

Esperienza 5: Analisi di Fourier applicata a dati contaminati da rumore sinusoidale ed a segnali audio di note, accordi e porzioni di canzoni suonati da chitarra e basso

Laura Francesca Iacob, Sara Pieri, Sara Schippa
Università degli Studi di Perugia, CdL in Fisica

Anno Accademico 2024/2025

Estratto: I segnali sono grandezze che trasportano informazione e che risiedono naturalmente nel dominio del tempo. L'analisi dei segnali interpreta matematicamente ciascuna onda come una somma di singole componenti sinusoidali, ognuna caratterizzata da una frequenza ed un'ampiezza specifiche. Secondo questa rappresentazione, il segnale può essere studiato nel dominio delle frequenze e manipolato attraverso queste.

Mediante dei segnali reali campionati, si mette in pratica l'analisi di Fourier per deformare a proprio piacimento i dati originali. In un primo momento, si estraggono dei dati raccolti in formato *txt* e se ne elimina il rumore sinusoidale. Successivamente, si studiano dei file *wav* riguardanti note, accordi e porzioni limitate di canzoni suonate alla chitarra elettrica. In particolare, si visualizza lo spettro di potenza per comprendere il ruolo dalle armoniche in analisi. In fine, si mette mano su segnali audio che contemplano suoni generati da una chitarra e da un basso e si sintetizzano i due strumenti separatamente.

Keywords: analisi di Fourier, spettro, frequenze, filtro, campionamento, rumore

1 Introduzione teorica

Il segnale è una grandezza fisica variabile nel tempo a cui è associata una informazione. Si distingue dal rumore, a cui non è associato alcun significato fisico ed è una componente di disturbo. Un parametro fondamentale nella valutazione di un segnale generico è la potenza, in quanto è legata all'intensità dell'onda: $P_x(t) = |x(t)|^2$.

Un segnale fisico trasporta energia finita ed è costituito da due componenti:

- *deterministica*, liscia ed univocamente determinabile se noti i valori delle variabili indipendenti temporali;
- *aleatoria*, porzione di rumore che può essere dovuta alla natura intrinseca del segnale o al metodo sperimentale; per cui è conoscibile solo a posteriori, mediante il processo di misura.

L'analisi di Fourier è la branca analitica della matematica che si occupa dello studio dei segnali periodici, il cui andamento si ripete uguale a se stesso ad ogni periodo T_0 . Questa afferma che ogni segnale periodico può essere espresso come sommatoria di oscillazioni sinusoidali di ampiezza, fase e frequenza specifiche in forma polare o esponenziale (1). Studiare un segnale significa determinare, in termini di frequenza, qual è lo spettro delle ampiezze e delle fasi associate a ciascuna componente della serie. La relazione è

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i 2\pi k f_0 t} \quad (1)$$

dove ogni termine cosinusoidale prende il nome di k -esima armonica, mentre $\omega_k = 2\pi k f_0$ è la pulsazione associata a ciascuna armonica come multiplo k -esimo della frequenza di ripetizione f_0 del segnale stesso.

Le ampiezze A_k della forma polare rappresentano il “peso” che ogni armonica ha nel segnale originale. Il termine continuo A_0 , corrispondente all’armonica zeresima, è quello che conferisce un offset e coincide con il valor medio \bar{x} del segnale. Gli X_k sono le ampiezze delle armoniche esponenziali e tengono sia conto dell’ampiezza A_k sia dello sfasamento ϕ_k sotto forma di modulo e fase del numero complesso. Uno studio dello spettro delle frequenze richiede l’analisi dell’andamento di X_k della parte sia reale sia immaginaria.

I sistemi di acquisizione dati mettono a disposizione per una eventuale elaborazione segnali aperiodici campionati nel finito. Un segnale di questo tipo può essere analizzato mediante le regole di Fourier, a patto che vengano ricondotte ad una forma opportuna.

Si osserva che un segnale **aperiodico** può essere ottenuto a partire da un segnale periodico mandando all’infinito il periodo di ripetizione dell’onda stessa. L’operazione compiuta fa sì che la risoluzione nel dominio delle frequenze, ovvero la distanza tra due armoniche successive, diventi una quantità infinitesima: $df \rightarrow 0$. Lo spettro in frequenza si trasforma da discreto a continuo, dato che si addensano i valori rispetto a cui si calcolano i coefficienti che descrivono il segnale.

L’operazione di discretizzazione del tempo può essere riprodotta matematicamente a partire dal segnale continuo da una delta di Dirac, che agisce ad intervalli dettati dal tempo di sampling T_s . La frequenza di campionamento si definisce come il suo inverso: $f_s = \frac{1}{T_s}$. Perciò, il **segnale campionato** diventa una sequenza di impulsi le cui ampiezze rappresentano il segnale agli istanti di campionamento: $x[n] := x(nT_s)$.

La trasformata di Fourier associata presenta una periodicità nel dominio delle frequenze, il cui periodo di ripetizione coincide con la frequenza di campionamento. Questo permette di compiere la sintesi del segnale sulle frequenze in un solo periodo, perché le successive ripetizioni non conferiscono informazioni aggiuntive.

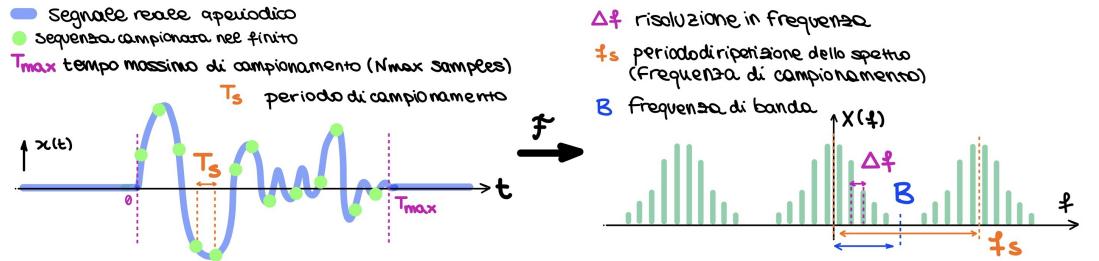


Figure 1: Caratteristiche dello spettro (destra) di un segnale campionato nel finito (sinistra).

Nella realtà, essendo il segnale ridotto nello spazio e nel tempo e l’informazione trasportata limitata, si sceglie ragionevolmente di campionare esclusivamente la finestra in cui questo vive (Figure 1). Attraverso la suddetta procedura, il campionamento diventa **finito** e si limita ad un intervallo temporale pari a $[0, T_{max}]$. Questo prevede la registrazione di un numero di campioni fino ad un massimo pari a N_{max} , che permette di definire una relazione in termini dei tempi del sampling: $T_{max} = N_{max}T_s$.

Limitare il tempo di campionamento si ripercuote sullo spettro di coefficienti mediante una discretizzazione nell’andamento nel dominio delle frequenze. Lo spettro è una sequenza costruita su armoniche illimitate e ancora periodiche con periodo f_s (a causa del processo di sampling) ma numerabili. La risoluzione in frequenza è definita come l’ inverso del tempo massimo in cui è stato applicato il campionamento: $\Delta f = \frac{1}{T_{max}}$.

Le relazioni in (2) sono le leggi cardine dell’analisi di Fourier di un segnale reale e prendono rispettivamente il nome di *equazione di analisi* (trasformata), che opera uno studio del contenuto in frequenza del segnale, ed *equazione di sintesi* (antitrasformata), che computa la ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche.

$$X_{s,k} = \frac{1}{N_{max}} \sum_{n=0}^{N_{max}-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N_{max}} , \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N_{max}-1} X_{s,k} e^{i2\pi nk/N_{max}} \quad (2)$$

La trasformate di Fourier godono di alcune proprietà. Un esempio per i segnali reali è l’hermitianità, che garantisce una parità definita per moduli (pari) e fasi (dispari) delle

ampiezze complesse X_k . Inoltre, qualsiasi segnale si può scrivere come somma di una componente pari di coseni e dispari di seni, caratterizzati da soli coefficienti rispettivamente reali e immaginari puri.

Il criterio di convergenza assicura che l'ampiezza delle armoniche nello spettro tende a diminuire all'aumentare della frequenza con una rapidità tipica della funzione in studio. Nasce il concetto di lunghezza di banda B , ovvero la frequenza massima per cui l'armonica corrispondente porta ancora informazione, mentre le successive componenti risultano superflue. La ricostruzione del segnale mediante l'antitrasformata sui soli coefficienti significativi selezionati riproduce in buona approssimazione il segnale originale. La banda è un parametro di cui si deve tener conto per poter operare un campionamento corretto. Il teorema di Nyquist-Shannon afferma che per un segnale $x(t)$ a banda limitata, la minima frequenza di campionamento necessaria per ricostruirlo senza perdita di informazione è data dal doppio della banda del segnale: $f_s \geq 2B$. Questo permette di distinguere correttamente l'andamento periodico dello spettro coerentemente fino a comprendere anche la lunghezza di banda. Nel caso la condizione non venga rispettata a causa di un sottocampionamento, ovvero di un periodo di sampling troppo grande, lo spettro verrebbe mal costruito perché i periodi nel dominio delle frequenze si sovrapporrebbero ed il segnale sintetizzato non sarebbe veritiero.

2 Materiali e strumentazione

E' possibile consultare i codici usati per l'elaborazione e l'analisi dei dati nella repository GitHub. Ulteriori materiali inerenti disponibili presso la cartella *Drive* in collegamento ipertestuale.

L'esperimento compiuto non richiede l'uso di strumentazione specifica, solo un computer (dotato di speaker) su cui sia possibile eseguire programmi script attraverso il linguaggio di programmazione Python. Oltre alla libreria *soundfile*, impiegata per la lettura dei file di tipo *wav*, si sfrutta il modulo *fft* di *scipy* per le formule relative all'analisi di Fourier.

3 Parte I: filtraggio del rumore sinusoidale

Vengono letti dei segnali forniti tramite file di testo, cioè nella forma di due colonne di dati caratterizzate dagli istanti temporali e la relativa ampiezza del segnale. Una volta estratti i dati, si visualizza l'andamento ondulatorio originale.

Si procede calcolando i coefficienti di Fourier e rappresentando lo spettro dei coefficienti per ciascun file, separando parte reale, parte immaginaria e modulo quadro (potenza). Lo studio in frequenza del segnale permette di individuare i picchi che descrivono la forma d'onda, compreso il singolo coefficiente responsabile del rumore sinusoidale.

Attraverso maschere opportune si mette a zero la suddetta componente e si applica sui coefficienti aggiornati l'antitrasformata per estrarre il segnale finale ripulito.

Il riconoscimento della forma dell'onda in studio, oltre alla mera visualizzazione della waveform ricostruita senza rumore, può essere promosso da un fit lineare in scala logaritmica dell'andamento dei coefficienti.

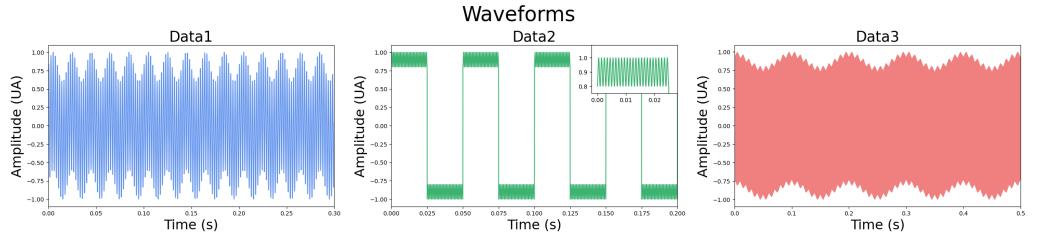


Figure 2: Rappresentazione dei segnali in analisi mediante l'andamento dell'ampiezza nel tempo. Sono selezionate le prime frazioni di secondo per permettere di individuare ad occhio gli andamenti periodici. Ad esempio, nei dati del secondo set (*centro*), uno zoom permette di vedere un rumore sinusoidale nei tratti orizzontali della quadra.

3.1 Analisi dati e risultati

Si mostrano in un intervallo in secondi opportuno in Figure 2 i grafici *ampiezza-tempo* dei tre segnali forniti, originariamente riferiti ad un tempo massimo di acquisizione di 10s per una frequenza di campionamento da 44100Hz.

L'analisi spettrale mostra per il primo set di dati (Figure 3, (a)) una flebile componente di rumore nella parte reale ($\sim 1e-10$ UA), mentre i due principali andamenti sinusoidali si palesano nella sola parte immaginaria. Questi ultimi sono riferiti alle frequenze di 50Hz e 440Hz, si sceglie arbitrariamente di porre a zero il secondo per ricostruire il segnale con periodo maggiore.

In Figure 3, (b) è visibile l'analisi del secondo file di testo, dove il picco di rumore sinusoidale è perfettamente distinguibile nella parte reale a 1000Hz, rispetto ai coefficienti che individuano l'onda quadra che seguono una legge di potenza per la sola parte immaginaria.

Anche lo spettro del *data3.txt* (Figure 3, (c)) presenta il rumore sinusoidale nella parte reale a 10Hz, mentre la parte immaginaria descrive la composizione di due onde triangolari: una ad alta e l'altra a minor frequenza, quest'ultima a regolare l'andamento dell'ampiezza della prima.

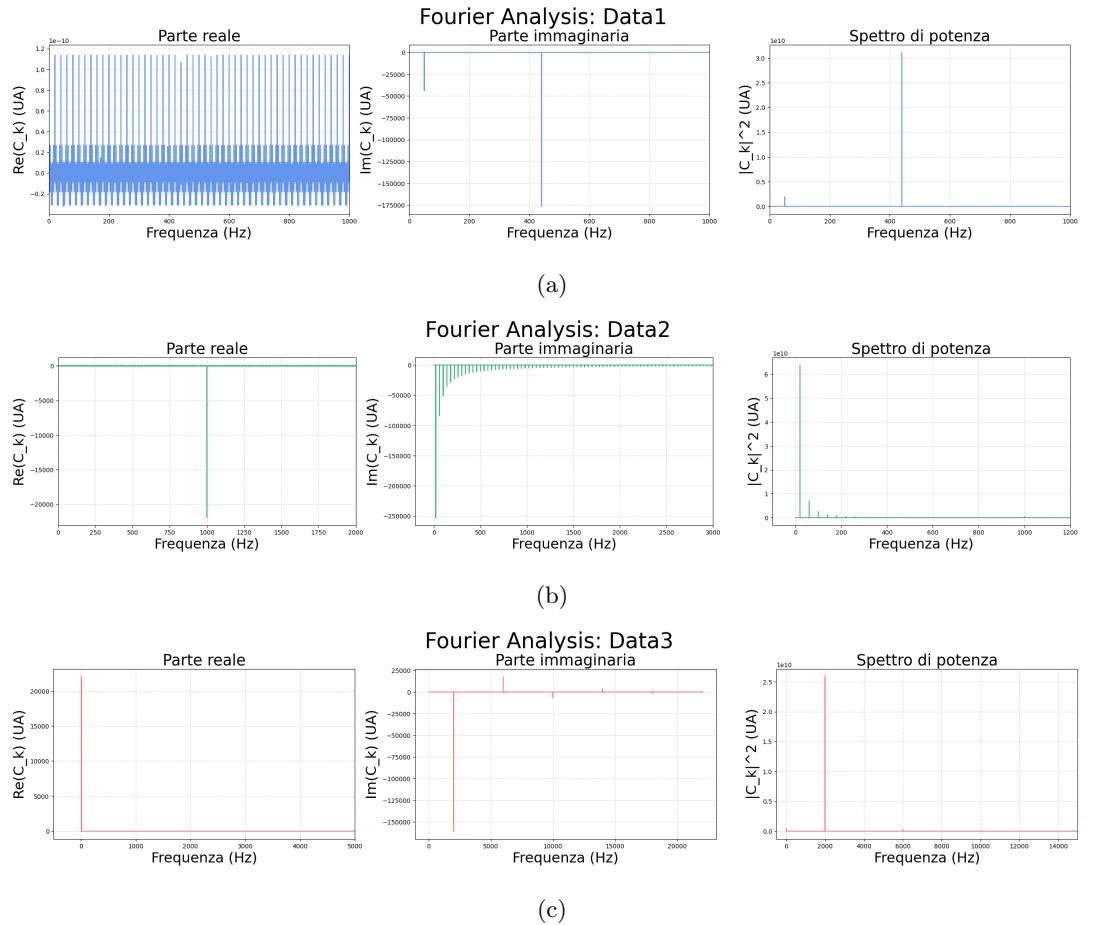


Figure 3: Grafici relativi all'analisi di Fourier del primo (a), secondo (b) e terzo (c) set di dati: dei coefficienti estratti la parte reale (*sinistra*), la immaginaria (*centro*), il modulo quadro ad indicare la potenza (*destra*) in funzione della frequenza.

Eliminato il noise, si procede antitrasformando per ottenere i segnali filtrati puliti, come mostrato in Figure 4, e confrontarli con gli originali in Figure 5.

Riguardo il secondo set di dati, un fit lineare (Figure 6) permette di verificare l'andamento della legge di potenza tipico dell'onda quadra (3).

$$|X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2 k^2}, \quad k : \text{dispari} \quad (3)$$

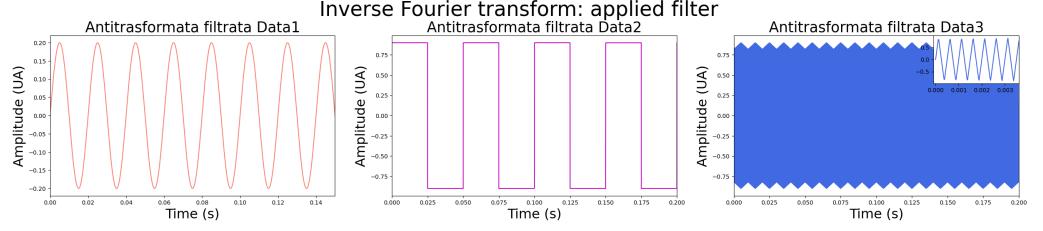


Figure 4: Per ciascun set di dati, si visualizza il segnale sottoposto al filtraggio del rumore sinusoidale individuato.

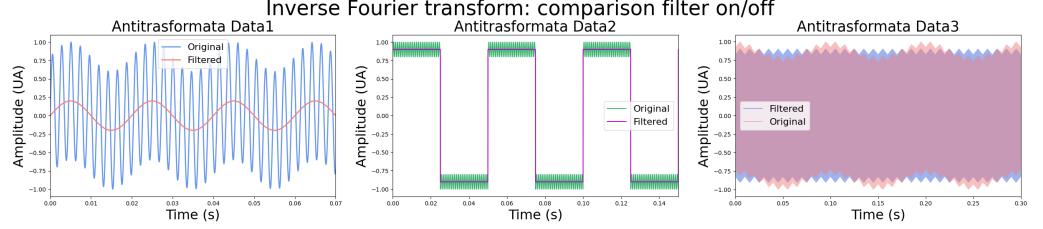


Figure 5: A confronto i segnali originali e quelli ripuliti dalla componente di rumore sinusoidale per mezzo dell'analisi di Fourier, per ciascun set di dati.

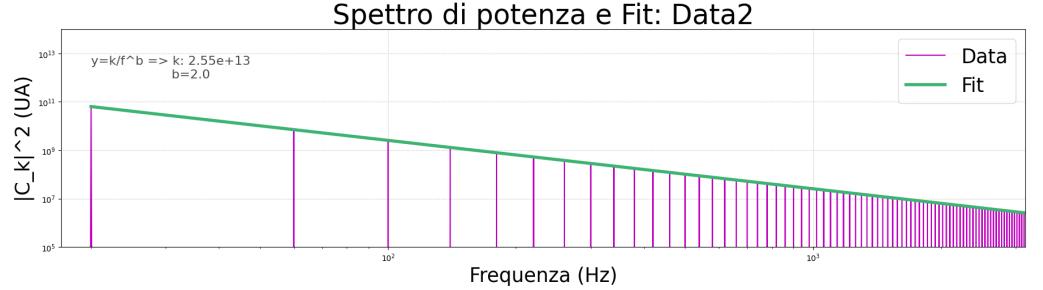


Figure 6: Il grafico mostra l'andamento del modulo quadro dei coefficienti di Fourier relativi al secondo set di dati filtrato in funzione della frequenza. Il fit in scala logaritmica mostra un andamento lineare corrispondente a quello atteso per un'onda quadrata.

4 Parte II: manipolazione dei segnali audio

A differenza dei file *txt* i cui dati corrispondono a segnali prodotti da un generatore di funzioni, i segnali audio in analisi in questa fase sono di tipo *wav*. L'elaborazione è messa in atto dalla libreria *soundfile*, mentre *sounccard* accede alle componenti del computer necessarie (ad esempio, speaker per la riproduzione e microfono per la registrazione).

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import soundfile as sf
import soundcard as sc

#Accesso ai dispositivi del computer
speakers = sc.all_speakers()
default_speaker = sc.default_speaker()
data1, samplerate1=sf.read('../pulita_pezzo.wav')           #lettura file wav
default_speaker.play(data1/np.max(data1), samplerate1)      #riproduzione file wav

#Estrazione dei dati del file wav
y1=data1[:,0]
numframes1=len(y1)
x1=np.linspace(0 , numframes1/samplerate1, numframes1)

#Riscrittura in file .wav
sf.write('../pulita_pezzo_rw.wav', y1, samplerate1)
print('Pulita pezzo riscritto con successo')

```

Figure 7: Riproduzione e riscrittura del file *pulita_pezzo.wav* mediante librerie opportune.

Come si può vedere in Figure 7, il comando `sf.read()` permette l'estrazione dei dati (`data1[:,0]`, in modo da selezionare solo uno dei due canali) e della frequenza di campionamento (`samplerate1`) corrispondente del file audio indicato. Si definisce il tempo `t1` in modo opportuno in vista di un'eventuale rappresentazione della waveform, tenendo conto del numero di dati a disposizione `numframes1`. La riscrittura in un nuovo file `wav` è promossa dal comando `sf.write()`.

4.1 Indagine relativa allo spettro dei coefficienti

Per ciascun segnale audio, si visualizza la waveform e lo spettro dei coefficienti di Fourier in termini di parte reale, parte immaginaria e modulo quadro (Paragraph 5). Ciò che suscita interesse è lo spettro in potenza, il quale viene normalizzato al picco più alto per comodità. In base ai risultati ottenuti, si promuovono le seguenti considerazioni.

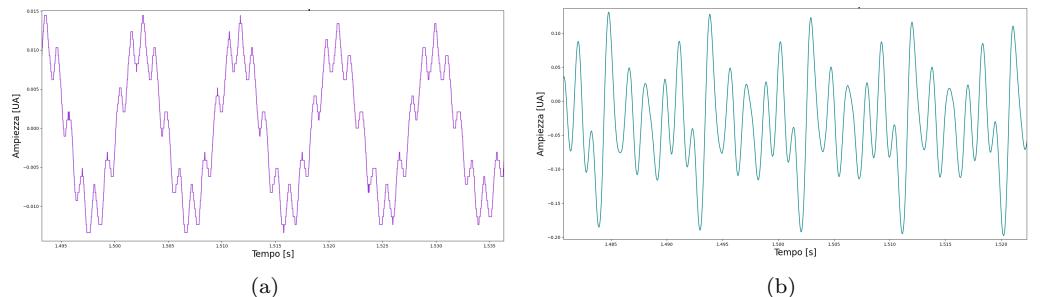
Quando una sorgente di suono produce una qualunque nota, questa si visualizza nello spettro di potenza come un picco che ha una certa altezza proprio alla frequenza corrispondente alla nota prodotta, chiamata armonica fondamentale. Un esempio, è il diapason che produce un La alla frequenza di 880Hz (Figure 16, (b)).

Nello spettro però si possono osservare anche picchi ulteriori ad altre frequenze che corrispondono a rumori che si generano perché lo strumento è fatto in un certo modo o perché viene suonato in una specifica maniera. Prendendo ancora l'esempio del diapason, questo dimostra anche un picco a basse ed uno ad alte frequenze, probabilmente perché si tratta di un oggetto fisico che ha una certa forma, materiale e spessore. Si osserva a questo proposito che non necessariamente l'armonica fondamentale è la componente di potenza maggiore, dato che non è necessariamente vero che la potenza percepita dall'orecchio umano combaci con quella vera.

Un altro valore che può comparire è il coefficiente a frequenza nulla, entro la sensibilità del dominio in analisi, che corrisponde all'offset del segnale, cioè del valore medio intorno a cui questo oscilla (esempio in Figure 17, (c)). Questo sembra non portare nuova informazione riguardo al suono prodotto, potrebbe far riferimento ad una frequenza bassissima probabilmente dovuta alla scheda di acquisizione.

Discostandosi dal diapason, già a partire dal file `pulita_semplice.wav`, si può esservare che per la chitarra elettrica oltre alla nota suonata sono presenti picchi in corrispondenza di frequenze pari a multipli interi dell'armonica fondamentale. Si tratta del fenomeno della risonanza: l'oscillazione generata volontariamente provoca delle vibrazioni e dei trasferimenti di energia, meccanici o elettrici, che portano ad oscillare anche altre componenti limitrofe (anche il corpo stesso dello strumento risuona).

Si osserva che l'altezza assunta da questi picchi di risonanza dipende dallo strumento che ha prodotto il suono stesso. Infatti, una volta graficati, questi assumono un andamento che è tipico della sorgente, che ha un impatto sulla forma d'onda caratterizzante che lo strumento stesso produce (timbro). Ad esempio, il diapason è lo strumento più "ideale" con cui si possa avere a che fare e che produce un'onda pulita di forma sinusoidale: lo spettro dovrebbe fornire un solo picco. Invece, uno strumento come la chitarra ha un timbro diverso, per cui la forma d'onda del segnale acustico sarà più articolata (Figure 8). Ancora, uno strumento a fiato come il flauto si avvicina maggiormente al caso del diapason, ma è sottoposto comunque a fenomeni di risonanza. Tutto ciò, quindi, dipende dalle caratteristiche fisiche dello strumento, compresi i materiali che lo costuiscono ed il modo stesso in cui il suono viene prodotto.



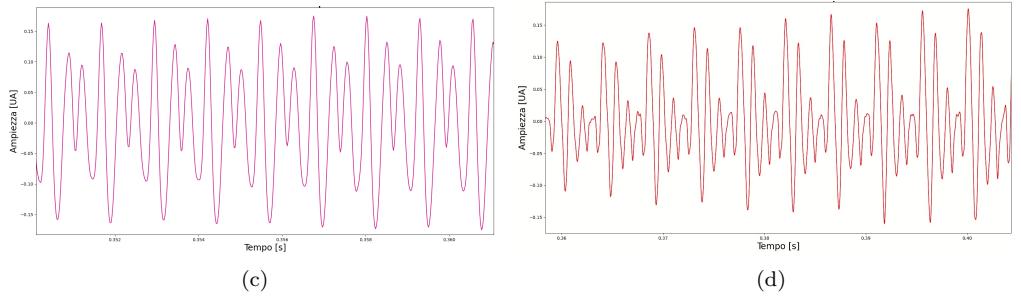


Figure 8: La visualizzazione della forma d'onda permette di riconoscere il timbro dello strumento in analisi: diapason (a), chitarra elettrica (b), flauto (c), voce (d).

Essendo i dati in analisi provenienti da un campionamento, si può verificare come l'inverso del tempo massimo di registrazione sia pari alla sensibilità del dominio delle frequenze e l'inverso del tempo di campionamento la metà dell'intervallo in cui si distribuiscono le frequenze, come atteso. Ad esempio, nel caso del diapason l'accquisizione dura 1.75s con una frequenza di campionamento di 44100Hz, mentre nel dominio delle frequenze la sensibilità è di circa 0.6Hz in un range positivo che raggiunge 22050Hz.

Inoltre, si osserva che ogni picco è descritto da un andamento a campana, dove il valore centrale rappresentativo ha un'altezza maggiore. Questi coefficienti secondari, essendo molto vicini tra loro, generano il fenomeno del battimento (Figure 16 (m)). Per comprendere la loro natura, si applicano in successione dei filtri che isolino solo determinate frequenze e si ricostruisce il segnale modificato per il diapason¹.

In Figure 16 (e), (f) e (g) si sono scelti rispettivamente solo il valore centrale del primo, secondo e terzo picco. In questo modo, si sono estratte solo una sinusoide per ciascuna ricostruzione, motivo per cui si osservano gli andamenti regolari ad ampiezza costante rappresentati. La combinazione dei picchi centrali, del primo e del secondo picco in un primo momento e successivamente di tutti e tre insieme (Figure 16 (h), (i)), dimostra che questi coefficienti sono in grado di ricostruire il suono originale ma non la sua waveform, in quanto il segnale sintetizzato rimane ancora idealmente periodico.

Solo aggiungendo i coefficienti secondari la forma d'onda del segnale sintetizzato comincia ad avere un andamento più realistico, come risulta evidente in Figure 16 (l), (m) ed (n). Questi valori, quindi, hanno il ruolo di ripercorrere l'evoluzione temporale che assume l'onda che stanno descrivendo. Non corrispondono a frequenze effettivamente riprodotte dallo strumento, ma sono generate dal campionamento nella misura in cui permettono all'antitrasformata di sapere come si modifica l'ampiezza del segnale nel dominio del tempo, generando i fenomeni di interferenza costruttiva e distruttiva ove necessario.

PULITA SEMPLICE						
Indice picco	Frequenza	Nota	Fondam	Int	Pot norm	
0	0	-	-	-		1,0000
1	110,475	La2	110	1		0,014
2	220,000	La3	110	2		0,1904
3	329,52	Mi4	110	3		0,4880
4	440,470	La4	110	4		0,3190
5	551,898	Dof#/Reb5	110	5		0,5500
6	661,898	Mi5	110	6		0,6850
7	772,850	Sol5	110	7		0,4320
8	884,275	La5	110	8		0,3100
9	996,660	Si5	110	9		0,0970
10	1.108,570	Dof#/Reb6	110	10		0,0490
11	1.220,940	Re#/Mib6	110	11		0,0275
12	1.334,300	Mi6	110	12		0,0125
13	2.105,200	D07	110	19		0,0130

PULITA MEDIA					
Indice picco	Frequenza	Nota	Fondam	Int	Pot norm
0	111	La2	110	1	0,0706
1	166,36	Mi3	164,81	1	0,04368
2	221,6	La3	110	2	0,4457
3	333,15	Mi4	164,81	2	0,47661
4	333,12	Mi4	110	3	0,3600
5	445,7	La4	110	4	0,28807
6	499,48	Si4	164,81	3	1,00
7	555,8	Dof#/Reb5	110	5	0,183
8	557,9	Dof#/Reb5	554,37	1	0,23902
9	665,85	Mi5	164,81	4	0,225
10	667,4	Mi5	110	6	0,275
11	778,8	Sol5	110	7	0,082838
12	834,1	Sol#/Lab5	164,81	5	0,0195
13	893,37	La5	110	8	0,035
14	1.000,9	Si5	164,81	6	0,0345
15	1115,8	Dof#/Reb6	554,37	2	0,0063
16	1168	Re6	164,81	7	0,0064
17	1.336,4	-	164,81	8	0,0483
18	1504	-	164,81	9	0,008
19	1672,7	Soi#/Lab6	554,37	3	0,002

Figure 9: Le tabelle in figura contengono i dati riguardo al coefficiente centrale di ciascun picco individuato per lo spettro in potenza dei file *pulita_semplice.wav* (sinistra) e *pulita_media.wav* (destra). Si individuano le armoniche fondamentali, le note corrispondenti ed i loro multipli.

¹ Una prima ipotesi ipotesi per la larghezza del picco riguarda l'interpretazione del suono come un pacchetto d'onda, il quale non mantiene la sua coerenza e si disperde.

Alla luce delle considerazioni fatte, lo studio dello spettro dei coefficienti può essere impiegato nel caso della chitarra elettrica per riconoscere la nota suonata. Si riportano in Figure 9 l'esempio dei file *pulita_semplice.wav* e *pulita_media.wav*, in cui i dati tabulati fanno riferimento al coefficiente centrale di ciascun picco significativo, risonanze comprese, nello spettro di potenza normalizzato.

Si noti che multipli dell'armonica fondamentale, prodotte come oscillazioni di un'onda stazionaria ad n periodi, possono essere note esse stesse diverse da quella intenzionalmente suonata. La difficoltà nel riconoscimento di un accordo consiste nel distinguere ciascuna armonica fondamentale da quelle secondarie.

4.2 Sintesi computazionale del segnale

La sintesi del segnale viene compiuta direttamente mediante la funzione apposita fornita dalla libreria *scipy*: *fft.irfft()*. Il comando è pensato appositamente per segnali reali, ma necessita comunque dei coefficienti in forma complessa, perchè, in caso si facesse riferimento solo al modulo di questi, si perderebbe l'informazione dello sfasamento tra le componenti sinusoidali sommate contenuta nella fase.

Conoscendo la formula di sintesi di un segnale campionato nel finito (2), si implementa manualmente una funzione *fft.handmade()* che svolga l'operazione richiesta (Figure 10).

Si genera un array *signal* vuoto che andrà riempito con ciasun valore $x[n]$ di ampiezza calcolato, per questo si genera il ciclo *for* che va da 0 ad $M-1$, essendo M il numero di coefficienti provenienti dalla trasformata. Ogni singolo elemento è il risultato di una sommatoria operata sullo stesso intervallo, motivo per cui è presente un ulteriore ciclo *for*. Il termine della somma viene riportato come il prodotto dell' l -esimo coefficiente di Fourier (passato alla funzione sotto forma di array *X*) e l'esponenziale complesso, che viene esplicitato in seno e coseno mediante la formula di Eulero. L'argomento delle funzioni trigonometriche è costituito dal prodotto $\frac{2\pi n K[l]}{M}$, dove n rispecchia l'andamento temporale e *K* è l'array di indici (positivi e negativi) associati a ciascun coefficiente in relazione alla frequenza a cui quest'ultimo corrisponde.

```
def fft_handmade(X, K, M):
    signal=np.empty(0)
    N=len(X)
    for n in range(0, M):
        sum=0
        for l in range(0, N):
            sum=sum+(X[l]*(np.cos((2*np.pi*n*K[l])/M)+1j*np.sin((2*np.pi*n*K[l])/M)))
        ''' if(n==0):
            print('k: {}, freq: {}'.format(K[1], (K[1]*44100)/M)) '''
        signal=np.append(signal, sum)
    return signal*(1/M)
```

Figure 10: Codice che implementa manualmente una funzione che calcola in modo approssimato a piacere l'anttrasformata di Fourier di un segnale campionato nel finito. In ingresso sono richiesti l'array dei coefficienti scelti *X*, i corrispondenti indici *K* riferiti all'asse della frequenza ed il numero *M* di coefficienti totali.

Un'implementazione di questo genere si dimostra problematica. Il codice richiede un numero di operazioni pari a N^2 ed, anche per un singolo secondo di registrazione a 44100Hz, necessita di un tempo eccessivo per portare a termine l'esecuzione. Si mette in atto una strategia per ridurre il costo computazionale, ora eccessivamente alto.

Si sceglie di considerare tra i coefficienti di Fourier esclusivamente quelli più significativi, in modo da passare alla funzione creata un array *X* ed il corrispondente *K* "mascherato" a piacimento dall'esterno. Questa tecnica consente di sommare unicamente i termini di maggior rilievo, in un range del ciclo che parte da 0 e giunge ad $N-1$, essendo N la lunghezza dell'array filtrato.

Inoltre, si osservi che in uscita il segnale viene restituito diviso per *M* per una questione di puro formalismo. Questo coefficiente di normalizzazione non è riportato nella formula a cui si fa riferimento in questa sede, perchè è già presente nella corrispettiva equazione di analisi. Avendo, però, estratto i coefficienti mediante la funzione *fft.fft()* che non presenta la costante, questa deve essere aggiunta a mano nel codice implementato.

Trattandosi di una selezione di valori significativi, il segnale sintetizzato non è detto corrispondere a quello originale, come si mostra in Figure 11. Maggiore il numero di termini mantenuti, minore sarà la discrepanza ma anche più imponente il costo computazionale. Il codice si mostra, però, funzionante se messo a confronto con l'inversa della libreria *scipy* quando si passino gli stessi identici coefficienti.

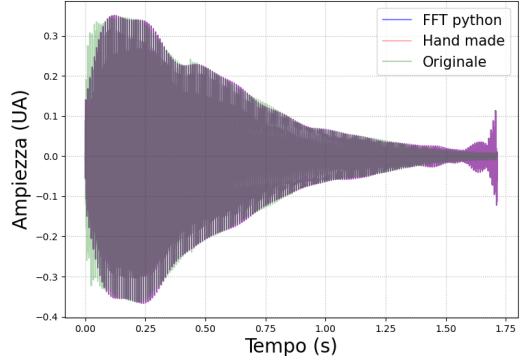


Figure 11: Il grafico mostra il tentativo di ricostruire la waveform originale del diapason (verde) mediante la *fft.handmade()* (rossa), per cui sono stati scelti solo 70 coefficienti. Si noti che l'antitrasformata di *scipy* sugli stessi valori filtrati (blu) coincide esattamente con la funzione implementata manualmente.

4.3 Separazione degli strumenti

L'equalizzatore viene utilizzato in musica con lo scopo di modificare un segnale acustico agendo sul peso associato a ciascuna frequenza nello spettro dei coefficienti.

Nei due casi in studio, si ascoltano due porzioni di canzoni diverse che prevedono sia l'impiego del basso sia della chitarra elettrica. Gli strumenti in questione hanno un intervallo in frequenze corrispondente alle note fondamentali che sono in grado di riprodurre in regioni differenti. Questo equivale a dire che, lavorando su specifici range ampi un certo numero di Hz, è possibile dare più potere ad uno dei due strumenti. Si analizza con Fourier lo spettro in potenza dei due audio e si cerca un modo di separarli impostando opportunamente i valori dei parametri.

Nel file *secondo.wav* (Figure 12), la distinzione viene promossa a 500Hz in modo netto: per frequenze minori della soglia stabilita si isola il suono prodotto dal basso (*sintesi del basso*) e per valori superiori quello della chitarra elettrica (*sintesi della chitarra*). Si evince dalla riproduzione dei nuovi file *wav* separatamente che la distinzione è stata operata correttamente (Figure 14).

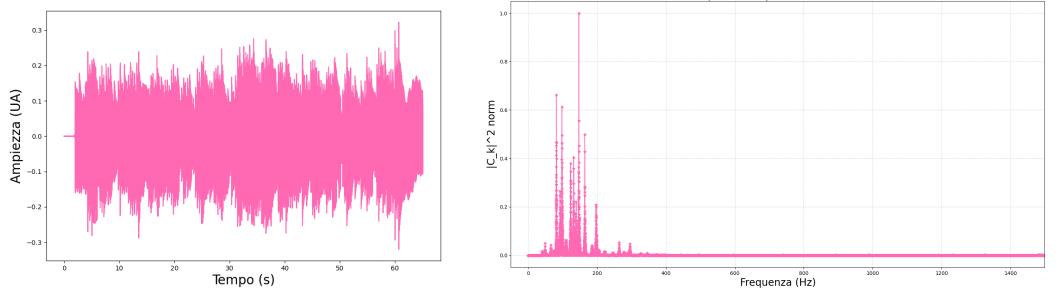


Figure 12: Waveform (sinistra) e spettro di potenza normalizzato (destra) di *secondo.wav*.

Nel file *primo.wav* (Figure 13), viene richiesta una trattazione più raffinata. Si osserva, infatti, che a partire dai 480Hz i picchi successivi fanno riferimento al suono prodotto da entrambi gli strumenti contemporaneamente. Si è promosso uno studio di queste campane in maniera isolata e, sintetizzando il segnale, si sono osservati in effetti sia una componente dovuta al basso, sia uno "sfarfallio" generato dalla chitarra elettrica, la cui ampiezza non è preponderante rispetto a quella che avrebbe complessivamente.

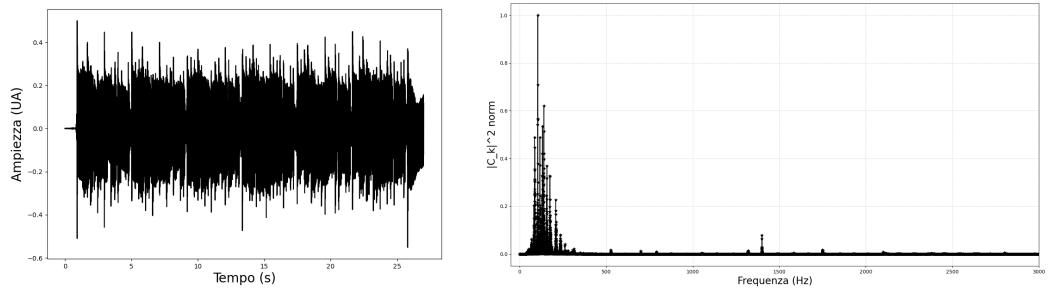


Figure 13: Waveform (sinistra) e spettro di potenza normalizzato (destra) di *primo.wav*

Si è scelto di risintetizzare in modo ancora netto gli strumenti (Figure 14), tagliando l’intervallo di frequenze di sovrapposizione 480-920Hz. In questo modo, i segnali anti-trasformati (*sintesi basso*, *sintesi chitarra*) sono pressochè isolati, anche se il secondo strumento risulta ancora in parte contaminato dal primo. Si ipotizza che le frequenze più alte in questione generate dal basso siano degli “effetti collaterali”, cioè delle vibrazioni ulteriori come il tocco della corda da parte delle dita del bassista.

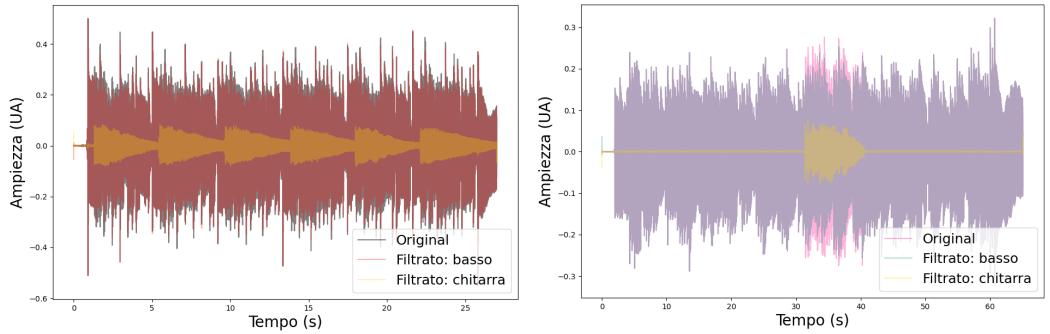


Figure 14: Si rappresentano sovrapposte le waveform degli strumenti separati a confronto con l’originale per i file *secondo.wav* (sinistra) e *primo.wav* (destra).

Un altro lavoro che si può fare per manipolare il suono a frequenze differenti è quello di modificare il volume associato a queste, amplificando o diminuendo il valore dei coefficienti, ovvero il peso in ampiezza delle componenti sinusoidali che ricostruiscono il segnale mediante l’antitrasformata. Dall’ascolto del segnale ricostruito (Figure 15) si possono riconoscere le modifiche compiute, considerando che gli speaker del dispositivo giungono a saturazione ad ampiezza 1UA.

In relazione a questo, si suggerisce che, per separare opportunamente strumenti le cui bande si sovrappongono, una possibilità potrebbe essere quella di agire sul volume corrispondente a fasce di frequenza di larghezza più o meno ampia, dopo aver riconosciuto il timbro dello strumento dall’andamento delle armoniche secondarie.

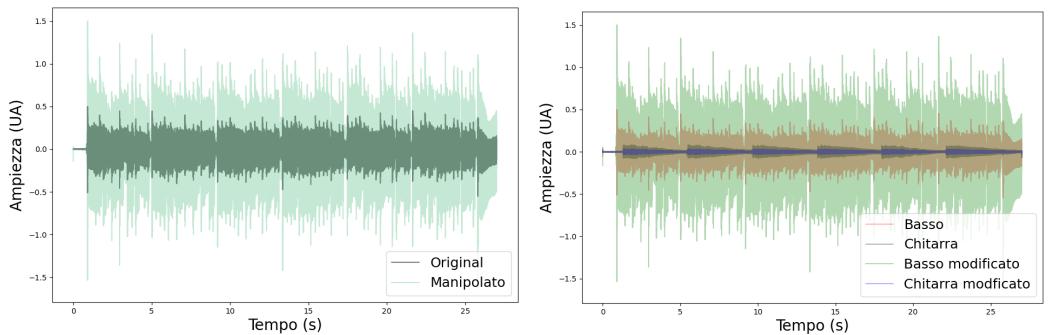
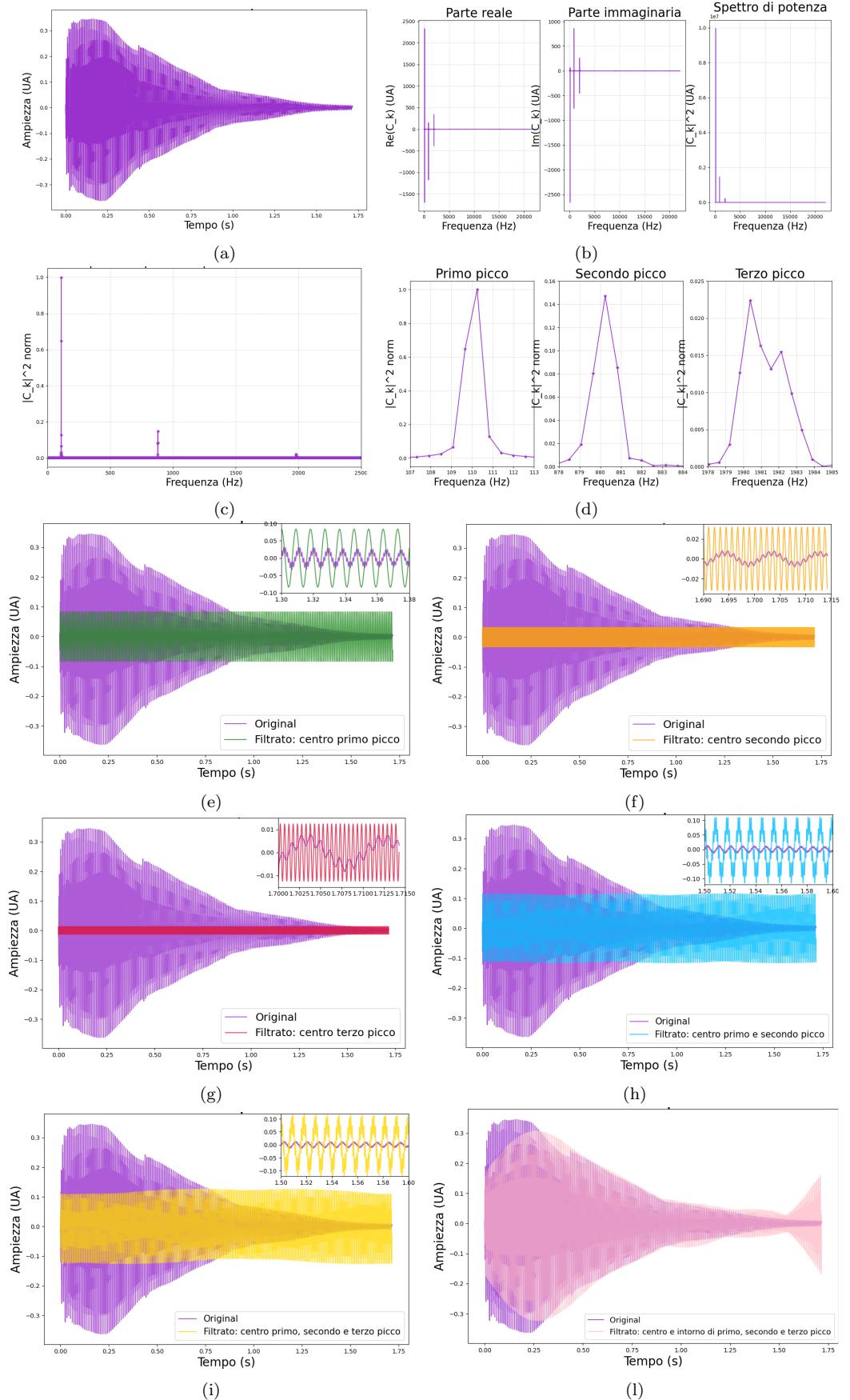


Figure 15: Si sceglie *secondo.wav* per alzare il volume del basso di un fattore 3 e diminuire quello della chitarra elettrica di 0.4 (*secondo_rw_volume.wav*). A sinistra il confronto tra il segnale originale e quello modificato in toto, a destra anche la manipolazione dei singoli strumenti.

5 Grafici realizzati

5.1 Diapason



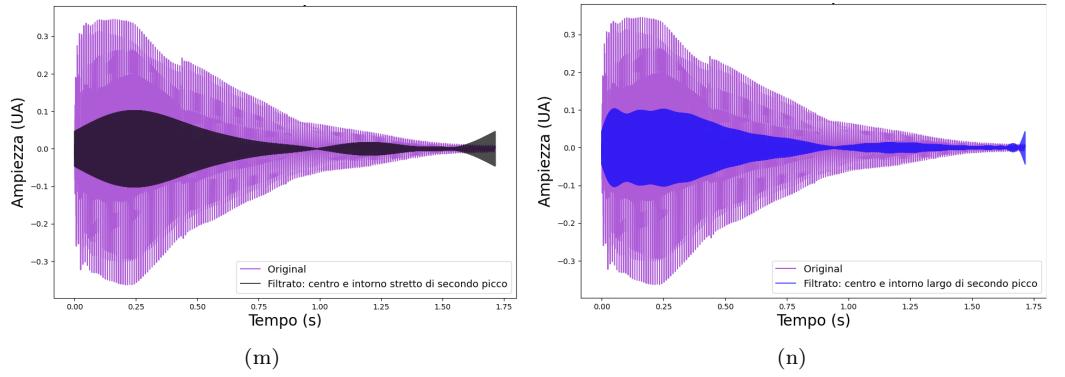


Figure 16: I grafici riportati fanno riferimento al file *diapason.wav*. **(a)** Waveform. **(b)** Spettro dei coefficienti in parte reale, parte immaginaria e modulo quadro. **(c)** Spettro di potenza normalizzato. **(d)** Zoom sull’andamento a campana di ciascun picco. A seguire, segnali sintetizzati dopo l’applicazione di un opportuno filtro di selezionamento dei soli coefficienti centrali del primo **(e)**, secondo **(f)**, terzo **(g)**, primo e secondo **(h)**, primo, secondo e terzo **(i)** picco. Si scelgono oltre ai coefficienti centrali anche alcuni secondari per tutti e tre i picchi, per un totale di 26 valori in **(l)**. Guardando al solo secondo picco, si selezionano il coefficiente centrale e 5 secondari **(m)** o 33 secondari **(n)** nel suo intorno.

5.2 Pulita semplice

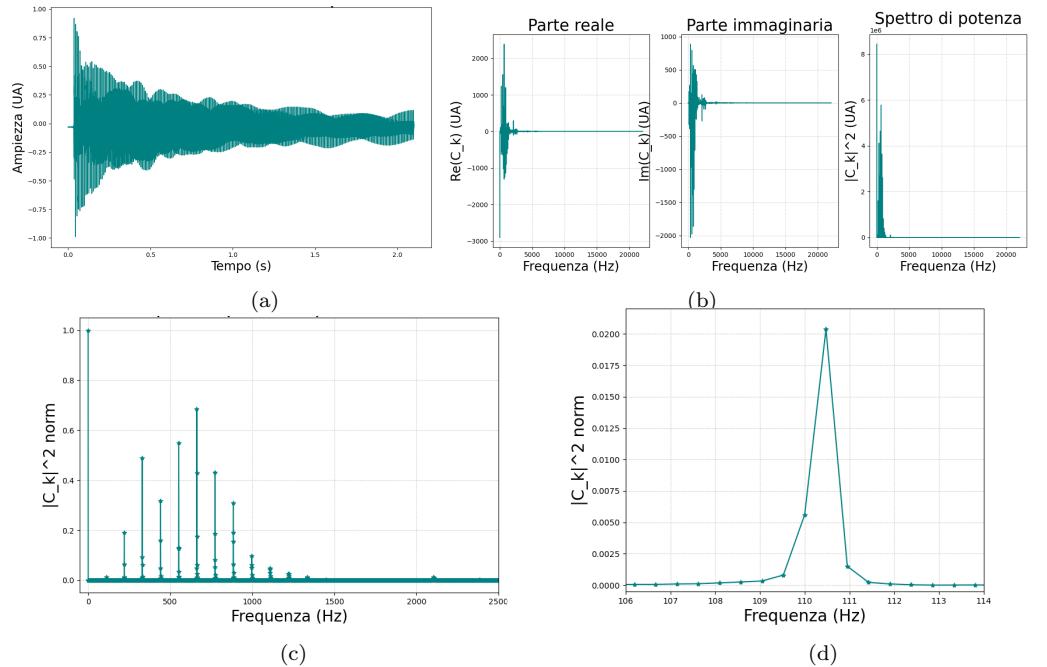
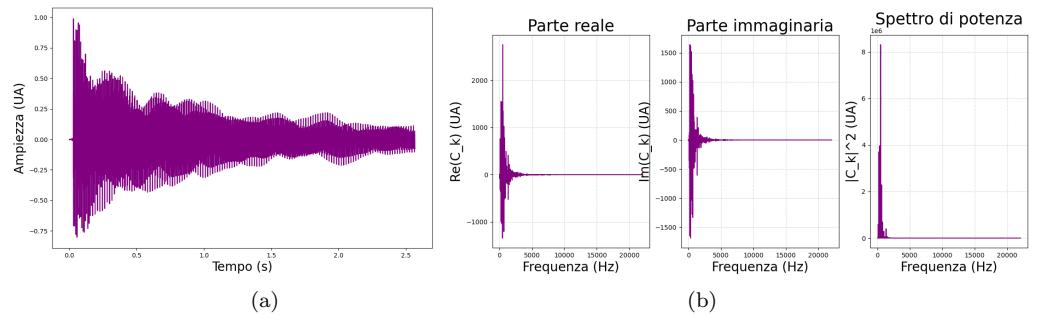


Figure 17: I grafici riportati fanno riferimento al file *pulita_semplice.wav*. **(a)** Waveform. **(b)** Spettro dei coefficienti in parte reale, parte immaginaria e modulo quadro. **(c)** Spettro di potenza normalizzato. **(d)** Zoom sull'andamento a campana dell'armonica fondamentale: La.

5.3 Pulita media



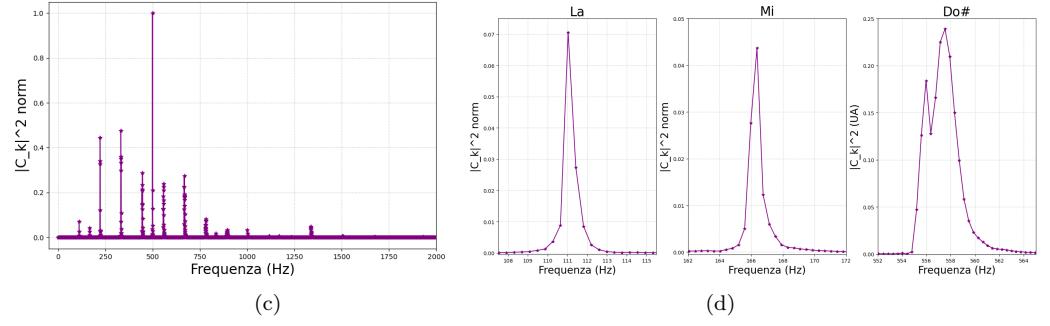


Figure 18: I grafici riportati fanno riferimento al file *pulita_media.wav*. **(a)** Waveform. **(b)** Spettro dei coefficienti in parte reale, parte immaginaria e modulo quadro. **(c)** Spettro di potenza normalizzato. **(d)** Zoom sull'andamento a campana delle armoniche fondamentali: La, Mi, Do#.

5.4 Pulita difficile

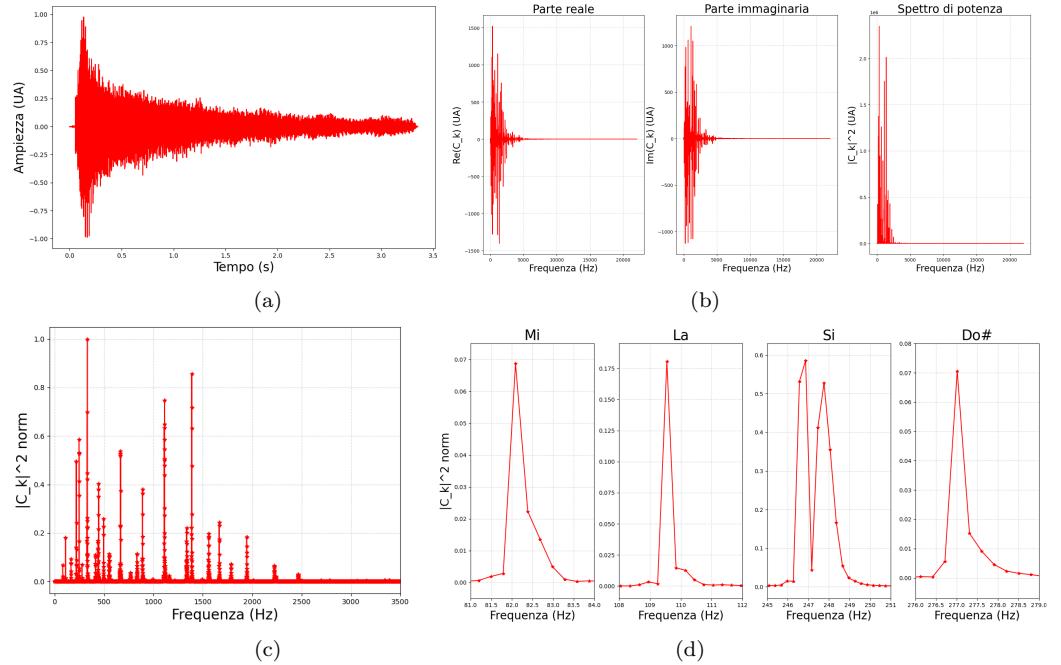
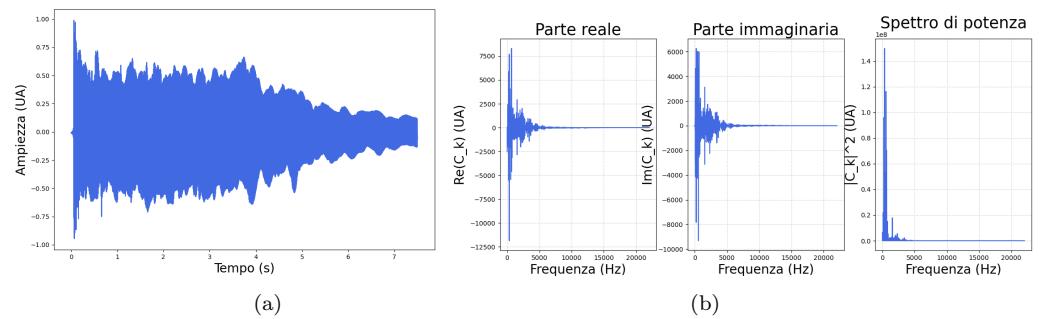


Figure 19: I grafici riportati fanno riferimento al file *pulita_difficile.wav*. **(a)** Waveform. **(b)** Spettro dei coefficienti in parte reale, parte immaginaria e modulo quadro. **(c)** Spettro di potenza normalizzato. **(d)** Zoom sull'andamento a campana delle armoniche fondamentali: Mi, La, Si, Do#.

5.5 Distortion



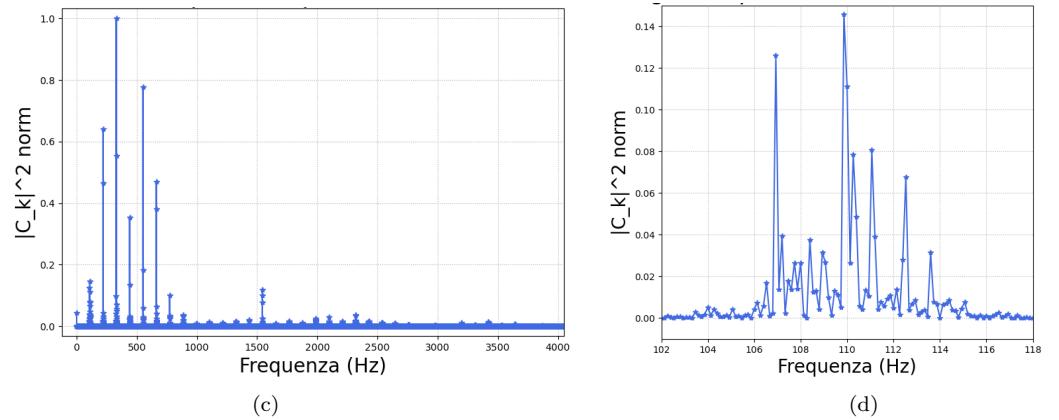


Figure 20: I grafici riportati fanno riferimento al file *distorta.wav*. (a) Waveform. (b) Spettro dei coefficienti in parte reale, parte immaginaria e modulo quadro. (c) Spettro di potenza normalizzato. (d) Zoom sull'andamento a campana dell'armonica fondamentale: La.

5.6 Pulita pezzo

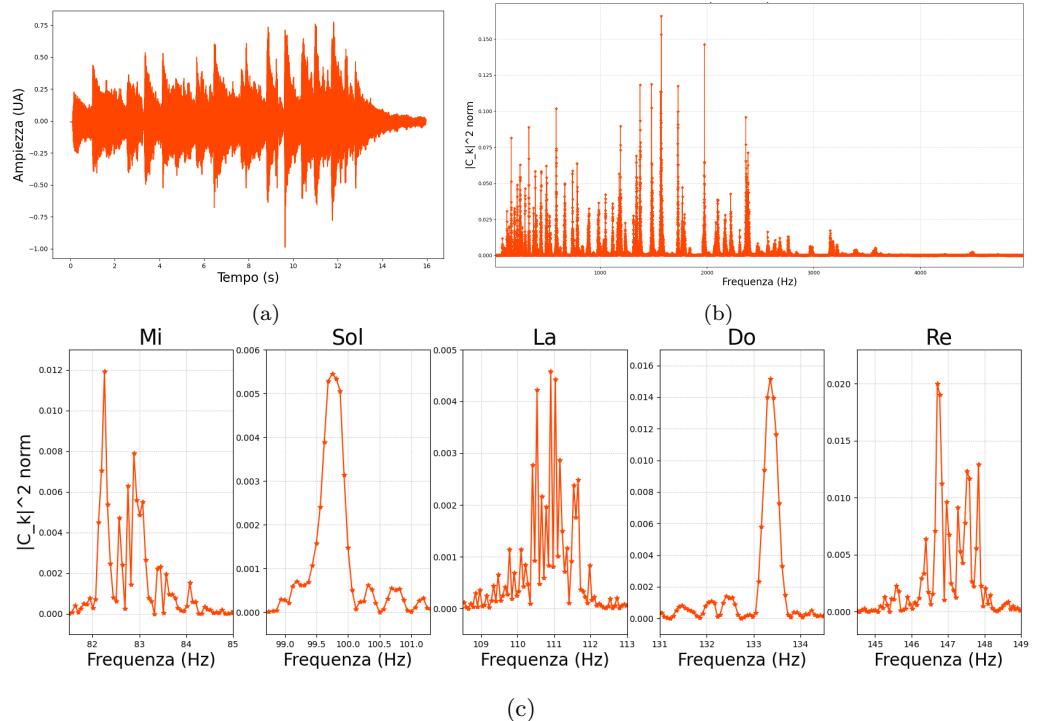
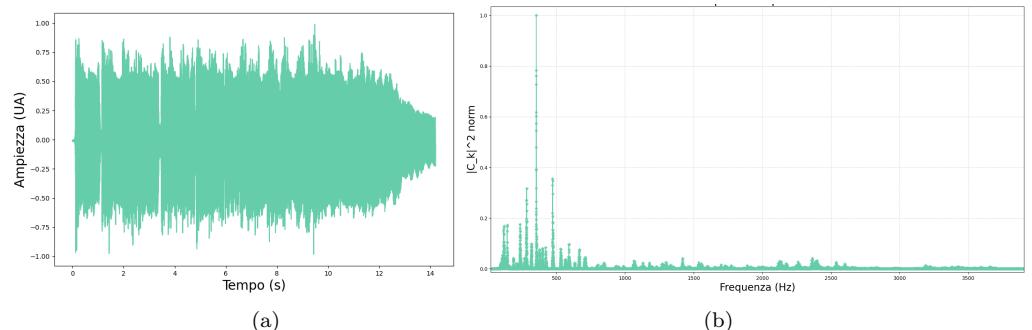


Figure 21: I grafici riportati fanno riferimento al file *pulita_pezzo.wav*. (a) Waveform. (b) Spettro di potenza normalizzato. (c) Zoom sull'andamento a campana delle armoniche fondamentali: Mi, Sol, La, Do, Re.

5.7 Distorta pezzo



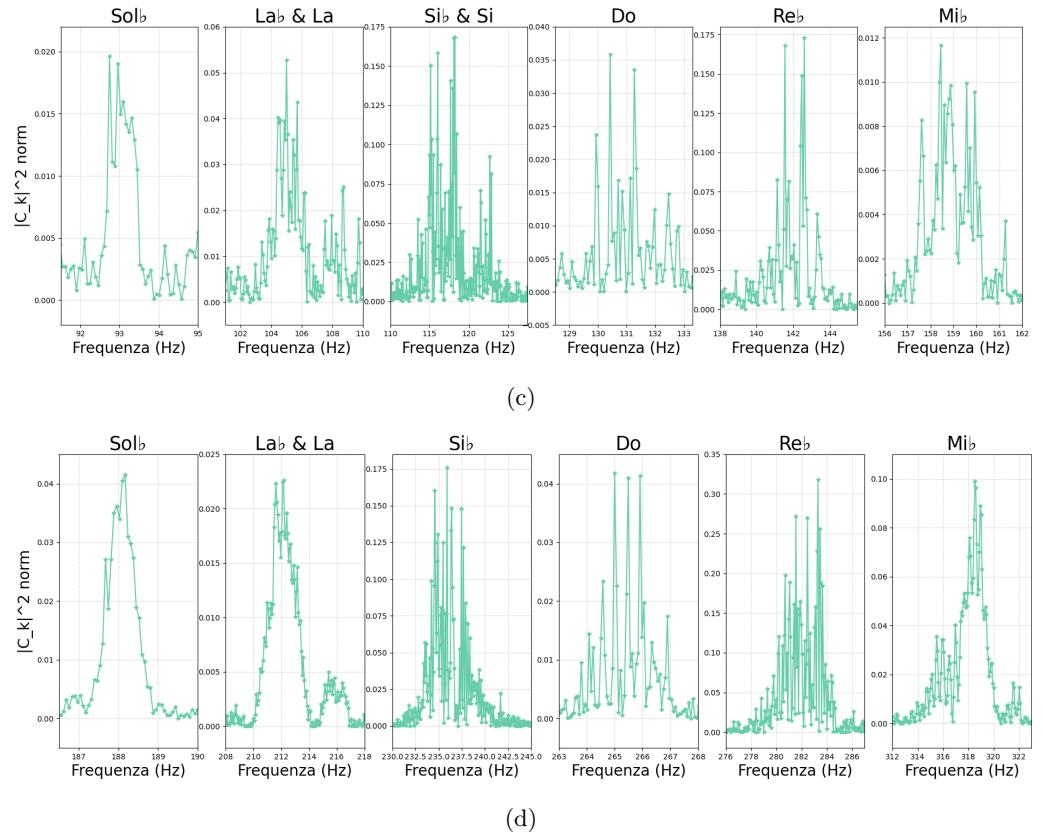


Figure 22: I grafici riportati fanno riferimento al file *distorta_pezzo.wav*. **(a)** Waveform. **(b)** Spettro di potenza normalizzato. **(c)** Zoom sull’andamento a campana delle armoniche fondamentali: Solb, Lab, Sib, Do, Reb, Mib. **(d)** Zoom sull’andamento a campana delle armoniche al secondo ordine, i cui picchi sono maggiormente distinguibili rispetto a quelli fondamentali.

6 Conclusioni

L’analisi di Fourier dei numerosi set di dati forniti ha prodotto i risultati attesi. Il filtro del rumore sinusoidale ha consentito di isolare le onde “pulite” e di identificarne la forma. Lo studio degli audio musicali ha permesso di comprendere più a fondo il ruolo assunto dai coefficienti nel dominio delle frequenze.

Ad esempio, si è stati in grado di riconoscere le note prodotte dagli strumenti impiegati, come testimoniano i grafici di zoom sui picchi corrispondenti alle armoniche fondamentali. Dal confronto tra Figure 17 (c) e Figure 20 (c), si evince il ruolo della distorsione nello spettro in frequenza, in quanto si visualizzano chiaramente un maggior numero di armoniche multiple del La suonato, capaci di modificare la forma d’onda e quindi il *timbro* della chitarra elettrica.

Si osserva in ultima istanza che la scelta della frequenza di campionamento a 44100Hz non ha indotto il problema dell’aliasing. Questo valore, infatti, è circa pari al doppio della frequenza udibile dall’orecchio umano, per cui è coerente con la condizione richiesta dal teorema di Nyquist.

Si conclude l’analisi ragionando sullo spettro di *pulita_semplice.wav*, dove il fenomeno di risonanza è molto evidente. Si ipotizza che la presenza così evidente delle armoniche secondarie sia indice di un segnale non del tutto “pulito”. In effetti, si prova a registrare l’onda prodotta dalla corda del La di una chitarra elettrica suonata a vuoto e, analizzandone lo spettro, si ottiene un andamento dei picchi meno contaminato (Figure 23). La differenza tra i due grafici, si ipotizza, può dipendere anche dalla chitarra elettrica in uso, dalle sue corde e dallo stato di usura. Inoltre, si osserva che leggere lo spettro consente di riconoscere uno strumento accordato o meno, nei limiti della sensibilità dell’asse delle frequenze.

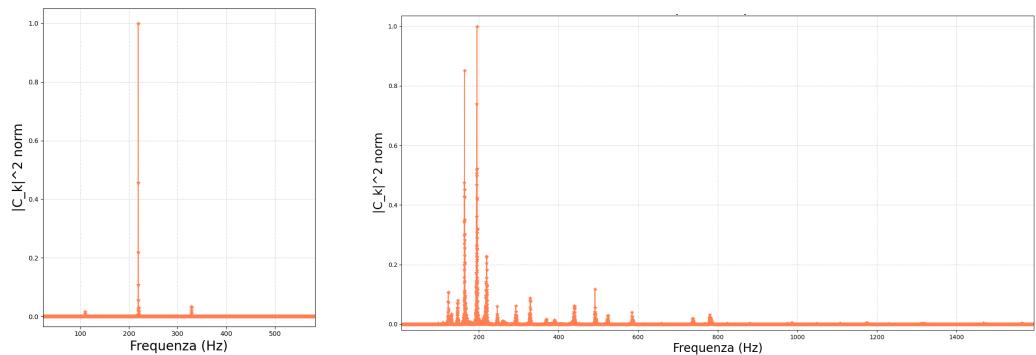


Figure 23: Spettri di potenza realizzati dalle sperimentatrici riproducendo *pulita_semplice.wav* (sinistra) e *pulita_pezzo.wav* (destra).

Canzoni

Dall'attento ascolto delle registrazioni *distorta_pezzo.wav*, *primo.wav*, *secondo.wav*, si sono riconosciute rispettivamente le canzoni *The kids aren't alright* (The Offspring), *Zombie* (The Cranberries), *Smells like teen spirit* (Nirvana).

Riferimenti

1. Duranti, M.; *Laboratorio di elettronica e Tecniche di acquisizione dati*. Università degli Studi di Perugia, 2024. Dispense online: https://www.fisgeo.unipg.it/~duranti/laboratoriode/laboratorioele_24-25.html.
2. Germani, S.; *Corso di metodi computazionali per la fisica: trasformate di Fourier*. Università degli Studi di Perugia, 2024. Dispense online: https://github.com/s-germani/metodi-computazionali-fisica/L09_TrasformateFourier.
3. Verdoliva, L.; *Appunti di teoria dei segnali: Sviluppo in serie di Fourier*. Università degli Studi di Napoli Federico II, 2011. Disponibile online: http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf.
4. Luise, M.; Vitetta, M.; *Teoria dei segnali*.
5. Scipy Guide; *Fourier Transforms* (scipy.fft). Sito online: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/fft.html>.
6. Rozzi, C. A.; *Fisica onde musica*, 2023. Sito online: <https://www.fisicaondemusica.unimore.it/>.
7. Sacco M.; *Conversione tra note musicali e frequenze - Appendice I*. Audio-Sonica. Sito online: <https://www.audio-sonica.com/it/corsoaudio-online/conversione-tra-note-musicali-e-frequenze-appendice-i>.