Parcial 1 - teórico

Catalina Fuentes
Silvana Archila

g) hallar a, b, c

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$= f(x_0) + xf(x_0,x_1) - x_0 f(x_0,x) + f(x_0,x_1,x_2)(x^2 - xx_1 - xx_0 + x_0x_1)$$

$$= f(x_0) + xf(x_0,x_1) - x_0 f(x_0,x_1) + x^2 f(x_0,x_1,x_2) - xf(x_0,x_1,x_2)x_1$$
$$- xf(x_0,x_1,x_2)x_0 + x_0x_1 f(x_0,x_1,x_2)$$

$$= x^2\left(f(x_0,x_1,x_2)\right) + x\left(f(x_0,x_1) - f(x_0,x_1,x_2)(x_0+x_1)\right)$$
$$+ \left(f(x_0) - x_0 f(x_0,x_1) + x_0x_1 f(x_0,x_1,x_2)\right)$$

a = coef. con x^2 = $f(x_0,x_1,x_2)$

b = coef. con x = $f(x_0,x_1) - f(x_0,x_1,x_2)(x_0+x_1)$

c = constante = $f(x_0) - x_0 f(x_0,x_1) + x_0x_1 f(x_0,x_1,x_2))$

h) $f(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c$

↳ hallando c

$f(x_2) = a(\cancel{x_2 - x_2})^{\overset{0}{2}} + b(\cancel{x_2 - x_2})^{0} + c$

$f(x_2) = c$ ✓

↳ hallando b

- hallando $f(x_1,x_2)$

→ hallando $f(x_1)$

$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$

$f(x_1) = a(x_2 - x_1)^2 - b(x_2 - x_1) + f(x_2)$

$f(x_1) = a h_2^2 - b h_2 + f(x_2)$

→ sabiendo que $f(x_1,x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2) - (ah_2^2 - bh_2 + f(x_2))}{h_2}$$

$$= \frac{\cancel{f(x_2)} - ah_2^2 + bh_2 - \cancel{f(x_2)}}{h_2}$$

$$= \frac{\cancel{h_2}(-ah_2 + b)}{\cancel{h_2}}$$

$$= -ah_2 + b$$

- hallando la expresión $f(x_1,x_2) + ah_2$

$b \overset{?}{=} f(x_1,x_2) + ah_2$

$= -\cancel{ah_2} + b + \cancel{ah_2}$

$= b$ ✓

↳ hallando a

necesitamos $f(x_1,x_2) \rightarrow$ calculado previamente: $f(x_1,x_2) = -ah_2 + b$

y $f(x_0,x_1)$

- hallando $f(x_0,x_1)$

$\rightarrow$ hallando $f(x_0)$

$$f(x_0) = a(x_0-x_2)^2 + b(x_0-x_2) + f(x_2)$$
$$= a(x_2-x_0)^2 - b(x_2-x_0) + f(x_2)$$
$$= a(h_1+h_2)^2 - b(h_1+h_2) + f(x_2)$$

$$h_1 + h_2 = (x_1-x_0) + (x_2-x_1)$$
$$= \cancel{x_1} - x_0 + x_2 - \cancel{x_1}$$
$$= x_2 - x_0$$

$\rightarrow$ tenemos $f(x_1)$ (calculado en el punto anterior)

$$f(x_1) = ah_2^2 - bh_2 + f(x_2)$$

$\rightarrow$ sabiendo que: $f(x_0,x_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$$f(x_0,x_1) = \frac{\left(ah_2^2 - bh_2 + f(x_2)\right) - \left(a(h_1+h_2)^2 - b(h_1+h_2) + f(x_2)\right)}{x_1-x_0}$$

$$= \frac{ah_2^2 - bh_2 + \cancel{f(x_2)} - a(h_1+h_2)^2 + b(h_1+h_2) - \cancel{f(x_2)}}{h_1}$$

$$f(x_0,x_1) = \frac{ah_2^2 - bh_2 - a(h_1+h_2)^2 + b(h_1+h_2)}{h_1}$$

$$= \frac{ah_2^2 - bh_2 - a(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2) + b(h_1+h_2)}{h_1}$$

$$= \frac{\cancel{ah_2^2} - \cancel{bh_2} - ah_1^2 - 2ah_1h_2 - \cancel{ah_2^2} + bh_1 + \cancel{bh_2}}{h_1}$$

$$= \frac{-ah_1^2 - 2ah_1h_2 + bh_1}{h_1}$$

$$= \frac{\cancel{h_1}(-ah_1 - 2ah_2 + b)}{\cancel{h_1}}$$

$$= -ah_1 - 2ah_2 + b$$

- hallando la expresión $\dfrac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{h_2 + h_1}$

$$a \stackrel{?}{=} \frac{(-ah_2 + b) - (-ah_1 - 2ah_2 + b)}{h_2 + h_1}$$

$$a \stackrel{?}{=} \frac{-ah_2 \cancel{+b} + ah_1 + 2ah_2 \cancel{-b}}{h_2 + h_1}$$

$$a \stackrel{?}{=} \frac{-ah_2 + ah_1 + 2ah_2}{h_2 + h_1}$$

$$= \frac{a(-h_2 + h_1 + 2h_2)}{h_2 + h_1}$$

$$= a \frac{\cancel{(h_2 + h_1)}}{\cancel{(h_2 + h_1)}}$$

$$= a \quad \checkmark$$

i). • Como $|x_3 - x_2|$ debe ser lo más pequeña posible entonces debemos ver para cuál signo $|x_3 - x_2|$ se minimiza.

• Sea $b \geq 0$:

• Tenemos dos opciones, escoger + o escoger −. en la siguiente ecuación:

$$|x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$$

①. $|x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$ ②. $|x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$

→ Como queremos minimizar $|x_3 - x_2|$, debemos probar que

$$\left| \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \leq \left| \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$$

$$|b + \sqrt{b^2 - 4ac}| \geq |b - \sqrt{b^2 - 4ac}|$$

→ Como b es un número positivo o cero la afirmación es verdadera ya que para cualesquiera $x, y \geq 0$, $|x + y| \geq |x - y|$.

• Sea $b < 0$:

• Tenemos dos opciones, escoger + o escoger − para la siguiente ecuación:

$$|x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$$

①. $|x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$ ②. $|x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$

→ Como queremos minimizar $|x_3 - x_2|$, debemos probar que

$$\left| \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| > \left| \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$$

$$|b + \sqrt{b^2 - 4ac}| < |b - \sqrt{b^2 - 4ac}|$$

→ Como b es un número negativo, la afirmación es verdadera ya que, para cualesquiera $x < 0$ y $y \geq 0$ se tiene que $|x + y| < |x - y|$