سوال ۱

آ)
$$\exists c_1, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 100\cancel{n} \leq c_1 \cancel{n} \rightarrow c_1 \geq 100$$

به ازای $c_1 \geq 100$ این رابطه برقرار است پس

① $100n \in O(n)$

$$\exists c_2, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 100\cancel{n} \geq c_2 \cancel{n} \rightarrow c_2 \leq 100$$

به ازای $c_2 = 90$ این رابطه می‌تواند برقرار باشد پس

② $100n \in \Omega(n)$

①, ② $\Rightarrow 100n \in \Theta(n)$ ③

$\log n$ و $(\log n)^2$ هر دو در یک کلاس هم ارزی تتا قرار می‌گیرند پس

$\log n \in \Theta((\log n)^2)$ ④

③, ④ $\Rightarrow 100n + \log n \in \Theta\left(n + (\log n)^2\right)$

ب)
$$\exists c_1, c_2, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad c_1 \log n^2 \leq \log n \leq c_2 \log n^2$$

$$2c_1 \cancel{\log n} \leq \cancel{\log n} \leq 2c_2 \cancel{\log n} \rightarrow 2c_1 \leq 1 \leq 2c_2$$

به ازای $c_1 = \frac{1}{2}$ و $c_2 = 1$ این رابطه برقرار است پس ثابت می‌شود که

$\log n \in \Theta(\log n^2)$

subject: Date: / /

ادامه سوال 1 :

ج) ابتدا فرض می‌کنیم $f(n) \in O(g(n))$:

$$\exists c, n_0, \forall n \geq n_0 : \frac{n^2}{\log n} \leq c \cdot n (\log n)^2$$

$$\xrightarrow[\text{پس می‌توان n ها را از دو طرف تساوی ساده کرد.}]{\text{n ها مشترک است}} \frac{n}{\log n} \leq c(\log n)^2 \Rightarrow$$

$$n \leq c(\log n)^2 \times \log n \Rightarrow n \leq c(\log n)^3$$

n رشد بیشتری نسبت به $(\log n)^3$ دارد پس فرض ما رد می‌شود و نتیجه می‌گیریم:

$$n \geq c \cdot (\log n)^3 \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$$

د) ابتدا فرض می‌کنیم $f(n) \in \Omega(g(n))$:

$$\exists c, n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad (\log n)^{\log n} \geq c \cdot \frac{n}{\log n}$$

$$\Rightarrow (\log n)^{\log n + 1} \geq c \cdot n \rightarrow c \geq \frac{n}{(\log n)^{\log n + 1}}$$

$(\log n)^{\log n + 1}$ ← به ازای $n = 2$ و $c = 3$ این رابطه برقرار است

پس فرض ثابت می‌شود

ه)

$$n^{\frac{1}{2}} \le \cancel{c}^{\,1}(n^{\cancel{k}^{\,1}}) \implies n^{\frac{1}{2}} \in O(n^k)$$

پس $n^{\frac{1}{2}}$ یک تابع Polynomial است. $c=1$, $k=1$

$$(\log n)^5 \le \cancel{c}^{\,1}(\log n)^{\cancel{k}^{\,6}} \implies (\log n)^5 \in O(\log^k(n))$$

$k=6$, $c=1$ رابطه برقرار است.

پس تابع $(\log n)^5$ یک تابع Polylogarithmic است.

می‌دانیم که رشد تابع Polynomial سریع‌تر از Polylogarithmic است پس:

$$n^{\frac{1}{2}} \in \Omega((\log n)^5) \implies f(n) \in \Omega(g(n))$$

Subject:

Date: / /

۶) ابتدا فرض می‌کنیم: $f(n) \in O(g(n))$

$$\exists c, n_0 > 0 \quad n \geq n_0 : n 2^n \leq c \cdot 3^n$$

به ازای $n=9$ و $c=1$ این سمت راست خیلی بزرگتر از سمت چپ می‌شود.

پس این فرض درست بوده و $f(n) \in O(g(n))$

subject:

سوال ۲:

آ) طبق فرض می‌دانیم: $f(n) \in O(s(n))$ پس:

$$\exists c_1, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c_1 (s(n)) \quad (1)$$

همچنین طبق فرض می‌دانیم: $g(n) \in O(r(n))$ پس:

$$\exists c_2, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c_2 (r(n)) \quad (2)$$

دو طرف نامساوی (1) و (2) را بر هم تقسیم می‌کنیم. با توجه به اینکه دو طرف نامساوی مثبت هستند جهت نامساوی عوض نمی‌شود پس داریم:

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq \underbrace{\frac{c_1}{c_2}}_{= c_3} \left(\frac{s(n)}{r(n)} \right)$$

با توجه به اینکه c_1 و c_2 مثبت هستند اگر مقدار $\frac{c_1}{c_2}$ را c_3 فرض کنیم داریم:

$$\exists c_3, n_0 \quad n \geq n_0 : \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_3 \left(\frac{s(n)}{r(n)} \right)$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} \in O\left(\frac{s(n)}{r(n)} \right) \Leftarrow \boxed{\text{پس نتیجه می‌شود}}$$

Yasha

ب) مشابه قسمت قبل داریم:

$$\exists c_1, n_0 \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c_1 (s(n)) \quad ①$$

$$\exists c_2, n_0 \ \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c_2 (r(n)) \quad ②$$

شرط ① و ② را از هم کم می‌کنیم:

$$f(n) - g(n) \leq c_1 (s(n)) - c_2 (r(n)) \Rightarrow$$

$$f(n) - g(n) \leq \underbrace{(c_1 - c_2)}_{= c_3} (s(n) - r(n))$$

اگر $c_1 = c_2$ باشه c_3 برابر با صفر خواهد شد که شرط اصلی را نقض می‌کند

c_3 باید یک مقدار ثابت مثبت باشه پس:

$$f(n) - g(n) \notin O(s(n) - r(n))$$

subject: Date: / /

سوال ۳:

آ)

Algorithm : tavan

Input : a, n

Output : a^n

```
long long int sum = 1

for(int i = 0 ; i < n ; i++)
        sum = sum * a

return sum
```

پیچیدگی زمانی این الگوریتم $= T(n) = O\left(\sum_{i=0}^{n-1} 1\right) = O(n)$

ب) در جای خالی a قرار می‌گیرد.

```
if n=1 then
    return a
```

حالت پایه وقتی است که n=1 می‌شود و می‌دانیم که هر عددی به توان 1 برسد خودش می‌شود پس همان a ورودی را برمی‌گرداند.

ج) تنها قسمتی از الگوریتم که بازگشتی است می‌تواند اردر سنگین‌تری نسبت به بقیه قسمت‌ها داشته باشد. با هر بار صدا زدن تابع بازگشتی n نصف می‌شود پس در واقع $T(a,n) = T(a, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ این تابع از $O(\log n)$ می‌باشد.

الگوریتم قسمت الف از $O(n)$ است که نسبت به $O(\log n)$ پیچیدگی زمانی بیشتری دارد و الگوریتم به نسبت خوبی نیست.

Subject:

سوال ۴:

آ)

$$T(n) = \underbrace{T(n-1)}_{} + \frac{n}{2} = \underbrace{T(n-2) + \frac{n-1}{2}}_{} + \frac{n}{2}$$

$$= T(n-3) + \frac{n-2}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n}{2} = T(n-4) + \frac{n-3}{2}$$

$$+ \frac{n-2}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow T(n) = \frac{\overbrace{(\dots n-3 + n-2 + n-1 + n)}^{n\ \text{بار}\ n\ \text{تا جمع می‌شود} \quad n^2+c}}{2} = \frac{n^2+c}{2}$$

$$T(n) = O(n^2)$$

ب) فرض می‌کنیم $T(n) = O(n\log n)$ باشد. ثابت می‌کنیم که آیا فرض ما درست است یا خیر.

$\log n! \overset{?}{=} O(n\log n) \Rightarrow \exists n_0, c \ \forall n \geq n_0 \ \log^{n!} \leq c.n\log n$

$\log^{n!} = \log^{n(n-1)(n-2)\dots1} = \log^{n} + \log^{n-1} +$

$\log^{n-2} + \dots + \log^{1} \leq c(\underbrace{\log^{n} + \log^{n} + \log^{n} + \dots}_{?})$

به تعداد n تا باهم جمع می‌شود.

حالا باید یک به یک جملات دو طرف نامساوی را باهم مقایسه کنیم که چون $\log^{n-1}$ و $\log^{n-2}$ و $\log^{n-3}$ و ... از $\log^{n}$ کوچکتر هستند پس به ازای هر مقدار c

این رابطه می‌تواند برقرار باشد پس فرض اولیه ما درست است.

$T(n) = O(n\log^{n})$

روش دیگر حل:

$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \xrightarrow{\text{از دو طرف نساوی}} $ log می‌گیریم.

$\log^{n!} = \log^{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}} + n\log^{\frac{n}{e}} = \frac{1}{2}\log^{2\pi n} + n\log n - n\log^{e}$

$\log^{n} - \log^{e}$

بزرگترین اردر است بقیه حذف می‌شوند.

$\Rightarrow T(n) = O(n\log n)$

Yasha

Subject:

سوال ۵ :

آ)

$$T(n,m) = O\left(\sum_{i=1}^{\log n} \sum_{j=1}^{m/2} \sum_{z=1}^{2j} 1\right) =$$

$$O\left(\log^n \times \sum_{j=1}^{m/2} 2j\right) = O\left(\log^n \times 2 \sum_{j=1}^{m/2} j\right)$$

$$= O\left(\log^n \times \cancel{2} \times \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\cancel{2}}\right) = O\left(\log^n \left(\frac{m^2}{4} + \frac{m}{2}\right)\right)$$

$$= O\left(\log^n \times m^2\right)$$

ب)

$$T(a) = O\left(\sum_{i=0}^{a-1} T(2^{i}, i)\right) =$$

$$O\Big(\sum_{i=0}^{a-1} \underbrace{\cancel{\log 2^{i}}^{\,i} \times i^{2}}_{\text{با توجه به قسمت آ}}\Big) = O\left(\sum_{i=0}^{a-1} i^{3}\right) =$$

$$O\left(\frac{a^{2}(a+1)^{2}}{4}\right) = O\left(\frac{a^{2}(a^{2}+2a+1)}{4}\right) =$$

$$O\left(\frac{a^{4}+2a^{3}+a^{2}}{4}\right) = O(a^{4})$$

چون درجه کمتری دارند نسبت به [illegible] صرف نظر
می‌شوند.

سوال ۴ :

a) فرض می‌کنیم رابطه $\max(f(n), g(n)) \in \Theta(f(n)+g(n))$ برقرار باشد پس داریم:

$\exists c_1, c_2, n_0 \ \forall n \geq n_0 :$

$$0 \leq c_1(f(n)+g(n)) \leq \max(f(n), g(n)) \leq c_2(f(n)+g(n))$$

می‌دانیم که ماکسیمم مقدار دو تابع مثبت همیشه از جمع آن دو تابع کمتر است پس c_2 را می‌توان مقدار ۱ در نظر گرفت. همچنین می‌دانیم که ماکسیمم مقدار همیشه از میانگین آن دو مقدار بیشتر است پس c_1 را می‌توان مقدار $\frac{1}{2}$ در نظر گرفت.

پس این رابطه به ازای $c_1 = \frac{1}{2}$ و $c_2 = 1$ برقرار است.

subject:

Date: / /

b) طبق قضیه 3.7 می‌دانیم که اگر و فقط اگر $f(n) \in \Omega(g(n))$ و هم $f(n) \in O(g(n))$ آنگاه $f(n) \in \Theta(g(n))$ می‌باشد. پس برای اینکه ثابت کنیم $1+c+c^2+\dots+c^n \in \Theta(c^n)$ باید ۲ مورد 1 و 2 را اثبات کنیم:

1 $1+c+c^2+\dots+c^n \in O(c^n)$

$\exists c_1, n_0 \quad \forall n \geq n_0 : 1+c+c^2+\dots+c^n \leq c_1(c^n)$

اگر c_1 را برابر با مجموع ضرایب همه جملات سمت چپ نامساوی در نظر بگیریم این رابطه همیشه برقرار خواهد بود.

$$c_1 = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\text{n+1 تا 1 داریم}} = n+1$$

پس به ازای $c_1 = n+1$ این رابطه برقرار است.

② $1+c+c^2+\dots+c^n \in \Omega(c^n)$

$\exists c_2, n_0 \quad \forall n \geq n_0: \underline{1+c+c^2+\dots}+c^n \geq c_2(c^n)$

اگر $c_2 = 1$ باشد حتماً این رابطه برقرار خواهد شد.

$1+c+c^2+\dots+c^n \geq c^n \Rightarrow 1+c+c^2+\dots+\cancel{c^n}-\cancel{c^n} \geq 0$

$\Rightarrow 1+c+c^2+\dots+c^{n-1} \geq 0$

طبق فرض می‌دانیم که $c>1$ و مقداری مثبت است پس سمت چپ حتماً بزرگتر مساوی صفر است و رابطه برقرار خواهد بود.

ثابت کردیم که ① و ② هر دو برقرار هستند پس طبق قضیه 3.1 نتیجه می‌گیریم:

$1+c+c^2+\dots+c^n \in \Theta(c^n)$

c) می دانیم اگر $f(n) \in O(\log^k(n))$ برای بعضی از مقادیر ثابت k

برقرار باشد تابع $f(n)$ Polylogarithmic است.

همچنین اگر $f(n) \in O(n^k)$ برای بعضی از مقادیر ثابت k برقرار باشد

تابع $f(n)$ Polynomial است.

$$\log n \leqslant c(\log^k(n)) \Longrightarrow \log n \in O(\log^k(n))$$

به ازای $c=1$ و $k=2$ می تواند این رابطه برقرار باشد.

پس تابع $\log n$ یک تابع Polylogarithmic است.

$$n^{\frac{1}{3}} \leqslant c(n^k) \Longrightarrow n^{\frac{1}{3}} \in O(n^k)$$

به ازای $c=1$ و $k=2$ این رابطه می تواند برقرار باشد.

پس تابع $n^{\frac{1}{3}}$ یک تابع Polynomial است.

از طرفی می دانیم هر تابع Polynomial سریع تر از هر تابع Polylogarithmic

رشد می کند پس $n^{\frac{1}{3}}$ سریع تر از $\log^n$ رشد می کند در نتیجه رابطه

$\log^n \in O(n^{\frac{1}{3}})$ برقرار است.