تکلیف دوم سیگنال - ۹۸۲۳۰۳۳

سوال ۱: اگر $x(t)$ یک سیگنال حقیقی باشد می‌توان به این صورت نوشت:

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}} \qquad a_0 = 0 \qquad a_2 = 2 + 2j$$

$$\mathrm{Re}\left\{a_2 e^{j\frac{4\pi}{5}t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{(2+2j)e^{j\frac{4\pi}{5}t}\right\} =$$

$$\mathrm{Re}\left\{2e^{j\frac{4\pi}{5}t} + 2j\,e^{j\frac{4\pi}{5}t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{(2+2j)\left(\cos\frac{4\pi}{5}t + j\sin\frac{4\pi}{5}t\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{2\cos\frac{4\pi}{5}t + 2j\sin\frac{4\pi}{5}t + 2j\cos\frac{4\pi}{5}t - 2\sin\frac{4\pi}{5}t\right\} = \boxed{2\cos\frac{4\pi}{5}t - 2\sin\frac{4\pi}{5}t}$$

$$a_3 = 3 \Rightarrow \mathrm{Re}\left\{a_3 e^{j\frac{6\pi}{5}t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{3e^{j\frac{6\pi}{5}t}\right\} =$$

$$\mathrm{Re}\left\{3\left(\cos\frac{6\pi}{5}t + j\sin\frac{6\pi}{5}t\right)\right\} = 3\cos\frac{6\pi}{5}t$$

حال برای $x(t)$ نهایی داریم:

ولادت حضرت رسول اکرم صلی الله علیه و آله به روایت اهل سنت (۵۳ سال قبل از هجرت) - آغاز هفته وحدت

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | | | | | |
| ۹ | ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ |
| ۱۶ | ۱۵ | ۱۴ | ۱۳ | ۱۲ | ۱۱ | ۱۰ |
| ۲۳ | ۲۲ | ۲۱ | ۲۰ | ۱۹ | ۱۸ | ۱۷ |
| ۳۰ | ۲۹ | ۲۸ | ۲۷ | ۲۶ | ۲۵ | ۲۴ |

همت بلند دار که مردان روزگار / از همت بلند به جایی رسیده‌اند.

CamScanner

ادامه سوال ۱

$$x(t) = ۲\left(۲\cos\frac{۴\pi}{۵}t - ۲\sin\frac{۴\pi}{۵}t\right) +$$

$$۲\left(۳\cos\frac{۴\pi}{۵}t\right) = ۴\cos\frac{۴\pi}{۵}t - ۴\sin\frac{۴\pi}{۵}t + ۶\cos\frac{۴\pi}{۵}t$$

سوال ۲ - الف:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad , \quad \omega_0 = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

$$a_k = \frac{1}{۴}\int_{-۲}^{۲} t\, e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}\, dt =$$

$$\int_{-۲}^{۲} \underbrace{t}_{u}\, \underbrace{e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}\, dt}_{dv} = \left[\frac{-t}{jk\frac{\pi}{۲}} e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}\right|_{-۲}^{۲} -$$

انتگرال جزء به جزء

$$dv = e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}\, dt \rightarrow v = \frac{-1}{jk\frac{\pi}{۲}} e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}$$

$$du = 1dt$$

$$\int_{-۲}^{۲} \frac{-1}{jk\frac{\pi}{۲}} e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}\, dt = \frac{-1}{jk\frac{\pi}{۲}}\int_{-۲}^{۲} e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}\, dt$$

$$\frac{-1}{\left(jk\frac{\pi}{۲}\right)^۲} e^{-jk\frac{\pi}{۲}t}\Big|_{-۲}^{۲} =$$

روز تربیت بدنی و ورزش

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

October

از فرط غرور نه و از فرط ضعف آری مگو. (ضرب المثل اسپانیایی)

ادامه سوال ۲ _ الف):

$$\left[-\frac{2}{jk\frac{\Omega}{2}}e^{-2jk\frac{\Omega}{2}}-\frac{2}{jk\frac{\Omega}{2}}e^{2jk\frac{\Omega}{2}}-\left(\frac{e^{-2jk\frac{\Omega}{2}}}{\left(jk\frac{\Omega}{2}\right)^2}-\frac{e^{2jk\frac{\Omega}{2}}}{\left(jk\frac{\Omega}{2}\right)^2}\right)\right]=\frac{-2}{jk\frac{\Omega}{2}}e^{-2jk\frac{\Omega}{2}}-\frac{2}{jk\frac{\Omega}{2}}e^{2jk\frac{\Omega}{2}}$$

$$+\frac{-e^{-2jk\frac{\Omega}{2}}+e^{2jk\frac{\Omega}{2}}}{\left(jk\frac{\Omega}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{e^{-2jk\frac{\Omega}{2}}-e^{2jk\frac{\Omega}{2}}}{\left(k\frac{\Omega}{2}\right)^2}$$

$$\left(jk\frac{\Omega}{2}\right)^2=-\left(k\frac{\Omega}{2}\right)^2$$

ادامه سوال ۲ـ ~~ب~~ الف):

$$a_k = \frac{1}{4}\left[\frac{-2e^{-2jk\pi/2}}{jk\pi/2} + \frac{-2e^{2jk\pi/2}}{jk\pi/2} + \frac{e^{-2jk\pi/2} - e^{2jk\pi/2}}{(k\pi/2)^2}\right] = \underbrace{\frac{-e^{-2jk\pi/2}}{2jk\pi/2} - \frac{e^{2jk\pi/2}}{2jk\pi/2}}_{(1)}$$

$$\underbrace{+\frac{e^{-2jk\pi/2} - e^{2jk\pi/2}}{4(k\pi/2)^2}}_{(2)}$$

$$(1):\ \frac{-1}{2jk\pi/2}\left[\underbrace{e^{-2jk\pi/2} + e^{2jk\pi/2}}_{\cos k\pi \cancel{- j\sin k\pi} + \cos k\pi \cancel{+ j\sin k\pi}}\right] = \frac{-2\cos k\pi}{2jk\pi/2}$$

$$= 2\cos k\pi$$


12:00
13:00
14:00
15:00
16:00
17:00
18:00
19:00
20:00
21:00
22:00
23:00

روز ملی پارالمپیک

October

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

هر کس حیطه‌ی دیدگاه خود را حدود عالم می‌انگارد. (شوپنهاور)

ادامه سوال ۲ - الف

(۲). $\frac{\cancel{\cos k\pi} - j\sin k\pi - \cancel{\cos k\pi} - j\sin k\pi}{(k\pi)^2} =$

$\frac{-2j\sin k\pi}{(k\pi)^2}$

$a_k = \frac{-2\cos k\pi}{jk\pi} - \frac{2j\sin k\pi}{(k\pi)^2} \quad \forall k \neq 0$

روز جهانی استاندارد



$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} t\,dt = \frac{t^2}{8}\Big|_{-2}^{2} =$

$\frac{4}{8} - \frac{4}{8} = 0$

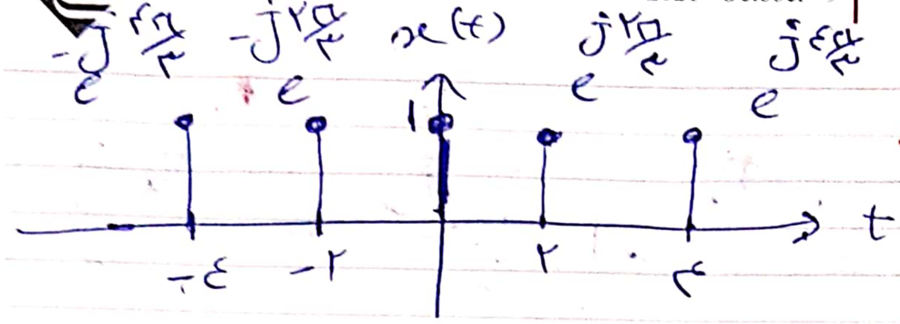
$a_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ -\frac{2\cos k\pi}{jk\pi} - \frac{2j\sin k\pi}{(k\pi)^2} & k \neq 0 \end{cases}$

شهادت حضرت امام حسن عسکری علیه‌السلام (۲۶۰ هـ.ق) و آغاز امامت حضرت ولی‌عصر (عج) (تعطیل)
شهادت پنجمین شهید محراب آیت‌الله اشرفی اصفهانی به دست منافقان (۱۳۶۱ هـ.ش) - روز جهانی نابینایان (عصای سفید)

همت مردان کوهها را متلاشی می‌کند. (حضرت علی)

| ج | پ | چ | س | د | ی | ش |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | | | | | |
| ۹ | ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ |
| ۱۶ | ۱۵ | ۱۴ | ۱۳ | ۱۲ | ۱۱ | ۱۰ |
| ۲۳ | ۲۲ | ۲۱ | ۲۰ | ۱۹ | ۱۸ | ۱۷ |
| ۳۰ | ۲۹ | ۲۸ | ۲۷ | ۲۶ | ۲۵ | ۲۴ |

CamScanner




سوال ۲ - ب - ج

$\delta(t-2n) \Rightarrow$ دوره تناوب ۲

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \to T = 3 \Leftarrow e^{j\frac{2\pi}{3}n}$ دوره تناوب

پس دوره تناوب $x(t)$ برابر $[2, 3] = 6$ است. پس می‌توان $[-3, 3]$ را به عنوان یک دوره تناوب در نظر گرفت.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}\left[e^{-j\frac{2\pi}{3}}\delta(t+2)\right.$$

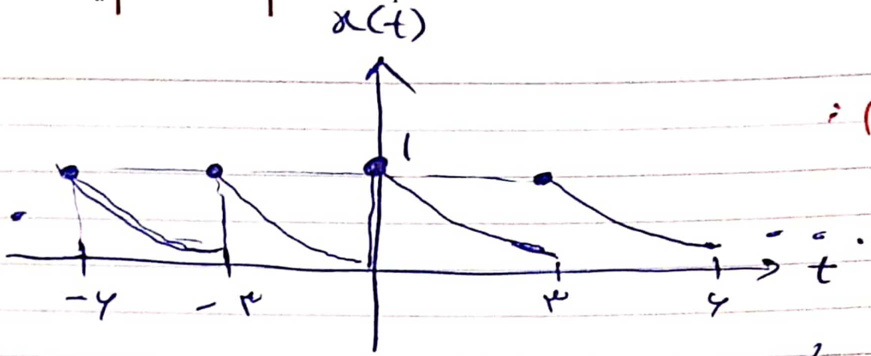
$$\left. + \delta(t) + e^{j\frac{2\pi}{3}}\delta(t-2)\right] e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$$

$$\frac{1}{6}\left[\int_{-3}^{3} e^{-j\frac{2\pi}{3}}\, \cancel{\delta(t+2)\, e^{-jk\omega_0 t}}^{\,e^{jk\frac{2\pi}{3}}}\, dt + \int_{-3}^{3} \cancel{\delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}}^{\,1}\, dt\right.$$

$$\left. + \int_{-3}^{3} e^{j\frac{2\pi}{3}}\, \underbrace{\delta(t-2)\, e^{-jk\omega_0 t}}_{= e^{-jk\frac{2\pi}{3}}}\, dt\right] =$$

$$\frac{1}{6}\left[e^{-j\frac{2\pi}{3}}\ e^{jk\frac{2\pi}{3}} + 1 + e^{j\frac{2\pi}{3}}\ e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right]$$

| | Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| October | | | | | 1 | 2 | 3 |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |




سوال ۲ _ ج ) :

پس یک سیگنال پریودیک با T=۳ است.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{-2t} u(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 e^{-2t} e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{(-2-jk\frac{2\pi}{3})t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{2+jk\frac{2\pi}{3}}\, e^{(-2-jk\frac{2\pi}{3})t}\Big|_0^3\right] =$$

$$= \frac{-1}{6+jk2\pi}\left[\cancel{e^{-6-jk2\pi}}\; e^{-6} - \cancel{e^{0}}\; 1\right] = \frac{1-e^{-6}}{6+jk2\pi}$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | | | | | |
| ۹ | ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ |
| ۱۶ | ۱۵ | ۱۴ | ۱۳ | ۱۲ | ۱۱ | ۱۰ |
| ۲۳ | ۲۲ | ۲۱ | ۲۰ | ۱۹ | ۱۸ | ۱۷ |
| ۳۰ | ۲۹ | ۲۸ | ۲۷ | ۲۶ | ۲۵ | ۲۴ |


مدیریت به شما این توانایی را می‌دهد که از انجام دادن کارها به کنترل کردن کارها برسید.

CamScanner

تکلیف سوم سیگنال

$[6, 9] = 18$ است.

سوال ۳ - الف) $z(t)$ دارای دوره تناوب ۱۸

اگر $a'_k$ ~~ضرایب فوریه~~ سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب ۱۸ باشد ($3 \times 6$) داریم

$$a'_k = \frac{1}{3T}\int_0^{3T} x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt =$$

$$\frac{1}{3T}\Bigg[\underbrace{\int_0^{T} x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt}_{a_{k/3}} + \int_T^{2T} x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt + \int_{2T}^{3T} x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt$$

$t - T = t'$

$t - 2T = t''$

$$\frac{1}{3}\Bigg[\frac{a_k}{3} + \int_0^{T} x(t'+T)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}(t'+T)}\, dt + \int_0^{T} x(t''+2T)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}(t''+2T)}\, dt\Bigg] =$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a_k}{3} + a_{k/3}\, e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + a_{k/3}\, e^{-jk\frac{4\pi}{3}}\right] =$$



CamScanner

$$\frac{1}{3} \times a_{k/3} \times \Big[\underbrace{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}k\right) - j\sin\frac{4\pi}{3}k}_{①}\Big]$$

① : اگر $k$ مضرب ۳ باشد حاصل ۳ می‌شود حاصل.

اگر $k$ مضرب ۳ نباشد حاصل مساوی ~~...~~ صفر می‌شود

پس حاصل کل عبارت بالا برابر است با

$$a'_k = \begin{cases} a_{k/3} & k \text{ مضرب ۳ باشد} \\ 0 & k \text{ مضرب ۳ نباشد} \end{cases}$$

$b'_k$ نیز ~~...~~ ضرایب فوریه سیگنال $y(t)$ با دوره تناوب ۱۸ باشد $(9\times 2)$

$$b'_k = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} y(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2T}\Big[\underbrace{\int_0^{T} y(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}t}\, dt}_{b_{k/2}} + \int_T^{2T} y(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}t}\, dt\Big] = \qquad t - T = t'$$

$$\frac{1}{2}\Big[b_{k/2} + \int_0^{T} y(t'+T)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}(t'+T)}\Big] =$$



CamScanner

ادامه سوال ۳ ـ الف)

$$\frac{1}{2}\left[b_{k/2} + b_{k/2}\, e^{-jk\pi}\right] =$$

$$\frac{1}{2} b_{k/2}\left[1 + e^{-jk\pi}\right] = \frac{1}{2} b_{k/2} \underbrace{\left[1 + \cos k\pi - j\sin k\pi\right]}_{1}$$

(1) اگر $k$ زوج باشه حاصل ۲ می‌شود و اگر فرد باشه حاصل صفر می‌شود

پس حاصل کل برابر است با:

$$b'_k = \begin{cases} \frac{1}{2} b_{k/2} \times 2 = b_{k/2} & k \text{ زوج} \\ 0 & k \text{ فرد} \end{cases}$$

پس طبق محاسبات به دست آمده از $b'_k$ و $a'_k$ داریم:

$$c_k = \begin{cases} 3a_{k/3} + b_{k/2} & k = 2c,\ k = 3c \Rightarrow k = 6c \\ b_{k/2} & k = 2c,\ k \neq 3c \\ 3a_{k/3} & k \neq 2c,\ k = 3c \\ 0 & k \neq 2c,\ k \neq 3c \Rightarrow k \neq 6c \end{cases}$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| چ | پ | ج | ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ش | ی | د | س | چ | پ | ج |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

CS CamScanner

سوال ۳-ج):

$x(t) \to a_k \to x^*(t) \to a^*_{-k}$

$\to x(-t) \to a_{-k}$

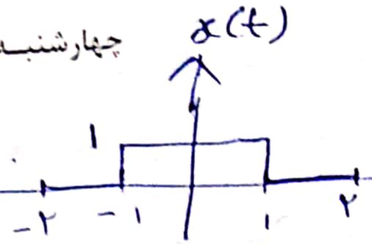
$z(t) \to a^*_{-k} + a_{-k} = 2Re\{a_{-k}\}$

سوال ۳-د):

$y(t) = x(4t)$ ضرایب سری فوریه عوض نمی‌شود

$z(t) = x(4t-2) \to a_k e^{-jk2\omega_0}$

$\to a_k e^{-jk2\omega_0}$




سوال ۴ ـ الف) : اگر ایکس t را یک واحد به راست و واحد بالا ببریم این تابع به دست می‌آید.

$$y(t) = x(t-1) + 1$$

ضرایب سری فوریه $x(t)$ را از قبل داریم :

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2T_1}{T} = \dfrac{1}{2} & k = 0 \\ \dfrac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \dfrac{\sin k\pi/2}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \frac{2\pi}{4} = \pi/2$$

$$x(t-1) \xrightarrow{FS} b_k = a_k e^{-jk\omega_0 1} = a_k e^{-jk\omega_0}$$

$$z(t) = 1 \xrightarrow{FS} c_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k + c_k = \begin{cases} a_0 + b_0 = 1/2 + 1 = 3/2 & k = 0 \\ \dfrac{\sin k\pi/2}{k\pi} e^{-jk\omega_0} \stackrel{*}{=} & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} e^{-jk\pi/2}$$

سوال ۳-ب):

$x(t) \xrightarrow{FS} a_k$

$x(t-\frac{T}{2}) \xrightarrow{FS} b_k = a_k e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}} =$

$a_k e^{-jk \times \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}} = a_k e^{-jk\pi} =$

$a_k(\cos k\pi - j\sin k\pi) = \begin{cases} a_k & k \text{ زوج} \\ -a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k \text{ زوج} = 1 \\ k \text{ فرد} = -1 \end{cases}$

$-x(t) \xrightarrow{FS} -a_k \Rightarrow \text{if } k \text{ زوج} \Rightarrow a_k = -a_k$

$\Rightarrow 2a_k = 0 \Rightarrow a_k = 0 \;,\; k \text{ زوج}$ ✓

سوال ۴-ج):

$x(t-\frac{T}{2}) = \sum_k a_k e^{-jk\omega_0 T/2} e^{jk\omega_0 t} =$

$\sum_k a_k e^{-jk \times \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}} e^{jk\omega_0 t} =$



CS CamScanner

ادامه سوال ۲ـ ج) :

$$\sum_k a_k e^{-jk\pi} e^{jk\omega_0 t} = \sum_k a_k \underbrace{(\cos k\pi - j\sin k\pi)}_{*}$$

$$e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{a_k \text{ از قبل می‌دانیم}} \sum_k a_k (-1) e^{jk\omega_0 t} \stackrel{**}{=}$$

به ازای k های زوج صفر است.

$$*\cos k\pi - j\sin k\pi = \begin{cases} \text{زوج } k & = 1 \\ \text{فرد } k & = -1 \end{cases}$$

تنها به ازای k های فرد بررسی می‌شود

$$\stackrel{**}{=} -\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} = \boxed{-x(t)}$$

$$= x(t)$$

به حکم رسیدیم.

---

سوال ۵ ـ الف) :

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x^*(t) = \sum_k a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \xrightarrow{k \triangleq -m} \sum_m a_{-m}^* e^{jm\omega_0 t}$$

$$x(t) = x^*(t) \Leftarrow x(t) \text{ با توجه به حقیقی بودن}$$

$$\sum_k \boxed{a_k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_m \boxed{a_{-m}^*} e^{jm\omega_0 t}$$

$$a_k = a_{-k}^*$$

ادامه سوال ۵ _ الف :

همینطور گفتیم : $a_k = a^*_{-k} \Longrightarrow a_0 = a^*_0$

از طرف دیگر داریم $a_0 + a^*_0 = 2Re\{a_0\}$

$a^*_0 = a_0 \longrightarrow a_0 + a_0 = \cancel{2}a_0 = \cancel{2}Re\{a_0\} \longrightarrow$

از آنجا که سمت چپ $a_0$ مساوی $a_0$ $\longrightarrow a_0 = Re\{a_0\}$

است پس $a_0$ خود حقیقی است و اصلا قسمت موهومی ندارد.

سوال ۵ _ ب) : می‌دانیم اگر $x(t)$ زوج باشد آنگاه $x(t) = x(-t)$ است.

برای اینکه $x(-t)$ به دست آید باید $t$ به $-t$ تبدیل شود.

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} =$$

$$x(-t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0(-t)} = \sum_k a_k e^{-jk\omega_0 t} =$$

$$\xlongequal{-k \triangleq m} \sum_m a_{-m} e^{jm\omega_0 t}$$

ش ی د س چ پ ج ش ی د س چ پ ج ش ی د س چ پ ج ش ی د س چ پ ج ش ی د
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

ادامه سوال ۵-ب)

و داریم $x(t)=x(-t) \Rightarrow \sum_k \boxed{a_k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_m \boxed{a_{-m}} e^{jm\omega_0 t}$

$\longrightarrow \boxed{a_k = a_{-k}}$ (۱) زوج بودن ضرایب ثابت شد.

---

از طرف دیگر $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$

درستی قبل ثابت شد $x^*(t) \xrightarrow{FS} a^*_{-k}$ $\Big\}$ $\rightarrow x(t)=x^*(t)$

$\longrightarrow \boxed{a_k = a^*_{-k}}$ (۲)

(حقیقی بودن ضرایب نیز ثابت شد.)

از روابط (۱) و (۲) $\Rightarrow a_k = \boxed{a_{-k} = a^*_{-k}}$

یعنی زوج و هم حقیقی است. با حقیقی بودن $a_{-k}$ را مشخص می‌کنند.

---

سوال ۵-ج) : می‌دانیم اگر سیگنال فرد باشد $x(t) = -x(-t)$

$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(-t)=\sum_k a_k e^{-jk\omega_0 t} \overset{-k=m}{=\!=} \sum_m a_{-m} e^{jm\omega_0 t} =$$

$$-x(-t) = -\sum_m a_{-m} e^{jm\omega_0 t} = \sum_m -a_{-m} e^{jm\omega_0 t}$$

$$\sum_k \boxed{a_k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_m \boxed{-a_{-m}} e^{jm\omega_0 t}$$

| ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ش | ی | د |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

روز مباهلهٔ پیامبر اسلام صلی الله علیه و آله (۱۰ هـ ق)

$\boxed{a_k = -a_{-k}}$ اثبات فرد بودن ضرایب

سوال ۵ - ب) می دانیم

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$Fs\left\{\frac{x(t) - x(-t)}{2}\right\} = \frac{Fs\{x(t)\} - Fs\{x(-t)\}}{2}$$

$$\overset{\text{طبق ۱}}{=} \frac{a_k - a_{-k}}{2} \overset{\text{طبق ۲}}{=} \frac{a_k - a_k^*}{2} = \frac{\cancel{2}j\,Im\{a_k\}}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{j\,Im\{a_k\}}$$

$$x(t) \xrightarrow{Fs} a_k \qquad \boxed{x(-t) \xrightarrow{Fs} a_{-k}} \quad (1)$$

می دانیم $x(t)$ حقیقی است $\Rightarrow a_k = a_{-k}^* \Rightarrow \boxed{a_{-k} = a_k^*}$ (۲)

سوال ۵ - ج) می دانیم

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$Fs\left\{\frac{x(t) + x(-t)}{2}\right\} = \frac{Fs\{x(t)\} + Fs\{x(-t)\}}{2} = \frac{a_k + a_{-k}}{2}$$

$$= \frac{a_k + a_k^*}{2} \overset{\text{طبق ۱}}{=} \frac{2Re\{a_k\}}{2} = Re\{a_k\}$$

$x(t)$ حقیقی است $\rightarrow x(t) = x^*(t) \rightarrow a_k = a_{-k}^*$

$$\rightarrow \boxed{a_{-k} = a_k^*} \quad (1)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
سالروز عملیات افتخار آفرین مرصاد (۱۳۶۷ هـ ش)

سوال ۶ـ طبق خاصیت و قضیه پارسوال داریم:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_k |a_k|^2$$

$$\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{6}\times 3 = \boxed{\frac{1}{2} = \sum_k |a_k|^2}$$

از طرف دیگر:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \pi/3$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{3}t} dt \overset{*}{=}$$

از طرف دیگر طبق ~~...~~ فرض می‌توان به جای $x(t)$ ، $-x(t-3)$ را جایگزین کرد.

$$\overset{*}{=} \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} -x(t-3)\, e^{-jk\frac{\pi}{3}t} dt \overset{**}{=}$$

تغییر متغیر: $t-3=\tau \Rightarrow t=\tau+3$ ، $dt = d\tau$

$$\overset{**}{=} \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} -x(\tau)\, e^{-jk\frac{\pi}{3}(\tau+3)} d\tau =$$

$$\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} -x(\tau)\, e^{-jk\frac{\pi}{3}\tau}\, e^{-jk\pi} d\tau =$$

$= -a_k$

ادامه سوال ۶:

$$= \frac{1}{4} e^{-jk\pi} \int_{-3}^{3} -x(\tau)\, e^{-jk\frac{\pi}{3}\tau}\, d\tau =$$

$$e^{-jk\pi} = \cos k\pi - j\sin k\pi = \begin{cases} 1 & k \text{ زوج} \\ -1 & k \text{ فرد} \end{cases}$$

پس داریم

$$a_k = -a_k \times e^{-jk\pi} = \begin{cases} a_k = a_k \ \checkmark & k \text{ فرد} \\ a_k = -a_k & k \text{ زوج} \end{cases}$$

(۱) $\to 2a_k = 0 \Rightarrow \boxed{a_k = 0}$

پس به ازای kهای زوج $a_k = 0$ است.

از طرف دیگر طبق قضیه الف):

$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow a_k = a^*_{-k} \Rightarrow a_{-k} = a^*_k$$

$\to a_{-3} = a^*_3 \xrightarrow{\text{طبق فرض ج}} 0$

$\to a_{-4} = a^*_4 \xrightarrow{\text{طبق فرض ج}} 0$

(۲) $\boxed{a_k = 0}$ ، $\forall k < -3$ و $k = 2m+1$ (فرد)



CamScanner

از طرف دیگر طبق فرض ج $a_2$ و $a_3$ و $a_4$ و ... همگی صفر هستند.

طبق نتیجه ① نیز متوجه شدیم $a_{-2}$ و $a_{-3} = 0$ است و همچنین $a_{-4}$ و $a_{-5}$ و $a_{-6}$ و ... همگی صفر هستند.

طبق نتیجه ② نیز $\forall k < -3$ $a_k = 0$ که این مورد با شرط نیز برقرار است. پس تنها $a_1$ و $a_{-1}$ مقادیر غیر صفری توانند داشته باشند که باید بررسی شود.

طبق فرض (ه) داریم:

$$a_1 = a^*_{-1} \Rightarrow a_{-1} = a^*_1 \xrightarrow[\text{و مثبت است}]{\text{چون } a_1 \text{ حقیقی}} a_1$$

پس در نهایت $a_{-1} = a_1$.

حال از قضیه پارسوال برای به دست آوردن مقادیرشان استفاده می‌شود:

$$\sum_k |a_k|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 2|a_1|^2 =$$

$$2a_1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow[\text{مثبت است } a_1]{\text{چون}} \boxed{a_1 = \frac{1}{2} = a_{-1}}$$

پس در نهایت:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} = a_1 e^{j\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}t} = \boxed{\cos \frac{\pi}{3} t}$$

ادامه سوال ۵ - (حل):

$x(t)$ حقیقی است $\Rightarrow x(t) = x^*(t) \rightarrow a_k = a^*_{-k}$

$\rightarrow a^*_k = a_{-k} \xrightarrow{a_{-k} = -a_k} a^*_k = -a_k$

$\rightarrow a^*_{-k} = -a_{-k}$ پس موهومی محض است ✓

سوال ۷) : $b_k$ = ضرایب سری فوریه خروجی

اگر $a_k$ یا اندازه $H(jk\omega_0)$ $\qquad b_k = a_k H(jk\omega_0)$

خواهد شد ولی اگر صفر باشد $b_k$ نیز صفر می‌شود

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.5\times10^{-3}} = \frac{4\pi}{3}\times10^{3}$$

$$|k\omega_0| < 2000\pi \Rightarrow -2000\cancel{\pi} < k\frac{4\cancel{\pi}}{3}\times\cancel{10^{3}} < 2000\cancel{\pi}$$

$$-2 < \frac{4}{3}k < 2 \Rightarrow -1.5 < k < 1.5 \Rightarrow \boxed{k = 0, \pm 1}$$

فقط این هارمونیک‌ها عبور می‌کنند

$$b_0 = a_0 = 2 \qquad b_1 = a_1 = \frac{j}{2} \qquad b_{-1} = a_{-1} = \frac{j}{2}$$

$$\text{سیگنال خروجی} = 2 + \frac{j}{2}e^{j\frac{4\pi}{3}\times10^{3}t} + \frac{j}{2}e^{-j\frac{4\pi}{3}\times10^{3}t}$$



CamScanner