



طراحی الگوریتم - تکلیف چهارم

موعد تحویل: ۲۵ آذر ۱۴۰۰

پیش از حل سؤالات به موارد زیر دقت کنید:

- این سری از تکلیف شامل دو بخش عملی و تئوری می‌باشد که بخش تئوری آن در این فایل آماده شده و بخش عملی آن در سایت کوئرا به آدرس زیر قرار داده شده است.

– quera.ir/overview/add_to_course/course/9614

– رمز عبور: Autumn1400

- پاسخ تکلیف را به صورت یک فایل PDF آماده کنید و با نام `HW4_{Student Number}` در سامانه آپلود کنید.

- در تحویل تکالیف به زمان مجاز تعیین شده دقت نمایید.

- پاسخ تکالیف را حتماً در سامانه آپلود کنید و از ارسال تکالیف به ایمیل یا تلگرام اکیداً خودداری نمایید.

- از طریق ایمیل زیر با TA مربوط به این تکلیف در ارتباط باشید.

– ali.mollahoseini@ec.iut.ac.ir

سوال ۱. (۲۵ نمره) بیان کنید که آیا گزاره زیر صحیح است یا غلط. در صورتی که صحیح است به صورت کوتاه توضیح دهید و در صورت غلط بودن مثال نقضی برای آن ارائه نمایید.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت و وزن دار و بدون لوپ (یالی که از یک راس به همان راس برود) باشد، که وزن هر یال $e \in E$ برابر با $w(e)$ باشد، و وزن همه یال‌ها متفاوت باشند. فرض کنید $e^* \in E$ کم‌ارزش‌ترین یال باشد: به معنای اینکه $w(e^*) = \min_{e \in E} w(e)$. در این صورت درخت پوشای کمینه‌ای از G وجود دارد که شامل e^* است.

سوال ۲. (۲۰ نمره) سه مجموعه مجزای X, Y, Z داده شده است، و همچنین مجموعه‌ای از سه‌تایی‌های مرتب $T \in X \times Y \times Z$ نیز داده شده است. زیرمجموعه $M \in T$ یک مچینگ سه‌تایی است اگر هر عضوی از $X \cup Y \cup Z$ در حداکثر یکی از این سه‌تایی‌ها آمده باشد. مسئله یافتن بزرگ‌ترین مچینگ سه‌تایی است. (اندازه یک مچینگ برابر با تعداد سه‌تایی‌های انتخاب شده است. می‌توانید فرض کنید $|X| = |Y| = |Z|$).

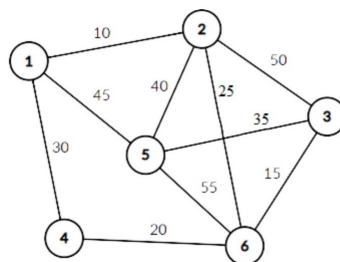
آ) الگوریتم چندجمله‌ای با تقریب ۳ ارائه نمایید: به این معنا که تعداد سه‌تایی‌های جواب شما حداقل باید $\frac{1}{3}$ جواب اصلی باشد. (۲۰ نمره)

ب) مثالی از یک مجموعه مچینگ سه‌تایی بسازید که نشان دهد درجه تقریب شما (که در این سوال برابر ۳ است) دقیق است. به زبان دیگر، مثالی ارائه دهید (به طور دقیق X, Y, Z, T را بنویسید) که خروجی الگوریتم شما به آن $\frac{1}{3}$ جواب اصلی مسئله باشد. مثال داده شده حتما باید کوچک باشد. ($|T| \leq 5$ و $|X|, |Y|, |Z| \leq 4$) (۵ نمره)

(راهنمایی: سعی کنید مثالی با شرایط روبرو بسازید: $|T| = 4, |X| = |Y| = |Z| = 3$.)

سوال ۳. (۲۰ نمره) متنی شامل ۷۰۰۰ حرف از حروف آ، ب، پ، ت، ث، و، ج، به ترتیب با دفعات تکرار ۱۰۰۰، ۱۲۰۰، ۸۰۰، ۱۵۰۰، ۱۸۰۰، و ۷۰۰ در اختیار داریم. با استفاده از درخت هافمن حداقل تعداد بیت لازم برای انتقال یا ذخیره این متن را بیابید.

سوال ۴. (۲۰ نمره) با شروع از راس اول، الگوریتم‌های دایجسترا و کروسکال را بر روی گراف زیر اجرا کنید و درخت هر مرحله کروسکال را رسم کنید و همچنین فاصله رئوس با مبدا را در هر مرحله برای دایجسترا بنویسید.



سوال ۵. (۱۵ نمره) به ما مجموعه $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ داده شده است، همچنین زیرمجموعه‌های B_1, B_2, \dots, B_n از A داده شده است. مسئله یافتن یک زیرمجموعه $A \supseteq H$ به طوری که اندازه مجموعه H کمینه باشد، و همچنین $B_i \cap H$ به ازای هر i تهی نباشد.

فرض کنید $|\forall i|B_i| \leq 2$ ، با توجه به الگوریتم چندجمله‌ای تدریس شده برای مسئله پوشش راسی در کلاس (که اثبات شده با تقریب ۲ است)، دقیقا توضیح دهید که چگونه می‌توان این مسئله را به مسئله پوشش راسی کاهش داد. (مختصرا در حداکثر ۵ جمله توضیح دهید.)