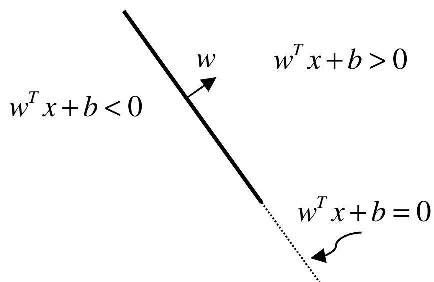
תרגול 5 : SVM

תזכורת – גאומטריה של מישור

- היטל של וקטור x בכיוון וקטור w : $\frac{w^T x}{\|w\|}$
- משוואה של מישור ב $\mathbb{R}^d$: $w^T x + b = 0$, עבור $w \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}$ קבועים המגדירים את המישור. מהמשוואה ברור ש cw, cb עבור קבוע כלשהוא c מגדירים את אותו מישור כמו w, b.
- מרחק אוקלידי של נקודה x_0 מהמישור המוגדר ע"י w, b : $d = \frac{w^T x_0 + b}{\|w\|}$.

בהצבת $x = 0$ מתקבל שהמרחק של הראשית מהמישור הוא $d_0 = \frac{b}{\|w\|}$. הסימן של d קובע האם הנקודה בצד של המישור לכיוון המקביל ל w, או לכיוון האנטי-מקביל ל w :



SVM– תזכורת:

ניסוח הבעיה הפרימאלית: (P)

$$\min_{w,b} \tfrac{1}{2}\|w\|^2$$
$$\text{s.t.}: \quad y_k(w^T x_k + b) \ge 1, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

ניסוח הבעיה הדואלית: (D)

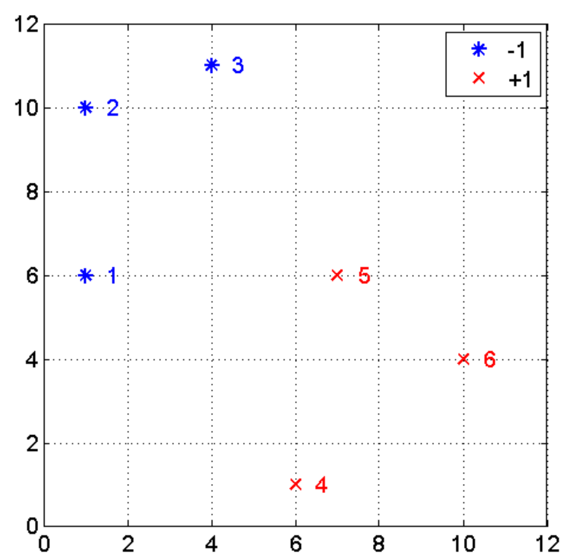
$$\max_{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l y_k y_l \langle x_k, x_l \rangle$$
$$\text{s.t.}: \quad \alpha_k \ge 0, \quad k = 1,2,\ldots,n$$
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = 0$$

תכונות ה - support vectors (SV)

1. מרחקן למישור המפריד הוא מינימלי.
2. $\alpha_i > 0$ אם ורק אם x_i היא SV.
3. אם x_i היא SV, מתקיים $y_i(w^T x_i + b) = 1$ (הכיוון ההפוך לא בהכרח מתקיים, כלומר יכולה להיות דוגמה x_j עבורה השוויון הנ״ל מתקיים אך $\alpha_j = 0$).
4. המרחק האוקלידי של ה SV מהמישור המפריד נקרא ה margin של הבעיה, והוא שווה ל $\frac{1}{\|w\|}$ (**תרגיל**: הוכיחו את הביטוי הנ״ל, בעזרת הביטוי למרחק נקודה ממישור ותכונה מס׳ 3).

<u>שאלה 1 - דוגמאות ניתנות להפרדה לינארית</u>

נתונות שתי המחלקות הבאות:
מחלקה 1: $[1,6],[1,10],[4,11]$ ($y_k = -1$)
מחלקה 2: $[6,1], [7,6],[10,4]$ ($y_k = +1$)



א. צייר את מסווג ה- SVM הלינארי לבעיה זו? מהם וקטורי התמיכה (support vectors)?
ב. נתון כי הערכים האופטימליים של הבעיה הדואלית הם:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.0356 & 0 & 0.04 & 0 & 0.0756 & 0 \end{bmatrix}^T$$

לאילו דוגמאות שייכים הערכים השווים לאפס?
ג. חשב את ערך הווקטור w האופטימאלי של הבעיה הפרימאלית?
ד. מהו ה-margin של הבעיה?
ה. חשב את ה-margin ישירות מערכי α_i.

<u>פתרון</u>

א. נבדוק מה המספר האפשרי n_{SV} של ווקטורי תמיכה בבעיה זו:

1. $n_{SV}=0$: אפשרי באופן עקרוני, אם כל הנקודות בסט הלימוד שייכות רק למחלקה אחת. הפתרון האופטימלי המתקבל הוא $\forall i: \alpha_i = 0 \to w = 0$. מצב זה לא מתקיים בסט הלימוד הנתון בשאלה.
2. $n_{SV}=1$: לא אפשרי במקרה הכללי, שכן אי אפשר לקיים את התנאי $\sum_i \alpha_i y_i = 0$ עם α_i אחד בלבד ששונה מ- 0. **היוצא מהכלל** הוא מקרה פרטי בו אנו מאלצים את המישור המפריד לעבור בראשית, כלומר קובעים $b=0$. במצב זה b אינו מופיע בבעית האופטימיזציה, ולא נקבל את התנאי $\sum_i \alpha_i y_i = 0$. השאלה דנה במקרה הכללי ולכן לא נבדוק את המקרה הזה.
3. $n_{SV}=2$: אפשרי. במקרה זה הווקטור w ניצב לקו המחבר את ווקטורי התמיכה. זוגות אפשריים הן הנקודות (ראו ציור) $\{1,4\};\{1,5\};\{3,4\};\{3,5\}$. ע"י בדיקה רואים שכל הזוגות מובילים לסתירה עם ההנחה שהם ווקטורי תמיכה, שכן עבור כל זוג קיימת נקודה אחרת שיותר קרובה למישור המפריד, בסתירה לתכונות ה-SV.
4. $n_{SV}=3$: אפשרי. השלשות המועמדות הן נקודות $\{1,3,5\}$ או $\{3,4,5\}$. עבור כל שלשה ניתן לפתור עבור w,b תוך שימוש באילוץ $y_i(w^T x + b) = 1$ (שמתקיים בשוויון עבור ה- SV). הצבת 3 נקודות תיתן 3 משוואות ב 3 נעלמים, ונקבל פתרון יחיד לנעלמים $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, b$. מקבלים:

$$\{1,3,5\}: w = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix},\ b = -\frac{2}{15}$$

$$\{3,4,5\}: w = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix},\ b = -\frac{19}{10}$$

והפתרון האופטימלי הוא השלשה עם $\|w\|$ מינימלי, כלומר $\{1,3,5\}$.

ב. הערכים עבורם $\alpha_i = 0$ שייכים לדוגמאות שאינן ה SV.

ג. את w האופטימלי מצאנו בסעיף א'.

ד. ה margin של הבעיה הוא $\frac{1}{\|w\|} = 2.5725$

ה. נמצא את w ע"י הנוסחה $w = \sum_i \alpha_i y_i x_i = -0.0356 \cdot x_1 - 0.04 \cdot x_3 + .0756 \cdot x_5$,
מתקבל כמובן אותו w כמו מסעיף א' וה margin מחושב כמו בסעיף ד'.

שאלה 2 - SVM

נזכר כי פתרון בעיית ה-SVM כרוך בפתרון בעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\min_{w\in\mathbb{R}^d, \xi\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{k=1}^{n}\xi_k \right) \qquad (1)$$
$$\text{subject to:} \quad y_k(w^T x_k + b) \ge 1 - \xi_k \qquad k = 1,\dots,n$$
$$\xi_k \ge 0 \qquad k = 1,\dots,n$$

נרשום את הפתרון האופטימאלי של בעיה (1) ע"י: $\left(w^*, b^*, \xi^*\right)$.

נניח שנחליף את ה-"1" בניסוח הבעיה הנ"ל לקבוע $\delta > 0$, ונכתוב במקום הקבוע C את הקבוע $\delta \cdot C$. מתקבלת הבעיה:

$$\min_{w\in\mathbb{R}^d, \xi\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}\|w\|^2 + \delta \cdot C\sum_{k=1}^{n}\xi_k \right) \qquad (2)$$
$$\text{subject to:} \quad y_k(w^T x_k + b) \ge \delta - \xi_k \qquad k = 1,\dots,n$$
$$\xi_k \ge 0 \qquad k = 1,\dots,n$$

נגדיר: $\left(\widehat{w}, \widehat{b}, \widehat{\xi}\right) = \left(\delta \cdot w^*, \delta \cdot b^*, \delta \cdot \xi^*\right)$

1. הוכיחו כי $\left(\widehat{w}, \widehat{b}, \widehat{\xi}\right)$ הינו פתרון אפשרי של בעיה (2). כלומר, הראו כי עבור המשתנים הנ"ל מתקיימים שתי משוואות האי-שוויון של בעיה (2).
2. הוכיחו כי $\left(\widehat{w}, \widehat{b}, \widehat{\xi}\right)$ הינו הפתרון האופטימאלי של בעיה (2). (רמז: נסו להוכיח זאת בשלילה).
3. הוכיחו כי הפתרון האופטימאלי לבעיה (2) מבצע סיווג זהה לזה של הפתרון האופטימאלי של בעיה (1). כלומר:

$$\text{sign}(w^{*T}x + b^*) = \text{sign}\left(\hat{w}^T x + \hat{b}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

פתרון: ראו קובץ pdf המצורף באתר הקורס.