

תרגול 9: Boosting

אלגוריתם AdaBoost - תקציר התאוריה

נתונות אוסף דוגמאות $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}_{k=1}^m$ אימון. אלגוריתם AdaBoost נותן פונקציית שערך משקלול הפלט של מספר מסווגים חלשים באופן הבא:

1. אתחול: פילוג אחיד $D_1 = \frac{1}{m}$

2. בהינתן D_t מצא מסווג חלש $h_t : X \rightarrow \{1, -1\}$ עם שגיאה ממוצעת נמוכה ביחס אליו.

3. נסמן את השגיאה: $\varepsilon_t = \Pr_{i \sim D_t} [h_t(x_i) \neq y_i]$

4. קבע: $\alpha_t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \varepsilon_t}{\varepsilon_t} \right)$

5. עדכן:

$$D_{t+1}(i) = D_t(i) \frac{\exp(-\alpha_t y_i h_t(x_i))}{Z_t}$$

6. חזור לשלב 2 עד שאיזשהו תנאי עצירה מסופק.

7. ההיפוטזיסה הסופית היא:

$$H(x) = \text{sgn} \left(\sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(x) \right).$$

תרגיל 1: הדגמת האלגוריתם

נתבונן בבעיית סיווג חד מימדית עבור סט דוגמאות האימון: $\{(0, -1), (1, 1), (2, -1)\}$.

$$H(x) = \text{sgn}\left(\sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(x)\right) \text{ יהי}$$

א. האם קיימים מסווגים **ליניאריים** $\{h_t\}$ ופרמטרים $\{\alpha_t\}$ כך שהשגיאה של

היפותזה $H(x)$ היא אפס על כל סט האימון? אם כן, מה ה- T המינימאלי

לקבל שגיאה אפס?

ב. רשום את שלבי אלגוריתם AdaBoost עבור הדוגמא.

תרגיל 2: ניתוח שגיאת האימון

בתרגיל זה נרצה להבין מה הקצב בו שגיאת הסיווג של האלגוריתם על דוגמאות האימון יורדת.

$$\text{נרשום את שגיאת המסווג החלש הנבחר בשלב } t \text{ ע"י } \gamma_t = \frac{1}{2} - \varepsilon_t.$$

הוכיחו כי שגיאת האימון של המסווג הסופי של אלגוריתם AdaBoost היא:

$$\text{training error}(H(x)) \leq \exp(-2T\gamma)$$

כאשר $\gamma_t \geq \gamma > 0 \quad \forall t$.

נעשה זאת לפי השלבים הבאים:

$$\text{א. הראו כי } \text{training error}(H(x)) \leq \prod_{t=1}^T 2\sqrt{\varepsilon_t(1-\varepsilon_t)}$$

$$\text{ב. הראו כי } \prod_{t=1}^T 2\sqrt{\varepsilon_t(1-\varepsilon_t)} = \prod_{t=1}^T \sqrt{(1-4\gamma_t^2)} \leq \exp\left(-2\sum_{t=1}^T \gamma_t^2\right)$$

ג. הסיקו את החסם הנדרש.