<u>פתרון- שאלה בנושא SVM</u>

1. הוכח כי $\left(\widehat{w},\widehat{b},\widehat{\xi}\right)$ הינו פתרון אפשרי של בעיה (2):

נתבונן בבעיה (1), היות ש- הוא בהכרח מקיים:

$$y_k(w^{T*}x_k + b^*) \geq 1 - \xi^*_k \qquad k = 1,...,n$$
$$\xi_k^* \geq 0 \qquad k = 1,...,n$$

נכפיל את אי-השוויון בקבוע $\delta > 0$ ונקבל:

$$y_k(\delta w^{T*}x_k + \delta b^*) \geq \delta - \delta\xi^*_k \qquad k = 1,...,n$$
$$\delta\xi_k^* \geq 0 \qquad k = 1,...,n$$

נציב- $\left(\widehat{w},\widehat{b},\widehat{\xi}\right) = \left(\delta w^*, \delta b^*, \delta\xi^*\right)$

$$y_k(\widehat{w}^T x_k + \widehat{b}) \geq \delta - \widehat{\xi_k} \qquad k = 1,...,n$$
$$\widehat{\xi_k} \geq 0 \qquad k = 1,...,n$$

קיבלנו כי מתקיימים אי- השוויון הנדרשים.

2. הוכח כי $\left(\widehat{w},\widehat{b},\widehat{\xi}\right)$ הינו הפתרון האופטימאלי של בעיה (2)

נניח בשלילה כי קיים פתרון $\left(\widetilde{w},\widetilde{b},\widetilde{\xi}\right)$ אשר מביא לביטוי קטן ממש מ- $\left(\widehat{w},\widehat{b},\widehat{\xi}\right)$:

$$\frac{1}{2}\left\|\widetilde{w}\right\|^2 + \delta C\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k < \frac{1}{2}\left\|\widehat{w}\right\|^2 + \delta C\sum_{k=1}^{n}\hat{\xi}_k$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left\|\widetilde{w}\right\|^2 + \delta C\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k < \frac{1}{2}\left\|\delta w^*\right\|^2 + \delta C\sum_{k=1}^{n}\delta\xi^*_k$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left\|\widetilde{w}\right\|^2 + \delta C\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k < \delta^2\left(\frac{1}{2}\left\|w^*\right\|^2 + C\sum_{k=1}^{n}\xi^*_k\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left\|\frac{\widetilde{w}}{\delta}\right\|^2 + C\sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde{\xi}_i}{\delta} < \left(\frac{1}{2}\left\|w^*\right\|^2 + C\sum_{k=1}^{n}\xi^*_k\right) \qquad (*)$$

טענה- $\left(\frac{\widetilde{w}}{\delta},\frac{\tilde{b}}{\delta},\frac{\tilde{\xi}}{\delta}\right)$ הוא פתרון אפשרי של בעיה (1). הוכחה:

$\left(\tilde{w},\tilde{b},\tilde{\xi}\right)$ הוא פתרון של בעיה (2) ולכן בהכרח מקיים:

$$
\begin{aligned}
& y_k(\tilde{w}^T x_k + \tilde{b}) \geq \delta - \tilde{\xi}_k \qquad && k = 1,...,n \\
& \tilde{\xi}_k \geq 0 && k = 1,...,n
\end{aligned}
$$

נחלק ב- δ :

$$
\begin{aligned}
& y_k(\frac{\tilde{w}^T}{\delta} x_k + \frac{\tilde{b}}{\delta}) \geq 1 - \frac{\tilde{\xi}_k}{\delta} \qquad && k = 1,...,n \\
& \frac{\tilde{\xi}_k}{\delta} \geq 0 && k = 1,...,n
\end{aligned}
$$

מש"ל של הטענה.

הוכחנו ש- $\left(\frac{\tilde{w}}{\delta},\frac{\tilde{b}}{\delta},\frac{\tilde{\xi}}{\delta}\right)$ פתרון אפשרי של בעיה (1). נתבונן ב-(*)- קיבלנו פתרון לבעיה (1) אשר נותן ביטוי הקטן מזה של $\left(w^*,b^*,\xi^*\right)$, בסתירה לאופטימאליות של $\left(w^*,b^*,\xi^*\right)$.

קיבלנו סתירה, ולכן בהכרח $\left(\hat{w},\hat{b},\hat{\xi}\right)$ פתרון אופטימאלי של בעיה (2).

3. הוכח כי הפתרון האופטימאלי לבעיה (2) מבצע סיווג זהה לזה של הפתרון האופטימאלי של בעיה (1). כלומר- $sign(w^{*T}x + b^*) = sign(\hat{w}^T x + \hat{b})$

פתרון:

$$
sign(\hat{w}^T x + \hat{b}) = sign(\delta w^{T*} x + \delta b^*) \underset{\delta > 0}{=} sign(w^{T*} x + b^*)
$$