Teorija grafov
Domača naloga

Sara Bizjak | IŠRM | 27202020

April 2021

Naloge sem reševala samostojno. Pri reševanju sem si pomagala z zapiski predavanj in vaj ter z gradivom, ki sem ga našla na internetu.

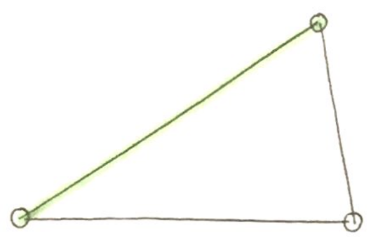
1. naloga

Za vsak $k \geq 2$ najdi k-regularen graf, ki nima popolnega prirejanja. Odgovor utemelji.

Problem razdelimo na dva primera in opazujemo grafe posebej za sode in posebej za lihe k.

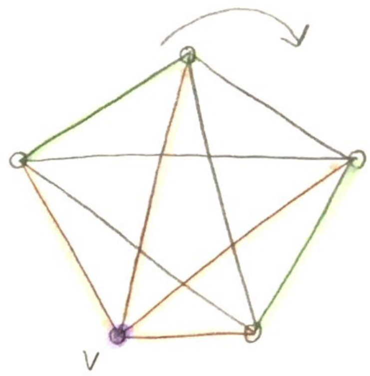
- *k je sod.*

  Iskani k-regularen graf za sode k je polni graf na $k+1$ vozliščih (K_{k+1}). To je res, saj bi za popolno prirejanje število vozlišč v polnem grafu moralo biti sodo, $k+1$ pa je liho število, torej popolnega prirejanja ni. Poglejmo si skici za prva dva takšna primera, torej za $k = 2$ in $k = 4$.



Slika 1: Graf za $k = 2 \rightarrow K_3$.

Popolnega prirejanja očitno ni, saj vozlišča nasproti prve povezave, ki jo dodamo v prirejanje (označeno z zeleno barvo), ne moremo zasiši z nobeno povezavo. Če bi ga, potem prirejanje ne bi bilo popolno.



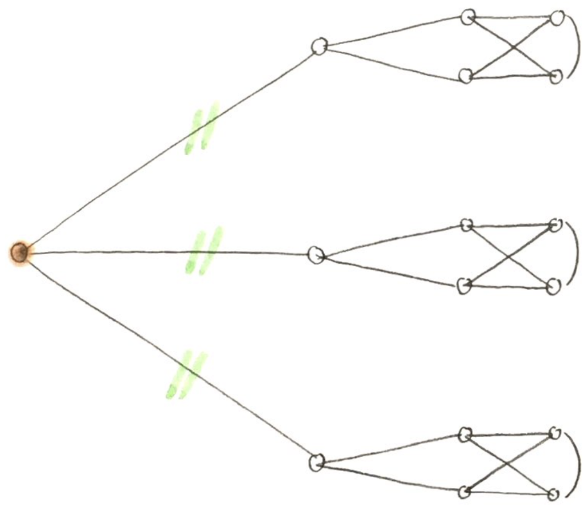
Slika 2: Graf za $k = 4 \rightarrow K_5$.

BŠS lahko začnemo dodajati zunanje povezave v izbrani zmeri (označeno z zeleno barvo in puščico). Vozlišča v (označenega z vijolično barvo) tedaj ne moremo zasičiti z nobeno povezavo, saj če bi dodali katerokoli oranžno povezavo v prirejanje, ne bi bilo popolno.

- *k je lih.*

Zamislimo si naslednji graf. Graf začnemo risati v enem (začetnem) vozlišču in ga povežemo s k naslednjimi vozlišči. Vsako izmed teh k vozlišč povežemo s $k-1$ novimi in potem še teh $k-1$ povežemo z naslednjimi $k-1$ tako,

da bodo vsa vozlišča na eni strani povezana z vsemi vozlišči na drugi (tako, da na tem delu nastane $K_{k-1,k-1}$). Zadnjih dodanih vozlišč je sodo mnogo ($k-1$), povežemo še dve po dve skupaj.
Vsako vozlišče v tako konstruiranem grafu ima natanko k sosedov, torej je graf res k-regularen.
Za dokaz o neobstoju 1-faktorja (kar je ekvivalentno temu, da graf nima popolnega prirejanja) uporabimo Tuttov izrek. Za množico S izberemo začetno vozlišče. Če iz grafa G odstranimo začetno vozlišče ($G - S$), dobimo natanko k lihih komponent, vsako s po $1 + (k-1) + (k-1)$ vozlišči. Ker je $\sigma(G - S) = k > |S| = 1$, tak graf po Tuttovem izreku ne premore 1-faktorja, torej nima popolnega prirejanja.
Za lažjo predstavo konstrukcije grafa si poglejmo skico za najmanjši tak primer, torej $k = 3$.
Pri grafu za $k = 3$ velja: Naj bo oranžno (začnetno) vozlišče označeno z u in naj bo $S = \{u\}$ v Tuttovem izreku. Tedaj $\sigma(G - S) = 3 > |S| = 1$, kar pomeni, da graf res ne premore popolnega prirejanja.

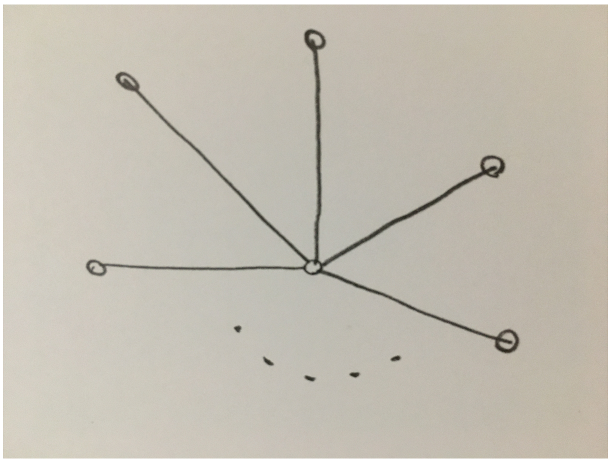


Slika 3: Graf za $k = 3$.

2. naloga

A del: Naj bo H graf brez izoliranih vozlišč, v katerem je vsaka povezava incidenčna z vozliščem stopnje 1. Opiši povezane komponente grafa H. Dokaži, da je $\alpha^{'}(H) \geq \frac{|V(H)|}{\Delta(H)+1}$.

Če je vsaka povezava incidenčna z vozliščem stopnje 1, potem vsako tako vozlišče predstavlja list in komponente grafa so 'zvezde' (prikazano na sliki 4).



Slika 4: Komponenta grafa H.

Najprej opazujmo graf H z eno samo komponento. Največje prirejanje za H je očitno velikosti 1. Denimo, da ima graf $n+1$ vozlišč. Sredinsko vozlišče ima tako stopnjo enako n, kar je tudi maksimalna stopnja grafa, torej $\Delta(H) = n$, torej očitno velja $1 = \alpha^{'}(H) \geq \frac{|V(H)|}{\Delta(H)+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$.
Naj ima sedaj graf več komponent. V tem primeru je razmislek podoben. Največje prirejanje bo tako enako številu komponent, denimo, da jih je h mnogo. Maksimalna stopnja grafa bo enaka stopnji sredinskega vozlišča v največji komponenti, recimo, da je, kot prej, enaka n. Ker je n maksimalna stopnja vozlišča, je potem največja komponenta velika $n+1$. Ker nobena

komponenta ni večja od $n+1$, je zgornja meja za vozlišča vseh komponent skupaj enaka $h \cdot (n+1)$. Iz tega sledi

$$h = \alpha^{'}(H) \geq \frac{h \cdot (n+1)}{n+1} = h$$

Če so torej vse komponente enako velike, velja enakost, sicer imamo strogi neenačaj, saj bo izraz v števcu strogo manjši od $h \cdot (n+1)$.

B del: Dokaži, da za vsak graf G brez izoliranih vozlišč velja $\alpha^{'}(H) \geq \frac{|V(H)|}{\Delta(H)+1}$.

Ideja je indukcija po številu povezav grafa G.
Baza indukcije. Graf G brez izoliranih vozlišč z eno povezavo (to sta dve vozlišči povezani med sabo) in pogoj velja.
Indukcijska predpostavka. Denimo, da pogoj velja za vse grafe, ki imajo največ k povezav.
Indukcijski korak. Pogoj bi sedaj radi dokazali za graf G, ki ima $k+1$ povezav. V tem grafu izbereno vozlišče $v = \Delta(G)$ in enega od njegovih robov, označimo z e, ki ga iz grafa odstranimo. Obravnavamo tri primere:

- Če odstranimo e, izoliramo obe robni vozlišči povezave. V tem primeru je $deg(v) = 1$, torej je $\Delta(G) = 1$, saj smo za v izbrali tako vozlišče z maksimalno stopnjo. Če odstranimo še obe ti dve vozlišči, ki sta po odstranitvi povezave e izolirani, dobimo graf s $G^{'}$ s k povezavami brez izoliranih vozlišč, kar zadošča naši indukcijski predpostavki ($\alpha^{'}(G^{'}) \geq \frac{k}{2}$). Očitno potem za G velja $\alpha^{'}(G) \geq \frac{k+1}{2}$, saj sta obe robni vozlišči povezave e stopnje 1, torej tudi to povezavo lahko dodamo v prirejanje in bo množica še vedno neodvisna.

- Če odstranimo e, izoliramo eno od obeh robnih vozlišč. Izolirano vozlišče v tem primeru gotovo ni v, saj sicer ne bi bilo maksimalne stopnje. Podobno kot prej sedaj iz grafa $G-e$ odstranimo še izolirano vozlišče. Tako dobimo graf, ki zadošča indukcijski predpostavki $\alpha^{'}(G^{'}) \geq \frac{k}{\Delta(G^{'})+1}$. Očitno je, da je $\Delta(G) = \Delta(G^{'}) + 1$, saj ima vozlišče v, ki je maksimalno, eno povezavo več v G kot v $G^{'}$ (e). Iz tega sledi, da $\alpha^{'}(G) \geq \frac{k+1}{\Delta(G^{'})+2} = \frac{k+1}{\Delta(G)+1}$, saj je največje prirejanje G lahko kvečjemu za 1 večje od največjega prirejanja za $G^{'}$.

- Če odstranimo e, ne izoliramo nobenega vozlišča. Torej lahko induktivno predpostavko direktno apliciramo in pogoj velja.

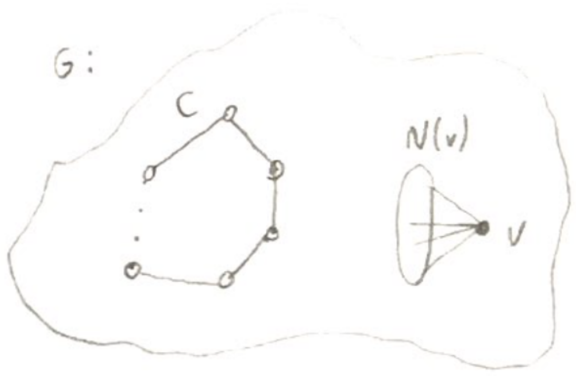
3. naloga

Naj bo G k-povezan graf na vsaj $2k$ vozliščih. Dokaži, da v grafu G obstaja cikel dolžine vsaj $2k$.

Najprej premislimo, da v G obstaja cikel. Kerj velja

$$\delta(G) \geq \kappa(G) \geq k \geq 2 \tag{1}$$

graf ni drevo, torej im cikel.
Označimo sedaj s C najdaljši cikel v G. Po 1 vemo, da $|C| \geq k+1$. Dokazali bi radi, da $|C| \geq 2k$.
Pokažimo to s protislovjem. Denimo, da $|C| < 2k$.
Označimo z v vozlišče, ki ni v C, torej $v \in G \backslash C$, kot je prikazano na sliki 5. Po 1 velja, da je



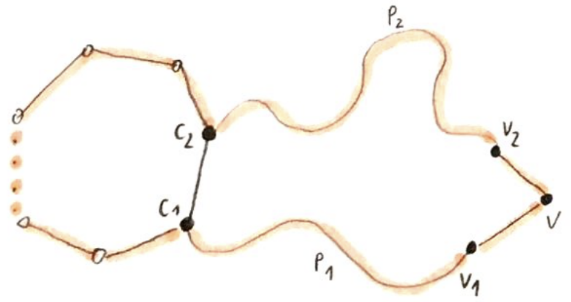
Slika 5: Graf G.

$|N(v)| \geq k$. Vemo še, da nobena množica manjša od k ne more ločiti $N(v)$ od $V(C)$, saj je G k-povezan. Z drugimi besedami: vemo, da je moč najmanjše prerezne množice bsaj k. Iz tega po Mengerju sledi, da je med $N(v)$ in $V(C)$ vsaj k disjunktnih poti.
Naj bosta sedaj $v_1, v_2 \in N(v)$ in $c_1, c_2 \in C$. Tedaj obstajata različni poti a_1c_1 in a_2c_2, ki ju označimo P_1 in P_2 po vrsti. Pot med c_1 in c_2 označimo s P.
Ločimo dve možnosti:

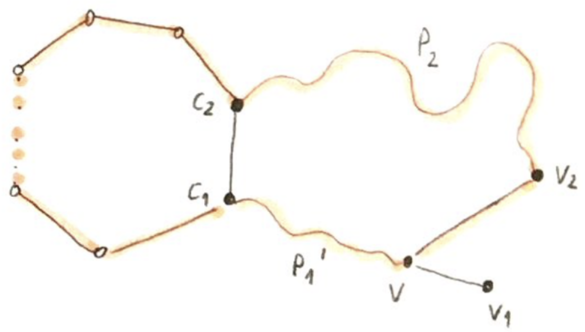
- $v \notin P_1, v \notin P_2$. Prikazano na sliki 6.
  Naj bo $C' = vP_1PP_2$ v nov cikel, ki je očitno daljši, če za pot med c_1 in c_2 vzamemo pot okoli po ciklu C (kot pobarvano na sliki). Ta cikel je res vsaj za 1 daljši, saj $|(C - c_1c_2)| + |P_1| + v_1v - vv_2 + |P_2| \geq |C| - 1 + 2 = |C| + 1$.

- $v \in P_1$ (BŠS). Prikazano na sliki 7.
  Označimo s P_1' pot od c_1 do v vzdolž P_1. Tedaj je $C' = vP_1'PP_2v$ nov cikel, ki je očitno daljši od C. Ta cikel je res vsaj za 1 daljši, kar vidimo podobno kot v prejšnjem primeru.

V obeh primerih smo prišli v protislovje, torej $|C| \geq 2k$.



Slika 6: Primer, ko $v \notin P_1, v \notin P_2$.



Slika 7: Primer, ko $v \in P_1$

4. naloga

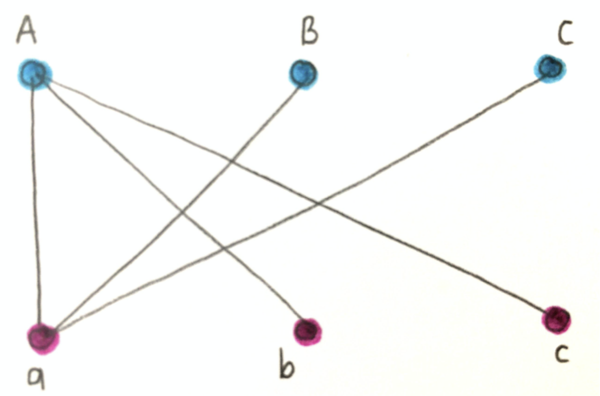
Naj bo k liho in n sodo število, $n > k$. Naj bo G graf, katerega vozlišča so elementi grupe $\mathbb{Z}_n$ in vozlišči x, y povezani natanko tedaj, ko je $|x - y| \leq \frac{k-1}{2}$ ali $x - y = \frac{n}{2}$. Določi povezanost grafa G.

G je k-regularen za $k \geq 1$ in povezan za $k \geq 3$. Torej je povezanost grafa največ k, imamo torej pogoj $\kappa(G) \leq k$. Opazimo, da za $k = n - 1$ dobimo polni graf K_n, ki ima povezanost $n - 1$. Zdi se, da bi povezanost lahko bila enaka k.
Ker vemo, da $\kappa(G) \leq k$, moramo za dokaz $\kappa(G) = k$ pokazati še $\kappa(G) \geq k$, za kar uporabimo Mengerjev izrek.
Naj bo X poljubna podmnožica $V(G)$, da je $G - X$ nepovezan. Pokazati želimo, da mora biti $|X| \geq k$. Po Mengerju v G obstaja k paroma neodvisnih poti med u in v. Vemo, da morajo biti vsa vmesna vozlišča na teh poteh v X (sicer bi bil G-X povezan). Ker u ni direktno povezan z v, mora biti $|X| \geq k$, torej je $\kappa(G) \geq k$.
Ker velja $\kappa(G) \leq k$ in $\kappa(G) \geq k$ sledi, da je $\kappa(G) = k$.

5. naloga

Dokaži ali ovrzi naslednje trditve.

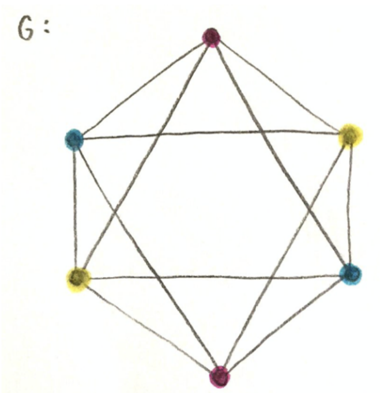
1. Vsak k-obarvljiv graf G ima dobro k-barvanje, v katerem nek barvni razred vsebuje natanko $\alpha(G)$ vozlišč. *Trditev ne drži.*
   Poiščimo protiprimer. Opazujmo graf na sliki.



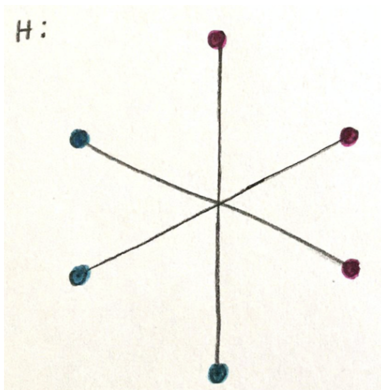
Slika 8: Graf za protiprimer.

   Najprej opazimo, da moramo vozlišči A in a pobarvati vsako s svojo barvo, torej pristane v dveh različnih barvnih razredih. To nadalje pomeni, da sta B in C pobarvana z isto barvo kot A ter b in c pobarvana z isto barvo kot a. Celoten graf smo torej lahko pobarvali z dvema barvama, kar pomeni, da je graf 2-obarvlljiv. Ker pa so v vsakem barvnem razredu po 3 vozlišča, je torej $\alpha(G) = 3$ in dobili smo protiprimer. Trditev res ne drži.

2. Unija grafov G in H je graf z vozlišči $V(G) \cup V(H)$ in povezavami $E(G) \cup E(H)$. Velja $\chi(G \cup H) \leq \chi(G) + \chi(H)$. *Trditev ne drži.*
   Poiščimo protiprimer. Vzemimo naslednja dva grafa G in H

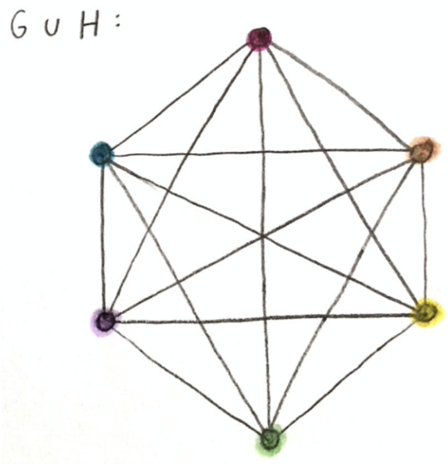


Slika 9: Graf G.



Slika 10: Graf H.

   Očitno je $\chi(G) = 3$ (2 ne more biti, ker vsebuje trikotnike) in $\chi(H) = 2$. Poglejmo sedaj še graf $G \cup H$.



Slika 11: Graf $G \cup H$.

Graf $G \cup H$ je polni graf na 6 vozliščih K_6, torej je $\chi(G \cup H) = 6$.
Imamo $\chi(G \cup H) = 6$ in $\chi(G) + \chi(H) = 5$, torej smo našli protiprimer in enakost res ne drži.

3. Če je G graf, potem je $\chi(G) \leq n(g) - \alpha(G) + 1$. *Trditev drži.*
   Naj bo X neodvisna množica moči $\alpha(G)$. Vemo, da med vozlišči množice X ni nobene povezave, torej lahko vsakemu vozlišču v množici X lahko dodelimo isto barvo, ki jo označimo z 1. Sedaj pa pobarvajmo vsa ostala vozlišča v grafu, torej vseh $n(G) - \alpha(G)$ vozlišč, vsako s svojo barvo. Dobili smo dobro barvanje velikosti $n(G) - \alpha(G) + 1$. To pomeni, da je kromatično število grafa G največ $n(G) - \alpha(G) + 1$, torej res velja, da je $\chi \leq n(G) - \alpha(G) + 1$.

4. Če je G povezan graf, potem je $\chi(G) \leq 1 + a(G)$, kjer je $a(G)$ povprečna stopnja vozlišč grafa G. *Trditev ne drži.*
   Poiščimo protiprimer. Imejmo graf K_5, ki mu iz nekega poljubnega vozlišča dodamo poljubno dolgo pot. Označimo tak graf z G. Če je pot dovolj dolga, se povprečna stopnja vozlišč lahko zelo približa številu 2 ($a(G) \simeq 2$). Kromatično število grafa G je enako kromatičnemu številu K_5, kar je 5. V tem primeru velja $\chi(G) > 1 + a(G)$, kar nam poda protislovje. Trditev torej ne drži.