تکلیف ۸ - ۹۸۲۳۰۳۴

سوال ۱:

$$X(z)=\sum_{n} x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{n}\cos\omega_0 n\, u(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n}\cos\omega_0 n\, z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n}\left[\frac{1}{۲}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{۲}e^{-j\omega_0 n}\right]z^{-n}=\frac{1}{۲}\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n}e^{j\omega_0 n}z^{-n}+\frac{1}{۲}\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n}e^{-j\omega_0 n}z^{-n}$$

$$=\frac{1}{۲}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a e^{j\omega_0}z^{-1}\right)^{n}+\frac{1}{۲}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a e^{-j\omega_0}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1}{۲}\left[\frac{1}{1-a e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{1-a e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{۲}\left[\frac{1-a e^{-j\omega_0}z^{-1}+1-a e^{j\omega_0}z^{-1}}{1-a e^{-j\omega_0}z^{-1}-a e^{j\omega_0}z^{-1}+a^{۲}z^{-۲}}\right]=\frac{1}{۲}\left[\frac{۲-a z^{-1}\left(e^{-j\omega_0}+e^{j\omega_0}\right)}{1-a z^{-1}\left(e^{-j\omega_0}+e^{j\omega_0}\right)+a^{۲}z^{-۲}}\right]$$

$$=\cancel{\frac{1}{۲}}\left[\frac{\cancel{۲}-a z^{-1}\left(\cancel{۲}\cos\omega_0\right)}{1-a z^{-1}\left(۲\cos\omega_0\right)+a^{۲}z^{-۲}}\right]=\frac{1-a z^{-1}\left(\cos\omega_0\right)}{1-۲a z^{-1}\left(\cos\omega_0\right)+a^{۲}z^{-۲}}$$

$$\left|a e^{j\omega_0}z^{-1}\right|<1\rightarrow\left|\frac{a e^{j\omega_0}}{z}\right|<1\rightarrow|z|>\left|a e^{j\omega_0}\right|\rightarrow|z|>a$$

$$\cap \qquad \text{ROC:}\rightarrow |z|>a$$

$$\left|a e^{-j\omega_0}z^{-1}\right|<1\rightarrow\left|\frac{a e^{-j\omega_0}}{z}\right|<1\rightarrow|z|>\left|a e^{-j\omega_0}\right|\rightarrow|z|>a$$

سوال ۲:

$$X(z)=\frac{۶-۱۳z^{-1}\ (\div ۳)}{۳z^{-۲}-۷z^{-1}+۲\ (\div ۳)}=\frac{۲-\frac{۱۳}{۳}z^{-1}}{z^{-۲}-\frac{۷}{۳}z^{-1}+\frac{۲}{۳}}=\frac{۲-\frac{۱۳}{۳}z^{-1}}{\left(\frac{1}{z}-۲\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{۳}\right)}=\frac{A}{z^{-1}-۲}+\frac{B}{z^{-1}-\frac{1}{۳}}$$

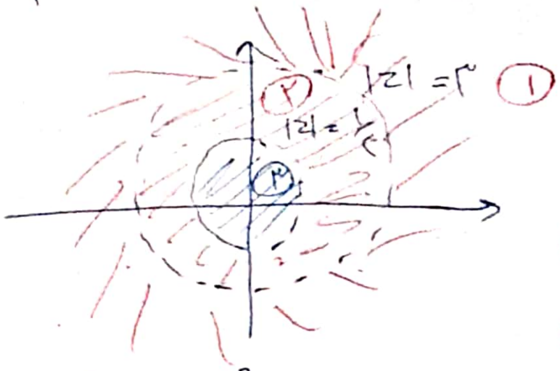
$$A\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{۳}\right)+B\left(\frac{1}{z}-۲\right)=\frac{A}{z}-\frac{A}{۳}+\frac{B}{z}-۲B=۲-\frac{۱۳}{۳}z^{-1}$$

$$\begin{cases}-\cancel{\frac{A}{۳}}-۲B=۲ \xrightarrow{B=-\frac{1}{۳}} -\frac{A}{۳}+\frac{۲}{۳}=۲\\ \left(A+B=-\frac{۱۳}{۳}\right)^{\times\frac{1}{۳}}\rightarrow\cancel{\frac{A}{۳}}+\frac{B}{۳}=-\frac{۱۳}{۹}\end{cases}\longrightarrow \frac{B}{۳}-۲B=۲-\frac{۱۳}{۹}\Longrightarrow -\frac{۵}{۳}B=\frac{۵}{۹}$$

$$\boxed{A=-۴\ ,\ B=-\frac{1}{۳}}$$

ادامه سوال ۲،

$$X(z) = \frac{-۴}{z^{-1}-۲} - \frac{۱/۳}{z^{-1}-۱/۳} = \frac{۴}{۲-z^{-1}} + \frac{۱/۳}{۱/۳ - z^{-1}}$$



قطب ها: $\{z=۳ , z = ۱/۲\}$

ROC های ممکن:

① $|z| > ۳$

② $۱/۲ < |z| < ۳$

③ $|z| < ۱/۲$

①

if $|z| > ۱/۲$ و $|z| > ۳ \Rightarrow Z^{-1}\left\{\frac{۴}{۲-z^{-1}}\right\}_{|z|>۱/۲} + Z^{-1}\left\{\frac{۱/۳}{۱/۳ - z^{-1}}\right\}_{|z|>۳} =$ ROC: $|z| > ۳$

$$Z^{-1}\left\{\frac{۲}{۱-\frac{۱}{۲}z^{-1}}\right\}_{|z|>۱/۲} + Z^{-1}\left\{\frac{۱}{۱-۳z^{-1}}\right\}_{|z|>۳} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^n u(n) + ۳^n u(n) =$$

$$\left(۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^n + ۳^n\right) u(n)$$

---

②

if $|z| < ۳$ و $|z| > ۱/۲ \Rightarrow Z^{-1}\left\{\frac{۲}{۱-\frac{۱}{۲}z^{-1}}\right\}_{|z|>۱/۲} + Z^{-1}\left\{\frac{۱}{۱-۳z^{-1}}\right\}_{|z|<۳} =$

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^n u(n) - ۳^n u(-n-۱)$$

ROC: $۱/۲ < |z| < ۳$

---

③

if $|z| < ۳$, $|z| < ۱/۲ \Rightarrow Z^{-1}\left\{\frac{۲}{۱-\frac{۱}{۲}z^{-1}}\right\}_{|z|<۱/۲} + Z^{-1}\left\{\frac{۱}{۱-۳z^{-1}}\right\}_{|z|<۳} =$

ROC: $|z| < ۱/۲$

$$-۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^n u(-n-۱) - ۳^n u(-n-۱) = \left[-۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^n - ۳^n\right] u(-n-۱)$$

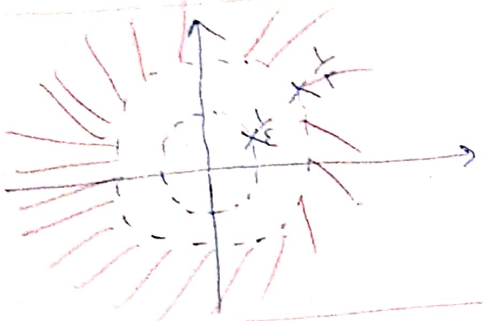
سوال ۳ _ الف):

$$Y(z) - \frac{۳}{۴} z^{-۱} Y(z) + \frac{۱}{۸} z^{-۲} Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)\left[۱ - \frac{۳}{۴} z^{-۱} + \frac{۱}{۸} z^{-۱}\right] = X(z) \Longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{۱ \quad \times ۸}{۱ - \frac{۳}{۴} z^{-۱} + \frac{۱}{۸} z^{-۲} \times ۸}$$

$$[redacted] = \frac{۸}{z^{-۲} - ۶ z^{-۱} + ۸} = \frac{۸}{(z^{-۱} - ۲)(z^{-۱} - ۴)} \quad [redacted]$$

سوال ۳ _ ب): قطب ها $\{z = \frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۱}{۴}\}$



[redacted] پس با توجه به علی بودن سیستم [redacted] لازم است ROC خارج دایره متناظر با خارجی ترین قطب باشد و از طرف دیگر ROC باید شامل $z = \infty$ باشد.

$$ROC: |z| > \frac{۱}{۲}$$

سوال ۳ _ ج)

$$H(z) = \frac{۸}{(z^{-۱} - ۲)(z^{-۱} - ۴)}, \quad ROC: |z| > \frac{۱}{۲} \rightarrow H(z) = \frac{A}{z^{-۱} - ۲} + \frac{B}{z^{-۱} - ۴}$$

$$\frac{A}{z} - ۴A + \frac{B}{z} - ۲B = ۸ \Longrightarrow \begin{cases} -۴A - ۲B = ۸ \rightarrow ۲A + B = -۴ \rightarrow -۲B + B = -۴ \\ A + B = ۰ \rightarrow A = -B \qquad -۴ = -B \end{cases}$$

$$\boxed{A = -۴}, \quad \boxed{B = ۴}$$

$$H(z) = \frac{-۴}{z^{-۱} - ۲} + \frac{۴}{z^{-۱} - ۴} = \frac{۲}{۱ - \frac{۱}{۲} z^{-۱}} - \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۴} z^{-۱}}$$

$$X(z) = \sum_{n} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n} u(n) z^{-n} = \sum_{n=۰}^{+\infty} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n} z^{-n} = \sum_{n=۰}^{+\infty} \left(\frac{۱}{۲} z^{-۱}\right)^{n} = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲} z^{-۱}}$$

$$\left|\frac{۱}{۲z}\right| < ۱ \rightarrow |z| > \frac{۱}{۲} \rightarrow Y(z) = X(z) H(z) = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲} z^{-۱}} \left[\frac{۲}{۱ - \frac{۱}{۲} z^{-۱}} - \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۴} z^{-۱}}\right]$$

$$= \frac{۲}{(۱ - \frac{۱}{۲} z^{-۱})^{۲}} - \frac{۱}{(۱ - \frac{۱}{۲} z^{-۱})(۱ - \frac{۱}{۴} z^{-۱})} = \boxed{\frac{۱}{(۱ - \frac{۱}{۲} z^{-۱})^{۲} (۱ - \frac{۱}{۴} z^{-۱})}}$$

ادامه سوال ۳ - ج) د

$$Y(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}\Bigg|_{|z|>\frac{1}{2}} =$$

$$A\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \qquad B\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad C\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]$$

$$y(n) = A\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + B\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + C\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]$$