تکلیف ۷ ـ ۹۸۲۳۰۳۳

سوال ۱ ـ

$$x(n) = (-1)^n = \cos \pi n \xrightarrow{DTFT} X_d(e^{j\Omega})$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \pi - 2k\pi) + \delta(\Omega + \pi - 2k\pi)$$

$$x_p(t) = x(t)\,p(t) \xleftrightarrow{F} X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$* \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_s} - \omega_0\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_s}+\omega_0\right)\right]$$

$$= X_d(e^{j\Omega}) = \frac{\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s} - \omega_0\right) + \frac{\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}+\omega_0\right)$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{\Omega}{T_s}-\frac{2k\pi}{T_s}-\omega_0\right) = \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-\pi-2k\pi)$$

$$= \frac{\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{\Omega}{T_s}-\frac{2k\pi}{T_s}+\omega_0\right) = \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega+\pi-2k\pi)$$

$$\rightarrow \delta(kt) = \frac{1}{|k|}\delta(t) \rightarrow \begin{cases} \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-2k\pi-\frac{\omega_0}{T_s}\right) = \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-(2k+1)\pi) \\ \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-2k\pi+\frac{\omega_0}{T_s}\right) = \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-(2k-1)\pi)\end{cases}$$

$$\frac{\omega_0}{T_s} = \pi \rightarrow \omega_0 = 10^{-3}\pi$$

$$\frac{\omega_0}{T_s} = 3\pi \rightarrow \omega_0 = 3\times10^{-3}\pi$$

$$\frac{\omega_0}{T_s} = 5\pi \rightarrow \omega_0 = 5\times 10^{-3}\pi$$

سوال ۲: $T_s = 10^{-4} \rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 20000\pi$

الف) بدون اینکه Aliasing رخ دهد می‌بایست قضیه نایکویست برقرار باشد تا از روی نمونه دریافت شده بتوان مجدداً $x(t)$ را بازیابی کرد.

$X(\omega) = 0 \quad for \quad |\omega| > 5000\pi \rightarrow \omega_m = 5000\pi$

$2\omega_m = 10000\pi \;,\; 20000\pi \geq 10000\pi \checkmark$ $x(t)$ قابل بازیابی است.

ب) $x(t)$ قابل بازیابی نیست $\omega_m = 15000\pi \rightarrow 2\omega_m = 30000\pi \;,\; 20000\pi \ngeq 30000\pi \times$

ج) چون $Im\{X(\omega)\}$ مشخص نیست بنابراین نرخ نایکویست برای $x(t)$ مشخص نبوده پس نمی‌توان تعیین کرد که سیگنال $x(t)$ قابل بازیابی است. $Re\{X(\omega)\} = 0$

د) $x(t) = x^*(t) \rightarrow X(\omega) = X^*(-\omega) \rightarrow X(\omega) = 0 \quad for \quad |\omega| > 5000\pi$

جواب مشابه قسمت الف است و سیگنال $x(t)$ قابل بازیابی است چون $20000\pi \geq 10000\pi$ است و $\omega_s \geq 2\omega_m$

ه) $x(t) = x^*(t) \rightarrow X(\omega) = X^*(-\omega) \rightarrow X(\omega) = 0 \quad for \quad |\omega| > 15000\pi$

جواب مشابه قسمت ب است و سیگنال $x(t)$ قابل بازیابی نیست چون $20000\pi \ngeq 30000\pi$ و $\omega_s \ngeq 2\omega_m$

هـ) اگر $X(\omega)$ از α تا β مقدار غیرصفر داشته باشد آنگاه $X(\omega) * X(\omega)$ از 2α تا 2β مقدار غیرصفر خواهد داشت.

$X(\omega) = 0 \quad for \quad |\omega| > \frac{15000\pi}{2} \rightarrow 2\omega_m = 2 \times \frac{15000}{2}\pi = 15000\pi \;,\; 20000\pi \geq 15000\pi$ $x(t)$ قابل بازیابی است.

ی) می‌دانیم که سیگنال مختلط را می‌توان به فرم $re^{j\theta}$ نوشت که $r = |X(\omega)|$ و $\theta = \measuredangle X(\omega)$ پس می‌توان گفت هرجایی که $|X(\omega)|$ صفر باشد $X(\omega)$ غیرصفر خواهد بود. $|X(\omega)| = 0 \quad for \quad \omega > 5000\pi$

$X(\omega) = 0 \rightarrow 2\omega_m = 2 \times 5000\pi = 10000\pi \;,\; 20000\pi \geq 10000\pi$

$x(t)$ قابل بازیابی است.

سوال ۳:

$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$ $\quad \omega_s = 2\omega_m$ $\quad$ ω_m مقدار ماکزیمم ω در طیف $X(\omega)$ است.

الف) $x(2t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right)$ $\quad \omega'_m = 2\omega_m \quad \omega_s = 2\omega'_m = 2.(2\omega_m) = 4\omega_m$

ب) $x^2(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega) \quad \omega'_m = 2\omega_m \quad \omega_s = 2\omega'_m = 2(2\omega_m) = 4\omega_m$

اگر طیف $X(\omega)$ از α تا β مقدار داشته باشد آنگاه $X(\omega) * X(\omega)$ از 2α تا 2β مقدار خواهد داشت

ج) $x(t) * x(t) \xrightarrow{F} X(\omega) X(\omega) \quad \omega'_m = \omega_m$ $\quad$ اگر طیف $X(\omega)$ از α تا β مقدار داشته باشد آنگاه $X(\omega)X(\omega)$ از α تا β مقدار خواهد داشت.

$\omega_s = 2\omega'_m = 2\omega_m$

د) $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega X(\omega) \quad \omega_s = 2\omega_m$ $\quad$ تمام توان تخمین کرد که $X(\omega)$ $j\omega$ به ازای $|\omega| > \omega_m$ برابر صفر است.

ه) $x(t) - x(t+2) \xrightarrow{F} X(\omega) - e^{2j\omega} X(\omega) = X(\omega)\left(1 - e^{2j\omega}\right) \quad \omega_s = 2\omega_m$

می‌توان تخمین کرد که $X(\omega)\left(1-e^{2j\omega}\right)$ به ازای $|\omega| > \omega_m$ برابر صفر است.

سوال ۴:

$x_p(t) \to \boxed{LPF}_{h(t)} \to x(t)$ $\quad X(\omega) = 0 \text{ for } |\omega| > \frac{\pi}{T} \to \omega_m = \frac{\pi}{T}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m \to \frac{\pi}{T} < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{T} \to \omega_c = \frac{\pi}{T}$ $\quad$ فرض می‌کنیم LPF

$$\to H(\omega) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t} = h(t)$$

$$X_p(\omega) H(\omega) = X(\omega) \to x_p(t) * h(t) = x(t)$$

$$x(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, \delta(t - nT)\right] * h(t) \to \frac{dx(t)}{dt} = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, \delta(t - nT)\right] *$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{dh(t-nT)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, \delta(t-nT)$$

ادامه سوال ۳:

$$\rightarrow g(t-nT) = \frac{dh(t-nT)}{dt} \rightarrow g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

$$g(t) = \frac{\frac{\pi}{T}\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) \times \frac{\pi}{T}t - \frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 t^2} = \frac{\pi^2 t\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) - \pi T\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\pi^2 t^2}$$

سوال ۴، نرخ نایکوئیست

$$x_c(t) \xrightarrow{F} X_c(\omega) = 0 \quad \text{for } |\omega| \geq 2000\pi, \quad \omega_s = 2\omega_m = 2\times 2000\pi = 4000\pi$$

$$x_d[n] = x_c(nT) = x_c(0.5\times 10^{-3} n),$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega), \quad \omega = \frac{\Omega}{T} = 2000\,\Omega$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2k\pi}{T}\right)\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) \quad (1)$$

الف) چون طبق رابطه‌ی ① عبارت $X_d(e^{j\Omega})$ همان جمع شیفت‌های شیفت داده شده $X_c(\omega)$ است بنابراین چنانچه $X_c(\omega)$ یک سیگنال حقیقی باشد.

$$X_d(e^{j\Omega}) \in \mathbb{R}$$

ب) طبق رابطه‌ی ① ماکزیمم مقدار $X_d(e^{j\Omega})$ برابر است با $\frac{1}{T}\max(X_c(\omega))$ پس:

$$\max(X_d(e^{j\Omega})) = 1$$

داریم:

$$1 = \frac{1}{T}\max(X_c(\omega)) \Rightarrow \max(X_c(\omega)) = T = 0.5\times 10^{-3}$$

ج)

$$X_d(e^{j\Omega}) = 0 \quad \text{for } \frac{3\pi}{4} \leq |\Omega| \leq \pi, \quad \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = 0 \quad \text{for } \frac{3\pi}{4T} < |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

طبق صورت:

$$\left.\begin{aligned} X_c(\omega) &= 0 \quad \text{for } |\omega| \geq 2000\pi \\ X_c(\omega) &= 0 \quad \text{for } 1500\pi \leq |\omega| \leq 2000\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_c(\omega) = 0 \quad \text{for } |\omega| \geq 1500\pi$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_d\left(e^{j(\Omega-\pi)}\right).$$ (د

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega-\frac{2k\pi}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega-\frac{\pi}{2}-\frac{2k\pi}{T}\right)$$

$$X_c(\omega-4000k\pi) = X_c(\omega-4000k\pi-2000\pi) \rightarrow X_c(\omega) = X_c(\omega-2000\pi)$$

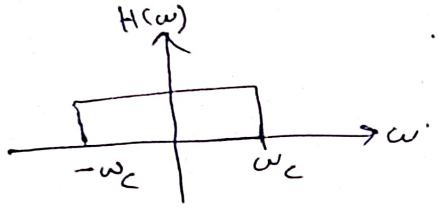
سوال ۷)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cos(20k\pi t) \xrightarrow{F} X(\omega)$$

$$, \omega_c = 41\pi$$

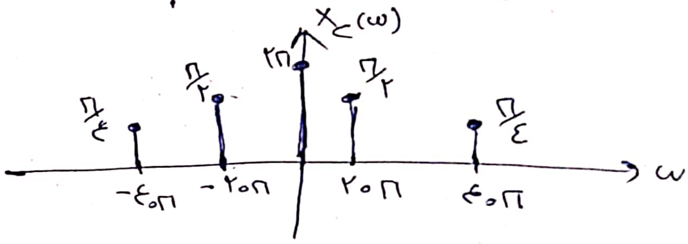
$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \pi\left[\delta(\omega-20k\pi)+\delta(\omega+20k\pi)\right], \quad x_c(t) \xleftrightarrow{F} X_c(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

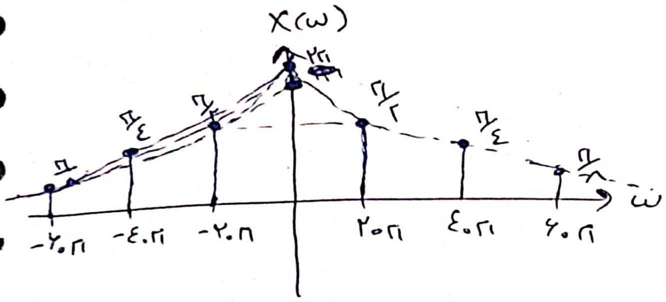
$H(\omega)$ $X(\omega)$ معادل δ ضرب در $\omega = 0$ و $\omega = \pm 20\pi$ و $\omega = \pm 40\pi$ است.



$$\rightarrow X(\omega)H(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-20\pi) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+20\pi) + \frac{\pi}{4}\delta(\omega-40\pi)$$

$$+\frac{\pi}{4}\delta(\omega+40\pi) = X_c(\omega)$$





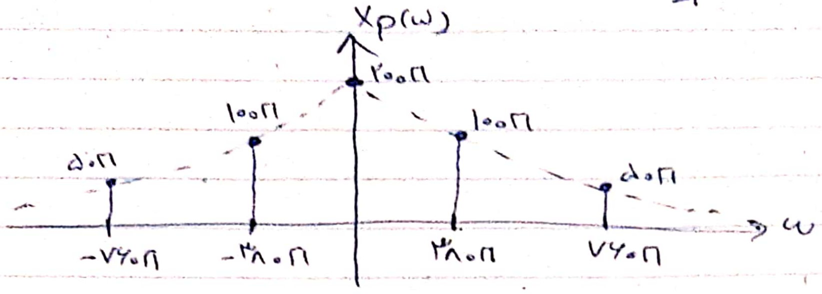
$$x_p(t) = x(t)p(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \pi\left[\delta(\omega-20k\pi)+\delta(\omega+20k\pi)\right] * \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{T_s}\right)$$

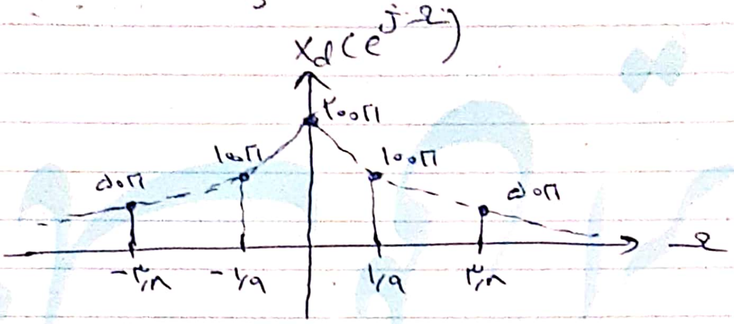
$$\xrightarrow{T_s = 5\times 10^{-3}} \frac{1}{5\times 10^{-3}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}\pi\,\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{5\times10^{-3}}+20k\pi\right) = X_p(\omega)$$

ادامه سوال ۷

$$X_p(\omega) = ۲۰۰\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{۱}{۲}\right)^{|k|} \delta(\omega - ۳۸۰k\pi)$$



$$X_p(\omega) = X_d(e^{j\Omega}) \quad , \quad \omega = \frac{\Omega}{T_s} \Longrightarrow \Omega = ۵\times ۱۰^{-۳}\,\omega$$

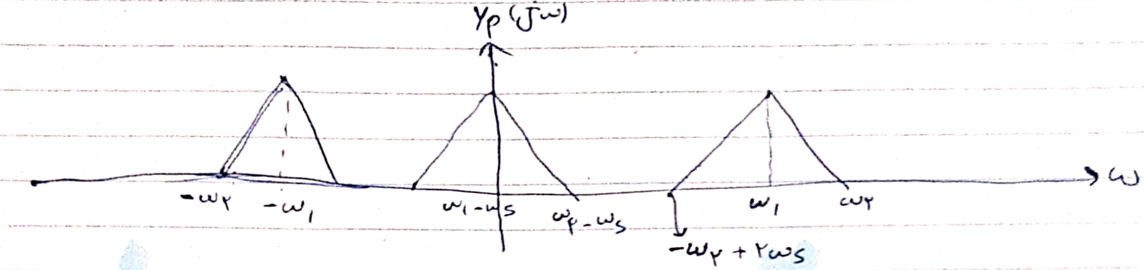


سوال ۶: وقتی گفته می‌شود از آن نمونه‌برداری شده یعنی:

$$Y_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[Y(j\omega) * P(j\omega)\right], \quad P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\downarrow$$

$$Y_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k} Y(j(\omega - k\omega_s))$$



$\omega_s - \omega_1$ باید برابر صفر باشد که طیف آن برابر طیف $X(j\omega)$ باشد: $\omega_1 = \omega_s$

$$\rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

همچنین برای اینکه تداخل رخ ندهد باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_2 - \omega_s < -\omega_2 + 2\omega_s \rightarrow 2\omega_2 < 3\omega_s \\ -\omega_1 + \omega_s < \omega_1 - \omega_s \rightarrow \omega_s < \omega_1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{3}\omega_2 < \omega_s < \omega_1$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}\omega_2 < \frac{2\pi}{T} < \omega_1 \rightarrow \frac{1}{\omega_1} < \frac{T}{2\pi} < \frac{3}{2\omega_2} \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1} < T < \frac{3\pi}{\omega_2}$$

برای ω_c باید داشته باشیم:

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_s < \omega_c < -\omega_2 + 2\omega_s = 2\omega_1 - \omega_2$$