

Datum: 3.12.2018.

## Graf

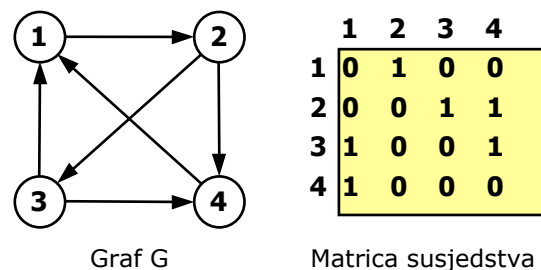
U ovom materijalu je prikazana sekvencijalna reprezentacija grafa (engl. *graph*). Graf je kolekcija vrhova (engl. *vertex*) u kojoj su neki od parovi vrhova međusobno povezani ivicama (engl. *edge* ili *arc*). U informatici je uobičajeno da se graf naziva mrežom (engl. *network*), a vrhovi - čvorovima (engl. *node*).

Grafom se može predstaviti bilo koji skup podataka od kojih neki međusobno komuniciraju, na primjer, računari umreženi u mrežu, ljudi povezani u socijalnoj mreži...

### Osnovni koncepti i terminologija

#### Reprezentacije grafa

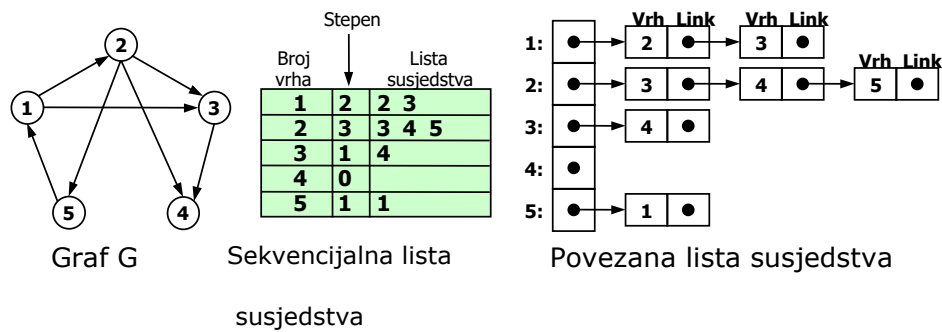
Neka je  $G=(V,E)$  graf. Ako ima  $n$  vrhova u  $V$ , numeriraćemo ih brojevima od 1 do  $n$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Sada možemo oformiti tabelu  $T[i,j]$  sa  $n$  redova i  $n$  kolona, gdje je  $i$  indeks reda, a  $j$  indeks kolone ( $i,j=1,\dots,n$ ). Ispunićemo tabelu  $T$  nulama i jedinicama, tako da jedinica na mjestu  $ij$  označava da postoji ivica  $e=(v_i, v_j)$  (koja spaja vrhove  $v_i$  i  $v_j$ ). Nula označava nepostojanje ivice. Takva tabela,  $T$ , se naziva **matrica susjedstva** (*adjacency matrix*) grafa  $G$ . (Primjer grafa i odgovarajuće tabele na Slici 1)



Slika 1: Graf G i njegova matrica susjedstva

Dati red  $R_i$ , tabele  $T$ , sadrži informaciju o vrhovima  $v_j$ ,  $j=1,\dots,n$ , koji su susjedni datom vrhu  $v_i$  (susjedni su ako u prijeseku  $j$ -tog stupca sa redom  $i$  postoji 1). Informacija koju nosi red  $R_i$  se u C-u može predstaviti pomoću bit vektora. Bit vektor koji predstavlja red  $R_i$  bi se sastojao od niza  $n$  bitova,  $R_i=b_1, b_2, \dots, b_n$ , tako da je bit  $b_i=T[i,j]$

Graf se može predstaviti i povezanom listom. Na primjer, možemo predstaviti svaki red  $R_i$ , matrice susjednih vrhova  $T$ , listom indeksa  $j$ , vrhova  $v_j$ , koji su susjedni vrhu  $v_i$ . Takva lista susjednih vrhova je samo još jedna od reprezentacija grafa i može imati sekvencijalnu ili povezanu nižu reprezentaciju, kao na Slici 2.



Slika 2: Sekvencijalna i povezana lista susjedstva

U sekvencijalnoj reprezentaciji je dužina svake liste susjednih vrhova jednaka stepenu adekvatnog vrha kod neusmjerenog grafa, odnosno izlaznom stepenu, kod usmjerenog grafa.

Još jedan bitan pojam je stepen vrha. Ukoliko je graf **usmjeren**, razlikuju se dva stepena za svaki vrh:

- **izlazni stepen** (out-degree) koji se računa kao zbir elemenata u redu, a označava broj ivica koje „izlaze“ iz vrha i
- **ulazni stepen** (in-degree) koji se računa kao zbir kolone, a označava broj ivica koje „ulaze“ u vrh.

Tako je, na primjer, izlazni stepen vrha 3 sa Slike 1 jednak 2 (zbir elemenata u trećem redu) a ulazni je 1 (zbir elemenata u trećoj koloni).

Ukoliko graf **nije usmjeren**, zbrovi po  $i$ -tom redu i  $i$ -toj koloni su jednaki i predstavljaju stepen  $i$ -tog vrha.

**Centralnost vrha/čvora izražena preko stepena** se definiše ili kao stepen vrha ili kao stepen vrha podjeljen maksimalnim brojem ivica iz jednog vrha.

**Gustina grafa/mreže** se računa kao broj ivica podjeljen maksimalnim brojem ivica. Za njeno računanje se može iskoristiti Handshaking lemma (broj ivica je jednak polovini zbira stepeni svih vrhova).

Ostali pojmovi o grafovima su definisani u materijalima iz diskretne matematike.

Iako se graf može predstaviti i u povezanoj reprezentaciji, uobičajeno je, da se radi brzine, koristi sekvencijalna reprezentacija matrice susjedstva, odnosno dvodimenzioni niz.

## Primjene grafa

Postoje dvije veoma raširene i veoma popularne primjene teorije grafova u informatici:

- primjena u kompjuterskim mrežama i
  - Dat je primjer kompjuterske mreže sa topologijom zvijezde (svaki računar je povezan samo na switch); sastaviti funkciju koja određuje switch, (ulaz u funkciju je dvodimenzioni niz, a funkcija ispisuje poruku na ekranu i indeks vrha koji ima najveći stepen).
- primjena u socijalnim mrežama.

### Primjer neusmjerenog grafa: prijateljstva na Facebook-u

Recimo da se trebaju prikupiti informacije o prijateljstvima na FB za studente 1. Godine FIT-a. U tom slučaju je najjednostavnije reći da studentima odgovaraju čvorovi grafa, a uspostavljenim prijateljstvima ivice grafa. Ovaj graf nije usmjeren jer prijateljstvo na FB ne može biti jednosmjerno, već je uvijek uzajamno.

U ovakvom grafu stepen vrha predstavlja broj prijatelja. On se računa sumiranjem po redu (ili koloni) za odgovarajući indeks.

Za ispit mogu doći u obzir zadaci tipa:

1. Dat je graf (dvodimenzioni niz); Sastaviti funkciju koja provjerava da li je graf ispravno definisan (jesu li sve nule na glavnoj dijagonali), (ulaz u funkciju je dvodimenzioni niz).
2. Dat je primjer kompjuterske mreže sa topologijom zvijezde (svaki računar je povezan samo na switch); sastaviti funkciju koja određuje switch, (ulaz u funkciju je dvodimenzioni niz, a funkcija ispisuje poruku na ekranu i indeks vrha koji ima najveći stepen).
3. Dat je primjer komunikacije na socijalnoj mreži,
  - a. Sastaviti funkciju kojom se određuje stepen traženog vrha (ulaz je dvodimenzioni niz i identifikacija vrha, a izlaz je stepen vrha).
  - b. Sastaviti funkciju kojom se određuje sa kojim osobama je komunicirala osoba x (ulaz je dvodimenzioni niz, a funkcija vrši ispis vrhova na ekran).
  - c. Sastaviti funkciju kojom se određuje koja osoba je komunicirala sa najviše/najmanje osoba. Treba se ispisati indeks osobe koja ima najviše (najmanje) prijatelja. Ukoliko ima više takvih osoba, trebaju se ispisati indeksi svih.
  - d. Sastaviti funkciju kojom se određuje postoji li osoba koja nije komunicirala ni sa kim. Treba se ispisati indeks osobe koja ima 0 prijatelja. Ukoliko ima više takvih osoba, trebaju se ispisati indeksi svih.
  - e. Ko ima 14 prijatelja na FB? Treba se ispisati indeks osobe koja ima 14 prijatelja. Ukoliko ima više takvih osoba, trebaju se ispisati indeksi svih. Ukoliko nema niko sa 14 prijatelja, treba se ispisati adekvatna poruka.

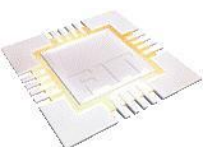
Svi ovi zadaci se baziraju isključivo na gradivu koje je obrađeno u UPR, pa se pretpostavlja da studenti znaju samostalno da ih urade.

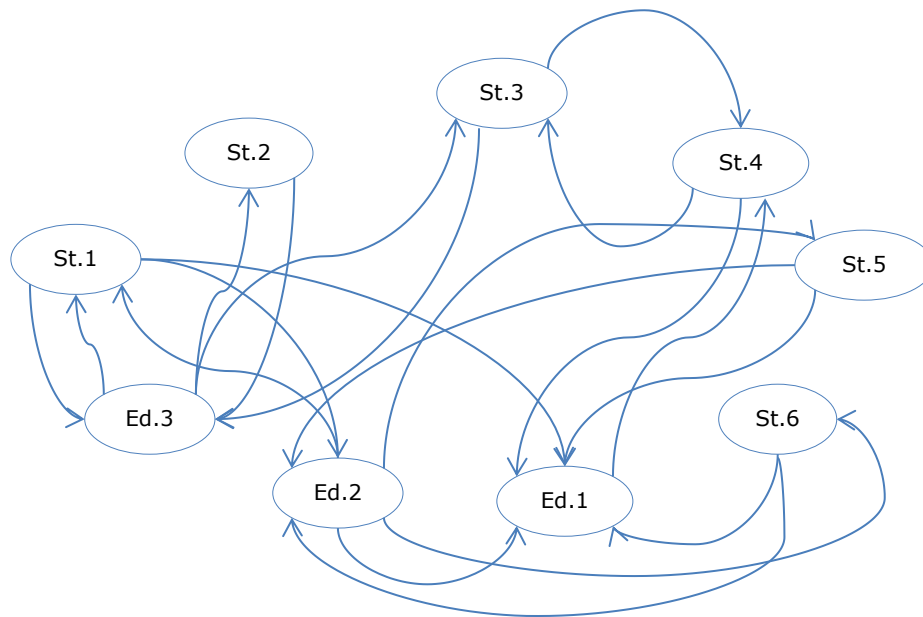
### Primjer usmjerenog grafa: komunikacija mail-om

Recimo da se trebaju prikupiti informacije o komunikaciji studenata 1. godine i edukatora na FIT-u.

U ovom slučaju je bitno ko je s kim komunicirao, pa se za reprezentaciju bira usmjereni graf. U tom grafu su čvorovi i studenti i edukatori, a lukovi (usmjerene ivice) prate ko je s kim komunicirao.

Na primjer, pratimo komunikaciju 6 studenata i 3 edukatora, prikazanu na Slici 2. Vidi se da je edukator Ed.3 odgovorio svima koji su mu pisali, kao i Ed.2, ali Ed.1 nije.





**Slika 1: Mreža komunikacije elektronskom poštom 6 studenata i 3 nastavnika**

U slučaju ovakve mreže može nas zanimati:

- postoji li student koji nije dobio odgovor od edukatora
- postoji li edukator koji nije odgovorio svim studentima koji su mu pisali
- ko je komunicirao sa najviše osoba (ko ima najveći izlazni stepen vrha)
- ko je primio poštu od najvećeg broja osoba (ko ima najveći ulazni stepen vrha)
- postoji li neko ko je slao pisma na tri različite adrese (izlazni stepen je 3), itd.

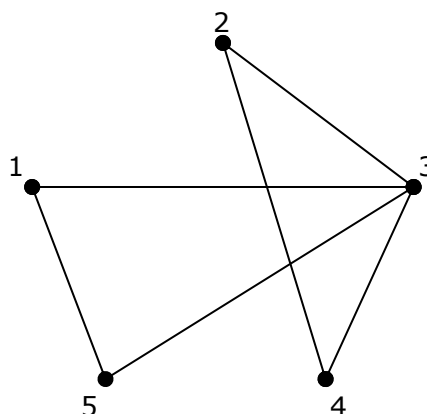
## Zadatak 1

Sastaviti program koji za datu matricu susjedstva grafa pravi listu susjedstva.

### Uputstvo:

Recimo da se radi o grafu sa 5 vrhova, koji je prikazan na slici 3. Radi jednostavnosti, vrhovi grafa su numerisani brojevima od 1 do 5.

Za pravljenje liste susjedstva se može iskoristiti kod sortirano dodavanje novog elementa u listu, funkcija `DodajNoviPrvi`, ali u silaznoj petlji.



```
c:\documents and settings\gost.fit-nina\my documents\visual studio 2005\projects\ni\deb...
Unesena je slijedeca matrica susjedstva :
  1 2 3 4 5
-----
1: 0 0 1 0 1
2: 0 0 1 1 0
3: 1 1 0 1 1
4: 0 1 1 0 0
5: 1 0 1 0 0

Odgovarajuca lista susjedstva je:
susjedi 1 su: 3 5
susjedi 2 su: 3 4
susjedi 3 su: 1 2 4 5
susjedi 4 su: 2 3
susjedi 5 su: 1 3
Press any key to continue . . .
```

## Zadatak 2

Sastaviti program koji za datu matricu susjedstva usmjerenog grafa pravi dva niza u koji se smještaju ulazni i izlazni stepeni svakog od vrhova grafa.

