TU Hamburg-Harburg – Institut für Zuverlässiges Rechnen
Prof. Dr. S. M. Rump und Mitarbeiter, Wintersemester 2018/2019

Programmieren in C, Testat 6

1. In C ist es möglich, sogenannte multidimensionale Arrays zu definieren. Aus mathematischer Sicht kann ein "einfaches" Array als eindimensionaler (Zeilen-)Vektor angesehen werden, weswegen man es auch als eindimensionales Array bezeichnen kann. Im Gegensatz dazu ist eine rechteckige Matrix ein zweidimensionales Objekt mit einer bestimmten Anzahl von Zeilen und Spalten. Beispielsweise kann die integer-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

folgendermaßen in C implementiert werden `int M[2][3] = {{1,3,0},{-2,4,1}};` . Der Zugriff auf den Eintrag in der ersten Zeile und zweiten Spalte von `M`, welcher den Wert 3 hat, geschieht durch `M[0][1]`, da die Indizierung der Zeilen und Spalten mit 0 beginnt.

Schreiben Sie ein Programm, das drei positive ganze Zahlen m, n, k und zwei rechteckige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n,k}$ von der Tastatur einliest und anschließend deren Matrixprodukt $C = AB \in \mathbb{R}^{m,k}$ berechnet und ausgibt. Benutzen Sie dazu `for`-Schleifen. Man erinnere sich daran, dass $C_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} A_{il}B_{lj}$ für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., k$.

Anschließend sollen der kleinste Eintrag $c_{\min}$, der größte Eintrag $c_{\max}$ und der Mittelwert c_m aller Einträge von C ermittelt und ausgegeben werden. Für $c_{\min}$ und $c_{\max}$ sollen zusätzlich noch Indizes $i_{\min}, j_{\min}$ und $i_{\max}, j_{\max}$ bestimmt werden, sodass $C_{i_{\min},j_{\min}} = c_{\min}$ und $C_{i_{\max},j_{\max}} = c_{\max}$.

Beispiel:

```
m = 2           <--- Eingabe m
n = 2           <--- Eingabe n
k = 3           <--- Eingabe k

A[0][0] = 1     <--- Eingabe der Einträge von A
A[0][1] = 2
A[1][0] = 3
A[1][1] = -1

B[0][0] = 2     <--- Eingabe der Einträge von B
B[0][1] = 3
B[0][2] = -1
B[1][0] = 0
B[1][1] = 4
B[1][2] = 2

C =                                                       <--- Ausgabe C
         2.000000         11.000000        3.000000
         6.000000         5.000000         -5.000000

The smallest entry of C is      : C_2,3 = -5.000000      <--- Ausgabe i_min,j_min,c_min
The largest entry of C is       : C_1,2 = 11.000000      <--- Ausgabe i_max,j_max,c_max
The mean of all entries of C is : 3.666667               <--- Ausgabe c_m
```

2. a) Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ einer reellen Zahl x kann über ihre Taylorreihe näherungsweise berechnet werden. Es gilt

$$\exp(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ ,$$

wenn $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist. Übersetzen Sie folgenden Pseudocode in ein C-Programm:

```
Definiere:
   x
   k = 0
   y_old = 0
   y_new = 1
   z = 1
Lies x ein
Solange y_old <> y_new wiederhole:
   y_old = y_new
   k = k+1
   z = z*x/k
   y_new = y_new + z
Ausgabe "exp(x) = " y_new
```

b) Schreiben Sie analog ein Programm, das den Sinus berechnet:

$$\sin(x) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k+1}$$

Testbeispiele: $\exp(0) = 1$, $\exp(1) \approx 2.718283$, $\exp(2) \approx 7.389056$, $\exp(-3) \approx 0.049787$
$\sin(0) = 0$, $\sin(1) \approx 0.841471$, $\sin(2) \approx 0.909297$, $\sin(-3) \approx -0.141120$

English translation

1. In C it is also possible to define so-called multi-dimensional arrays. Speaking mathematically, a "usual" array considered as a row of variables of the same kind can be interpreted as a one-dimensional vector and therefore the array can be called one-dimensional. In contrast, in mathematics a rectangular matrix is a two-dimensional object with a certain number of rows and columns. For example, the following integer matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   can be implemented by `int M[2][3] = {{1,3,0},{-2,4,1}};` . The access to the entry in the first row and second column of `M`, which is 3, is performed by `M[0][1]` since the indexing of the rows and columns starts at zero.

   Write a program that reads three positive integers m, n, k and two rectangular matrices $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,k}$ from the keyboard and afterwards computes and displays their matrix product $C = AB \in \mathbb{R}^{m,k}$. Use `for`-loops for that. Remember that $C_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} A_{il}B_{lj}$ for $i = 1, ..., m$ and $j = 1, ..., k$.

   Afterwards, the smallest entry $c_{\min}$, the largest entry $c_{\max}$, and the mean c_m of all entries of C shall be determined and displayed. For $c_{\min}$ and $c_{\max}$ also indices $i_{\min}, j_{\min}$ and $i_{\max}, j_{\max}$ shall be found such that $C_{i_{\min},j_{\min}} = c_{\min}$ and $C_{i_{\max},j_{\max}} = c_{\max}$ hold true.

   Example:

```
m = 2            <--- enter m
n = 2            <--- enter n
k = 3            <--- enter k

A[0][0] = 1      <--- enter entries of A
A[0][1] = 2
A[1][0] = 3
A[1][1] = -1

B[0][0] = 2      <--- enter entries of B
B[0][1] = 3
B[0][2] = -1
B[1][0] = 0
B[1][1] = 4
B[1][2] = 2

C =                                                    <--- display C
         2.000000        11.000000       3.000000
         6.000000        5.000000        -5.000000

The smallest entry of C is      : C_2,3 = -5.000000    <--- display i_min,j_min,c_min
The largest entry of C is       : C_1,2 = 11.000000    <--- display i_max,j_max,c_max
The mean of all entries of C is : 3.666667             <--- display c_m
```

2. a) The exponential function $\exp(x)$ of a real number x can be approximated by

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ ,$$

where $n \in \mathbb{N}$ is a sufficiently large integer. Translate the following pseudocode to a C-program:

```
define:
   x
   k = 0
   y_old = 0
   y_new = 1
   z = 1
read x
while y_old <> y_new do:
   y_old = y_new
   k = k+1
   z = z*x/k
   y_new = y_new + z
display "exp(x) = " y_new
```

b) Analogously, write a program that computes the sine:

$$\sin(x) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Test cases: $\exp(0) = 1$, $\exp(1) \approx 2.718282$, $\exp(2) \approx 7.389056$, $\exp(-3) \approx 0.049787$
$\sin(0) = 0$, $\sin(1) \approx 0.841471$, $\sin(2) \approx 0.909297$, $\sin(-3) \approx -0.141120$