תרגיל 11 - אישכול - פתרון

א) נסמן ב $x^{(n)}$ את נקודת ההחלטה בסיווג NN-1 באיטרציה n.
אז, מהנתונים של תנאי ההתחלה:

$$x^{(0)} = \frac{\mu_1^{(0)} + \mu_2^{(0)}}{2} \triangleq \alpha d \qquad (1)$$

עבור $0 \le \alpha \le 1$ כלשהו. (איור...)

איטרציה 1: מהקירוב הרציף $(\Delta \to 0, N \to \infty)$, נקבל כי:

$$\mu_1^{(1)} = \frac{\alpha d}{2}, \quad \mu_2^{(1)} = \left(1 - \frac{1-\alpha}{2}\right) d = \frac{1+\alpha}{2} d$$

(איור...)

וכן:

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha d}{2} + \frac{1+\alpha}{2} d\right) = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right) d \qquad (2)$$

ע"י השוואה מול (1) ו(2), (שים לב לאופן לפתור הרקורסיה) הבאה:

$$\begin{cases} x^{(n)} = \alpha_n d \\ \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$= \dots = \frac{1}{2^n}\alpha + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

הראינו גם כן כי

$$\boxed{x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} d}$$

וזהו אכן הפתרון האופטימלי.

ב) נסמן ב $\tilde{x}^{(n)}$ את נקודת ההחלטה ב NN-1 במקרה זה.
~~[illegible]~~ נניח לבלי הג"כ כי האיתחול
$$\tilde{x}^{(0)} = \alpha d > d_1 + d_2$$
הינו בצד שמאל. (איור...)

קודם כל נשים לב כי לכל פרט n , $\boxed{\tilde{x}^{(n)} \ge d_1 + \frac{d_2}{2}}$, ואחרת
היינו מקבלים כי באותה מסווג MM-ו סיווג של נקודה (+)
ל-μ_2, והדבר סותר את העובדה כי $\mu_1 \le \mu_2$.

נראה עתה, נוכיח באינדוקציה כי:

$$\forall n \quad \tilde{x}^{(n)} \le x^{(n)}$$

כאשר $x^{(n)}$ הינה הסדרה של סעיף א, עבור אותו תנאי התחלה:

$$\tilde{x}^{(0)} = x^{(0)} = \alpha d .$$

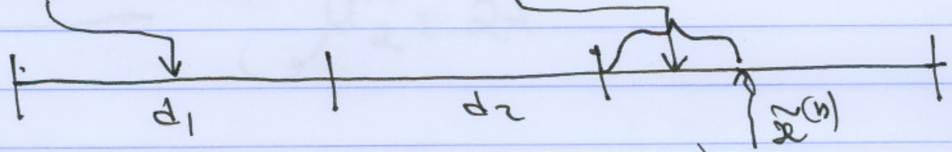
כעת נניח כי $\tilde{x}^{(n)} \le x^{(n)}$.

עבור $n+1$:
מסעיף א נובע כי:

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{4}\right) d$$
$$= \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{4} d \quad (*)$$

נראה עתה עבור המקרה החדש:

$$\tilde{\mu}_1^{(n+1)} = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_1}{\tilde{x}^{(n)} - d_2} + \frac{1}{2}(\tilde{x}_n + d_1 + d_2)\left(\frac{\tilde{x}_n - (d_1+d_2)}{\tilde{x}_n - d_2}\right)$$



$$= \frac{1}{2}\left(d_1^2 + (\tilde{x}^{(n)})^2 - d_1^2 - 2d_1d_2 - d_2^2\right)\frac{1}{\tilde{x}_n - d_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tilde{x}_n^2 - d_2^2\right)\frac{1}{\tilde{x}_n - d_2} - \frac{d_1 d_2}{\tilde{x}_n - d_2}$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{x}_n + \frac{1}{2}d_2 - \frac{d_1 d_2}{\tilde{x}_n - d_2}$$

$$\tilde{\mu}_2^{(n+1)} = d - \frac{d - \tilde{x}_n}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(d + \tilde{x}_n)}$$

ולכן:

$$\tilde{x}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}_n + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d_2 - \frac{d_1 d_2}{\tilde{x}_n - d_2}\right)$$

הנחת האינדוקציה $\rightarrow \le \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}d_2 - \frac{1}{2}\frac{d_1 d_2}{\tilde{x}_n - d_2}$

נוסחה * $= x_{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{\tilde{x}_n - d_2}\right)$

אבל, $x_n \le d = 2d_1 + d_2$

ולכן $x_n - d_2 \le 2d_1$

$\frac{d_1 d_2}{x_n - d_2} \ge \frac{d_2}{2} \Leftarrow$

ומכאן: $\boxed{\tilde{x}_{n+1} \le x_{n+1}}$ מש"ל

והראינו אם כן כי: $\boxed{d_1 + \frac{d_2}{2} \le \tilde{x}_n \le x_n}$

ומכיון ש- $x_n \to \frac{1}{2}d = d_1 + \frac{d_2}{2}$, כך גם $\tilde{x}_n$.

ב) התשובה היא לא. למשל: $\begin{cases} \mu_1^{(n)} = \frac{d}{2} \\ \mu_2^{(n)} = 2d \end{cases}$

במקרה זה אלג' פסם לא יתקדם סיווג לעולם:

$\forall n \quad \begin{cases} \mu_1^{(n)} = \frac{d}{2} \\ \mu_2^{(n)} = 2d \end{cases} \Leftarrow$ לא מתכנס!