Catalina Fuentes - Silvana Archila

• derivación

5. Demuestre que $D^4 f$ esta dado por:

$$D^4 f(x_j) \approx \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

• Empezamos con las siguientes expansiones de la serie de Taylor de $f(x)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) + \frac{h^5}{5!}f'''''(x) + \frac{h^6}{6!}f''''''(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) - \frac{h^5}{5!}f'''''(x) + \frac{h^6}{6!}f''''''(x) + \dots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \frac{16h^4}{4!}f''''(x) + \frac{32h^5}{5!}f'''''(x) + \frac{64h^6}{6!}f''''''(x)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) - \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \frac{16h^4}{4!}f''''(x) - \frac{32h^5}{5!}f'''''(x) + \frac{64h^6}{6!}f''''''(x)$$

• Ahora sumamos las ecuaciones de la siguiente manera:

$$-4f(x+h) = -4f(x) - 4hf'(x) - \frac{4h^2}{2}f''(x) - \frac{4h^3}{3!}f'''(x) - \frac{4h^4}{4!}f''''(x) - \frac{4h^5}{5!}f'''''(x) - \frac{4h^6}{6!}f''''''(x) + \dots$$

$$-4f(x-h) = -4f(x) + 4hf'(x) - \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{4h^3}{3!}f'''(x) - \frac{4h^4}{4!}f''''(x) + \frac{4h^5}{5!}f'''''(x) - \frac{4h^6}{6!}f''''''(x) + \dots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \frac{16h^4}{4!}f''''(x) + \frac{32h^5}{5!}f'''''(x) + \frac{64h^6}{6!}f''''''(x) + \dots$$

$$+\quad f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) - \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \frac{16h^4}{4!}f''''(x) - \frac{32h^5}{5!}f'''''(x) + \frac{64h^6}{6!}f''''''(x)$$

$$f(x+2h) - 4f(x+h) - 4f(x-h) + f(x-2h) = -6f(x) + \frac{24h^4}{4!}f''''(x) + \frac{h^6}{6}f''''''(x) + \dots$$

$$f''''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} \underbrace{- \frac{h^2}{6}f''''''(x)}_{O(h^2)}$$

• Para algún punto de la partición tenemos:

$$\boxed{D_f^4(x_j) \approx \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4} \quad \text{con } O(h^2)}$$

8 Aproximación de orden $O(h^2)$ para la derivada progresiva.

conjunto soporte: $\Omega = \{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$

a) Calculando polinomio que interpola el conjunto soporte

Método de Interpolación de Newton

↳ hallando diferencias divididas

$n = 3$

j	x_j	$f(x_j)$		
0	x_0	$f(x_0)$ a_0	—	—
1	x_1	$f(x_1)$	$f(x_0,x_1)$ a_1	—
2	x_2	$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2)$ a_2

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f(x_0,x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0}$$

↳ hallando el polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$= f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\boxed{P_n(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)}(x-x_0) + \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}(x-x_0)(x-x_1)}$$

b) Derivar el polinomio

↳ Pasando a términos de h ↳ $h = x_{n+1} - x_n$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$$

$$a_2 = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{2h} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{h}(f(x_2)-f(x_1)) - \cancel{h}(f(x_1)-f(x_0))}{h^{\cancel{2}}}}{\frac{2h}{1}}$$

$$= \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}$$

↳ Polinomio interpolante en términos de h

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}(x-x_0) + \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

↳ Derivada del polinomio

$$P'(x) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}\big((x-x_0)+(x-x_1)\big)$$

↳ Evaluando el polinomio en x_0

$$P'(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}\Big(\cancel{(x_0-x_0)}^{0} + \underbrace{(x_0-x_1)}_{-h}\Big)$$

$$= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^{\cancel{2}}}(-\cancel{h})$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{2(f(x_1)-f(x_0))}{2} - \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2h}\big(2f(x_1)-2f(x_0)-f(x_2)+2f(x_1)-f(x_0)\big)$$

$$\boxed{P'(x_0) = \frac{1}{2h}\big(-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\big)}$$

c) Python

d) Python

e) $f(x) = \sqrt{\tan(x)} = (\tan(x))^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\tan(x))^{-1/2}\cdot \sec^2 x$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan(x)}}}$$

derivada analítica ↑

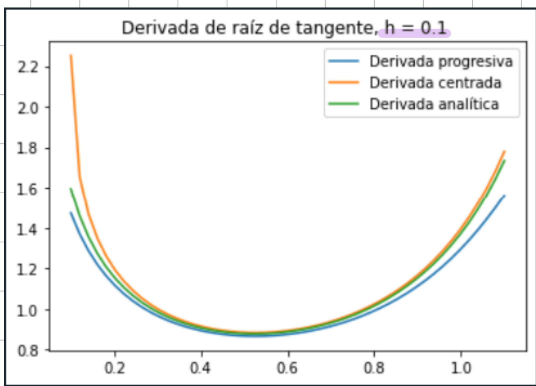
$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan(x)}\cdot\cos^2 x}$$

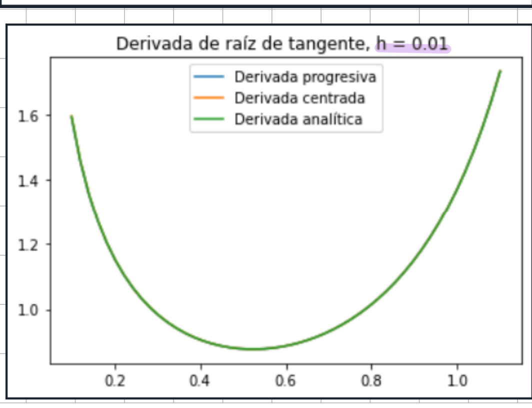
Gráficas

orden $O(h^2)$

↓

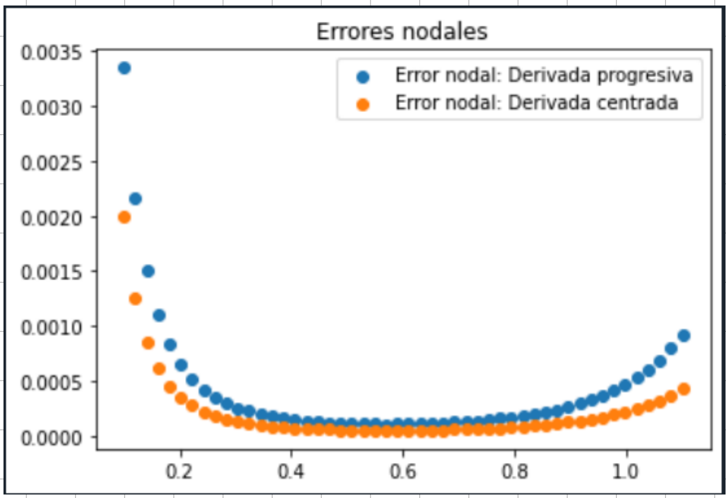
Con distintos valores de h para observar las diferencias entre los métodos.





f) Error nodal

▹ Gráfica para ambas aproximaciones:



máximo error

derivada progresiva: $\mathcal{E}_{máx} \approx 0.034$

derivada centrada: $\mathcal{E}_{máx} \approx 0.020$

▹ ¿Tienen el mismo orden de aproximación?

Al graficar el error, podemos observar que la derivada centrada ofrece una aproximación un poco mejor que la derivada progresiva, pues los errores de la progresiva son un poco mayores que los de la centrada.

A pesar de esto, ambas derivadas ofrecen una buena aproximación respecto a la derivada analítica, pues al graficarlas con el h propuesto son prácticamente idénticas.