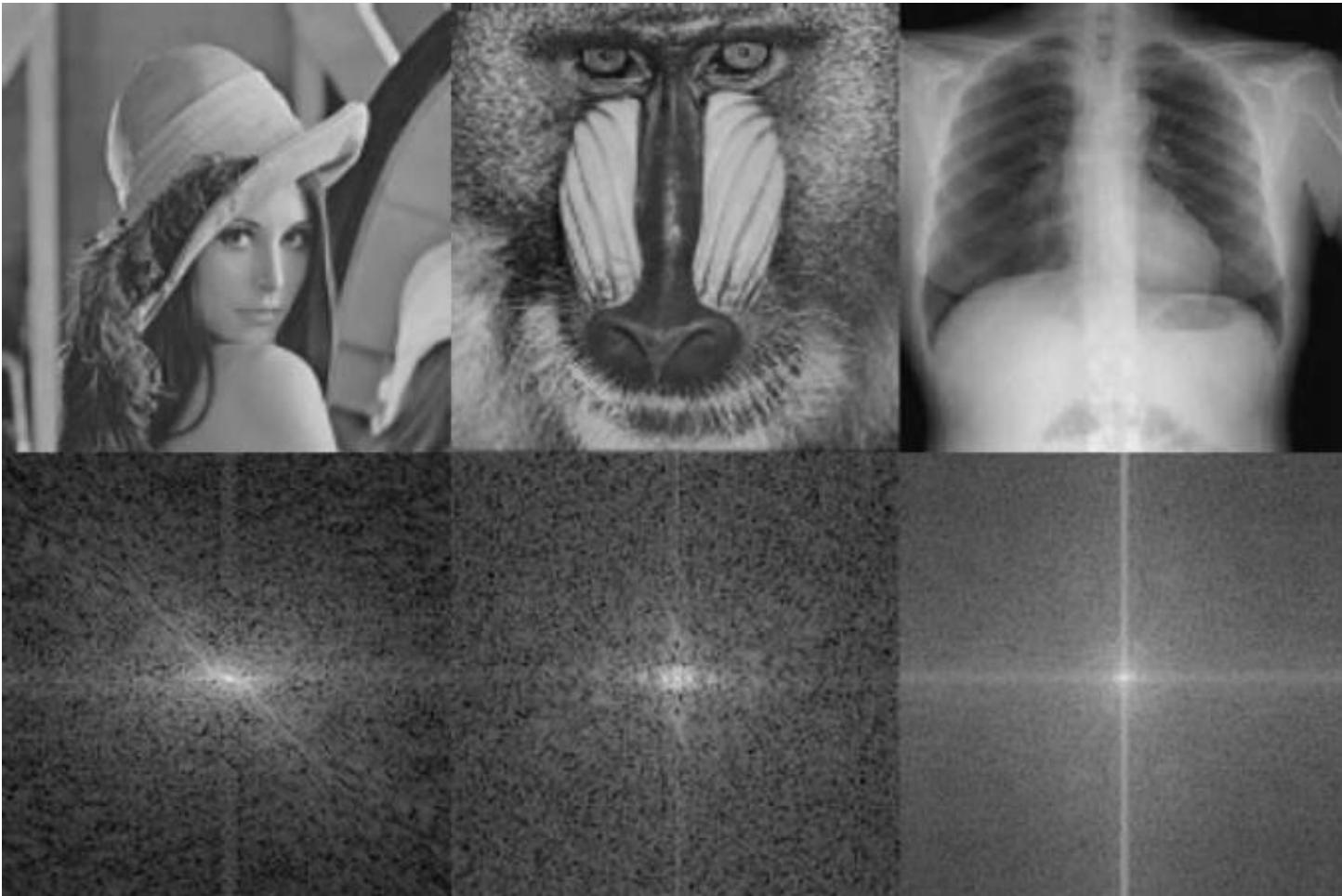



TF

Transformada de Fourier 2D

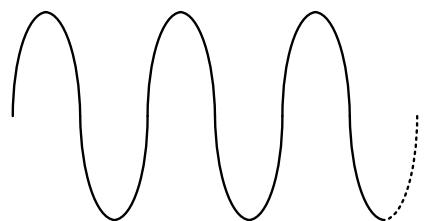
- Operação que obtém componentes de frequência em funções de 2 variáveis.
- Ex. Módulo da TF: espacial → frequência espacial



Analogia entre Fourier 1D e 2D

- As função possuem 2 variáveis.
- $f \rightarrow$ frequência temporal (*oscilações / unidade temporal - ex. segundo*)
- $t \rightarrow$ posição temporal (*unidade temporal - ex. segundo*)
- u e $v \rightarrow$ frequência espacial horizontal e vertical (*oscilações / unidade espacial - ex. metro*)
- x e $y \rightarrow$ posição espacial horizontal e vertical (*unidade espacial - ex. metro*)

$$e^{-j2\pi ft}$$



$$e^{-j2\pi(ux+vy)}$$

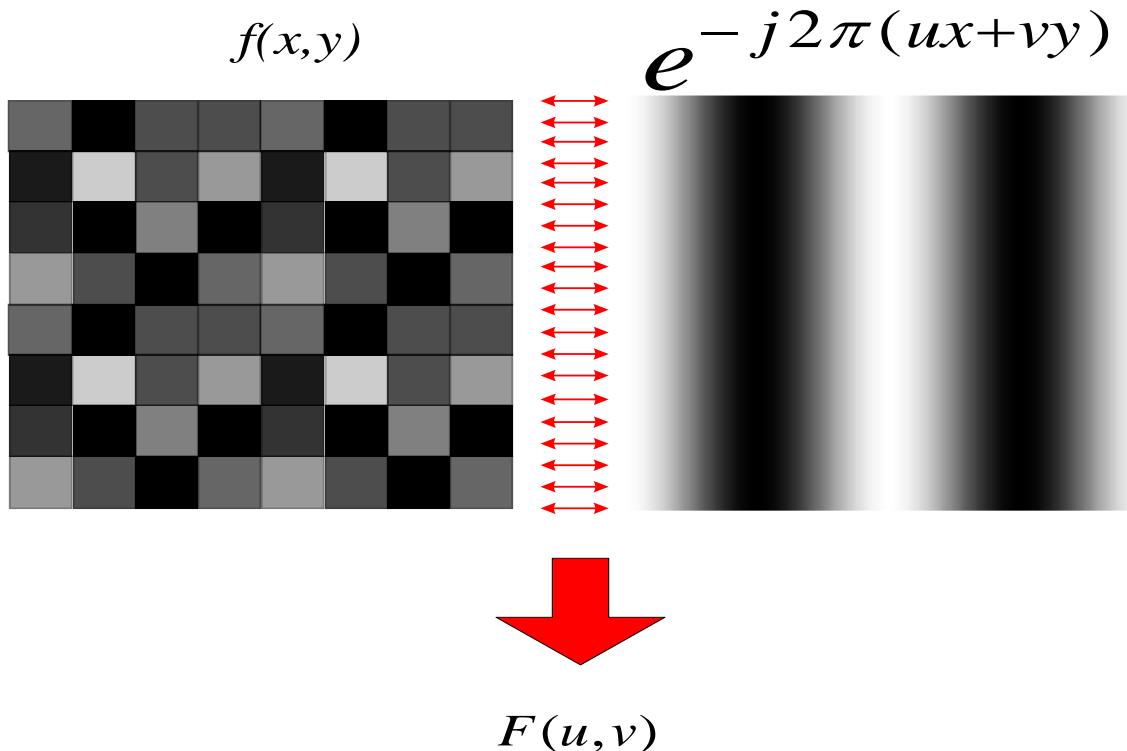


Transformada de Fourier 2D (TF2)

- Representação Matemática e Características

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- Projeção entre uma imagem $f(x, y)$ e a função de transformação

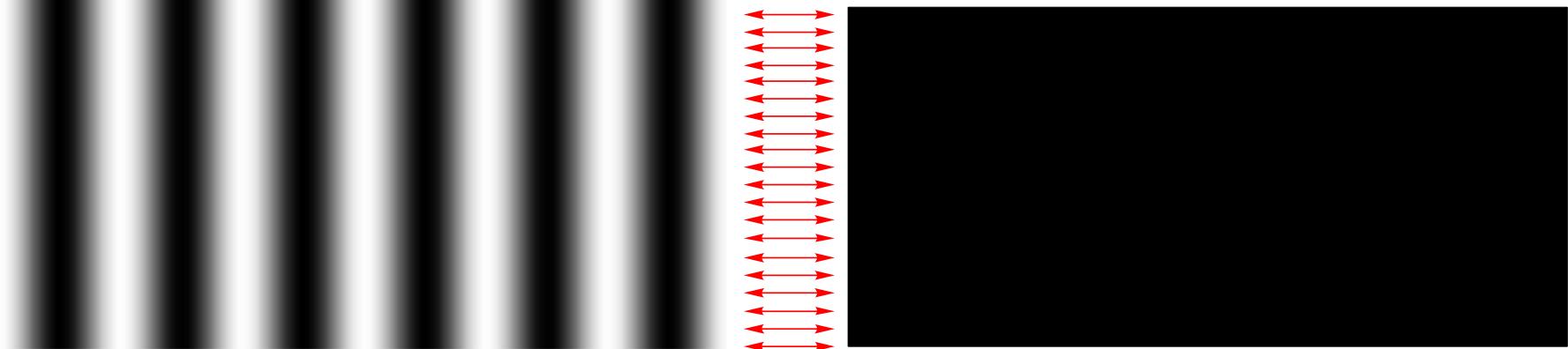


Processando a $TF2D$

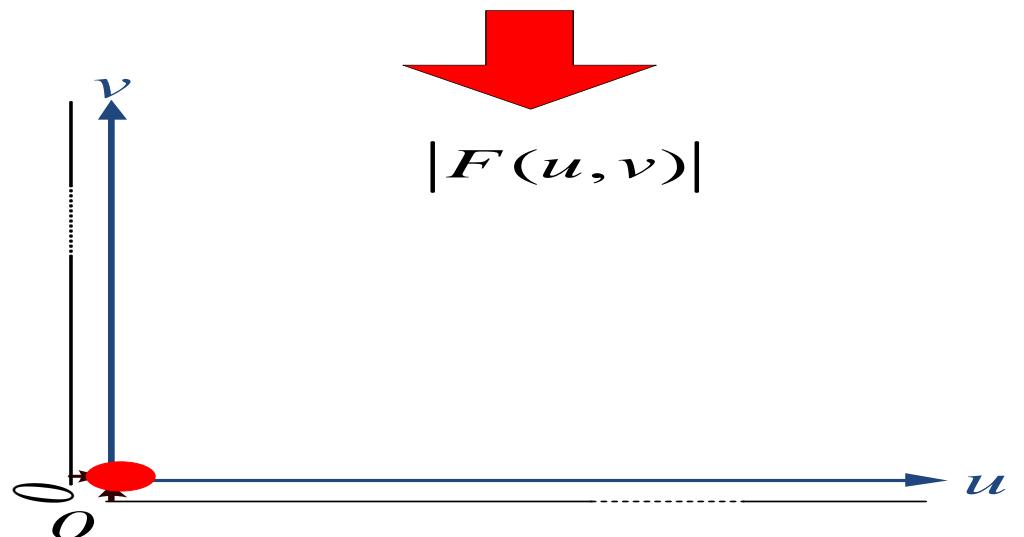
- Correlação entre f e e com a variação de u e v

para u e $v = 0$

$$f(x, y)$$

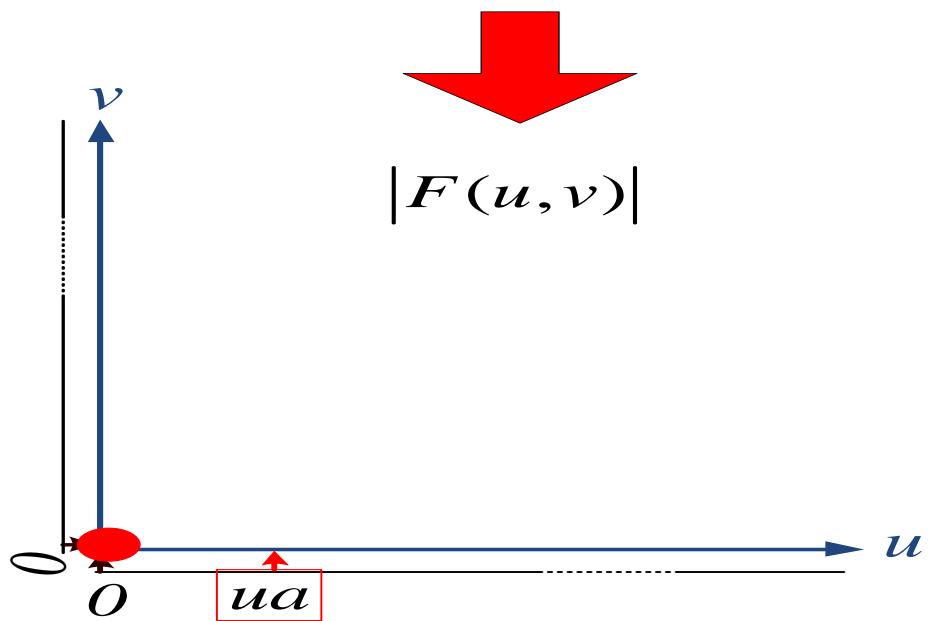
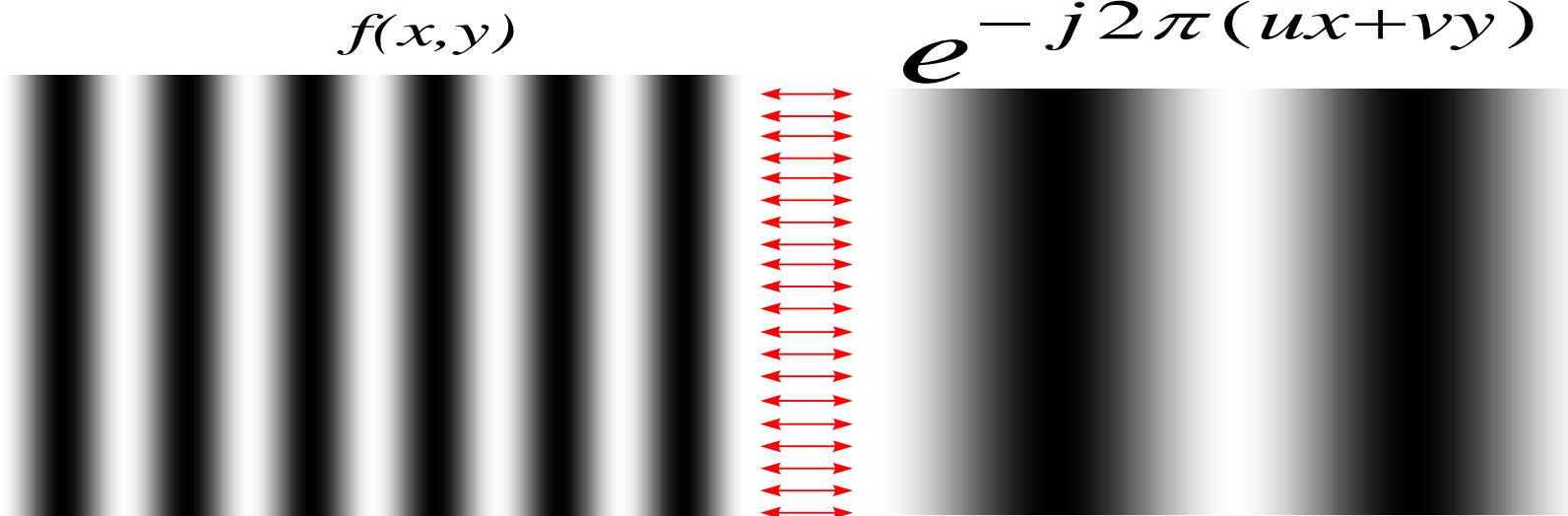


$$e^{-j2\pi(O)} = I$$



Processando a $TF2D$

para $\textcolor{red}{u} = ua$ e $\textcolor{red}{v} = o$

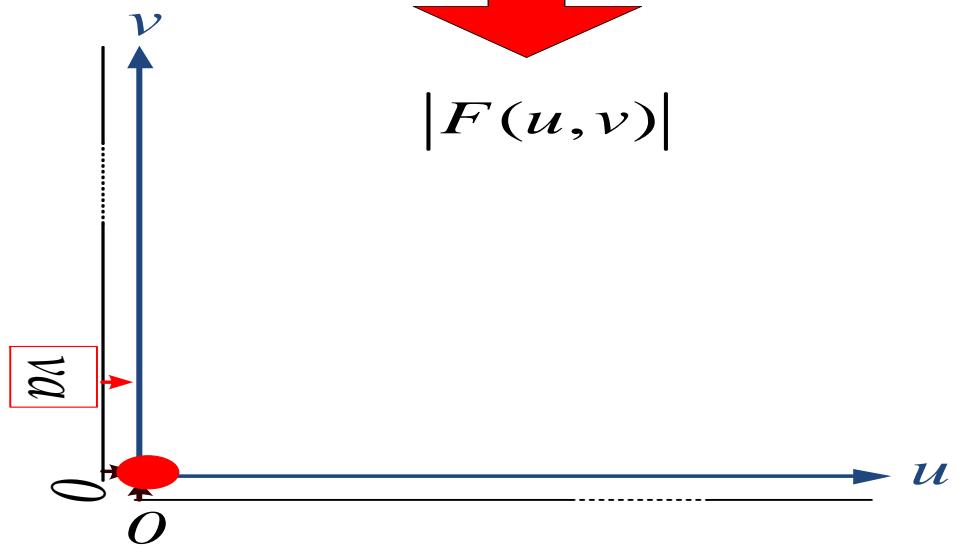
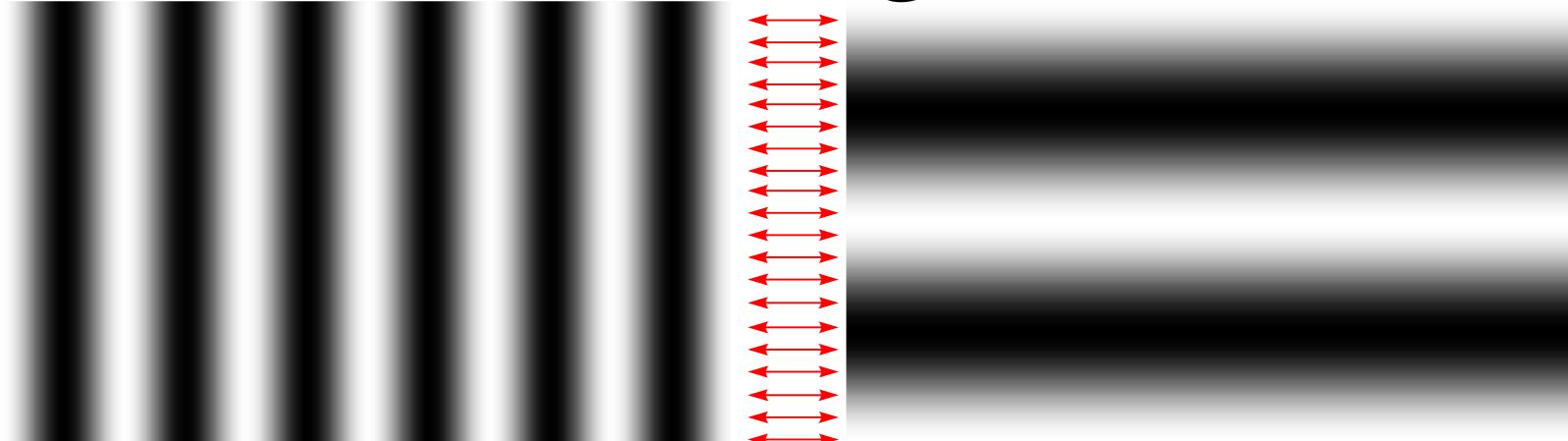


Processando a $TF2D$

para $u = 0$ e $v = va$

$$f(x, y)$$

$$e^{-j2\pi(ux+vy)}$$

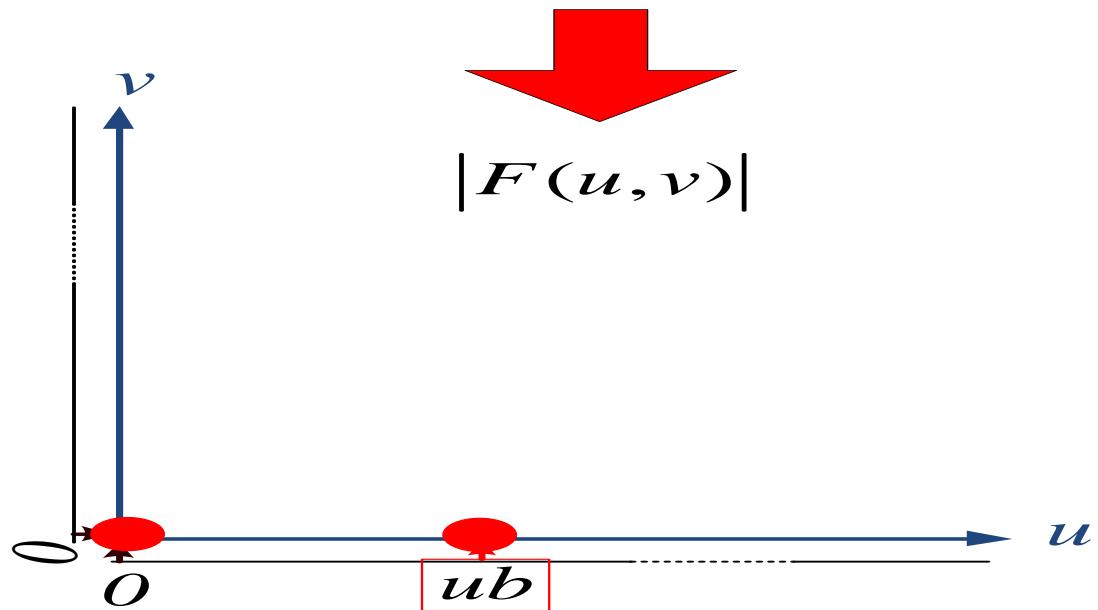
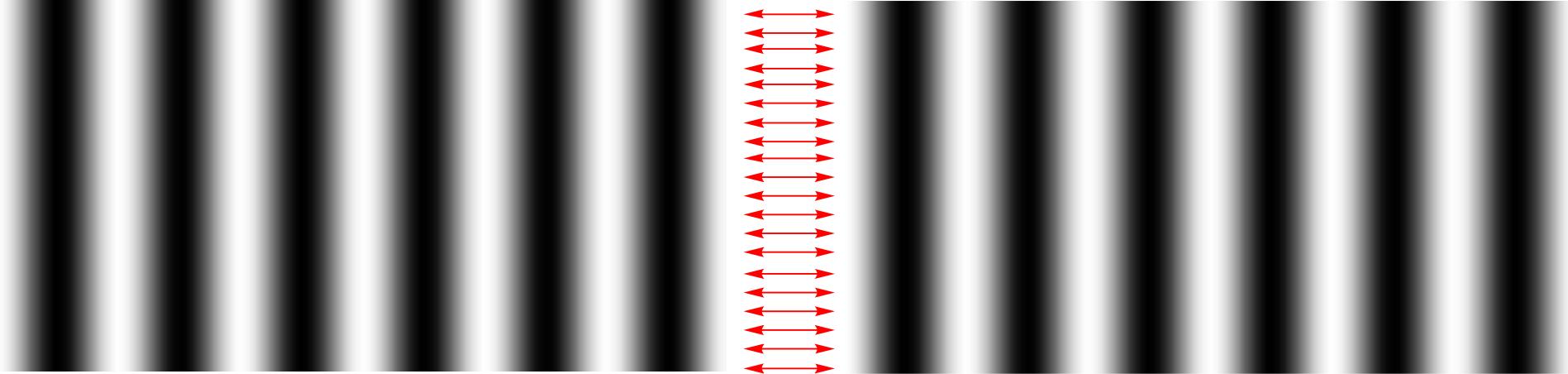


Processando a $TF2D$

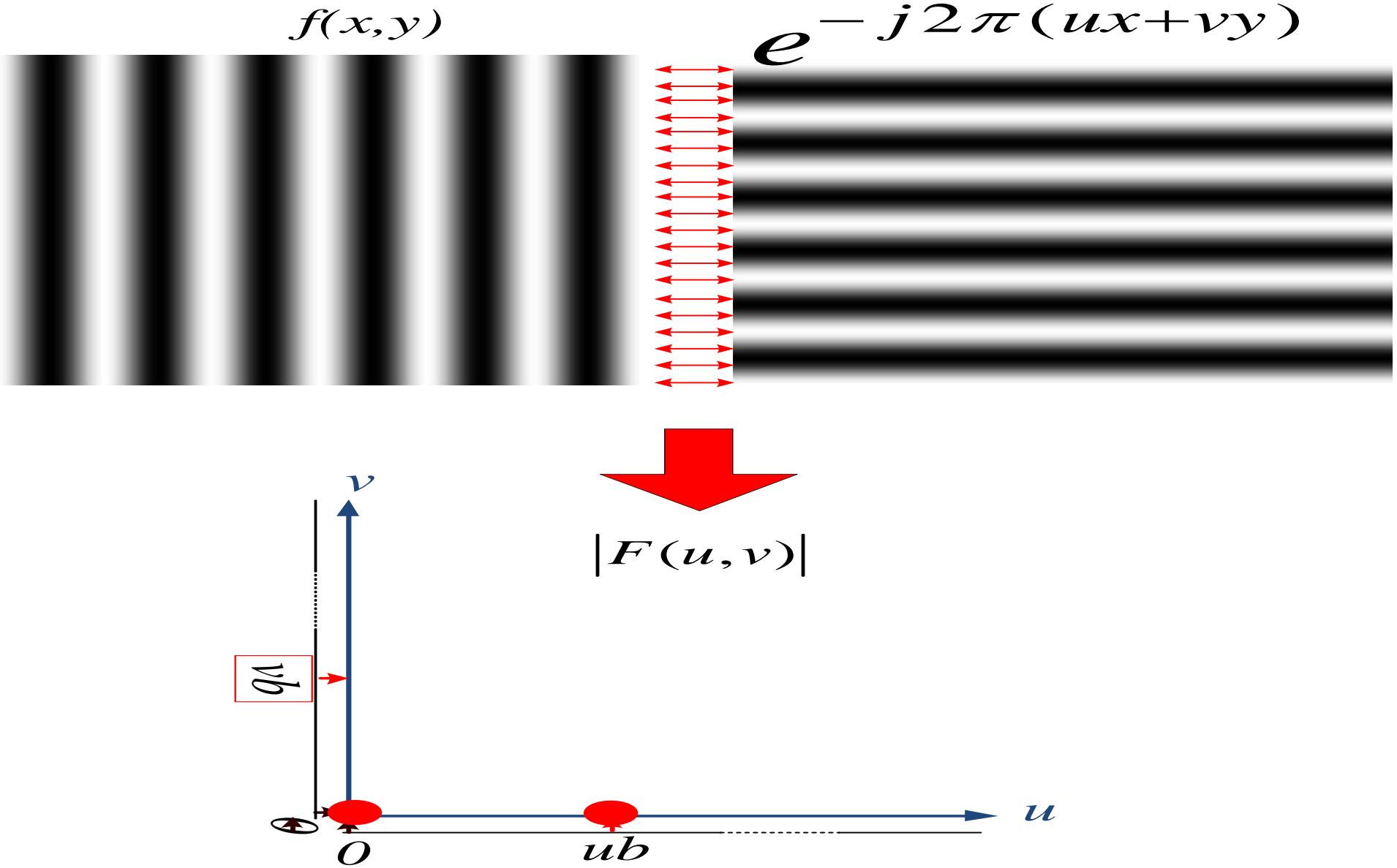
$f(x, y)$

para $u = ub$ e $v = o$

$$e^{-j2\pi(ux+vy)}$$



Processando a $TF2D$

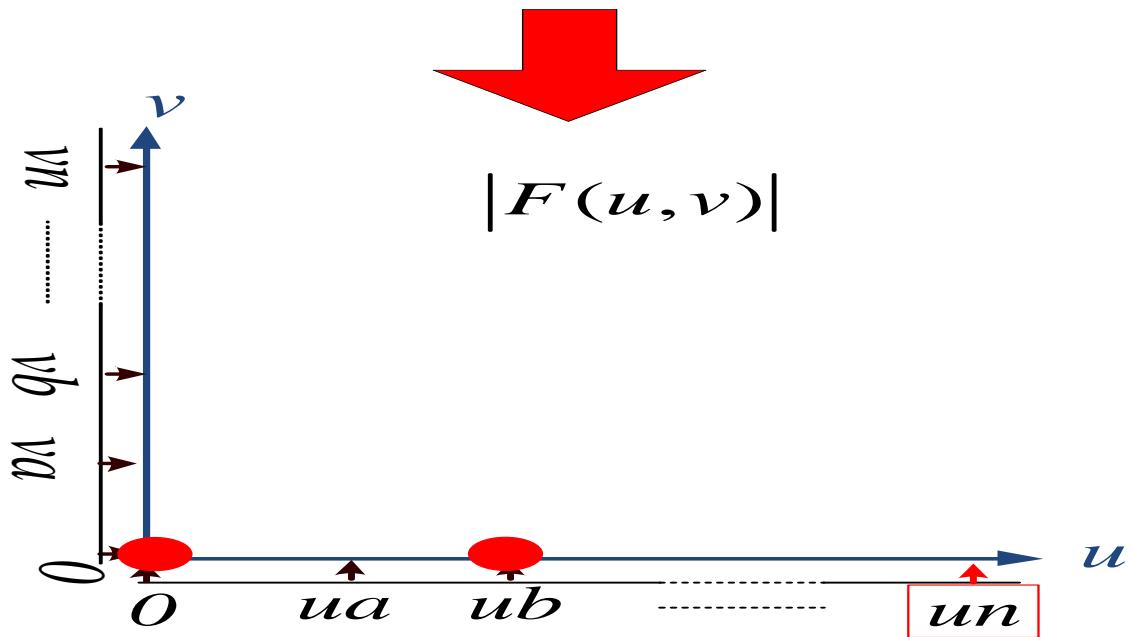
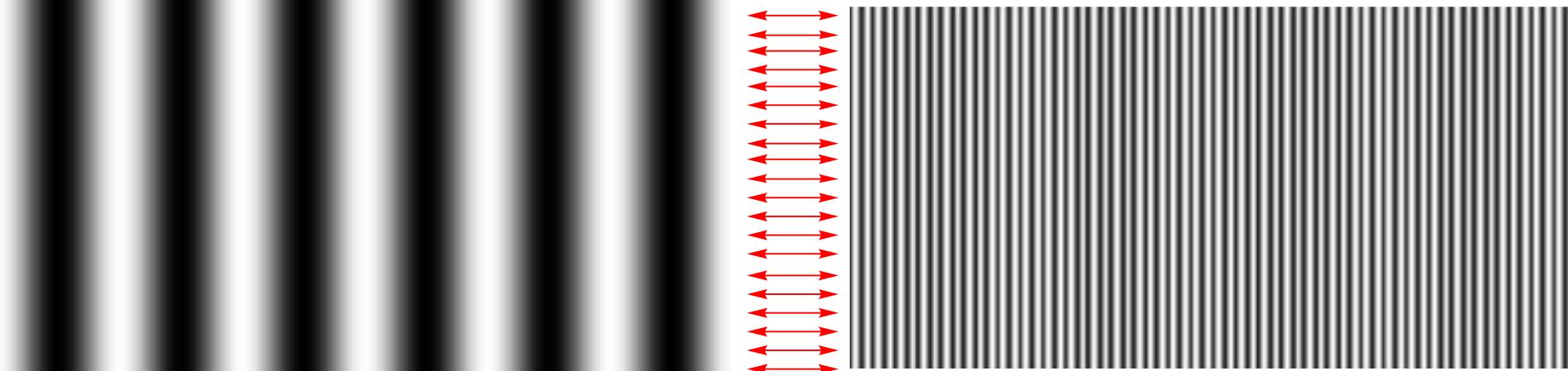


Processando a TF2D

para $\mathbf{u} = un$ e $\mathbf{v} = o$

$$e^{-j2\pi(ux+vy)}$$

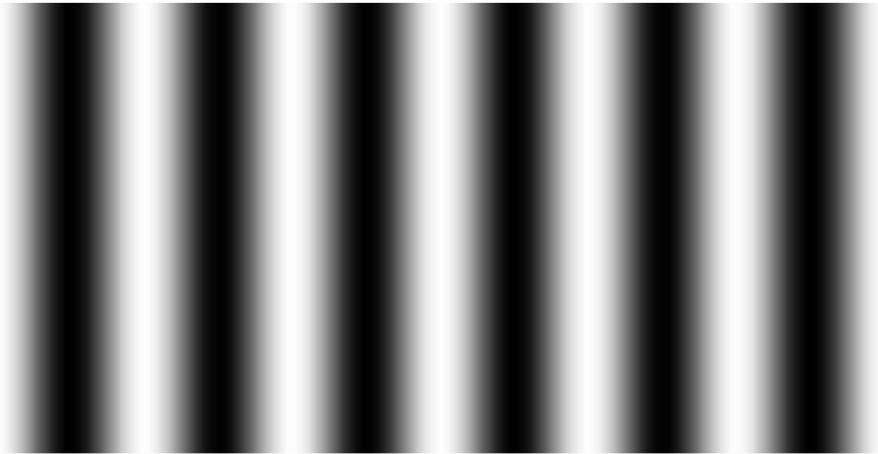
$f(x, y)$



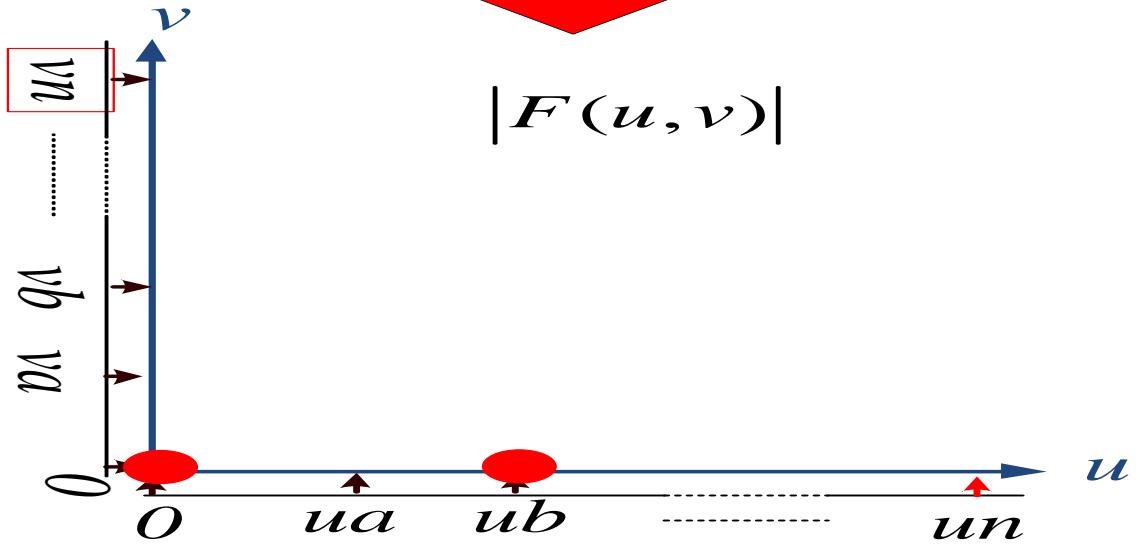
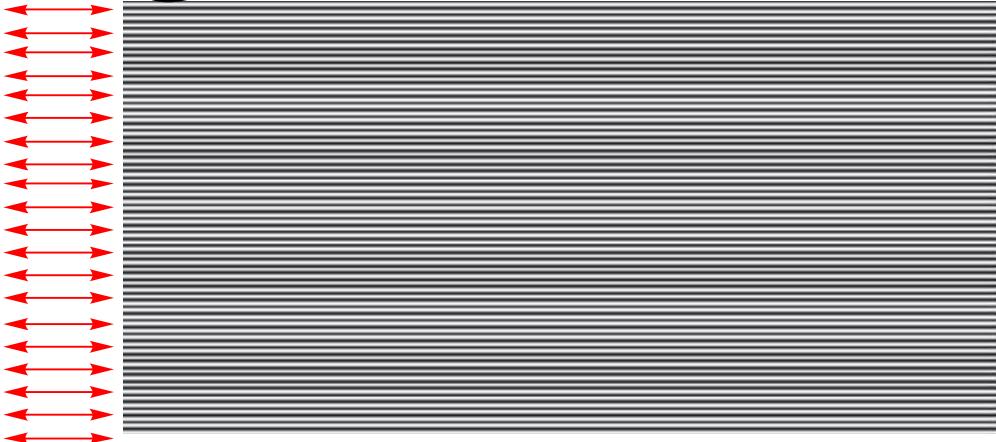
Processando a TF2D

para $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{vn}$

$f(x, y)$

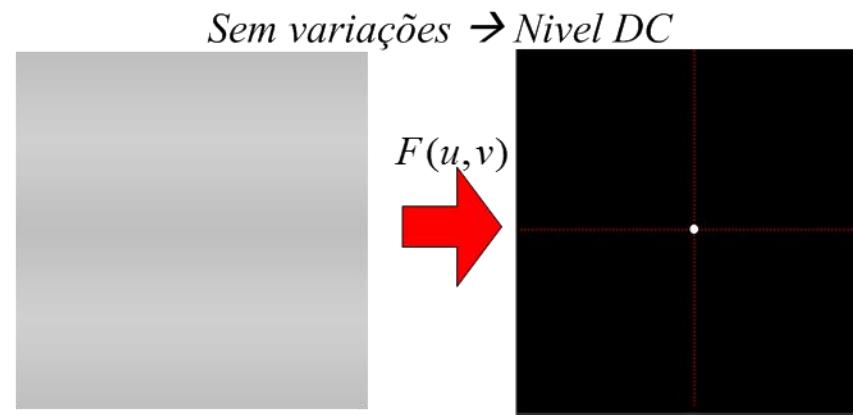
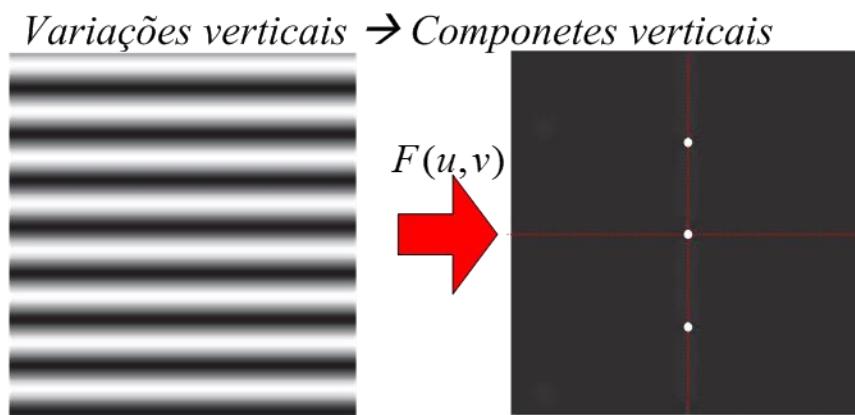
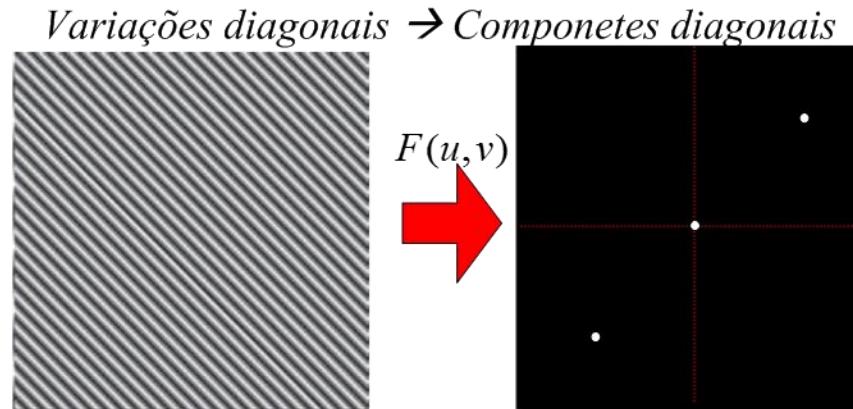
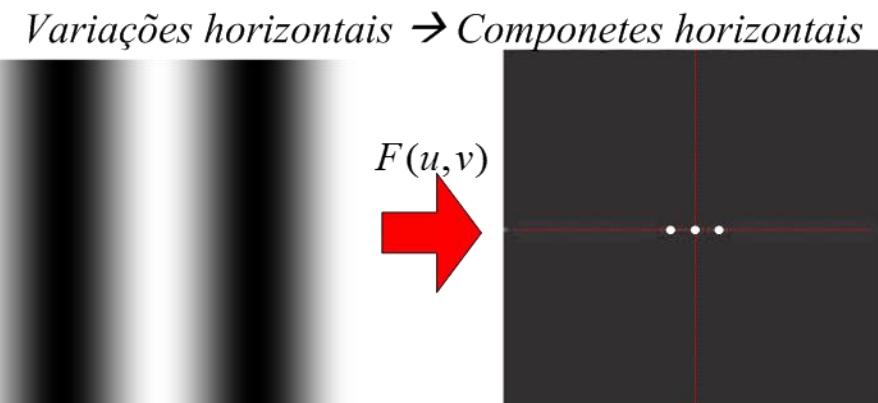


$$e^{-j2\pi(ux+vy)}$$



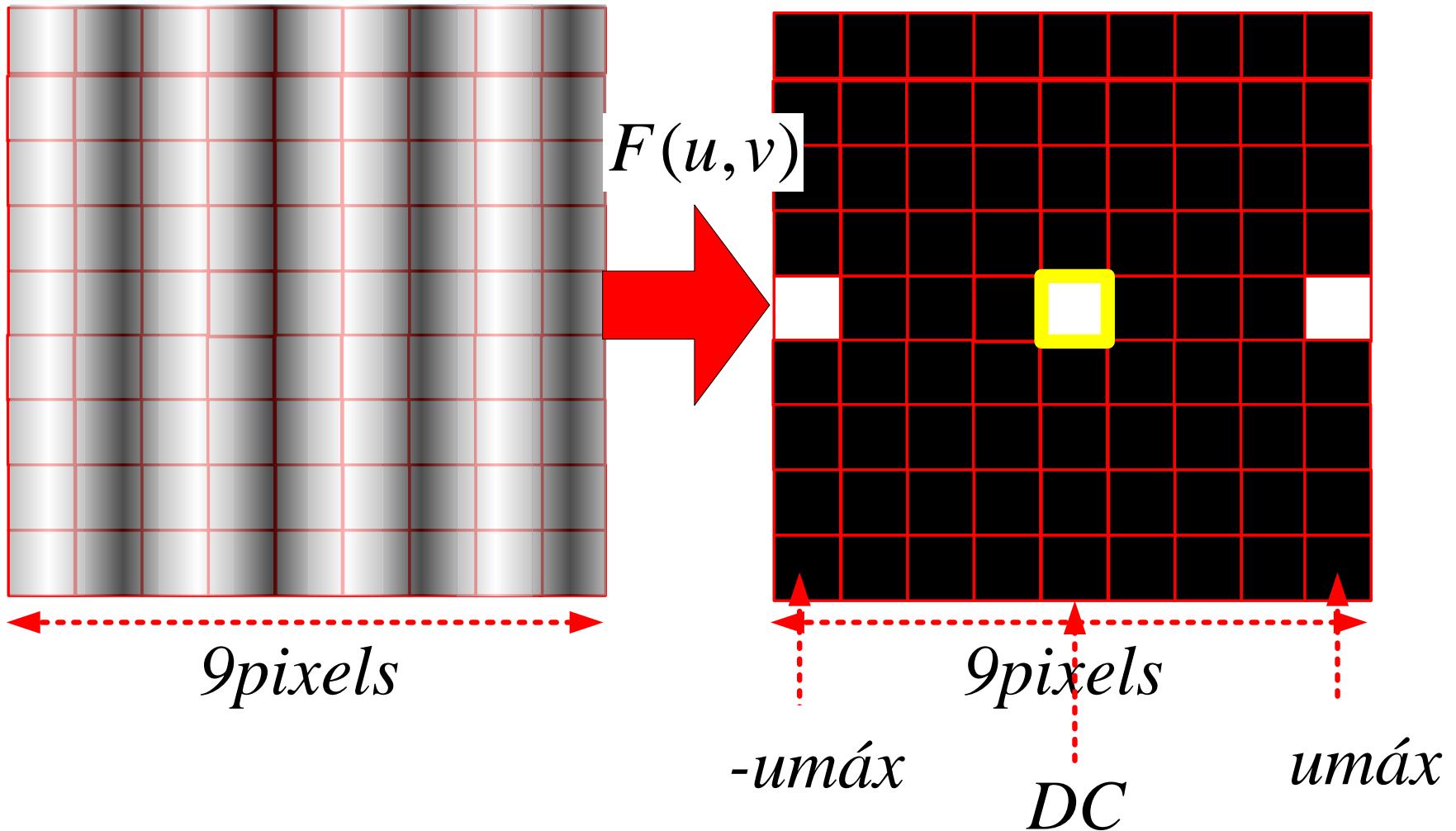
Objetivo

- Trazer componentes de frequência vertical e horizontal de imagens.
 - Representação formal Matemática tem u e v de $-\infty$ à $+\infty$



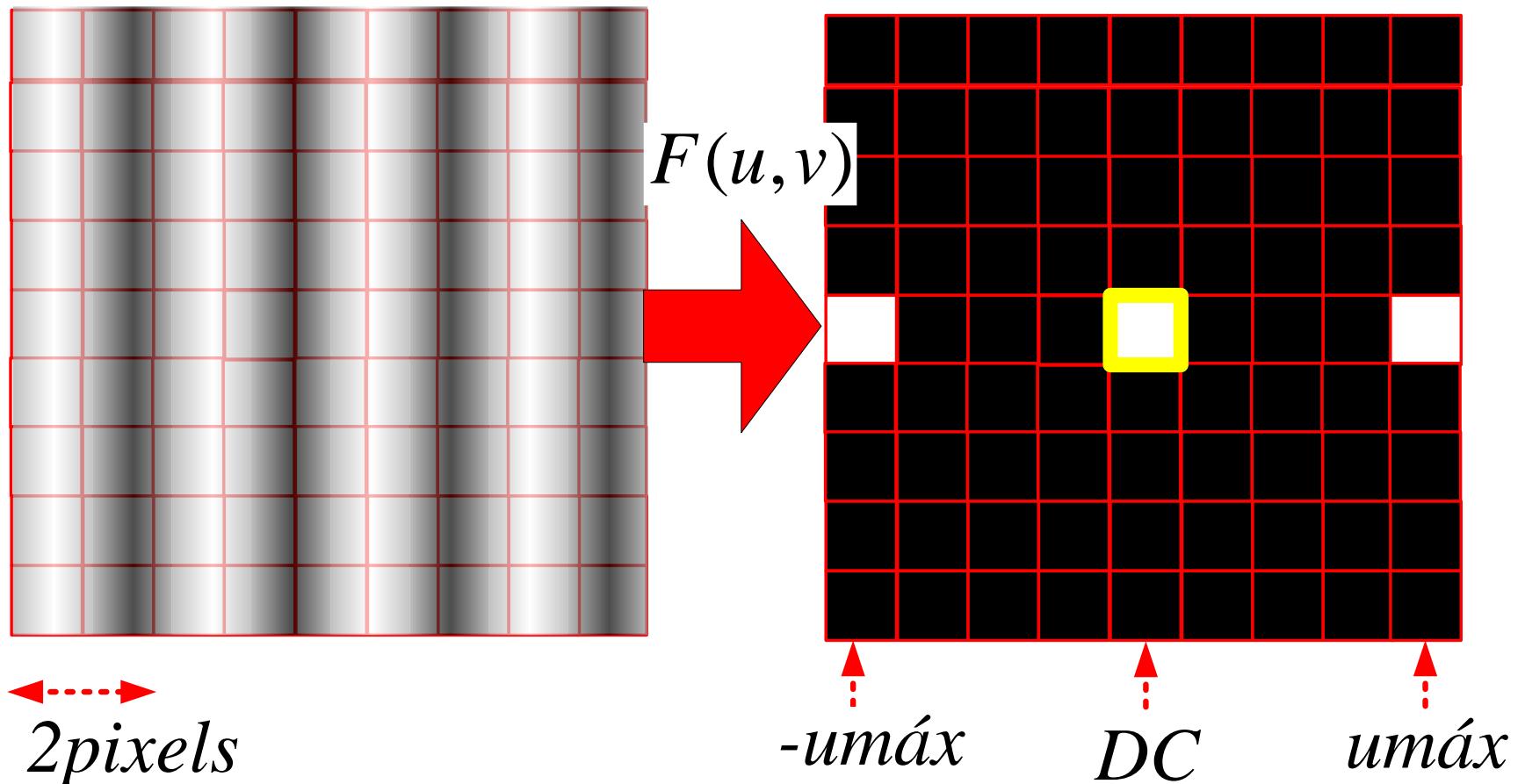
Características

- O tamanho da representação espacial e frequência são os mesmos
- O espectro contém as correspondentes frequências negativas na vertical e horizontal.



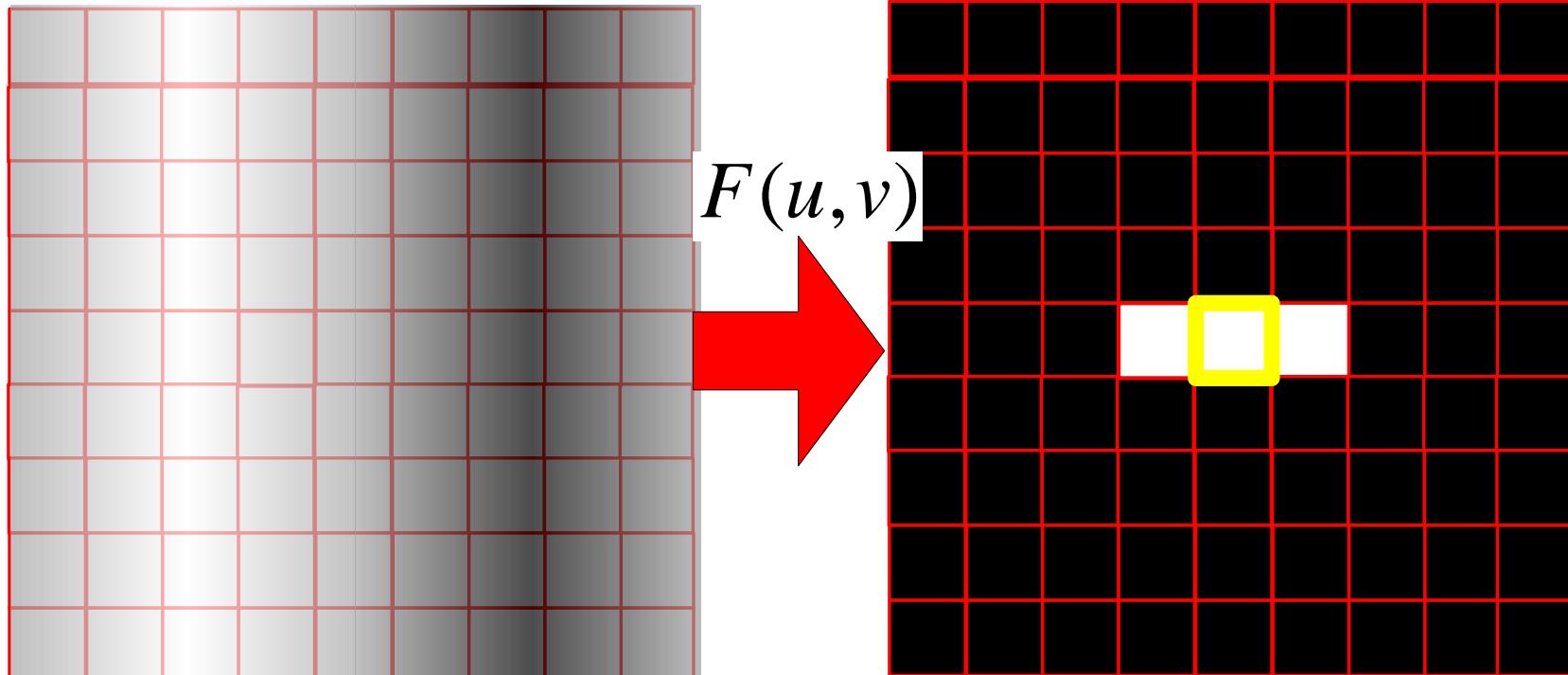
Características

- Resolução espacial
- Período mínimo
 - $p_{min} = 2\text{pixels}$
 - Exemplo resolução do pixel = 0,5m
 - $p_{min} = 1\text{m}$
- Resolução em frequência.
- Frequência Máxima
 - $u_{max} = (1/p_{min}) =$
 - $(1/2 \text{ pixels}) =$
 - $(1/1\text{m}) =$
 - $u_{max} = 1\text{ciclo/m}$



Características

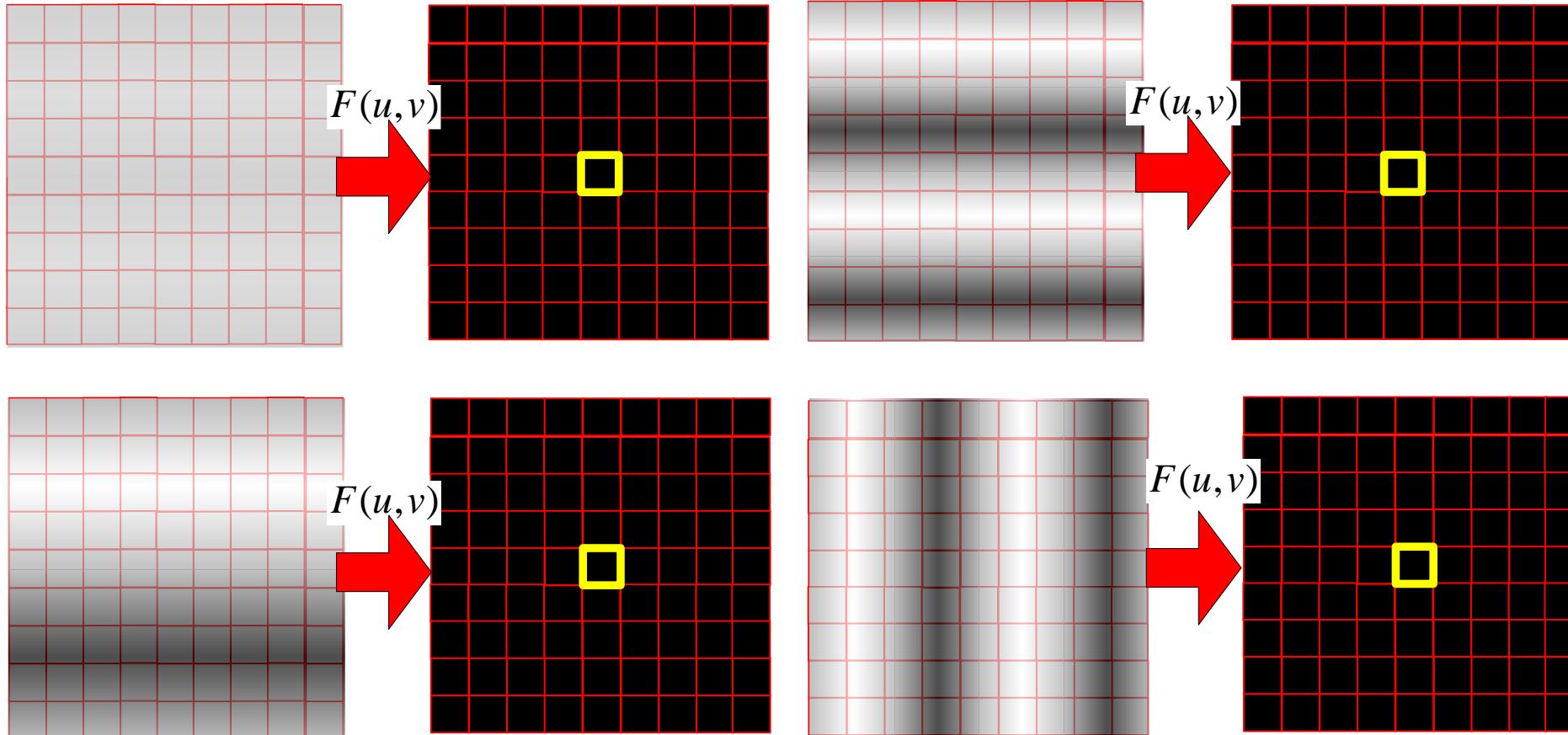
- *Resolução espacial*
- *Período máximo*
 - $p_{max} = 9\text{pixels}$
 - *Exemplo resolução do pixel = 0,5m*
 - $p_{max} = 4,5m$
- *Resolução em frequência.*
- *Frequência Mínima*
 - $u_{min} = (1/p_{max}) =$
 - $(1/9 \text{ pixels}) =$
 - $(1/4,5m) =$
 - $u_{min} = 0,2222..\text{ciclos/m}$
 - *ResHor = 0,2222..\text{ciclos/m}*
- $u_{máx} = ResHor \times 4,5 = 1\text{ciclo/m}$ (*confere com slide anterior*)



Exemplo

- Assinale onde se encontra a(s) raia(s) de frequênci(a)s das transformadas abaixo.

– Pause o Vídeo



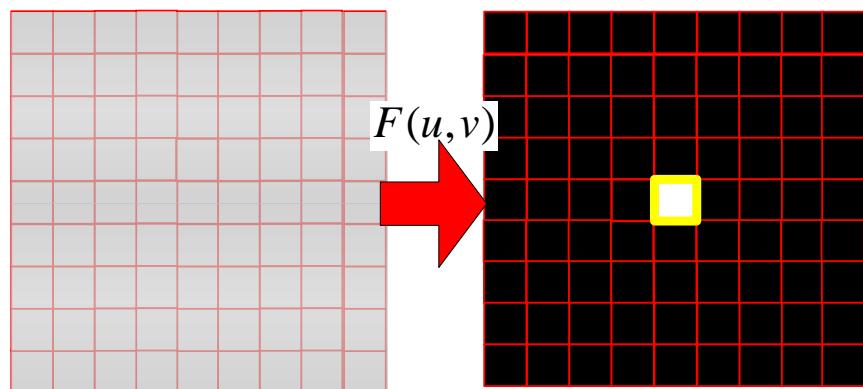
Resposta

- $u = 0$

- $v = 0$

- $u = 0$

- $v = 0,2222 = 1\text{pixel no domínio de Fourier}$

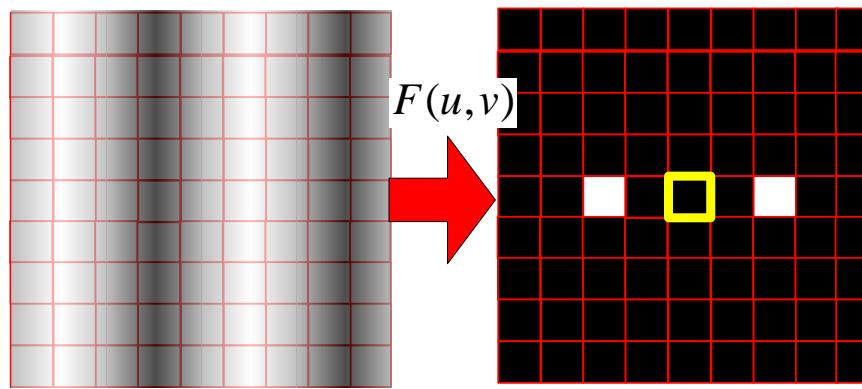
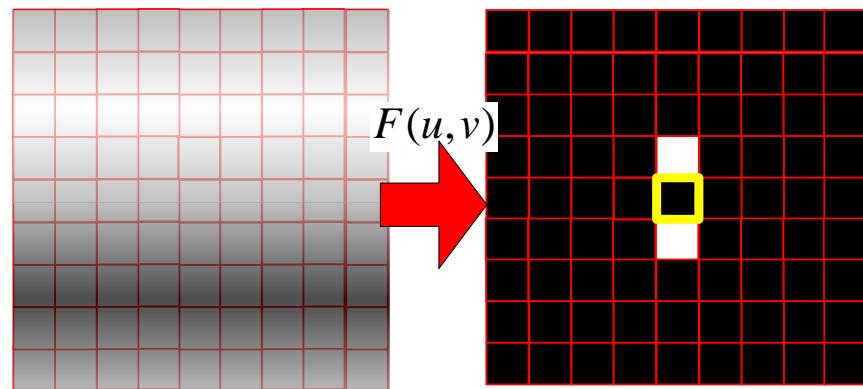
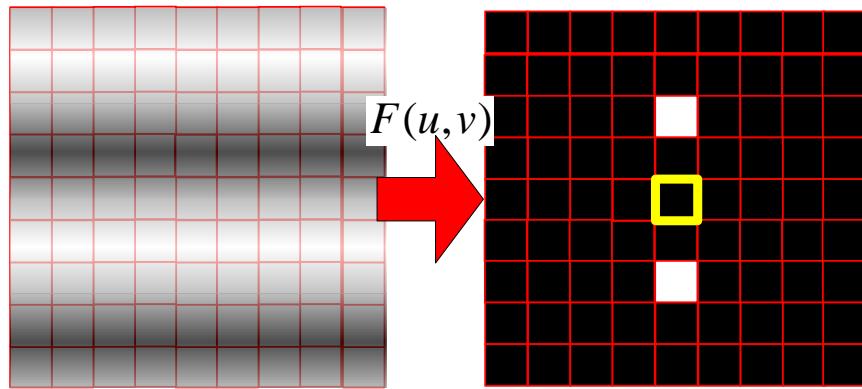


- $u = 0$

- $v = 0,4444 = 2\text{ pixels no domínio de Fourier}$

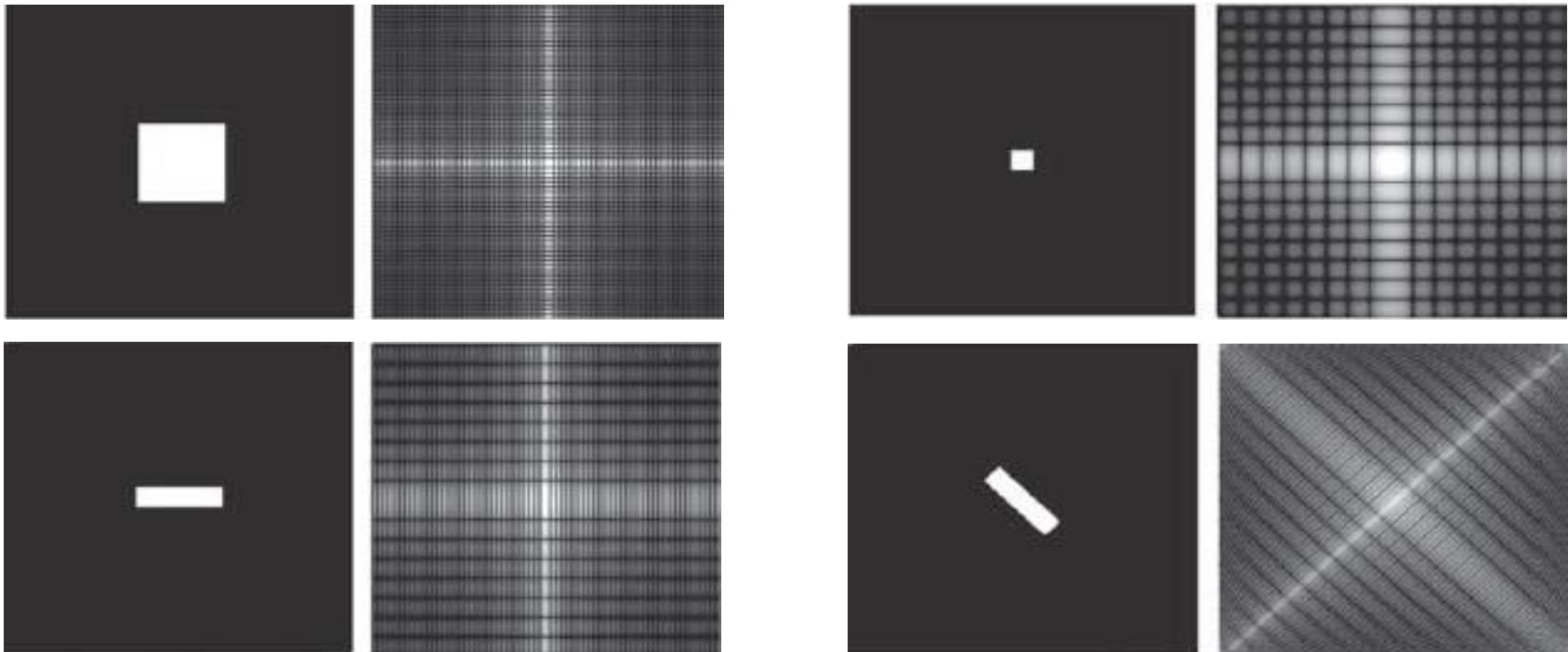
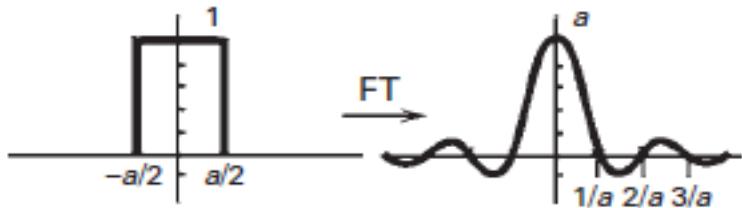
- $u = 0,4444 = 2\text{ pixels no domínio de Fourier}$

- $v = 0$

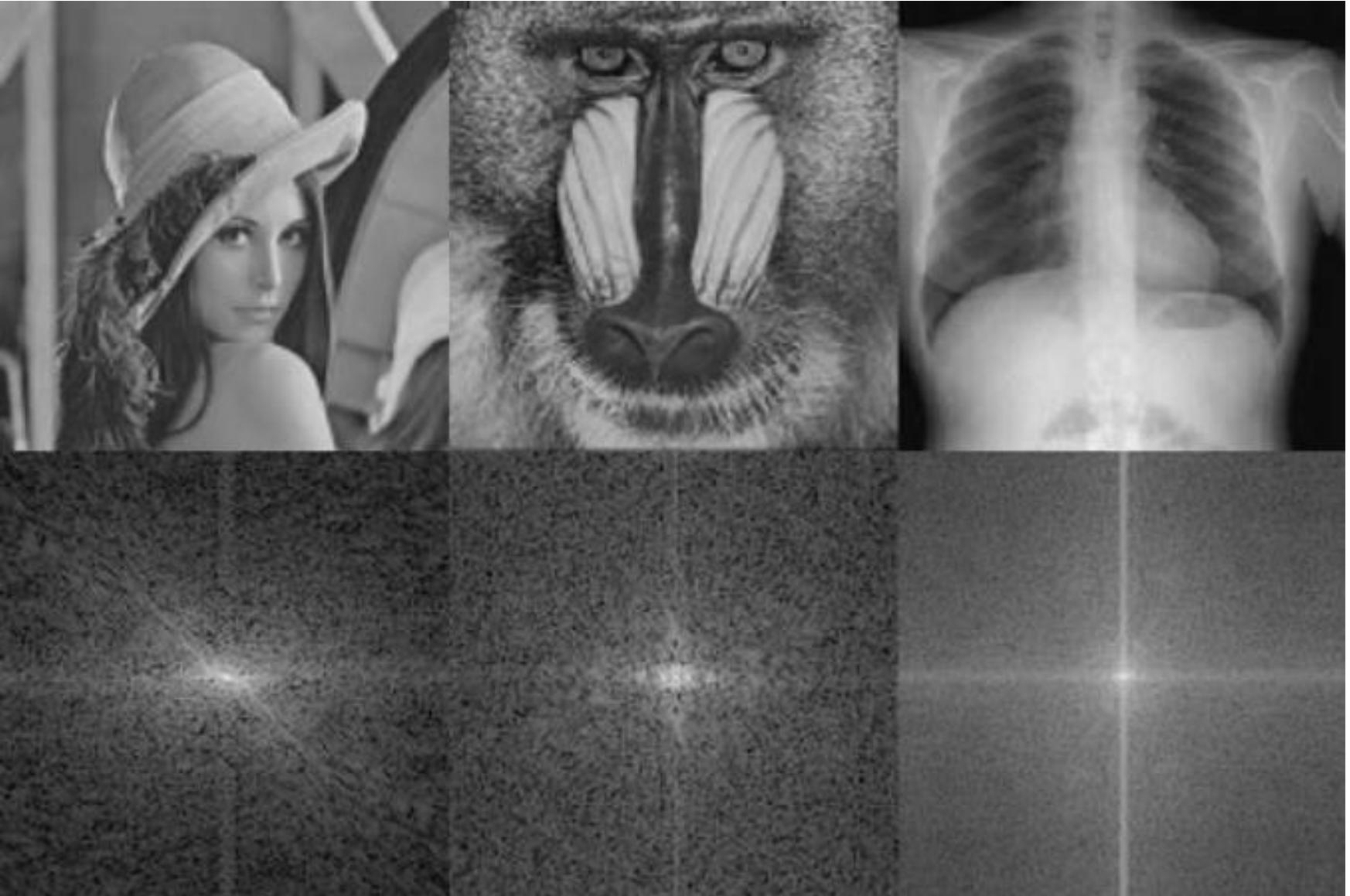


Exemplos

- Onda quadrada e *Sinc*
 - *Frequência espacial inversamente proporcional ao período*



Exemplos



Referências



Lab05