תרגול מספר 1 – פתרון שאלה 3

א. הוכיחו את אי-שוויון מרקוב: אם X הוא משתנה אקראי המקבל ערכים אי-שליליים עם תוחלת $E[X]=\mu$, אז עבור $a>0$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}$$

ב. השתמשו באי-שוויון מרקוב כדי להוכיח את אי-שויון צ'בישב: אם X הוא משתנה אקראי עם תוחלת μ ושונות σ^2, אז לכל $k>0$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

ג. נתונים שני מטבעות, אחד הוגן והשני עם סיכוי של ¾ ל heads. בוחרים מטבע אחד מהשניים באופן אקראי. כמה פעמים צריך להטיל את המטבע כדי לקבוע איזה משני המטבעות הוא, בוודאות של לפחות 95%?

מערכות לומדות - חורף תשע"ג (2012)

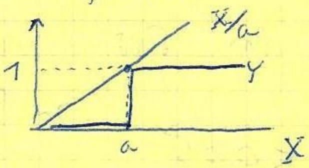
פתרון שאלה 3 בתרגיל מס' 1 (תזכורת על הסתברות)

(א) הוכחת אי-שוויון מרקוב: נגדיר משתנה אקראי נוסף:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{if } X \geq a \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נשים לב שלכל ערך של X, מתקיים:

$$Y \leq \frac{X}{a} \Leftarrow$$



נחשב את התוחלת של Y:

$$E[Y] = 1 \cdot P(X \geq a) + 0 \cdot P(X < a)$$
$$= P(X \geq a)$$

נפעיל תוחלת על שני אגפי אי-השוויון $Y \leq \frac{X}{a}$ ונקבל:

$$E[Y] = P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a} = \frac{\mu}{a}$$

מ.ש.ל.

(ב) הוכחת אי-שוויון צ'בישב: נציב באי-שוויון מרקוב, את המשתנה $(X-\mu)^2$ במקום X, ונקבל:

$$P\left((X-\mu)^2 \geq a\right) \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{a} = \frac{\sigma^2}{a}$$

כאשר סימנו $Var[X] \equiv \sigma^2$, ~~שוב~~ נסמן $a \equiv k^2$ ונקבל

$$P(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

מ.ש.ל.

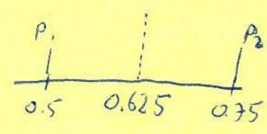
(ג) נתון שסיכויי ההצלחה הם $\begin{cases} P_1 = 0.5 \\ P_2 = 0.75 \end{cases}$. עבור משתנה בינומי הסופר את מספר ההצלחות ב- n ניסויים, עם סיכוי הצלחה p בכל ניסוי, מתקיים:

$\begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = n p (1-p) \end{cases}$. נגדיר את המשתנה A_n, הממוצע מספר ההצלחות:

$$A_n = \frac{\sum_i X_i}{n} \; : \begin{cases} E[A_n] = p \\ Var[A_n] = \frac{p(1-p)}{n} \end{cases}$$

נחליט ~~[illegible]~~ שאם $A_n < 0.625$ אז נקבע שבחרנו במטבע עם $p = \frac{1}{2}$, אחרת, נקבע שבחרנו במטבע עם $p = 0.75$.

נדרוש שהסיכוי לטעות, כלומר הסיכוי לקבל A_n בצד הלא-נכון של גבול ההחלטה, יהיה קטן מ 0.05



מא״י - שוויון צ'בישב נקבל:

$$P(|A_n-\mu|\geq k) \leq \frac{p(1-p)}{nk^2}$$

כדי לקבל חסם נכון, נציב את $p=\frac{1}{2}$ שמתאים למקרה הגרוע, כלומר p שיתן ערך גדול יותר לאגף ימין, כדי שנדע שהסיכוי המחושב באגף שמאל קטן מהערך הגדול יותר מבין השניים האפשריים. בנוסף, נציב $k=|0.75-0.625|=|0.625-0.5|=0.125$.

כזכור, אנחנו רוצים שהסיכוי ליפול רחוק יותר מ- k מהממוצע, יהיה קטן מ 0.05, כלומר:

$$\frac{p(1-p)}{nk^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n(0.125)^2} < 0.05$$

$$n \geq 320$$