Informe Técnico - Taller Binomial

Métodos Numéricos en Finanzas (2025-I)

Autores: Sarah Daniella Coral Zúñiga, Daniel Aragón Urrego

Grupo 1

Profesor: Oscar Javier López Alfonso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

13 de mayo de 2025

1. Introducción

1.1. Objetivos

El objetivo de este informe es comparar modelos en tiempo discreto y tiempo continuo para valoración de opciones financieras Call y Put. Para ello nos enfocamos en tres áreas claves:

1. Calibración del modelo dado un subyacente
2. Valoración de distintos tipos de opciones
3. Valoración de distintas estrategias con opciones

1.2. Alcance

Se usó el modelo de Black-Scholes como referente del valor único de la opción, el modelo binomial bajo los enfoques de CRR y Jarrow-Rudd y el modelo trinomial.
Para el ejercicio de calibración se tomó como activo subyacente el ETF del SPDR S&P 500 (SPY).
Se consideraron opciones europeas, americanas y exóticas (barrera) para el ejercicio de valoración. Se analizaron las estrategias de bull call spread, straddle y collar. Finalmente, se obtienen las griegas Delta, Gamma, Theta, Vega y Rho, con el objetivo de medir sensibilidades a los diferentes determinantes del valor de la opción.

1.3. Contexto y Marco Teórico

1.3.1. Activos

Un activo es un instrumento financiero que representa un derecho a recibir flujos de efectivo futuros o a una participación en un activo real, como acciones, bonos o derivados. Según Bodie, Kane y Marcus (2008), los activos financieros permiten canalizar el ahorro hacia la inversión productiva y facilitar la asignación de riesgos entre agentes económicos.
Dentro de esta categoría, los *Exchange-Traded Funds* (ETFs) son vehículos de inversión que replican el comportamiento de un índice, sector o canasta de activos. Por ejemplo, el ETF SPDR S&P 500 (SPY) busca reproducir el rendimiento del índice S&P 500, permitiendo a los inversionistas acceder de forma diversificada al mercado bursátil estadounidense. Como indican Bodie, Kane y Marcus (2014), los ETFs se han consolidado como instrumentos clave por su liquidez, transparencia y costo.

1.3.2. Opciones

Las opciones son derivados que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar (call) o vender (put) un activo subyacente a un precio preestablecido (precio de ejercicio o strike), en o antes de una fecha determinada (vencimiento). Las opciones pueden clasificarse por su estilo (europeas o americanas), tipo (call o put), y complejidad (estándar o exótica).
Las opciones europeas solo pueden ejercerse al vencimiento, mientras que las americanas permiten su ejercicio en cualquier momento previo al vencimiento. Las opciones son ampliamente utilizados para cobertura, especulación o generación de ingresos, permitiendo una gestión de riesgos más sofisticada que la posible solo con activos subyacentes.

1.3.3. Modelos de Valoración

Dado que el valor de una opción depende de múltiples factores, se emplean modelos matemáticos para estimar su precio teórico. Estos modelos buscan calcular un "valor justo" considerando variables como el precio del activo subyacente, el precio de ejercicio, la volatilidad, el tiempo hasta el vencimiento, la tasa libre de riesgo y los dividendos esperados.
Algunos de los modelos más utilizados para valorar opciones son:

- **Modelo de Black-Scholes**: (Black y Scholes, 1973) Modelo analítico en tiempo continuo. Pionero al proporcionar una solución cerrada para la valoración de opciones europeas bajo ciertas hipótesis (sin dividendos, asume que los rendimientos del activo siguen una distribución log-normal y que la volatilidad es constante).
- **Modelo Binomial de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)**: Modelo en tiempo discreto que construye un árbol binomial recombinante para estimar el precio de la opción mediante inducción hacia atrás. Permite considerar el ejercicio anticipado en opciones americanas (Cox, Ross y Rubinstein, 1979). El modelo binomial aproxima el precio de la opción mediante la construcción de un árbol binomial. El precio de la opción en cada nodo se calcula mediante inducción hacia atrás, considerando los factores de subida y bajada, las probabilidades neutrales al riesgo y el descuento a la tasa libre de riesgo.

- **Modelo Binomial de Jarrow-Rudd**: Modelo en tiempo discreto que también utiliza un árbol binomial para valorar opciones. Similar al modelo CRR, permite valorar opciones americanas. Este modelo se caracteriza por su simplicidad y flexibilidad, y asume que los precios del activo suben o bajan en cada paso, con probabilidades ajustadas. También es útil para valorar opciones con dividendos y se considera una alternativa al modelo CRR. (Josheski y Apostolov, 2020)
- **Modelo Trinomial**: Extensión del modelo binomial que introduce un tercer estado intermedio (precio sin cambio), lo que mejora la convergencia y estabilidad del modelo. (Boyle, 1988)

Cada modelo presenta ventajas y limitaciones. Mientras Black-Scholes proporciona una fórmula cerrada y rápida, los modelos en tiempo discreto permiten una mayor flexibilidad para incorporar condiciones más realistas como el ejercicio anticipado o barreras. (Hull, 2021)

1.3.4. Estrategias Comunes con Opciones

Las estrategias con opciones consisten en combinar múltiples contratos para obtener perfiles de pago específicos, adaptados a las expectativas del mercado o la gestión del riesgo. Algunas estrategias frecuentes son:

- **Spreads**: Combinan opciones del mismo tipo (call o put) pero con diferentes precios de ejercicio o vencimientos. Ejemplos: spread alcista (bull call), spread bajista (bear put).
- **Straddles y Strangles**: Estrategias neutrales al mercado que se benefician de movimientos bruscos en el precio. Un straddle consiste en comprar una call y una put con el mismo strike; el strangle utiliza strikes diferentes.
- **Collar**: Estrategia de cobertura que consiste en comprar una put protectora, vender una call cubierta y mantener el activo subyacente. Limita tanto las pérdidas como las ganancias.

Estas combinaciones se utilizan ampliamente en contextos de gestión de portafolios, cobertura de riesgo, especulación sobre la volatilidad y generación de ingresos.

1.3.5. Las Griegas y el Análisis de Sensibilidades

Las *griegas* son medidas que cuantifican la sensibilidad del precio de una opción ante variaciones en los factores que lo determinan (Natenberg, 2017). Su análisis es esencial para comprender el comportamiento dinámico de las opciones y construir estrategias de cobertura (*delta hedging*):

- **Delta (Δ)**: Sensibilidad del precio de la opción ante cambios en el precio del activo subyacente.
- **Gamma (Γ)**: Tasa de cambio de la delta con respecto al precio del subyacente; mide la convexidad del precio de la opción.
- **Theta (Θ)**: Sensibilidad frente al paso del tiempo; refleja la pérdida de valor temporal.
- **Vega (ν)**: Sensibilidad ante cambios en la volatilidad implícita.
- **Rho (ρ)**: Sensibilidad frente a variaciones en la tasa de interés libre de riesgo.

Las griegas pueden calcularse analíticamente (en el caso del modelo de Black-Scholes) o mediante aproximaciones numéricas como diferencias finitas.

2. Modelos Utilizados

2.1. Black-Scholes

Supuestos	**Parámetros**
• Mercados eficientes y sin oportunidades de arbitraje. • Los movimientos del mercado siguen un camino aleatorio y no pueden predecirse. • El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción. • No existen costos de transacción ni impuestos. • El precio del activo subyacente sigue un movimiento Browniano geométrico y una distribución log-normal. • Volatilidad y tasa de interés libre de riesgo son conocidas y constantes.	• S_0: Precio actual del activo subyacente • K: Precio de ejercicio • r: Tasa de interés libre de riesgo • σ: Volatilidad del activo • T: Tiempo hasta el vencimiento • $N(\cdot)$: Función de distribución acumulada de la distribución normal estándar

2.1.1. Fórmula

Sean:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Call:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

Put:

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

2.1.2. Aplicabilidad

- Muy utilizado por su simplicidad y rapidez.
- Preciso para opciones europeas sin dividendos.
- No adecuado para opciones americanas, activos con dividendos o algunas opciones exóticas.

2.2. Cox-Ross-Rubinstein (Binomial)

Supuestos	Parámetros
• Tiempo discreto. • No hay arbitraje. • El precio puede únicamente subir o bajar en cada paso. • La volatilidad y la tasa de interés son conocidas y constantes.	• S_0, K, r, σ y T igual que para Black-Scholes • N: Número de pasos

2.2.1. Fórmula

Sean:

$$\Delta t = T/N, u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Árbol de precios:

$$S_{i,j} = S_0 \cdot u^j \cdot d^{i-j}$$

Valor de la opción en el vencimiento:

$$\textit{Call:} \quad V_N^j = \text{máx}(S_{N,j} - K, 0)$$

$$\textit{Put:} \quad V_N^j = \text{máx}(K - S_{N,j}, 0)$$

Inducción hacia atrás

$$\textit{Opción Europea:} \quad V_i^j = e^{-r\Delta t}\left[pV_{i+1}^{j+1} + (1-p)V_{i+1}^j\right]$$

$$\textit{Call Americana:} \quad V_i^j = \text{máx}\left(S_{i,j} - K,\ e^{-r\Delta t}\left[pV_{i+1}^{j+1} + (1-p)V_{i+1}^j\right]\right)$$

$$\textit{Put Americana:} \quad V_i^j = \text{máx}\left(K - S_{i,j},\ e^{-r\Delta t}\left[pV_{i+1}^{j+1} + (1-p)V_{i+1}^j\right]\right)$$

2.2.2. Aplicabilidad

- Apto para opciones europeas y americanas.
- Flexible con dividendos.
- Mayor complejidad computacional a medida que aumenta N.

2.3. Trinomial

Supuestos	Parámetros
▪ Similar al binomial pero con tres movimientos de precio posibles: subir, bajar o mantenerse. ▪ Volatilidad y tasa de interés conocidas y constantes. ▪ Puede valorar opciones europeas y americanas.	▪ S_0, K, r, σ, T y N igual que para el modelo Binomial ▪ $m = 1$ (movimiento neutro). ▪ Probabilidades neutras al riesgo: p_u, p_m, p_d

2.3.1. Fórmula

Sean:

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad m = 1$$

y las probabilidades neutras al riesgo:

$$p_d = p_u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2\Delta t}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t^2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t}{\sigma\sqrt{2\Delta t}}\right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Valor de la opción en el vencimiento:

$$\textit{Call:} \quad V_N^j = \text{máx}(S_{N,j} - K, 0)$$

$$\textit{Put:} \quad V_N^j = \text{máx}(K - S_{N,j}, 0)$$

Inducción hacia atrás:

$$\textit{Opción Europea:} \quad V_i^j = e^{-r\Delta t}\left[p_u V_{i+1}^{j+1} + p_m V_{i+1}^{j} + p_d V_{i+1}^{j-1}\right]$$

$$\textit{Call Americana:} \quad V_i^j = \text{máx}\left(S_{i,j} - K,\ e^{-r\Delta t}\left[p_u V_{i+1}^{j+1} + p_m V_{i+1}^{j} + p_d V_{i+1}^{j-1}\right]\right)$$

$$\textit{Put Americana:} \quad V_i^j = \text{máx}\left(K - S_{i,j},\ e^{-r\Delta t}\left[p_u V_{i+1}^{j+1} + p_m V_{i+1}^{j} + p_d V_{i+1}^{j-1}\right]\right)$$

2.3.2. Aplicabilidad

- Mayor precisión que el modelo binomial.
- Requiere más cálculos y memoria.

2.4. Jarrow-Rudd

Supuestos	Parámetros
▪ Tiempo discreto. ▪ No hay arbitraje. ▪ El precio puede subir o bajar en cada paso, con probabilidades ajustadas. ▪ La volatilidad y la tasa de interés son conocidas y constantes.	▪ S_0, K, r, σ y T igual que para el modelo binomial CRR. ▪ N: Número de pasos.

2.4.1. Fórmula

Sean:

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Valor de la opción en el vencimiento

$$\textit{Call:} \quad V_N^j = \text{máx}(S_{N,j} - K, 0)$$

$$\textit{Put:} \quad V_N^j = \text{máx}(K - S_{N,j}, 0)$$

Inducción hacia atrás

$$\text{Opción Europea:} \quad V_i^j = e^{-r\Delta t}\left[pV_{i+1}^{j+1} + (1-p)V_{i+1}^j\right]$$

Call Americana:

$$\text{Call Americana:} \quad V_i^j = \text{máx}\left(S_{i,j} - K,\ e^{-r\Delta t}\left[pV_{i+1}^{j+1} + (1-p)V_{i+1}^j\right]\right)$$

Put Americana:

$$\text{Put Americana:} \quad V_i^j = \text{máx}\left(K - S_{i,j},\ e^{-r\Delta t}\left[pV_{i+1}^{j+1} + (1-p)V_{i+1}^j\right]\right)$$

2.4.2. Aplicabilidad

- Apto para opciones europeas y americanas.
- Flexible con dividendos.
- Mayor complejidad computacional a medida que aumenta N.

3. Metodología

3.1. Herramientas computacionales

Se implementaron los siguientes modelos utilizando datos de mercado con el objetivo de estimar el valor de la prima de opciones Call y Put:

- **Modelo Binomial CRR**
  - Algoritmo de construcción de un árbol binomial de N pasos para el precio del activo subyacente.
  - Algoritmo de inducción hacia atrás para el árbol de la opción Call y Put. Modificación que incorpora el ejercicio anticipado.
- **Modelo Binomial Jarrow-Rudd**
  - Algoritmo de construcción de un árbol binomial de N pasos para el precio del activo subyacente.
  - Algoritmo de inducción hacia atrás para el árbol de la opción Call y Put.
- **Modelo Trinomial**
  - Algoritmo de construcción de un árbol binomial de N pasos para el precio del activo subyacente.
  - Algoritmo de inducción hacia atrás para el árbol de la opción Call y Put.
- **Modelo Black-Scholes**
  - Algoritmo para el cálculo de la prima de opciones Call y Put sin pago de dividendos.

Las herramientas se implementaron en Python, el código se estructuró en un archivo tipo Jupyter Notebook (.ipynb) y se diseñó para correr en entornos de ejecución con soporte a extensiones .ipynb como Google Colab y JupyterLab.

Se utilizaron las siguientes librerías:

- YFinance para el acceso a datos de Yahoo Finance
- NumPy para manejo de datos numéricos y funciones (exponencial, logarítmica)
- Matplotlib para visualización de datos
- Pandas para manejo de datos estructurados y bases de datos
- SciPy para manejo de funciones de distribución de probabilidad
- time para estimación de tiempos de ejecución

3.2. Calibración del modelo dado un subyacente

Se descargaron precios históricos diarios del ETF sobre el S&P 500 (SPY) desde Yahoo Finance usando `yfinance` con el fin de calibrar σ (volatilidad histórica) y determinar una tasa libre de riesgo r. Se comparó los valores de u, d y p bajo el modelo Binomial y el modelo de Jarrow-Rudd.
Se construyó una visualización de los resultados de valoración de opciones europeas bajo el modelo Binomial al variar N y se analizó la convergencia de dichos resultados hacia los resultados del modelo de Black-Scholes.

3.3. Valoración de distintos tipos de opciones

Se valoró opciones tipo call y put europeas para distintos strikes y vencimientos.Se verificó la paridad put-call: $C - P = S - Ke^{-rT}$. Se comparó los precios obtenidos con los valores calculados por la fórmula de Black-Scholes.
Se usó el algoritmo de inducción hacia atrás modificado para valorar opciones americanas y se comparó su precio con sus equivalentes europeas.
Se implementó la valoración de opciones con barreras knock-in y knock-out y se analizó el efecto de distintas ubicaciones de barreras sobre el precio de la opción.
Se comparó los resultados de valoración de opciones europeas del modelo Binomial con el modelo Trinomial y el de Black-Scholes. Se hizo un análisis de ventajas y desventajas del modelo trinomial frente al binomial.

3.4. Valoración de distintas estrategias con opciones

Se realizó una simulación y valoración de las estrategias de bull call spread, straddle y collar con el fin de analizar las ventajas y desventajas de cada estrategia frente a distintos escenarios de mercado.

3.5. Análisis de sensibilidades

De las griegas se estimaron Delta, Gamma, Theta, Vega y Rho mediante diferencias finitas. Se graficó la evolución de estas sensibilidades respecto al tiempo y al precio del subyacente.

3.6. Datos de Entrada

Con el objetivo de realizar la valoración de opciones sobre el ETF del índice Standard & Poor's 500, se procede a descargar la información del ETF, identificado como SPY, utilizando la biblioteca yfinance para el periodo comprendido entre enero de 2022 y abril de 2025, con periodicidad diaria.

A partir de esta información se definen los siguientes datos de entrada:

- Precio spot (S_0): Último valor de la serie del ETF. Medido en dólares (USD).
- Volatilidad (σ): corresponde a la desviación estándar de la serie de retornos continuos del ETF. Este valor es anualizado considerando la periodicidad de la información.

Además, se establece:

- Precio de ejercicio (K): El valor se establece de acuerdo con cada implementación. Medido en dólares (USD).
- Tasa de interés libre de riesgo (r): corresponde a la tasa de rendimiento de los bonos del tesoro americano a un año. A esta tasa se le aplica logaritmo natural para su conversión y uso en el modelo de valoración. La información fue tomada el día 30 de abril de 2025.
- Plazo de vencimiento (T): 1 año.

4. Resultados

4.1. Convergencia hacia Black-Scholes

Los resultados de los modelos binomiales bajo el enfoque CRR y JR evidencian que dados un mismo precio de ejercicio y vencimiento, al incrementar la cantidad de pasos (N) el valor de la prima converge al resultado encontrado utilizando el modelo Black-Scholes.

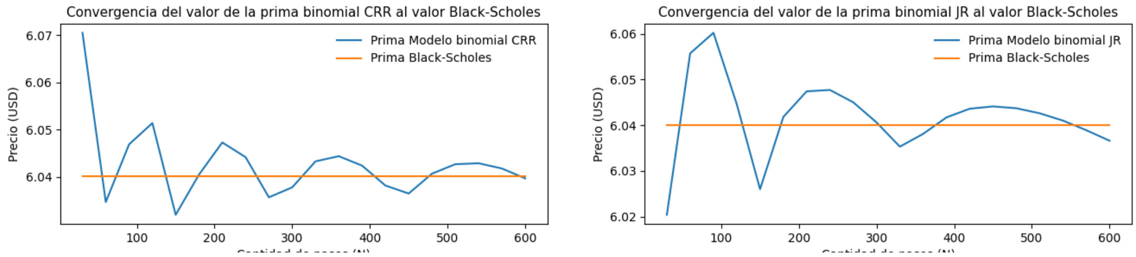

Figura 1: Convergencia de los modelos binomiales al modelo Black-Scholes.

4.2. Resumen de Análisis Comparativo

Característica	**Black-Scholes**	**Binomial**	**Trinomial**	**Jarrow-Rudd**
Ramificaciones por paso	Único valor	2 (up/down)	3 (up/middle/down)	2 (up/down)
Opciones no europeas	No	Sí	Sí	Sí
Velocidad computacional	Alta	Baja	Media	Baja
Precisión fijo N	Ideal	Baja	Media	Baja-Media

4.3. Comparación entre clases de opciones

Por otra parte, cuando se comparan los resultados del modelo binomial Cox-Ross-Rubinstein (CRR) para opciones europeas y americanas que no pagan dividendos, se observan las siguientes conclusiones:

Opción	**Europea**	**Americana**	**Diferencia**
Call	28.8701	28.8701	0
Put	61.3014	66.7567	5.4552

Opción Call Americana:
No es óptimo para el tenedor de la opción Call americana ejercerla antes del vencimiento. Esto se debe a que el valor de la opción tiende a ser mayor si se mantiene hasta la fecha de vencimiento, ya que el tiempo restante puede proporcionar oportunidades adicionales de ganancia.

Opción Put Americana:
El tenedor de la opción Put americana puede encontrar beneficios al ejercerla antes del vencimiento. Esto se debe a que, en ciertas condiciones de mercado, el valor intrínseco de la opción Put puede ser más favorable si se ejerce anticipadamente.

4.4. Comparación de estrategias

Estrategia Bull Call Spread: Consiste en comprar una opción Call a un precio de ejercicio más bajo ($K1$) y vender una opción Call a un precio de ejercicio más alto ($K2$), ambas con el mismo vencimiento (T).

$$\text{Bull Call Spread} = \text{Largo Call}(K_1, T) - \text{Corto Call}(K_2, T), \quad \text{con } K_1 < K_2$$

Dados los precios de ejercicio empleados para realizar la estrategia y considerando la dinámica del precio del subyacente hasta el vencimiento, se obtendría ganancia conforme el precio del activo crezca (mercado alcista), aunque dicha ganancia es limitada, como lo muestra la gráfica, porque depende de la diferencia entre los precios de ejercicio de las dos opciones.

Estrategia Straddle: implica comprar una opción Call y una opción Put con el mismo precio de ejercicio (Kc) y vencimiento (T).

$$\text{Straddle} = \text{Largo Call}(K_c, T) + \text{Largo Put}(K_c, T)$$

Esta estrategia se aplica en mercados con alta volatilidad, lo cual resalta su ventaja de generar ganancias cuando el precio del activo cambia significativamente en cualquier dirección. En la gráfica se aprecia que la estrategia generaría ganancias conforme el precio del activo se incremente.

Sin embargo, implementar esta estrategia requiere comprar tanto la opción Call como Put, por lo cual, el pago de las dos primas representa una desventaja. A esto se suma que la estrategia tiene el riesgo de no generar el resultado esperado si el precio mantiene estable (mercado lateral).

Estrategia Collar: Consiste en comprar una opción Put con precio de ejercicio Kp y vender una opción Call con precio de ejercicio Kc, ambas con el mismo vencimiento (T).

$$\text{Collar} = \text{Largo Put}(K_p, T) - \text{Corto Call}(K_c, T)$$

El Collar se aplica en mercados bajistas como una estrategia para protegerse contra caídas en el precio del subyacente. Sin embargo, la gráfica muestra que la dinámica del precio es creciente, por lo cual no sería recomendable aplicarla en estos momentos. En caso de implementarse, se pueden experimentar fuertes pérdidas.

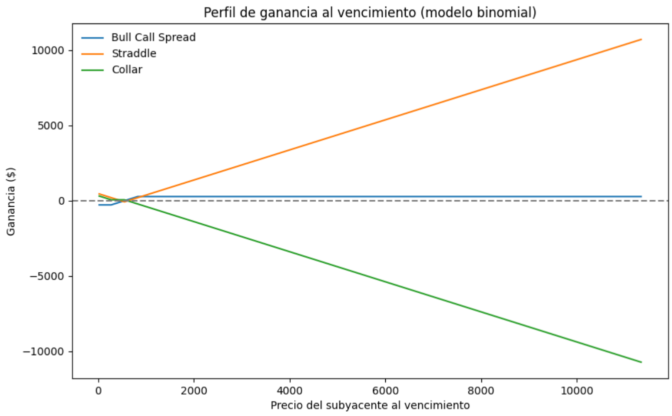

Figura 2: Payoff de las estrategias con opciones.

4.5. Griegas

Las griegas estimadas presentan los signos esperados. De forma específica, se tiene lo siguiente:

La **opción Call** presenta un Delta de 0.4326, lo que indica que su precio aumentará en aproximadamente 0.43 dólares por cada dólar de incremento en el precio del subyacente. Con un Gamma de 0.0418, se espera que la sensibilidad del Delta aumente a medida que el precio del subyacente suba, lo que refuerza la naturaleza alcista de la opción. Por su parte, el Theta de -30.1413 sugiere que la opción Call pierde valor a medida que se acerca la fecha de vencimiento. Además, un Vega de 83.0001 indica que el precio de la opción Call se beneficiará de un aumento en la volatilidad del subyacente, lo que es favorable en entornos de mercado volátiles. Finalmente, el Rho positivo de 198.6340 sugiere que el valor de la prima se incrementará conforme aumente la tasa de interés.

La **opción Put** muestra un Delta de -0.5674, lo que indica que su precio disminuirá en aproximadamente 0.56 dólares por cada aumento de 1 dólar en el precio del subyacente. Con un Gamma de 0.0418, se espera que la sensibilidad del Delta aumente a medida que el precio del subyacente baje. El Theta de -7.3618 indica que la opción Put también pierde valor a medida que pasa el tiempo, aunque a un ritmo más lento en comparación con la opción Call. Un Vega de 83.0001 sugiere que el precio de la opción Put se beneficiará de un aumento en la volatilidad del subyacente, lo que es favorable en mercados volatiles. Sin embargo, el Rho negativo de -412.8728 indica que el precio de la opción Put disminuirá con un aumento en las tasas de interés, lo que es un comportamiento esperado, ya que las opciones Put tienden a perder valor en entornos de tasas de interés más altas.

5. Conclusión

El informe muestra que los modelos binomiales (CRR y Jarrow-Rudd) y el trinomial permiten una valoración de opciones arbitrariamente precisa y flexible, especialmente cuando se consideran el ejercicio anticipado (opciones americanas) o la presencia de barreras (opciones exóticas). Se confirma que, con suficientes pasos, estos modelos convergen al valor de referencia dado por Black-Scholes, el cual, si bien es rápido, solo aplica en condiciones restringidas (opciones europeas sin dividendos).

Se evidencian diferencias entre opciones europeas y americanas en los resultados: no tiene sentido ejercer anticipadamente una call sin dividendos, mientras que en puts sí puede ser óptimo. Asimismo, el análisis de estrategias (bull call spread, straddle y collar) muestra cómo la combinación de opciones puede ser adaptada a escenarios de mercado específicos, permitiendo ajustar el riesgo del portafolio. Las griegas estimadas (Delta, Gamma, Theta, Vega y Rho) validan el comportamiento teórico esperado.

En términos computacionales, el modelo Black-Scholes es el más eficiente al ofrecer soluciones cerradas. Los modelos binomial y trinomial requieren una mayor carga computacional a medida que crece el número de pasos N, es decir, mayor precisión en los resultados tiene costos computacionales adicionales. El modelo trinomial, aunque el más costoso computacionalmente, presenta una mejor convergencia con menos pasos, lo que rebalancea su relación costo-precisión. Concluimos que la elección del modelo depende de su flexibilidad de aplicación, su exactitud teórica y las limitaciones operativas y de procesamiento del entorno donde se implementa.

6. Declaración de Uso de Inteligencia Artificial

Para la realización de este ejercicio se tuvo asistencia de herramientas de inteligencia artificial en las siguientes actividades:

- **ChatGPT:** Asistencia con código en formato LATEXpara ecuaciones, tablas y figuras; sugerencia de citas, fuentes bibliográficas y publicaciones relevantes; troubleshooting de código en Python.
- **Gemini para Colab:** Función de autocompletado de código para Colab; Automatización de creación de docstrings.

A continuación se enumeran no exhaustivamente las actividades realizadas sin asistencia de IA:

- El ejercicio de investigación, resumen y redacción del Marco Teórico y descripción de los modelos.
- Las versiones iniciales del código y los ajustes del código sugerido por IA a los objetivos de este taller.
- El planteamiento y organización de este informe y su Jupyter Notebook acompañante
- El planteamiento y redacción de Resultados y Conclusiones.

7. Referencias

[1] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives.* Harlow (Gran Bretaña): Pearson, 2021.

[2] P. P. Boyle, *"A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables"*, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 23, no. 1, p. 1, Mar. 1988. `https://doi.org/10.2307/2331019`.

[3] J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein, *"Option Pricing: a Simplified Approach,"* Journal of Financial Economics, vol. 7, no. 3, pp. 229–263, Sep. 1979. `https://doi.org/10.1016/0304-405x(79)90015-1`.

[4] F. Black and M. Scholes, *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*, Journal of Political Economy, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, May 1973.

[5] S. Natenberg, *Option Volatility & Pricing Workbook: Practicing Advanced Trading Strategies and Techniques.* McGraw Hill Professional, 2017.

[6] A. Hirsa, *Computational Methods in Finance*, 2nd ed. Chapman & Hall, 2024.

[7] D. Josheski and M. Apostolov, *"A Review of the Binomial and Trinomial Models for Option Pricing and Their Convergence to the Black-Scholes Model Determined Option Prices,"* Econometrics. Ekonometria. Advances in Applied Data Analysis, vol. 24, no. 2, pp. 53–85, 2020. `https://doi.org/10.15611/eada.2020.2.05`.

[8] Zvi Bodie, A. Kane, and A. Marcus, *Investments*, 8th ed. Irwin Mcgraw-Hill, 2008.