

Esperienza 3: Misura del periodo del pendolo per l'estrazione dell'accelerazione gravitazionale mediante fotodiodo e LED infrarosso

Laura Francesca Iacob, Sara Pieri, Sara Schippa
Università degli Studi di Perugia, CdL in Fisica

Anno Accademico 2024/2025

Estratto: La misura dell'accelerazione gravitazionale può essere compiuta attraverso varie metodologie, una delle più semplici prevede l'estrazione del suddetto valore a partire da misurazioni del periodo di oscillazione di un pendolo. Sperimentalmente il tempo può essere registrato con un sistema di acquisizione dati che fa uso in un fotodiodo, stimolato opportunamente da un LED.

Keywords: fotodiodo OPT101, LED infrarosso, pendolo, accelerazione gravitazionale.

1 Introduzione teorica

Idealmente, il pendolo incarna il modello teorico dell'oscillatore armonico. Il periodo T di oscillazione dipende dalla lunghezza l del filo rigido in uso, determinata come la distanza perno-centro di massa del grave. Inoltre, è legato all'accelerazione gravitazionale mediante la relazione (1), la quale contempla un'approssimazione parassiale.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

Per la misura dei periodi si sceglie un setup sperimentale formato da LED infrarosso e fotodiodo, dove l'oscilloscopio funge da sistema di acquisizione dati (Paragraph 4.1).

Il **fotodiodo** è un particolare tipo di fotorivelatore, ovvero un trasduttore di potenza luminosa da segnale ottico a elettrico che opera captando la potenza luminosa dall'esterno per misurarne la corrente o la tensione che attraversa il circuito.

Internamente è costituito da un semiconduttore a giunzione pn in polarizzazione inversa, pertanto, quando un fotone con particolare energia $E = h\nu > E_{gap}$ incide su di esso, gli elettroni vengono eccitati ad uno stato di numero quantico n superiore. Il ritorno allo stato fondamentale genera energia sottoforma di corrente. La corrente corrispondente alla zona di svuotamento¹ aumenta linearmente con l'intensità della luce immessa. Misurare quest'ultima quantificando la corrente equivale ad usare il fotodiodo in modalità fotoconduttiva.

L'*efficienza quantica* è un parametro che indica in termini relativi quanto lo strumento è capace di misurare il valore di corrente effettivo che lo attraversa, dipendentemente dalla lunghezza d'onda della luce incidente.

¹La giunzione pn è formata da due materiali affiancati drogati differentemente, in modo tale che una presenti un eccesso di elettroni liberi e l'altra di lacune (virtualmente considerate "positive"). Nella superficie di interfaccia, il contatto tra i mezzi fa sì che alcuni elettroni occupino un certo numero di lacune. La zona di "svuotamento" si genera grazie a questo meccanismo, che permette anche la creazione di una differenza di potenziale tra le due parti (E_{gap}).

Quando l'elemento viene montato in *reverse bias*, la tensione è negativa ma un passaggio di particelle avviene ugualmente: si tratta della *leakage current*. Questa è dovuta all'energia termica associata agli elettroni, che in alcuni casi permette loro di saltare la barriera di potenziale della zona di svuotamento.

D'altro canto, la *responsività* può essere manipolata variando microscopicamente la struttura intrinseca della giunzione. Si può modificare, entro certi limiti, in modo tale da rendere il fotodiodo più sensibile ad un certo intervallo di radiazioni piuttosto che ad un altro (Figure 1, sinistra).

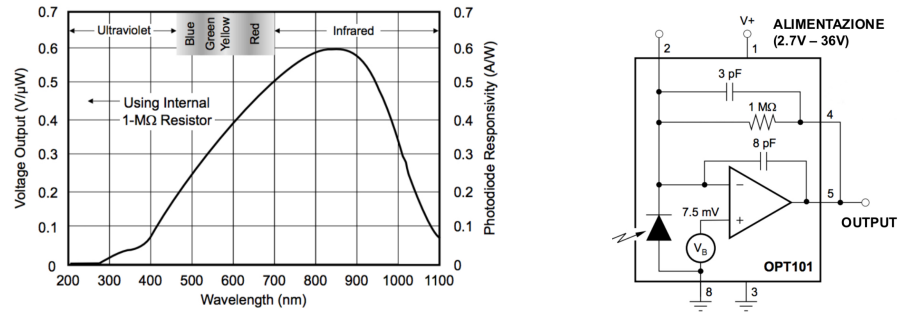


Figure 1: Del fotodiodo OPT101: responsività spettrale (*sinistra*) e block diagram (*destra*).

Il fotodiodo è costruito internamente come in Figure 1, destra. L'*amplificatore operazionale* al suo interno è collegato in modo tale da avere due rami di feedback: uno impegnato da un condensatore e uno da una resistenza ad 1MΩ. Questo fa sì che il segnale proveniente dal sensore venga amplificato, filtrando le altre frequenze per ignorare le variazioni repentine del segnale (lo sperimentatore può regolare la configurazione come preferisce, collegando i pin 4 e 5 ad elementi esterni). L'op-amp così costruito svolge anche il ruolo di transimpedenza: si tratta di un convertitore in tensione, il quale genera un output proporzionale all'intensità di corrente in ingresso.

$$V_{out} = -IR, \quad Gain = -R (\Omega) \quad (2)$$

2 Materiali e strumentazione

E' possibile consultare i codici usati per l'elaborazione e l'analisi dei dati nella repository GitHub. Ulteriori materiali inerenti disponibili presso la cartella *Drive* in collegamento ipertestuale. In laboratorio è stata adoperata la strumentazione seguente:

- pendolo (filo, massa, supporto, nastro adesivo);
- metro;
- oscilloscopio RIGOL DS1054 (digitale);
- alimentatore DC Siglent SPD3303C;
- LED infrarosso;
- fotodiodo OPT101;
- resistori;
- basetta sperimentale e cavi di collegamento.

3 Fase I: funzionamento del fotodiodo

Nella fase di verifica del funzionamento del fotodiodo, si è resa necessaria una misura preliminare a LED spento della radiazione di fondo captata dallo strumento. I dati acquisiti in questa modalità generano, sotto forma di rumore, un offset sul segnale effettivo nella condizione di ricezione di radiazione. Questo è composto dalla componente infrarossa emanata dai corpi umani popolanti il laboratorio, nonchè ulteriori sorgenti presenti nelle vicinanze del sistema di misura, e da una lettura da parte dello strumento di radiazioni di altre lunghezze d'onda per via della sua efficienza (Paragraph 1).

Ci si pone l'obiettivo di implementare il montaggio del fotodiodo, di verificarne il funzionamento e di analizzare il segnale uscente mediante l'oscilloscopio.

Si registra in un primo momento il segnale captato dal fotodiodo a LED spento (Figure 2). Ne risulta una lettura da oscilloscopio di un andamento alternato, da un minimo di 0.8V ad un massimo di 1.7V. Si tratta del rumore: la responsività del chip è tale da percepire una certa componente di luce visibile, proveniente dagli impianti di illuminazione del laboratorio. Il gas ionizzato all'interno della lampada emette impulsi di luce alla frequenza di 50Hz sia nel semiperiodo positivo sia in quello negativo. Per questo motivo, il segnale visualizzato è tale per cui l'intensità luminosa raggiunge il suo picco massimo il doppio delle volte, mostrando una frequenza complessiva di 100Hz.

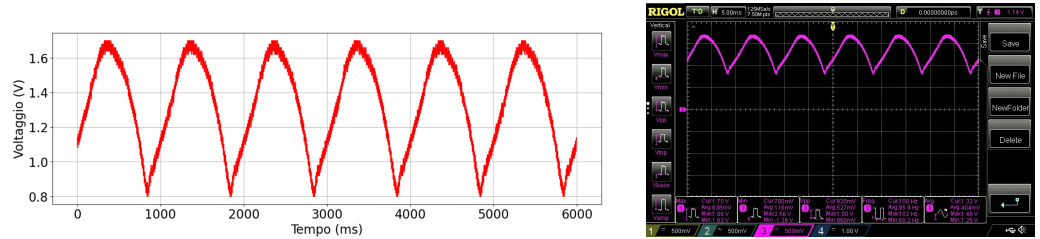


Figure 2: Segnale catturato dal fotodiodo a LED spento: plot dei dati del rumore (*sinistra*) e screen (*destra*) acquisiti dall'oscilloscopio.

Si tiene conto di questa componente di rumore per assicurarsi, in un momento successivo, che la tensione fuoriuscente dal fotodiodo in caso di presenza del LED sia significativamente superiore. Infatti, come mostrato in Figure 3, il passaggio del LED di fronte al chip è ben distinguibile a 4.5V rispetto al background.

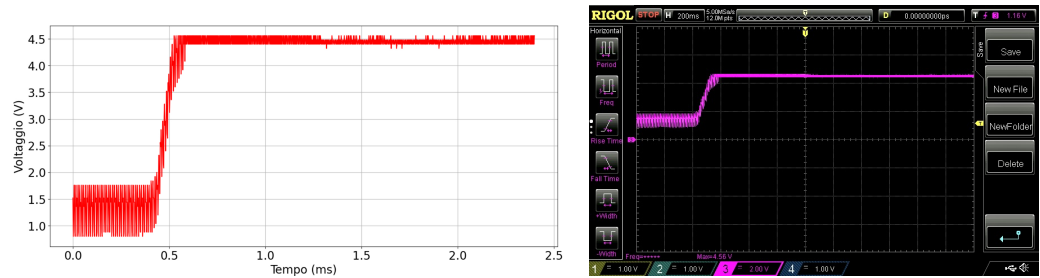


Figure 3: Transizione recepita dal fotodiodo al passaggio temporaneo del LED: plot dei dati (*sinistra*) e visualizzazione sullo schermo dell'oscilloscopio (*destra*).

4 Fase II: estrazione dell'accelerazione gravitazionale

Si progetta l'esperienza in modo da ottimizzare la presa dati. La realizzazione richiede alcuni accorgimenti preliminari dovuti agli strumenti in uso che hanno influenzato il metodo di acquisizione dei dati per l'estrazione finale del valore cercato.

4.1 Setup sperimentale

Il setup sperimentale è costituito da un semplice pendolo, con il fotodiodo e il LED posti l'uno davanti all'altro in modo che la massa appesa possa trovarsi, in un certo momento dell'oscillazione, in mezzo ai due. Nel momento in cui la massa passa in mezzo a questo sistema, viene a crearsi una zona d'ombra che è letta dall'oscilloscopio come una caduta di potenziale.

Per comodità, il sistema fotodiodo-LED è posizionato alla base del supporto del pendolo, al centro della traiettoria della massa. Nonostante si tratti della coordinata in cui la massa ha velocità massima, risulta una impostazione più favorevole rispetto al posizionamento nel punto di inversione del moto (Paragraph 4.2).

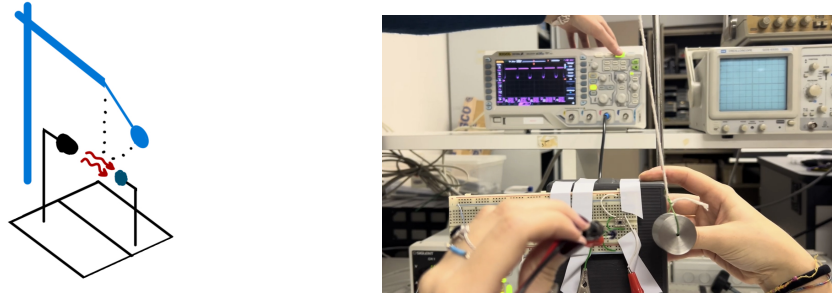


Figure 4: Schema del setup sperimentale (*sinistra*) ed impiego durante la presa dati (*destra*).

In questo modo, è possibile registrare più buche di potenziale all'aumentare delle oscillazioni: ogni volta che la massa passa davanti al fotodiodo oscurando la luce del LED si misurano buche adiacenti corrispondenti ad un semiperiodo. Il setup è schematizzato in Figure 4. Al fine di costruire questo setup sperimentale si è fissata la basetta contenente il fotodiodo al supporto del pendolo, collegando l'uscita dell'OPT101 all'oscilloscopio, in modo da poter raccogliere i dati. All'altro capo, oltre la traiettoria della massa, si è posto il LED alimentato con un voltaggio tale da non danneggiarlo.

Si osservi che si potrebbe, in modo alternativo, connettere in serie al LED una resistenza che permetta di proteggere quest'ultimo da un'alimentazione troppo alta. Il resistore deve essere scelto tale da far circolare nel circuito una corrente inferiore ai 20mA, limite massimo oltre cui il diodo si brucerebbe. A tal fine si è preliminarmente collegato il LED ad una basetta, con tanto di resistenza di controllo (Figure 5). Si è deciso, invece, di fare uso diretto del LED perché, collegandolo alla resistenza, questo forniva una luce poco intensa, che il fotodiodo poteva rilevare solo a distanze molto ravvicinate, impedendo di impiegare il sistema come voluto per la misura del periodo.

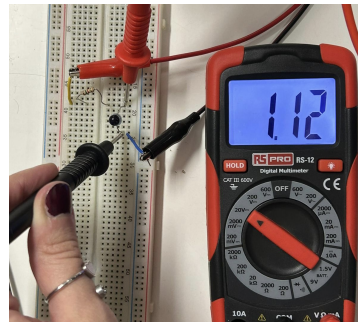


Figure 5: Con una alimentazione da 3V si è misurata la differenza di potenziale ai capi del LED infrarosso, impiegando una resistenza di controllo sufficiente per non danneggiare il diodo.

4.2 Strategia sperimentale

Al fine di calcolare l'accelerazione gravitazionale con questo sistema, utilizzando le leggi descritte (Paragraph 1), si estrae la misura del periodo di oscillazione per diverse lunghezze del filo. Si procede realizzando un fit di regressione lineare dell'andamento di l in funzione del periodo quadro e si determina la grandezza cercata a partire dalla pendenza della retta.

Per ogni lunghezza è stata dunque svolta una misurazione dei voltaggi in uscita dal fotodiodo con l'oscilloscopio e per analizzarli è stato scaricato il file *csv* comprendente alcune oscillazioni, ossia alcune buche di potenziale. L'oscilloscopio svolge infatti un campionamento del segnale elettrico in entrata, e restituisce dei valori discreti di voltaggio i quali sono più facilmente analizzabili. Ciò che si visualizza sullo schermo è visibile in Figure 6. Graficando poi i dati estratti dal file *csv* su un plot, si notano meglio i punti selezionati dal campionamento.

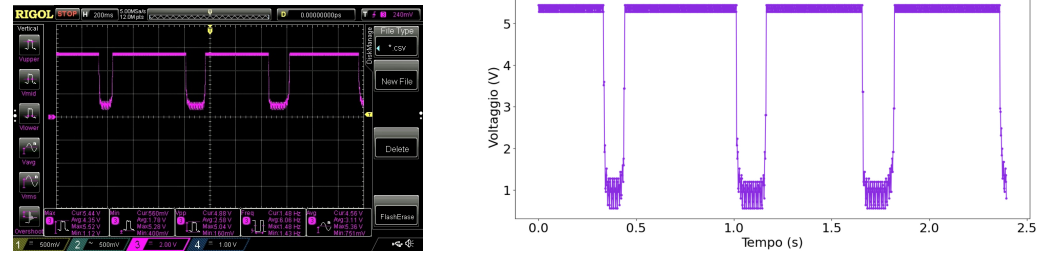


Figure 6: *Sinistra:* schermata del segnale acquisito dall'oscilloscopio per l'oscillazione del pendolo a lunghezza $l=46\text{cm}$. L'alimentazione del fotodiodo a 6.10V causa la saturazione della tensione in presenza del LED a 5.44V . *Destra:* rappresentazione grafica del segnale acquisito per la lunghezza 19.6cm .

Scelto come impostare il setup sperimentale (Paragraph 4.1), si propone una discussione che ha come obiettivo quello di sfruttare al massimo le sue potenzialità per la misura del periodo di oscillazione mediante l'analisi dell'andamento del voltaggio.

Il tempo di risposta del fotodiodo è un parametro fondamentale per la scelta del pendolo in uso. Essendo lo strumento reale e quindi dotato di un certo grado di “prontezza” nel riconoscimento del cambiamento di intensità della radiazione ricevuta, a priori si dovrebbe costruire un oscillatore con un filo sufficientemente lungo per avere un periodo correttamente misurabile (1).

Inoltre, le dimensioni del grave sottoposto all'oscillazione, che determinano il tempo di “buio” percepito dal fotodiodo, non possono essere troppo ridotte per le stesse ragioni. Vaste dimensioni del corpo provocano un aumento dell'intervallo di tempo in cui il segnale misurato percepisce un picco di ribasso. Per l'estrazione effettiva del periodo questo non crea problemi: scegliendo di questo intervallo sempre il valore iniziale (o centrale/finale) non si generano ambiguità dovute al metodo sperimentale, dato che ci si focalizza sulla differenza dei tempi.

La costruzione dell'apparato sperimentale ha come ulteriore variabile la posizione del sistema fotodiodo-LED rispetto al corpo oscillante, come accennato in Paragraph 4.1. Una opzione potrebbe essere quella di fissarlo nel punto di rilascio del grave all'istante iniziale, in modo tale che l'intervallo dei tempi acquisito sia esattamente il periodo cercato. Questa procedura nasconde delle insidie: non è scontato riuscire a far partire il corpo esattamente dal punto prescelto. A ciò si aggiunge che il corpo nell'oscillazione, non essendo un pendolo ideale rigido, dissipa parte dell'energia sotto forma di calore e parte viene impiegata nelle rotazioni, il più possibile limitate, e oscillazioni verticali infinitesime del filo. Di conseguenza, il grave rischierebbe di non tornare nell'esatta posizione iniziale, inficiando sulla misura da parte del fotodiodo. Si tenta di ovviare a questi problemi installando fotodiodo-LED nel minimo della traiettoria armonica, ovvero nel punto in cui il corpo si trova quando è in quiete, sottoposto ad una forza di gravità verticale nel sistema di riferimento scelto. La misura temporale riporta il periodo di oscillazione dimezzato se si scelgono due buche di potenziale adiacenti, per questo si decide di misurare direttamente il periodo per intero mediante buche spaziate da un ulteriore picco (quest'ultimo ignorato).

Un'altra questione a cui si rivolge l'attenzione riguarda se e quando il setup risulta sensibile alla rotazione del grave. Mediante una misura preliminare si riporta una risposta affermativa. Scegliendo un volumetto cilindrico, un eventuale giro compiuto dallo stesso influenza il segnale acquisito. Come mostrato in Figure 7, il picco di tensione ha la forma di un avvallamento “asimmetrico”, invece di essere una conca di simmetria pari. La scelta più appropriata sarebbe quella di usare un corpo di forma sferica, in modo da non ricadere in questa problematica. Nel caso di una massa di altra forma, si presta attenzione al compimento di un moto che sia unicamente oscillatorio e non anche rotazionale.

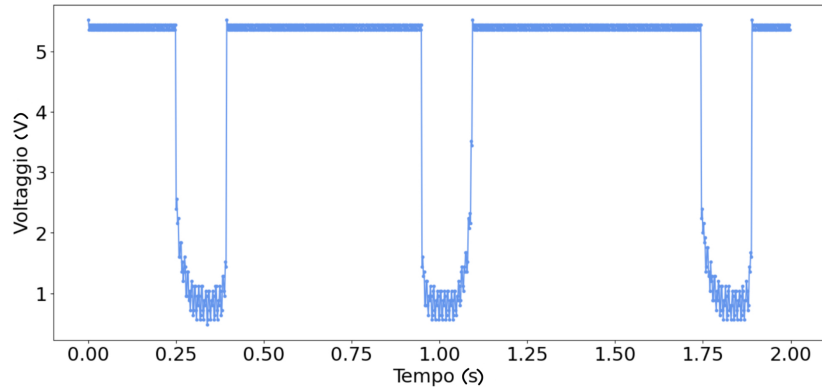


Figure 7: Rappresentazione grafica del segnale acquisito dall'oscilloscopio per l'oscillazione del pendolo a lunghezza $l=55.5\text{cm}$. L'alimentazione del fotodiodo a 6.10V causa la saturazione della tensione in presenza del LED a 5.44V .

Un ultimo appunto va alla scelta dei valori di tempo per il calcolo del periodo rispetto al valore di tensione misurato dall'oscilloscopio. L'obiettivo è quello di individuare gli istanti relativi a due buche separate da una intermedia e computarne la differenza. Siccome il set up sperimentale è tale che visualizza il passaggio del LED in un tempo tale da rendere la buca "larga", si solleva il problema di capire quale sia il metodo di selezione meglio definito dei punti corrispondenti alla condizione di LED spento.

L'opzione più immediata potrebbe essere quella di stabilire un certo valore di soglia per il potenziale, in modo tale che si considerino istanti di "luce" tutti quelli in cui la ddp risulti superiore e "buio" quelli con tensione sottosoglia. Computazionalmente, si implementa un algoritmo dotato di una maschera che selezioni i tempi richiesti.

Il campionamento dei dati da parte dell'oscilloscopio è tale da poter compiere una misura anche quando il grave copre solo parzialmente il LED. Ne risulta una lettura da parte del fotodiodo che permette il passaggio di una corrente non nulla e, quindi, un voltaggio registrato intermedio tra il minimo del rumore e il massimo a luce completamente accesa (Figure 8). Nell'impostare il valore di soglia, si potrebbero involontariamente confrontare di due picchi diversi la condizione di effettivo buio di uno e una parziale luce dell'altro. Perciò, si propone un'altra strategia di selezionamento. Si estraggono per ogni buca gli indici del primo e dell'ultimo istante di luce completa, corrispondenti ai suoi bordi nel tratto orizzontale di circa 5V . Si determina l'indice medio tra i due e si seleziona quel valore come istante rappresentativo della zona di buio, in quanto, sicuramente, in un suo intorno è ben definito pensare che il LED sia stato allineato e completamente coperto dal grave. La differenza tra i tempi rappresentativi di due buche separate da una intermedia è ragionevolmente il periodo cercato.

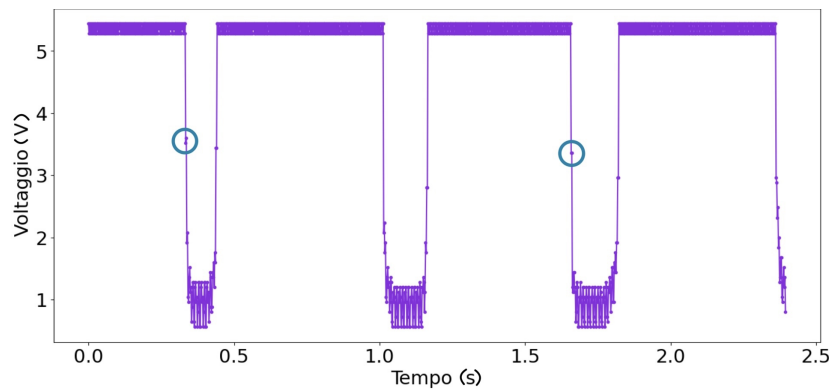


Figure 8: Rappresentazione grafica del segnale acquisito dall'oscilloscopio per l'oscillazione del pendolo a lunghezza 46cm . Vengono cerchiati esempi di dati in cui il voltaggio ha un valore intermedio tra la zona di buio totale e quella di luce, a dimostrare che la misura è stata compiuta nella condizione di copertura parziale del LED.

4.3 Studio delle incertezze

In un primo momento sono stati presi i dati relativi a una singola oscillazione della massa del pendolo, con l'obiettivo di conferire a questo l'errore dovuto alla sensibilità della misura con l'oscilloscopio. Inoltre, essendo statisticamente piatta la probabilità di leggere una misura tra due "tacche" successive, questa incertezza viene diminuita di un fattore $\sqrt{12}$.

Questa presa di posizione è dubbia: avendo registrato i dati relativi ad una sola oscillazione si teme di aver sottostimato l'errore. Si è considerata, infatti, l'eventualità di un accumulo di errori non quantificabili (derivanti ad esempio dalla rotazione della massa o da una traiettoria non planare), di cui l'incertezza inizialmente attribuita ai valori dei periodi non tiene conto.

Per questo motivo, si è deciso di svolgere un controllo: prendendo per ciascuna lunghezza più di un file *csv*, che comprendesse un numero maggiore di oscillazioni da cui poter estrarre più volte il periodo relativo a una lunghezza, si è calcolata la media dei valori di periodo e la deviazione standard della media. Si può confrontare tale valore con l'incertezza inizialmente attribuita al periodo estratto da una sola oscillazione: si nota che, in effetti, la deviazione standard della media è maggiore dell'incertezza iniziale, e dunque non sostituibile dalla sensibilità dello strumento a causa di ulteriori componenti di errore.

Ad esempio, per una lunghezza del filo di circa 19.6cm si è estratto un valore di periodo di 0.888s con deviazione standard di 0.002s, rispetto all'errore strumentale attribuito inizialmente di 0.0006s.

Si sceglie di procedere come appena descritto, compiendo per ogni lunghezza più raccolte di dati, al fine di possedere circa 10 oscillazioni per ciascuna.

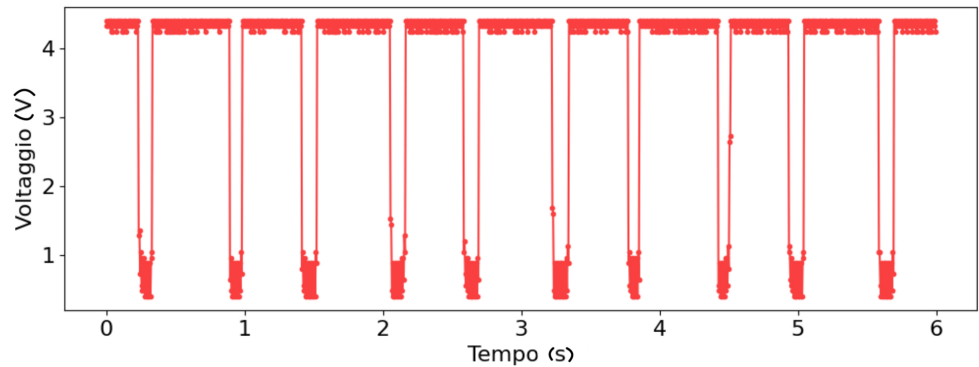


Figure 9: Rappresentazione grafica del segnale acquisito dall'oscilloscopio per l'oscillazione del pendolo a lunghezza $l=34.3\text{cm}$.

4.4 Analisi dei dati

Una volta ottenuto il periodo si è proceduto con l'estrazione del valore di g : attraverso infatti un processo di regressione lineare svolto sulla funzione

$$y = gx + A \quad \text{con} \quad y = l, \quad x = \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (3)$$

dove g rappresenta il coefficiente angolare della retta ed A il termine noto che ci si aspetta essere comparabile con lo zero.

Un ulteriore controllo della validità dell'equazione (1) ha un riscontro sperimentale nella verifica che g sia effettivamente un valore costante. Per fare ciò, si calcola per ogni lunghezza il valore dell'accelerazione gravitazionale con l'applicazione diretta della formula. Successivamente, si realizza un grafico dell'andamento dei risultati in funzione di ciascuna lunghezza e si impone un fit lineare a coefficiente angolare nullo (Figure 10). In questo modo, estraendo il χ^2 , si quantifica un valore in percentuale che indica quanto la richiesta che g non vari sia effettivamente valida.

La presa dati ad un maggior numero di lunghezze porterebbe a risultati più significativi.

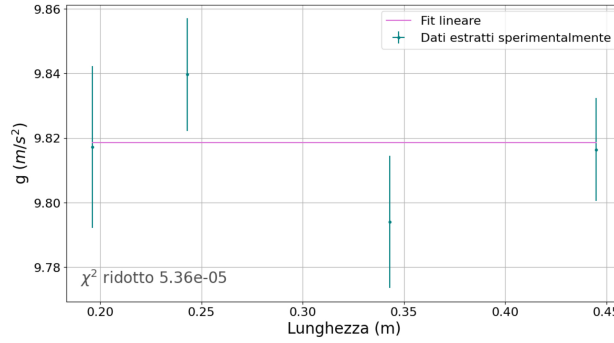


Figure 10: Grafico delle accelerazioni gravitazionali calcolate direttamente in funzione della lunghezza. Il fit di regressione lineare piatto $y = B$ dimostra che g è ragionevolmente costante.

4.5 Interpretazione e discussione dei risultati

La raccolta dati riferita a quattro lunghezze, ciascuna analizzata con oscillazioni multiple, ha riportato i risultati seguenti.

La verifica che la relazione (1) sia valida, sottintendendo un valore costante della g dimostra che l'affermazione è corretta con un $\tilde{\chi}^2 \simeq 5.4 \times 10^{-5}$ (Figure 10), corrispondente essenzialmente ad una probabilità del 100%.

La regressione lineare per l'estrazione del valore effettivo di g restituisce un valore pari a $9.80 \pm 0.03 \text{ m/s}^2$ (Figure 11). Come atteso, l'indice di correlazione lineare è circa 1 ed il χ^2 ridotto è 1.4×10^{-6} , anche questo risultante in una probabilità di corrispondenza tra modello teorico e fenomeno prossimo al 100%.

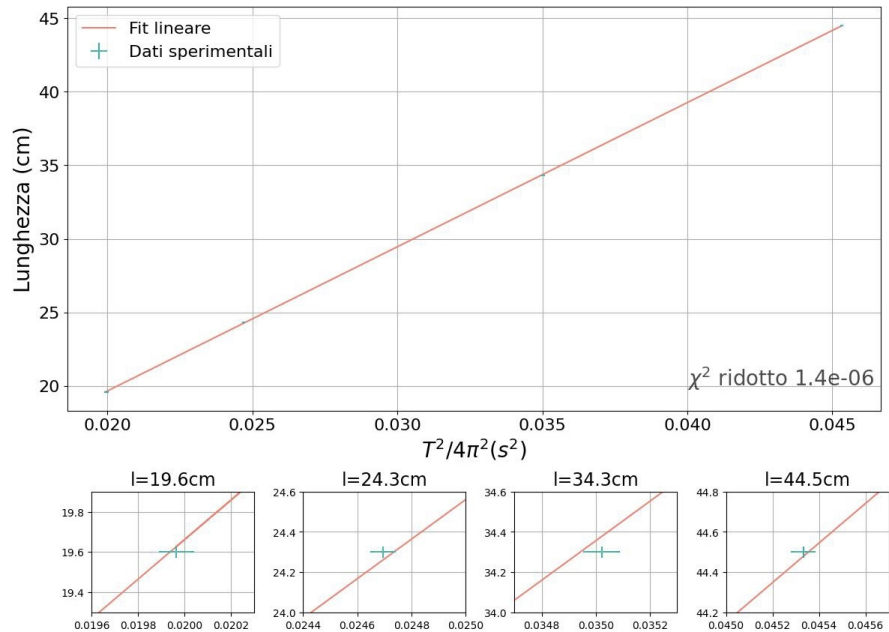


Figure 11: Grafico del fit di regressione lineare dei dati a multipla oscillazione a confronto con le misure sperimentali. Per ragioni di visualizzazione, si riportano gli zoom nelle regioni che contengono i dati raccolti.

Rispetto al risultato estratto dai dati relativi a lunghezze studiate con una singola oscillazione ($g \simeq 9.77 \pm 0.07 \text{ m/s}^2$), il valore ottenuto con la seconda analisi dei dati è in effetti più vicino al valore comunemente accettato. Inoltre è più preciso dal momento che l'incertezza associata è minore: questo è dovuto al fatto che i dati raccolti delle singole oscillazioni rispetto alla regressione lineare sono più problematici (Figure 12). Avendo dunque associato a monte l'incertezza corretta ai periodi mediante multiple oscillazioni, il fit risulta più efficace. Si può affermare che il controllo svolto sugli errori è stato più che ragionevole ed ha migliorato la misura di g estratta.

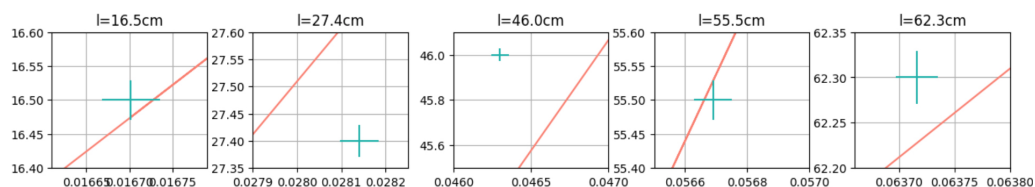


Figure 12: Grafico del fit di regressione lineare dei dati a singola oscillazione a confronto con le misure sperimentali (riquadri in zoom).

5 Conclusioni

Si osserva dunque che il calcolo di g è stato svolto con successo, dal momento che, a seguito della correzione sugli errori, è migliorata l'accuratezza della misura.

È anche evidente che il buon risultato ottenuto è frutto dell'utilizzo di una strumentazione migliore e avanzata: come accennato a monte, si sarebbe potuto scegliere di utilizzare strumenti diversi, come un cronometro per l'acquisizione dei periodi di oscillazione, ma il risultato sarebbe stato certamente influenzato da una fonte d'errore umano che, nel caso in esame, è stata minimizzata e limitata alla sola misura del filo.

Il sistema di acquisizione dati formato da fotodiodo-LED risulta quindi più efficiente del cronometraggio compiuto manualmente dallo sperimentatore. Infatti, questa ultima opzione è contaminata da un errore causato dai tempi di reazione (riducibile con l'incremento di numero di misure), mentre il fotodiodo risponde alla ricezione e non della radiazione con un ritardo sistematico che, considerata la sola differenza tra i tempi registrati, si annulla. Inoltre, fatta eccezione per i tempi morti degli strumenti stessi, il tempo impiegato dalla radiazione infrarossa per percorrere la distanza tra questi, essendo nel vuoto, è significativamente trascurabile a fronte della scala in uso, grazie all'elevato valore di velocità di propagazione ($c \simeq 2.99 \times 10^8 \text{ m/s}$).

Riferimenti

1. Duranti, M.; Laboratorio di elettronica e Tecniche di acquisizione dati. Università degli Studi di Perugia, 2024. Dispense online: https://www.fisgeo.unipg.it/~duranti/laboratoriodue/laboratorioele_24-25.html.