3

3.3. Aplicación

1. Haciendo la sustitución $u = \frac{Mv^2}{2RT}$, demostrar que $\int_0^\infty P(v)\,dv = 1$:

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}$$

Sustitución

$$u = \frac{Mv^2}{2RT} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2uRT}{M}}$$

$$du = \frac{M\cdot \cancel{2}v}{\cancel{2}RT}\,dv$$

$$du = \frac{Mv}{RT}\,dv$$

$$dv = \frac{RT}{Mv}\cdot du$$

$$\int_0^\infty P(v)\,dv = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\,dv$$

Reemplazando dv

$$= \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^{\cancel{2}} e^{-u}\,\frac{RT}{M\cancel{v}}\,du$$

$$= \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v e^{-u}\,\frac{RT}{M}\,du$$

Reemplazando v

$$= \int_0^\infty 4\pi\sqrt{\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^3}\sqrt{\frac{2uRT}{M}}\, e^{-u}\,\frac{RT}{M}\,du$$

$$= \int_0^\infty 4\pi\sqrt{\frac{M^3}{8\pi^3R^3T^3}\cdot\frac{2uRT}{M}}\, e^{-u}\,\frac{RT}{M}\,du$$

$$= \int_0^\infty 4\pi\sqrt{\frac{M^3}{8\pi^3R^3T^3}\cdot\frac{2uRT}{M}}\, e^{-u}\,\frac{RT}{M}\,du$$

$$= \int_0^\infty 4\pi\sqrt{\frac{M^2u}{4\pi^3R^2T^2}}\, e^{-u}\,\frac{RT}{M}\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{4\cancel{\pi}M}{2RT\cancel{\pi}}\sqrt{\frac{u}{\pi}}\, e^{-u}\,\frac{RT}{M}\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\cancel{MRT}}{\cancel{RTM}}\sqrt{\frac{u}{\pi}}\, e^{-u}\,du$$

$$= \int_0^\infty 2\sqrt{\frac{u}{\pi}}\, e^{-u}\,du$$

Esta es la integral que reemplazamos en python para demostrar que

$$\int_0^\infty P(v)\,dv = 1$$

5. Demostrar que la energía interna del gas está dada por:

$$E_{int} = \frac{3}{2} nRT$$

Sabiendo que la energía interna del gas es energía cinética, tenemos que:

$$E_{int} = \frac{1}{2} m v^2$$

Utilizando $v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ y reemplazándola en v, obtenemos:

$$E_{int} = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{3RT}{M}}\right)^2$$

$$E_{int} = \frac{1}{2} m \frac{3RT}{M}$$

Como M es la masa molar, sabemos que $M = \frac{m}{n} \rightarrow m = Mn$, y obtenemos:

$$E_{int} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{M}n \cdot \frac{3RT}{\cancel{M}}$$

$$\boxed{E_{int} = \frac{3}{2} nRT}$$