

## תכונות של פתרון בעיית ה SVM

### הבעיה הדואלית

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i=1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \end{aligned}$$

### הבעיה הפרימאלית

$$\begin{aligned} \min_{w,b,\xi} \quad & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & \xi_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n \\ & y_i (w^T x_i + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i=1, \dots, n \end{aligned}$$

- המישור המפריד מוגדר ע"י  $w^T x + b = 0$ , כאשר  $[w, b]$  הפתרון האופטימלי.
- ה-margin הוא שני המישורים מימין ומשמאל למישור המפריד, המקיימים  $w^T x + b = \pm 1$ . המרחק האוקלידי של מישורים אלה מהמישור המפריד הוא  $\frac{1}{\|w\|}$ . לחילופין המונח "ה-margin של דגימה  $x_i$ " משמעו הגודל  $w^T x_i + b$ .
- ההגדרה של support vector היא דגימה  $x_i$  עבורה הפתרון האופטימלי מקיים  $\alpha_i > 0$ .

למען הסר ספק, ברשימת התכונות הבאות הסימון  $A \Leftrightarrow B$  משמעו שקילות ( $A$  אם ורק אם  $B$ ), והסימון  $A \Rightarrow B$  משמעו גרירה (אם  $A$  אז  $B$ , אבל לא בהכרח גורר את  $A$ ). התכונות הללו נובעות מהאילוץ שמקיים הפתרון, ומתנאי KKT (התנאים שמקיים הפתרון האופטימלי):

$$1. \quad y_i (w^T x_i + b) = 1 \Rightarrow \xi_i = 0 \quad \text{עבור דגימה } x_i \text{ שמקיימת תנאי זה נאמר שהדגימה "יושבת על ה-"} \\ \text{"margin", ויכול להתקיים } \alpha_i > 0 \text{ או } \alpha_i = 0, \text{ כלומר יתכן ש- } x_i \text{ היא support vector, ויתכן שלא.}$$

$$2. \quad y_i (w^T x_i + b) > 1 \Rightarrow \{\alpha_i = 0, \xi_i = 0\}$$

$$3. \quad y_i (w^T x_i + b) < 1 \Leftrightarrow \xi_i > 0 \Rightarrow \alpha_i = C$$

תכונות אלו מודגמות באיור הבא:

