

פתרון בעיית ה Lasso במקרה החד-ממדי

נכתוב את בעיית שערך הממוצע, עם רגולריזציה Lasso, עבור סט דגימות חד-ממדיות, $\{y_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}$:

$$\min_{\mu} \left\{ \frac{1}{2} \sum_i (y_i - \mu)^2 + \lambda |\mu| \right\}$$

נגזור לפי μ ונשווה ל 0:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}: -\sum_{i=1}^n (y_i - \mu) + \lambda \cdot \text{sign}(\mu) = 0$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש $\frac{d}{dx}|x| = \text{sign}(x)$ (עבור ערכי x בהם הנגזרת מוגדרת).

נסמן $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \triangleq \bar{y}$, ונסתכל על 3 מקרים:

1. עבור $\mu > 0$ נקבל $-n\bar{y} + n\mu + \lambda = 0$, כלומר $\mu = \bar{y} - \frac{\lambda}{n}$, בתנאי ש $\bar{y} > \frac{\lambda}{n}$ (כי $\mu > 0$)
2. עבור $\mu < 0$ נקבל $-n\bar{y} + n\mu - \lambda = 0$, כלומר $\mu = \bar{y} + \frac{\lambda}{n}$, בתנאי ש $\bar{y} < -\frac{\lambda}{n}$ (כי $\mu < 0$)
3. בכל מקרה אחר, $\mu = 0$, כלומר כאשר $-\frac{\lambda}{n} < \bar{y} < \frac{\lambda}{n}$.

באופן מקוצר ניתן לכתוב את הפתרון ע"י $\mu = \text{sign}(\bar{y}) \cdot \max\left\{0, |\bar{y}| - \frac{\lambda}{n}\right\}$ גם

threshold, כלומר איפוס של הפתרון מתחת לסף מסויים, כפי שאפשר לראות באיור הבא:

