

Teórico Parcial 2

pg 78 pdf

(25) Verificar cuadratura de Laguerre 2 puntos

a) hallar polinomio de Laguerre de orden 2 : $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$

los polinomios de Laguerre están definidos por:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

por lo que el polinomio 2 sería $L_2(x) = \frac{e^x}{2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (e^{-x} x^2)$

Realizando la derivada $s' \cdot p + p' \cdot s$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e^{-x} x^2) &= -x^2 e^{-x} + e^{-x} \cdot 2x \\ &= -x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-x} x^2) &= \frac{d}{dx} (-x^2 e^{-x} + 2x e^{-x}) \\ &= (e^{-x} x^2 + 2x e^{-x} + (-e^{-x} 2x + 2e^{-x})) \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{e^x}{2!}$

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2!} (e^{-x} x^2 + 2x e^{-x} + (-e^{-x} 2x + 2e^{-x}))$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 4x + 2)$$

b) hallando raíces del polinomio

igualando a cero:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2) = 0$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2} \quad x_1$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2} \quad x_2$$

c) hallar pesos de cuadratura

* Para w_1

$$w_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) dx$$

Reemplazando raíces x_1 y x_2

$$w_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2})} \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x - 2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x - 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} (x - 2 + \sqrt{2}) dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} x dx - 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx + \int_0^{\infty} \sqrt{2} e^{-x} dx$$

por partes
↓

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left((x e^{-x}) - 2(e^{-x}) + \sqrt{2}(e^{-x}) \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{e^{-x}}{2\sqrt{2}} (x - 2 + \sqrt{2}) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \left(\frac{-e^0 (0 - 2 + \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$w_1 = \sqrt{2} - 1/2^{3/2}$$

$$w_1 \approx 0.1464$$

* Para W_2

$$W_2 = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) dx$$

Reemplazando raíces x_1 y x_2

$$W_1 = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})} \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - 2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}} \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - 2 - \sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} (x - 2 - \sqrt{2}) dx$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} x dx - 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx - \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{2}} (xe^{-x} - e^{-x} - 2e^{-x} - \sqrt{2}e^{-x}) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{e^0(0 - 1 - \sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$$

$$W_2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2^{3/2}}$$

$$W_2 \approx 0.8535$$

d) parte 1

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \\ \Gamma(4) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{4-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^3 dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^3 dx \\ &= (4-1)! \\ &= 3! \\ &= 6\end{aligned}$$