



دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پروژه اول درس بهینه‌سازی ترکیبی

گزارش بخش اول

اردیبهشت ۱۴۰۲

استاد درس : دکتر فرناز هوشمند خلیق

اعضا گروه:

سلین هوید ۹۸۱۳۰۳۲

سارا محمدزاده ۹۸۱۳۰۲۶

محیا پاشاپور ۹۸۱۲۰۰۹

اندیس‌ها:

$$i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

که در این مساله  $m = 12, n = 30$

پارامترهای مسئله:

$n$ : تعداد دانشجویان است که در مساله  $n = 30$

$m$ : تعداد اساتید است که در مساله  $m = 12$

$cap_i$ : ظرفیت پذیرش دانشجو توسط استاد  $i$  است.

$q_{ij}$ : میزان اولویت دانشجوی  $j$  برای استاد  $i$  است.  $q_{ij} = \{1, 2, \dots, m\}$

$p_{ij}$ : میزان اولویت استاد  $i$  برای دانشجوی  $j$  است.  $p_{ij} = \{1, 2, \dots, n\}$

متغیرهای مسئله:

$\delta_{ij}$  متغیر دودویی که اگر استاد  $i$  به دانشجوی  $j$  تخصیص داده شود برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر است.

تابع هدف: می‌توان دو نوع تابع هدف را (جداگانه) به صورت زیر مدنظر قرار داد که در بخش نتایج به میزان برتری هریک خواهیم پرداخت.

$$(1) \quad \min \quad Z = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{30} (p_{ij} + q_{ij}) \delta_{ij}$$

$$(2) \quad \max \quad Z = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j: q_{ij}=1}^{30} \delta_{ij}$$

s.t.

قیود:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = cap_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

این قید تضمین می‌کند به هر استاد به تعداد ظرفیت او دانشجو تخصیص یابد.

$$\sum_{i=1}^m \delta_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

این قید تضمین می‌کند به هر دانشجو دقیقاً یک استاد اختصاص یابد.

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

دو تابع هدف برای حل این مساله در نظر گرفته‌ایم. اول فاصله بین اندیس هر دانشجو و هر استاد تا اولویت خود مینیمم گردد که در نهایت معادل با تابع هدف اول می‌شود. در اولین تابع هدف، مجموع اولویت‌های داده شده کمینه می‌گردد. به این صورت تفاوتی میان ترجیح اساتید و دانشجو قائل نشده و به موازات رضایت هر دو تا حد امکان تامین می‌شود. در تابع هدف دوم به بیشینه‌سازی تعداد دانشجویانی می‌پردازیم که به اولویت اول خود می‌رسند. (البته به طور مشابه می‌توان به بیشینه‌سازی تعداد اساتیدی که به اولویت اول خود می‌رسند نیز پرداخت که اینجا رضایت دانشجویان اولویت اصلی است.) نقطه ضعف چنین مدلی نسبت به مدل قبل آن است که اولاً رضایت یک گروه (دانشجویان یا اساتید) نادیده گرفته می‌شود و دوماً در صورتی که دانشجویی (یا مشابه اساتیدی) اولویت اول خود را بدست نیاورد، آنگاه سایر اولویت‌ها هم‌ارزش خواهند بود و اولویت‌های ابتدایی اهمیت بیشتری نخواهند یافت و نهایتاً رضایت اغلب دانشجویان جلب نخواهد شد.

### داده‌های مساله

در این پروژه، ابتدا از داده‌های تصادفی برای بررسی نتایج استفاده شد تا کیفیت مدل بررسی شود. سپس به کمک داده‌های واقعی درک بهتری از کارایی مدل بدست آمد. و از آنجایی که داده‌های واقعی گرفته شده از گروه مهندسی فناوری اطلاعات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، با تمامی شرایط مساله سازگار نبود (از جمله تک ظرفیتی بودن اساتید) کد و نتایج مربوط به داده‌های تصادفی نیز قرار گرفته است.

دو مجموعه داده مجزا داریم: مجموعه اول مربوط به گرایش تجارت و دارای ۱۶ استاد و ۱۶ دانشجو می‌باشد و مجموعه دوم مربوط به گرایش IT که دارای ۲۹ استاد و ۲۹ دانشجو می‌باشد. به کمک هر دو مدل قصد داریم بهترین تخصیص دانشجو به استاد را با رعایت قیود ذکر شده بیابیم.

## تحلیل نتایج مربوط به داده‌های واقعی :

به کمک کد پایتومو قیدها بر داده ها اعمال شده و مقدار تابع هدف تعیین می‌شود. و نتایج به صورت زیر است که مقادیر مرتبط با هر دانشجو و استادی در هر مجموعه داده را برای هرمدل نشان می‌دهد.

Professor results - Model 1 - Dataset 1

| Professor | Student | Priority |
|-----------|---------|----------|
| 1         | 2       | 2        |
| 2         | 10      | 3        |
| 3         | 3       | 1        |
| 4         | 15      | 4        |
| 5         | 7       | 5        |
| 6         | 1       | 2        |
| 7         | 5       | 4        |
| 8         | 12      | 2        |
| 9         | 9       | 5        |
| 10        | 16      | 3        |
| 11        | 6       | 9        |
| 12        | 11      | 1        |
| 13        | 8       | 1        |
| 14        | 14      | 4        |
| 15        | 4       | 1        |
| 16        | 13      | 8        |

Professor results -Model 2 -Dataset 1

| Professor | Student | Priority |
|-----------|---------|----------|
| 1         | 9       | 12       |
| 2         | 10      | 3        |
| 3         | 3       | 1        |
| 4         | 15      | 4        |
| 5         | 16      | 15       |
| 6         | 13      | 3        |
| 7         | 1       | 11       |
| 8         | 14      | 13       |
| 9         | 8       | 10       |
| 10        | 4       | 10       |
| 11        | 5       | 5        |
| 12        | 7       | 15       |
| 13        | 2       | 5        |
| 14        | 6       | 14       |
| 15        | 12      | 9        |
| 16        | 11      | 10       |

Professor results - Model 1 - Dataset 2

| Professor | Student | Priority |
|-----------|---------|----------|
| 1         | 23      | 4        |
| 2         | 20      | 1        |
| 3         | 25      | 27       |
| 4         | 11      | 6        |
| 5         | 7       | 1        |
| 6         | 5       | 1        |
| 7         | 4       | 3        |
| 8         | 10      | 1        |
| 9         | 15      | 5        |
| 10        | 13      | 2        |
| 11        | 6       | 2        |
| 12        | 22      | 2        |
| 13        | 14      | 1        |
| 14        | 9       | 4        |
| 15        | 19      | 1        |
| 16        | 24      | 5        |
| 17        | 1       | 11       |
| 18        | 28      | 17       |
| 19        | 21      | 2        |
| 20        | 29      | 29       |
| 21        | 26      | 3        |
| 22        | 12      | 1        |
| 23        | 8       | 5        |
| 24        | 2       | 2        |
| 25        | 16      | 1        |
| 26        | 17      | 4        |
| 27        | 27      | 1        |
| 28        | 18      | 1        |
| 29        | 3       | 15       |

Professor results- Model 2- Dataset 2

| Professor | Student | Priority |
|-----------|---------|----------|
| 1         | 11      | 23       |
| 2         | 3       | 11       |
| 3         | 28      | 28       |
| 4         | 9       | 20       |
| 5         | 6       | 4        |
| 6         | 7       | 12       |
| 7         | 1       | 10       |
| 8         | 10      | 1        |
| 9         | 19      | 13       |
| 10        | 8       | 1        |
| 11        | 2       | 22       |
| 12        | 15      | 1        |
| 13        | 4       | 6        |
| 14        | 5       | 22       |
| 15        | 13      | 16       |
| 16        | 14      | 13       |
| 17        | 12      | 3        |
| 18        | 24      | 26       |
| 19        | 17      | 7        |
| 20        | 25      | 27       |
| 21        | 20      | 9        |
| 22        | 21      | 23       |
| 23        | 26      | 1        |
| 24        | 16      | 6        |
| 25        | 23      | 25       |
| 26        | 22      | 23       |
| 27        | 27      | 1        |
| 28        | 29      | 26       |
| 29        | 18      | 13       |

### Student results- Model 1- Dataset 1

| Student | Professor | Priority |
|---------|-----------|----------|
| 1       | 6         | 7        |
| 2       | 1         | 1        |
| 3       | 3         | 1        |
| 4       | 15        | 1        |
| 5       | 7         | 2        |
| 6       | 11        | 6        |
| 7       | 5         | 4        |
| 8       | 13        | 9        |
| 9       | 9         | 8        |
| 10      | 2         | 1        |
| 11      | 12        | 3        |
| 12      | 8         | 6        |
| 13      | 16        | 2        |
| 14      | 14        | 1        |
| 15      | 4         | 1        |
| 16      | 10        | 4        |

### Student results- Model 2- Dataset 1

| Student | Professor | Priority |
|---------|-----------|----------|
| 1       | 7         | 6        |
| 2       | 13        | 1        |
| 3       | 3         | 1        |
| 4       | 10        | 1        |
| 5       | 11        | 13       |
| 6       | 14        | 5        |
| 7       | 12        | 1        |
| 8       | 9         | 1        |
| 9       | 1         | 9        |
| 10      | 2         | 1        |
| 11      | 16        | 1        |
| 12      | 15        | 2        |
| 13      | 6         | 3        |
| 14      | 8         | 1        |
| 15      | 4         | 1        |
| 16      | 5         | 12       |

### Student results- Model 1- Dataset 2

| Student | Professor | Priority |
|---------|-----------|----------|
| 1       | 17        | 3        |
| 2       | 24        | 6        |
| 3       | 29        | 7        |
| 4       | 7         | 4        |
| 5       | 6         | 14       |
| 6       | 11        | 1        |
| 7       | 5         | 6        |
| 8       | 23        | 1        |
| 9       | 14        | 1        |
| 10      | 8         | 1        |
| 11      | 4         | 8        |
| 12      | 22        | 5        |
| 13      | 10        | 4        |
| 14      | 13        | 15       |
| 15      | 9         | 3        |
| 16      | 25        | 2        |
| 17      | 26        | 3        |
| 18      | 28        | 2        |
| 19      | 15        | 5        |
| 20      | 2         | 6        |
| 21      | 19        | 3        |
| 22      | 12        | 5        |
| 23      | 1         | 10       |
| 24      | 16        | 3        |
| 25      | 3         | 2        |
| 26      | 21        | 6        |
| 27      | 27        | 1        |
| 28      | 18        | 3        |
| 29      | 20        | 2        |

### Student results- Model 2- Dataset 2

| Student | Professor | Priority |
|---------|-----------|----------|
| 1       | 7         | 1        |
| 2       | 11        | 28       |
| 3       | 2         | 28       |
| 4       | 13        | 26       |
| 5       | 14        | 29       |
| 6       | 5         | 1        |
| 7       | 6         | 1        |
| 8       | 10        | 1        |
| 9       | 4         | 1        |
| 10      | 8         | 1        |
| 11      | 1         | 12       |
| 12      | 17        | 1        |
| 13      | 15        | 8        |
| 14      | 16        | 20       |
| 15      | 12        | 1        |
| 16      | 24        | 1        |
| 17      | 19        | 23       |
| 18      | 29        | 1        |
| 19      | 9         | 1        |
| 20      | 21        | 13       |
| 21      | 22        | 20       |
| 22      | 26        | 1        |
| 23      | 25        | 23       |
| 24      | 18        | 1        |
| 25      | 20        | 1        |
| 26      | 23        | 26       |
| 27      | 27        | 1        |
| 28      | 3         | 6        |
| 29      | 28        | 29       |

با توجه به نتایج قرار داده شده می‌توان دریافت که برای هر دو مجموعه داده، مدل اول بسیار مناسب‌تر از مدل دوم است. مشاهده می‌شود که در مدل اول، مدل تاحد امکان اعداد کوچک‌تری به دانشجویان و اساتید نسبت داده و مقادیر عموماً اعداد کوچکی هستند که منجر به رضایت بیشتری خواهد شد.

اما در نتایج مدل دوم چنین نیست. به وضوح تعداد دانشجویانی که به اولویت‌های اول خود رسیده‌اند بالاتر است و قاعدتاً این دسته از دانشجویان راضی خواهند بود. از طرفی تعداد کمی از دانشجویان و بخش عمده اساتید از نتایج تخصیص ناراضی خواهند بود چراکه اعداد متناظر با آن‌ها در جدول اعداد نسبتاً بزرگی است.

## تحلیل نتایج مربوط به داده‌های تصادفی :

یک نمونه از چندین مجموعه داده‌های تصادفی و متناسب با فرض‌های مساله به صورت زیر است: (سایر جواب‌ها در

پیوست قرار دارد)

Student results - Model1- Random Dataset

| Student | Professor | Priority |
|---------|-----------|----------|
| 1       | 9         | 3        |
| 2       | 10        | 6        |
| 3       | 4         | 1        |
| 4       | 12        | 5        |
| 5       | 5         | 7        |
| 6       | 10        | 6        |
| 7       | 9         | 6        |
| 8       | 3         | 1        |
| 9       | 2         | 6        |
| 10      | 5         | 12       |
| 11      | 3         | 1        |
| 12      | 3         | 1        |
| 13      | 11        | 3        |
| 14      | 9         | 3        |
| 15      | 1         | 6        |
| 16      | 5         | 9        |
| 17      | 5         | 6        |
| 18      | 8         | 3        |
| 19      | 3         | 1        |
| 20      | 2         | 4        |
| 21      | 7         | 1        |
| 22      | 4         | 5        |
| 23      | 8         | 4        |
| 24      | 5         | 9        |
| 25      | 4         | 5        |
| 26      | 4         | 1        |
| 27      | 7         | 4        |
| 28      | 7         | 3        |
| 29      | 6         | 3        |
| 30      | 6         | 1        |

Student results - Model2 - Random Dataset

| Student | Professor | Priority |
|---------|-----------|----------|
| 1       | 8         | 1        |
| 2       | 5         | 4        |
| 3       | 4         | 1        |
| 4       | 5         | 10       |
| 5       | 2         | 1        |
| 6       | 6         | 1        |
| 7       | 4         | 1        |
| 8       | 3         | 1        |
| 9       | 9         | 1        |
| 10      | 10        | 1        |
| 11      | 3         | 1        |
| 12      | 3         | 1        |
| 13      | 1         | 1        |
| 14      | 5         | 11       |
| 15      | 7         | 9        |
| 16      | 11        | 1        |
| 17      | 5         | 6        |
| 18      | 9         | 1        |
| 19      | 3         | 1        |
| 20      | 10        | 1        |
| 21      | 7         | 1        |
| 22      | 8         | 1        |
| 23      | 7         | 11       |
| 24      | 12        | 1        |
| 25      | 2         | 12       |
| 26      | 4         | 1        |
| 27      | 4         | 1        |
| 28      | 5         | 5        |
| 29      | 9         | 1        |
| 30      | 6         | 1        |

Professor results - Model1- Random Dataset

| Professor | Student | Priority |
|-----------|---------|----------|
| 1         | 15      | 3        |
| 2         | 9       | 6        |
| 2         | 20      | 3        |
| 3         | 8       | 7        |
| 3         | 11      | 13       |
| 3         | 12      | 11       |
| 3         | 19      | 1        |
| 4         | 3       | 1        |
| 4         | 22      | 5        |
| 4         | 25      | 9        |
| 4         | 26      | 2        |
| 5         | 5       | 3        |
| 5         | 10      | 2        |
| 5         | 16      | 1        |
| 5         | 17      | 5        |
| 5         | 24      | 4        |
| 6         | 29      | 2        |
| 6         | 30      | 4        |
| 7         | 21      | 5        |
| 7         | 27      | 8        |
| 7         | 28      | 1        |
| 8         | 18      | 3        |
| 8         | 23      | 1        |
| 9         | 1       | 5        |
| 9         | 7       | 11       |
| 9         | 14      | 7        |
| 10        | 2       | 3        |
| 10        | 6       | 13       |
| 11        | 13      | 4        |
| 12        | 4       | 5        |

Professor results - Model 2 - Random Dataset

| Professor | Student | Priority |
|-----------|---------|----------|
| 1         | 13      | 25       |
| 2         | 5       | 4        |
| 2         | 25      | 27       |
| 3         | 8       | 7        |
| 3         | 11      | 13       |
| 3         | 12      | 11       |
| 3         | 19      | 1        |
| 4         | 3       | 1        |
| 4         | 7       | 23       |
| 4         | 26      | 2        |
| 4         | 27      | 26       |
| 5         | 2       | 24       |
| 5         | 4       | 14       |
| 5         | 14      | 26       |
| 5         | 17      | 5        |
| 5         | 28      | 7        |
| 6         | 6       | 22       |
| 6         | 30      | 4        |
| 7         | 15      | 18       |
| 7         | 21      | 5        |
| 7         | 23      | 22       |
| 8         | 1       | 18       |
| 8         | 22      | 8        |
| 9         | 9       | 28       |
| 9         | 18      | 12       |
| 9         | 29      | 19       |
| 10        | 10      | 16       |
| 10        | 20      | 23       |
| 11        | 16      | 9        |
| 12        | 24      | 20       |

در نتایج داده تصادفی مشاهده می‌شود که مدل دوم برای دانشجویان بسیار بهتر عمل کرده است. اگر چه مشکل ناراضی بودن اساتید همچنان پابرجاست اما اگر دانشگاهی اولویت خود را دانشجویان قرار داده باشد این مدل برای این دیتا انتخاب خوبی خواهد بود. اما همان طور که پیش تر نیز گفته شد داده ی تصادفی محک خوبی برای مدل نیست بنابراین تحلیل بر روی داده واقعی دید مناسب تری را به ما می دهد.

شایان ذکر است، منبع تامین دادگان گروه مهندسی فناوری اطلاعات دانشگاه بوده و به طور خاص از دکتر مرتضی زمانیان مدیر گروه اقتصاد و مالی و دکتر سیدعلیرضا هاشمی گلپایگانی استادیار پژوهشکده فناوری های نو مرکز پژوهشی آپا، بابت دراختیار گذاشتن این داده ها تشکر می کنیم.