UNIVERSITE CARTHAGE
ECOLE SUPERIEURE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Projet Monte Carlo

Elaboré par : Madani SARRA

Rezgui CHAIMA

Dakhli AMAL

Année Universitaire : 2016/2017

Sommaire

Introduction

La simulation Monte Carlo est une technique mathématique informatisée qui permet de calculer une valeur numérique approchée en simulant un échantillon fictif de réalisations à partir d'hypothèses sur les variables aléatoires.

Cette méthode est employée dans divers domaines tels que la finance, la gestion de projet, l'énergie, la production, l'ingénierie, la recherche et le développement, les assurances, l'industrie du gaz et du pétrole… Et ceci dans le cadre de la prise de décision.

Dans ce projet nous allons aborder la simulation de Monte Carlo en utilisant plusieurs méthodes tout en précisant à quoi consiste chaque méthode dans une partie théorique, puis nous expliquerons les résultats en déterminant la méthode la plus optimale.

Problématique :

Soit $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, X un processus défini par une EDS (Equation Différentielle Stochastique) :

$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma dWs$, avec $\mu(x) \coloneqq 0.1\left(\sqrt{e^x} - 1\right) - 1/8,$

On cherche à évaluer

V := E[g(X_T)] , où g(x) $:= (e^{X_T} - K)_+$

On fixe les constantes : $x_0 = 0; \sigma = 0.5; K = 1; T = 1.$

A quoi consiste chacune des méthodes de calcul de variance ?

Quelle est la méthode la plus optimale ?

1. Partie Théorique :

1.1. Notion de Mouvement Brownien :

Un processus (B_t) est dit mouvement Brownien si :

- Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.

(c'est-à-dire pour $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, on a $(B_{t1} \ldots \ldots B_{tn})$ vecteur gaussien.

- t→ B_t est continue P.p.s

(c'est-à-dire P $(\{\omega \in \Omega \ / t \to B_t(\omega) est\ continue\ sur\ \Omega(\omega)\}) = 1$)

- Les accroissements entre deux instants t>s sont indépendants et distribués selon une loi normale centrée de variance t-s : B(t)-B(s)~$N(0, t-s)$

1.2. Méthode par le schéma d'Euler :

On a $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma d\omega t$

$$\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} dX_t = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \mu(X_t)dt + \sigma \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\omega t$$
$$X_{t_{k+1}}^{\Delta} - X_{t_k}^{\Delta} = \mu\left(X_{t_k}^{\Delta}\right)\boldsymbol{\Delta_k} + \sigma(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})$$

Avec $\Delta_k = t_{k+1} - t_k = \boldsymbol{\Delta}$

$$X_{t_{k+1}}^{\Delta} = X_{t_k}^{\Delta} + \mu\left(X_{t_k}^{\Delta}\right)\boldsymbol{\Delta_k} + \sigma(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})$$

On estime $V_\Delta = E(g(X_T^\Delta))$

$$X_T^\Delta = (X_{t_n}^\Delta - X_{t_{n-1}}^\Delta) + (X_{t_{n-1}}^\Delta - X_{t_{n-2}}^\Delta) + \cdots \ldots \ldots . . (X_1^\Delta - X_0^\Delta) + X_0$$

$$X_T^\Delta = (\sum_{k=1}^{n-1} \mu\left(X_{t_k}\right))\Delta_k + \sigma\omega_T$$

$$X_T^\Delta = (\sum_{k=1}^{n-1} \mu\left(X_{t_k}\right))\Delta + \sigma\omega_T$$

X_T^Δ: Approximation de X_t,la méthode de Monte Carlo basé sur$V_\Delta$donnera une estimation biaisée de V.

1.2.1. Estimateur de Monte Carlo classique :

Cette méthode consiste à approcher la quantité I_n tel que :

$$I_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{T,k}^{\Delta}$$

D'après la loi forte des grands nombres(LFGN) lorsque N→ $+\infty$

$$I_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(X_{T,k}^{\Delta}) \to V_{\Delta}$$

1.2.2. Méthode par variable Antithétique :

Cette méthode consiste à trouver une variable « antithétique », il s'agit de tirer parti de certaines symétries d'une distribution et de la corrélation négative entre deux variables aléatoires.
On cherche à calculer $I = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{g(X_T^{\Delta})+g(X_T^{\Delta})}{2}$
On simule par la suite $E(g(X_T^{\Delta}))$

Dans la deuxième question **(Q2)** on cherche à estimer V_{Δ} à partir de la méthode de la variable antithétique.
D'après les hypothèse de l'énoncé on a:

$$L(W_{t0}, W_{t1}, \dots \dots .., W_{tn}) = L(-W_{t0}, -W_{t1}, \dots \dots .., -W_{tn})$$

On simule la moitié de l'échantillon et on refait le même travail de Monte Carlo classique pour simuler les accroissements du mouvement brownien.

En appliquant

$$X_{tk+1}^{\Delta}(+) = X_{tk}^{\Delta}(+) + \mu\left(X_{tk+1}^{\Delta}(+)\right)\Delta + \sigma(w_{tk+1} - w_{tk})$$

De proche en proche on obtient la suite i.i.d $X_T^{\Delta}(+)$
De même

$$X_{tk+1}^{\Delta}(-) = X_{tk}^{\Delta}(-) + \mu\left(X_{tk+1}^{\Delta}(-)\right)\Delta - \sigma(w_{tk+1} - w_{tk})$$

De proche en proche on obtient la suite i.i.d $X_T^{\Delta}(-)$
On pose

$$R_n = \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N} g(X_T^{\Delta}(+) + g(X_T^{\Delta}(-))$$

Par LFGN on obtient lorsque N→ $+\infty$:

$$R_n = \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N} g(X_T^{\Delta}(+) + g(X_T^{\Delta}(-)) \to V_{\Delta}$$

1.2.3. Méthode de la variable de contrôle :

Restant de le cadre de la variable antithétique où on introduit une variable dite de contrôle afin d'aboutir à une variance plus réduite.

On approxime E(f(X_T^{Δ}))telle que E $\left(f\left(X_T^{\Delta}\right)\right) = \frac{f\left(X_1^{\Delta}\right)+\cdots\ldots+f\left(X_n^{\Delta}\right)}{n}$

Avec $X_1^{\Delta}, X_2^{\Delta} \ldots \ldots X_n^{\Delta}$ i.i.d de même loi que X_T^{Δ}

<u>Calcul explicite de m : (Question3)</u>

$$m = E(g(\widetilde{X_T}) = E(e^{\sigma W_T} - K)\mathbb{1}_{e^{\sigma W_T > K}}$$

$$= E\left(e^{\sigma W_T}\mathbb{1}_{e^{\sigma W_T > K}}\right) - KP(\mathbb{1}_{e^{\sigma W_T > K}})$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}\phi(\frac{-\log(K) - \mu - \sigma^2}{\sigma}) - K\phi(\frac{-\log(K) - \mu}{\sigma})$$

On a ici K=1, $\mu = 0$

Apres le calcul on obtient :

$$E(g(\widetilde{X_T}) = 0{,}268$$

<u>Estimation par la méthode de variable de contrôle :</u>

Théoriquement on calcule b comme suit :

$$b = \frac{cov(g\left(X_T^{\Delta}\right), g(\widetilde{X_T}))}{var(\widetilde{X_T})}$$

Puis on pose :

$$S_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g\left(X_{T,K}^{\Delta}\right) - b(g(\widetilde{X_{T,K}^{\Delta}}) - 0.268)$$

1.3.Méthode par un schéma Sans Biais :

1.3.1. Méthode de Monte-Carlo simple en utilisant des simulations de la variable ψ :

Cette partie consiste à calculer V_Δ en utilisant une fonction ψ qui a la même
espérance que g(X_Δ)

On a $\tau_n \sim \xi(\beta)$

On génère les variables aléatoires de même loi que ψ, on obtient l'estimateur de Monte Carlo classique qui sera de la forme:

$$L_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \psi_{T,k}$$

Par LFGN :

$$L_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \psi_{T,k} \to V$$

1.3.2. Méthode de stratification :

C'est une méthode bien connue des statisticiens et souvent utilisée dans les sondages.

On pose $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(T_n \leq t)}$ avec $T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$, τ_k sont i.i.d , τ_1 est porté par R_+^* , $\tau_1 \sim \xi(\lambda)$

On simule $N_t \sim Poisson(\lambda)$; $N_t = card\{n \epsilon N^* \,/\, T_n \leq t\}$=max(n|$T_n \leq t$)

N_t est appelé processus de renouvellement

On génère une suite de variables aléatoires U_n avec $U_n \sim$ U([0, T])
Puis on les ordonne dans le sens croissant
On obtient

$$U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots \ldots \ldots .. < U_{(n)}$$

Comme

$$L\left(U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots \ldots \ldots .. < U_{(n)}\right) = L(T_1, T_2, \ldots \ldots ., T_n \backslash N_t)$$

On prend comme partition $A_k = [T_k, T_{k+1}[, pour\ 0 \leq k \leq N_t$
Et on pose aussi :

$$M_n = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{nk} \psi_i^{(k)}$$

Avec$L\left(\psi_i^{(k)}\right) = L(\psi_k | N_t = k)$
On a $E(\psi) = E\left(\psi \mathbb{1}_{\cup_{n=0}^{+\infty}(N_T = n)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(\psi | N_T = n) P(N_T = n)$

$$U_k = TV_k \text{ où } V_k \sim U([0,1])$$

2. Partie Pratique :

Pour aboutir aux différentes estimations, nous avons utilisé le logiciel R comme outil.

Les données :

N=10 ; $\Delta = \frac{T}{n}$; $t_k = k$; $\boldsymbol{\Delta} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{10}}$

$X^{\Delta}_{t_0} = x_0 = 0$ Et $X^{\Delta}_{t_{k+1}} = X^{\Delta}_{t_k} + \mu(X^{\Delta}_{t_k})\boldsymbol{\Delta_k} + \sigma(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})$

2.1. Estimateur de Monte Carlo classique :

Nous avons créé un algorithme qui nous permet d'approcher la quantité suivante :

$$V_\Delta \coloneqq E\left[g\left(X^{\Delta}_{T}\right)\right]$$

On simule 10 mouvement brownien avec 100000 itérations, où chaque accroissement brownien suit la loi normale N(0,1), ensuite on affecte les données dans une matrice de taille 100000*10.
Une première estimation de V est donné par

$$V_\Delta = \frac{1}{100000}\sum_{i=1}^{100000}\left(g\left(X^{T}_{1}[i]\right)\right)$$

Résultat Trouvé : $V_\Delta = 0.204795$

```
> x=mean(classic[,12])
> x
[1] 0.204795
```

2.2. Méthode de la variable antithétique

On simule une matrice de taille N *100000 dont les composantes sont des variables aléatoires suivant la loi normale N(0; 0:1)
En appliquant

$$X^{\Delta}_{tk+1}(+) = X^{\Delta}_{tk}(+) + \mu\left(X^{\Delta}_{tk+1}(+)\right)\Delta + \sigma(w_{tk+1} - w_{tk})$$

De proche en proche on obtient la suite i.i.d $X^{\Delta}_{T}(+)$
Et

$$X^{\Delta}_{tk+1}(-) = X^{\Delta}_{tk}(-) + \mu\left(X^{\Delta}_{tk+1}(-)\right)\Delta - \sigma(w_{tk+1} - w_{tk})$$

Résultat Trouvé : $V_\Delta = 0.204948$

```
> y=mean((ant[,24]+ant[,12])/2)
> y
[1] 0.204948
> 
```

2.3. Méthode de la variable de contrôle :

Détermination de la valeur de m :

```
> integrate(f, lower = -Inf, upper = 0.5)
0.2689234 with absolute error < 3.8e-06
>
```

Estimation par la variable de contrôle :

Résultat Trouvé : $V_{\Delta} = 0.2018021$

```
> vc1
[1] 0.2018021
>
```

Conclusion

Dans ce projet, nous avons essayé de déterminer les différents estimateurs de Monte Carlo en employant des méthodes de réduction de variance

En comparant les variances de chacune des méthodes étudiées dans le projet, on peut admettre chaque méthode donne une valeur différente. Il nous reste à choisir la variance la plus petite pour la prise de décision.