



## طراحی الگوریتم - تکلیف اول

موعد تحویل ۲۱ مهر ۱۴۰۰

پیش از حل سؤالات به موارد زیر دقت کنید:

- پاسخ تکلیف را به صورت یک فایل PDF آماده کنید و با نام `HW1_{Student Number}` در سامانه آپلود کنید.
- در تحویل تکالیف به زمان مجاز تعیین شده دقت نمایید.
- پاسخ تکالیف را حتماً در سامانه آپلود کنید و از ارسال تکالیف به ایمیل یا تلگرام اکیداً خودداری نمایید.
- از طریق ایمیل زیر با TA مربوط به این تکلیف در ارتباط باشید.

– [ali.mollahoseini@ec.iut.ac.ir](mailto:ali.mollahoseini@ec.iut.ac.ir)

سوال ۱. (۳۰ نمره) هر جفت از توابع داده شده را از نظر مرتبه‌ی بزرگی با هم مقایسه کنید. در هر مورد بگویید کدام یک از روابط  $f(n) \in \Theta(g(n))$ ،  $f(n) \in \Omega(g(n))$ ،  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  یا  $f(n) \in \Theta(g(n))$  برقرار است؟ (در حل این سوال از حد استفاده نکنید)

آ  $f(n) = 100n + \log n$ ،  $g(n) = n + (\log n)^2$

ب  $f(n) = \log n$ ،  $g(n) = \log n^2$

ج  $f(n) = \frac{n^2}{\log n}$ ،  $g(n) = n(\log n)^2$

د  $f(n) = (\log n)^{\log n}$ ،  $g(n) = \frac{n}{\log n}$

ه  $f(n) = (n)^{1/2}$ ،  $g(n) = (\log n)^5$

و  $f(n) = n2^n$ ،  $g(n) = 3^n$

سوال ۲. (۱۰ نمره) برای دو ادعای زیر مثال نقضی ارائه داده یا درستی آن را نشان دهید.

آ اگر  $f(n) \in \mathcal{O}(s(n))$  و  $g(n) \in \mathcal{O}(r(n))$ ، آنگاه  $f(n)/g(n) \in \mathcal{O}(s(n)/r(n))$ .

ب اگر  $f(n) \in \mathcal{O}(s(n))$  و  $g(n) \in \mathcal{O}(r(n))$ ، آنگاه  $f(n) - g(n) \in \mathcal{O}(s(n) - r(n))$ .

سوال ۳. (۱۵ نمره)

آ الگوریتمی خطی‌ای طراحی کنید (به معنای اینکه از لحاظ زمانی از  $\mathcal{O}(n)$  باشد) که اعداد  $a$  و  $n$  را دریافت کرده و  $a^n$  را خروجی دهد.

ب جای خالی در شبکه‌د زیر را پر کنید. این الگوریتم در حالت پایه چه مقداری باید برگرداند؟ به صورت کوتاه جواب خود را توضیح دهید.

---

**Algorithm 1:** power

---

**Input:**  $a, n$

**Output:**  $a^n$

**if**  $n=1$  **then**

**return** \_\_\_\_\_

half = power( $a, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ )

**if**  $n \% 2 == 1$  **then**

**return** half \* half \* a

**else**

**return** half \* half

---

ج) به صورت خلاصه زمان اجرای الگوریتم بازگشتی بالا را تحلیل کنید. الگوریتم بازگشتی را با الگوریتمی که در قسمت الف ارائه دادید از لحاظ زمانی مقایسه کنید.

سوال ۴. (۱۰ نمره) رفتار مجانبی توابع زیر را به درست آورید:

آ  $T(1) = 1, T(n) = T(n-1) + \frac{n}{2}$

ب  $T(n) = \log(n!)$

سوال ۵. (۲۰ نمره)

آ تابع زیر را از لحاظ زمانی تحلیل کنید.

```
1 void f( int n, int m ) {
2     long long sum = 0;
3     for (int i = 2; i < n; i *= 3) {
4         for (int j = 0; j < m; j += 2) {
5             for (int z = 0; z < j; z++) {
6                 sum += 1;
7             }
8         }
9     }
10    cout << sum;
11 }
```

ب برنامه زیر را از لحاظ زمانی تحلیل کنید. (دقت کنید که تابع f تابع قسمت الف است.)

```
1
2 int main() {
3     int a;
4     cin >> a;
5     for (int i = 0; i < a; i++) {
6         f(1 << i, i); \\ " $<<$ " is shift operation, therefore " $1 << i$ " is the
        ith power of two.
7     }
8     return 0;
9 }
```

سوال ۶. (۱۵ نمره) هرکدام از گزاره‌های زیر را رد کرده یا اثبات کنید.

a.  $\max(f(n), g(n)) \in \Theta(f(n) + g(n))$

b.  $c > 1, 1 + c + c^2 + \dots + c^n \in \Theta(c^n)$

c.  $\log n \in \mathcal{O}(n^{1/3})$ .