



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پروژه اول درس بهینه سازی ترکیبی قسمت دوم

استاد درس

دکتر فرناز هوشمندخلیق

اعضا گروه

سلین هوید ۹۸۱۳۰۳۲

محیا پاشاپور ۹۸۱۲۰۰۹

سارا محمدزاده ۹۸۱۳۰۲۶

اردیبهشت ۱۴۰۲

اندیس‌ها:

مجموعه A با اندیس a و b برای کمان‌ها.

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$$

متغیرهای مسئله:

x_a : اگر روی کمان a سنسور واقع شده باشد مقدار این متغیر برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر است.
 $\forall a \in A$

y_{ab} : اگر روی هر دو کمان a و b سنسور باشد مقدار این متغیر برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر است.
 $\forall a \neq b \in A$

پارامترهای مسئله:

$\rho_{R_i}^a$: اگر کمان a روی مسیر R_i باشد مقدار این پارامتر یک و در غیر اینصورت صفر است.
 $\rho_{R_i R_j}^a$: اگر کمان a روی مسیر R_i یا R_j (نه هر دو) باشد مقدار یک و در غیر اینصورت مقدار آن صفر است.
 $\sigma_{R_i R_j}^{ab}$: اگر کمان a و b هم روی R_i هم روی R_j آمده باشند اما با ترتیب متفاوت مقدار این پارامتر یک و در غیر اینصورت مقدار برابر صفر است.

تابع هدف:

$$\min \sum_{a \in A} x_a$$

در این تابع، هدف ما مینیمم سازی تعداد سنسور‌هایی است که می‌خواهیم نصب کنیم.

قیود:

$$\sum_{a \in A} \rho_{R_i}^a x_a \geq 1 \quad \forall R_i \in R$$

این قید تضمین می‌کند که در هر مسیر حداقل یک سنسور نصب کنیم.

$$\sum_{a \in A} \rho_{R_i R_j}^a x_a + \sum_{a \neq b \in A} \sigma_{R_i R_j}^{ab} y_{ab} \geq 1 \quad \forall (R_i, R_j) | R_i < R_j$$

این قید تضمین می‌کند که برای هر دو مسیر با شرط $R_i < R_j$ (برای نداشتن قیود تکراری این شرط اضافه شده)، الگوی حسگری متفاوتی داشته باشیم. این قید به این صورت عمل می‌کند که برای داشتن الگوی حسگری متفاوت یا حداقل باید یک کمان شامل حسگر در یکی از دو مسیر موجود باشد که در دیگری نیست و یا حداقل دو کمان شامل حسگر در هر دو مسیر موجود باشند که با ترتیب متفاوتی در دو مسیر آمده‌اند.

$$2 y_{ab} - x_a - x_b \leq 0 \quad \forall a \neq b \in A$$

این قید تضمین می‌کند که اگر متغیر y_{ab} مقدار یک بگیرد در این صورت روی کمان a و روی کمان b حسگر وجود داشته باشد.

$$x_a \in \{0,1\} \quad \forall a \in A$$

$$y_{ab} \in \{0,1\} \quad \forall a \neq b \in A$$

نکته:

قید قبل تضمین کننده این نیست که اگر در a و در b حسگر بود لزوماً y_{ab} برابر یک باشد. این اتفاق فقط در شرایطی برقرار می‌شود که سیگما برای آن دو کمان یک باشد با توجه به مینیمم‌سازی بودن مسئله برای مدل صرف می‌کند که y_{ab} را برابر یک قرار دهد. اما در بقیه حالات این متغیر بدون توجه به مقدار ایکس‌ها برابر صفر است. با توجه به اینکه این مسئله تاثیری روی جواب بهین ما ندارد در مقاله از اضافه کردن قیدی که این مسئله را حل کند صرف نظر کرده. اما می‌دانیم اضافه کردن این قید یک برش معتبر به مدل اضافه می‌کند و سبب می‌شود مسئله راحت‌تر حل شود پس قید زیر را نیز به مدل اضافه می‌کنیم.

$$x_a = 1 \bigwedge x_b = 1 \Rightarrow y_{ab} = 1$$

خطی‌سازی:

$$1 - x_a - x_b + y_{ab} \geq 0$$

نتایج:

مقدار بهینه تابع هدف ۷ است. یعنی در بهترین حالت نیاز به ۷ سنسور داریم تا همه مسیرها حسگر داشته باشند و الگوی حسگری متفاوتی داشته باشند.

جواب بهین:

$$z^* = 7, x_1 = 1, x_5 = 1, x_{13} = 1, x_{14} = 1, x_{16} = 1, x_{17} = 1, x_{18} = 1$$

مسیر	الگوی حسگری
۱	1, 18
۲	5, 18
۳	18
۴	17
۵	1, 17
۶	5, 14
۷	5
۸	1
۹	14, 16
۱۰	13, 16
۱۱	5, 13
۱۲	14

شکل زیر توسط کتابخانه igraph پایتون کشیده شده که کمان‌ها قرمز نشان‌دهنده کمان‌هایی هستند که حسگر روی آن‌ها نصب شده.

