Métodos Computacionales 2: Taller 3

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Por Santiago Henao Castellanos

Entregue un cuaderno de jupyter `.ipynb` con su solución, indicado cada ejercicio, su código y sus comentarios. Lo marcado en verde son puntos extra de este taller, y el valor de la nota corresponde con la dificultad de lo pedido. No se recomienda hacer estos puntos extra sin haber terminado los puntos normales del taller.

1) Carros en un plano inclinado

Desde Galileo sabemos que los cuerpos en el vacío caen al mismo tiempo, independientemente de su masa. ¿Pero qué pasa si estos cuerpos van sobre ruedas? Considere un plano inclinado a un ángulo $\theta = 30°$, desde el cual lanzaremos varios carros desde la misma altura H.

Los carros son idénticos, de masa m, pero cada uno llevará encima una masa variable M. Asumiremos que hay buen agarre entre las ruedas del carro y el plano inclinado, por lo que la fricción entre estas dos superficies es estática y hace trabajo nulo.

Sin embargo, las ruedas al rotar producen fricción líquida en sus rodamientos, la cual asumiremos que es independiente de la masa que llevan los carros encima, como debería esperarse para rodamientos de alta calidad. Modelaremos esta fricción líquida como un término $\gamma \|\vec{v}^2\|$ que resta en la ecuación de fuerzas en la dirección de la velocidad:

$$m\vec{a} = -m\vec{g} + \vec{N} - \gamma \|\vec{v}\|^2 \ \hat{v}$$

La pregunta que queremos responder es, teniendo en cuenta este sistema, **¿el tiempo de caída de los carros depende de la masa que llevan encima?**

Plantee las ecuaciones diferenciales por componentes y use alguno de los métodos vistos en clase para simular la caída de muchos carros con diferentes masas encima. Realice un gráfico de masa total vs tiempo de caída (el tiempo cuando $y(t) = 0$), y escriba sus conclusiones.

Para ver más fácilmente los efectos, recomiendo usar un coeficiente de fricción grande, digamos del orden de 0.7 kg/m, y masas del orden de kilogramos.

Extra: anime la posición 2D de los "carros" cayendo al mismo tiempo, cada uno como un punto cuyo color representa su masa total. Use una escala de color continua.

2) Comprobación observacional de la relatividad general

Una de las pruebas sugeridas por Einstein para comprobar la validez de su teoría de la relatividad general fue observar la precesión del planeta Mercurio. El sol genera un campo gravitacional que, a cortas distancias, no se comporta como lo predice la gravedad Newtoniana (con una fuerza atractiva tipo $1/r^2$) sino que toma una forma más complicada, por lo que los efectos relativistas deberían notarse en un planeta como Mercurio.

La derivación completa usando la métrica de Schwarzschild pueden encontrarla aquí, pero a nosotros nos basta con saber que, como aproximación de primer orden, la fuerza producida por el sol a distancias cercanas se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{F}(r) = m\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}}_{\text{Newton}} - \underbrace{\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\left(\frac{3L^2}{mc^2r^2}\right)\hat{r}}_{\text{Schwarzschild}}$$

donde G es la constante de gravitación universal, M la masa del sol, m la masa de Mercurio, c la velocidad de la luz y L la magnitud del momento angular del sistema. Nótese que el término de relatividad general va como $1/r^4$.

Para escribir esto más fácilmente en un computador, definimos:

$$\mu = GM = 39.4234021\ \frac{\mathrm{Au}^3}{\mathrm{Year}^2} \qquad \alpha = 3\left(\frac{L}{mc}\right)^2 = 1.09778201 \times 10^{-8}\ \mathrm{Au}^2$$

y entonces

$$\vec{F}(r) = -m\frac{\mu}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)\hat{r}$$

2.1) Simular

Simule el sistema durante diez años `t_span=(0.,10.)`. Necesitará un paso lo suficientemente pequeño, recomiendo 10^{-3} si va a usar el método `RK45` de `solve_ivp`, o 10^{-6} si va a simular manualmente[1].

Las posiciones iniciales se obtienen de los parámetros orbitales de Mercurio:

$$\text{Semieje mayor} = a = 0.38709893\ \ \mathrm{Au} \qquad \text{Excentricidad} = e = 0.20563069$$

$$x(t=0) = a(1+e) \qquad y(t=0) = 0$$

La velocidad orbital inicial se obtiene con la ecuación de *vis viva*:

$$v_x(t=0) = 0 \qquad v_y(t=0) = \sqrt{\left(\frac{\mu}{a}\right)\frac{1-e}{1+e}}$$

[1] Graficar la energía del sistema puede ser una buena indicación para saber cuándo está bien el paso. Basta con ver que $\|\vec{v}\|^2 + \frac{\mu}{\|\vec{r}\|}$ oscile y no aumente ni disminuya constantemente con el tiempo. Para estas pruebas sólo simule un año.

Extra: exagere el efecto relativista ($\alpha = 10^{-2}$, o algo así) y anime el planeta orbitando.

Extra: en su animación marque con una línea semitransparente la trayectoria del anterior cuarto de año de la órbita. Inicie su animación en $t = 0.25$.

2.2) Precesión de la órbita

Ya sea con eventos o manualmente, halle los puntos donde Mercurio está más cerca (o más lejos) del sol, es decir, aquellos puntos donde la órbita cumpla $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$.

- Para estos puntos, halle el ángulo del vector $\vec{r}$, preferiblemente con la función `np.atan2(y,x)`. Estos ángulos marcan la precesión de la órbita.
- Los puntos del periastro (más cercano) tendrán ángulos cercanos a π, y los del apoastro (más lejanos) ángulos cercanos a cero o a 2π.
  - Para los ángulos cercanos a π, reste π
  - Para los ángulos cercanos a 2π, reste 2π

  Esto con el fin de estandarizar todos los ángulos al afelio.

La gráfica de ángulo contra tiempo de estos eventos debería ser lineal y no presentar ruido. Se recomienda convertir los ángulos a grados, y después a segundos de arco ($1° = 3600$ arcsec), ya que el valor de referencia que se tiene observado para la precesión anómala de Mercurio es de 42.9799 arcsec / siglo, que correspondería a la pendiente de su gráfica ángulo vs tiempo.

Compare sus resultados con este valor y discuta.

3) Cuantización de la energía

La ecuación de Schrödinger fue controversial en su día, mucho antes de que existiera cualquier interpretación de la mecánica cuántica. Parte de esta controversia se debía a que no reproducía algunos efectos encontrados en espectros atómicos, pero también estaba la preocupación de que dicha ecuación producía soluciones divergentes, aún en los casos más sencillos.

Ignorando la filosofía del asunto, el caso más sencillo es la ecuación aplicada al oscilador armónico, que, en su forma adimensional, dice

$$x^2 f(x) - \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 2E f(x)$$

Donde x es la posición, $f(x)$ es una onda que de alguna manera caracteriza la partícula oscilando, y E es algún tipo de energía asociada a esta onda. El problema era que la solución de esta ecuación diferencial era divergente para la mayoría de valores de E. Sólo algunos valores muy específicos retornaban una solución de $f(x)$ que no divergía con x grande.

Su tarea es solucionar numéricamente el sistema para muchos valores de E, y encontrar así las energías "permitidas" del sistema.

Para esto, solucione numéricamente la ecuación diferencial en el espacio $x \in [0, 6]$ con las siguientes configuraciones de condiciones iniciales:

	$f(x = 0)$	$f'(x = 0)$
Forma simétrica	1	0
Forma antisimétrica	0	1

Encuentre al menos cinco energías E para cada forma. Para verificar si su solución diverge o no, puede usar condiciones sobre la función ($f(6) <$ algo), sobre la derivada ($f'(6) <$ algo) o alguna combinación de ambas (por ejemplo $f(6)f'(6) <$ algo o $\sqrt{f(6)^2 + f'(6)^2} <$ algo).

Extra: Invstigue e implemente el método de Numerov para su solución.

Extra: Defina su espacio como una grilla de N puntos $\vec{x} = (x_0, x_1, ...x_{N-1})$ separados por una distancia Δx. Luego, defina el operador de segunda derivada

$$f''(x) \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}(-1 \;\; 2 \;\; 1) \begin{pmatrix} f(x - \Delta x) \\ f(x) \\ f(x + \Delta x) \end{pmatrix}$$

como la matriz $N \times N$

$$L\vec{f} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{f}$$

y escriba la ecuación diferencial en forma matricial como un problema de vectores propios:

$$\underbrace{\frac{1}{2}(Ix^2 - L)}_{S}\vec{f} = E\vec{f}$$

Use `scipy.linalg.eig` para obtener los valores propios (las energías) y los vectores propios (las f) de esta matriz S. Elija los cinco menores valores propios, grafique y compare con la solución anterior.