

MINGGU 4

Pokok Bahasan	: Hubungan dan Fungsi
Sub Pokok Bahasan	: 1. Hubungan 2. Fungsi <ol style="list-style-type: none">Pengertian fungsiJenis-jenis fungsiDiagram fungsiPengertian fungsi linierPenggambaran fungsi linierHubungan dua fungsi linierTitik potong fungsi linierPersamaan fungsi linier
Tujuan Instruksional Umum	: Agar mahasiswa dapat memahami tentang apa yang dimaksud dengan hubungan, fungsi, cara menggambar diagram fungsi, pengertian fungsi linier dan penggambaran fungsi linier.
Tujuan Instruksional Khusus	: Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan : <ol style="list-style-type: none">Hubungan dan fungsiJenis-jenis fungsiDiagram fungsiPengertian fungsi linierPenggambaran fungsi linierHubungan dua fungsi linierTitik Potong fungsi linierPersamaan fungsi linier
Jumlah Pertemuan	: 1 (satu)



HUBUNGAN DAN FUNGSI

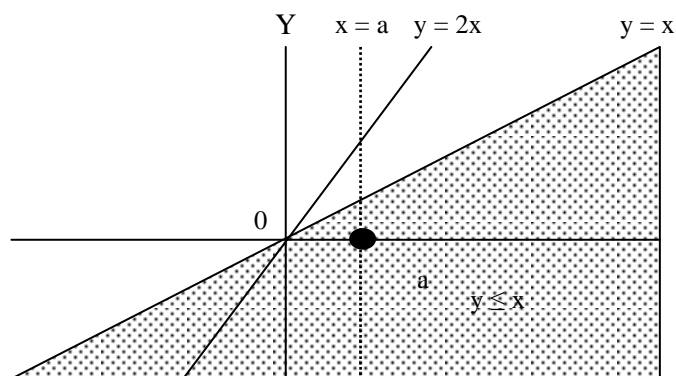
A. Hubungan

Setiap pasangan urut menghubungkan suatu nilai y dengan suatu nilai x , kumpulan pasangan urut akan merupakan suatu hubungan diantara y dan x , dengan nilai tertentu atau nilai y akan ditentukan oleh nilai x .

Contoh 1. Himpunan $\{ (x, y) \mid y = 2x \}$ adalah suatu himpunan pasangan urut misalnya $(1,2)$ $(0,0)$ dan $(-1, -2)$. Ini merupakan hubungan dan secara grafik adalah himpunan titik-titik yang terletak pada garis lurus $y = 2x$ seperti tampak pada gambar.

Contoh 2. himpunan $\{ (x, y) \mid y \leq x \}$ yang terdiri dari pasangan urut $(1,0)$, $(1,1)$ dan $(1,-4)$ merupakan hubungan lain. Dalam gambar 1 himpunan ini dapat disamakan dengan himpunan semua titik dalam daerah berwarna gelap yang memenuhi ketidaksamaan $y \leq x$.

Perhatikan bila nilai x diketahui, tidak selalu dapat ditentukan nilai y dari hubungan ini. Dalam contoh 2 ketiga pasangan urut menunjukkan bahwa jika $x=1$, bisa diperoleh bermacam-macam nilai y seperti 0,1 atau -4 dan semuanya memenuhi hubungan yang telah dinyatakan. Secara grafik dua atau lebih titik-titik dari suatu hubungan dapat terletak pada satu garis dalam bidang xy . Hal ini ditunjukkan dalam gambar, dimana beberapa titik dalam daerah yang warna gelap (menunjukkan hubungan $y \leq x$) terletak pada garis vertikal putus-putus yang ditandai $x=a$.



Gambar 1

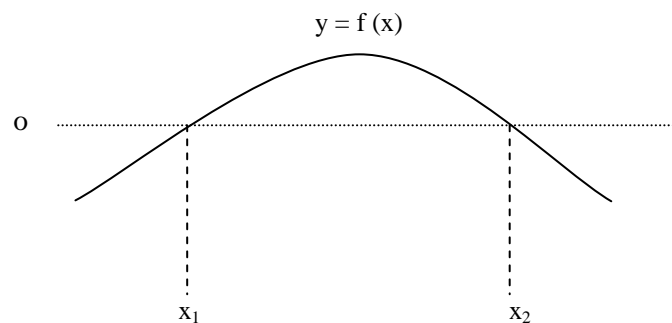
Semua kasus khusus seperti tampak pada contoh 1 dimana suatu hubungan sedemikian rupa sehingga untuk setiap nilai x hanya terdapat satu nilai y , dimana y adalah fungsi x dan ini dinyatakan dengan $y = f(x)$ yang dibaca y sama dengan fungsi dari x (catatan $f(x)$ tidak berarti f kali x), oleh karena itu suatu fungsi merupakan himpunan pasangan urut, dengan sifat bahwa tiap nilai x yang unik menentukan besarnya nilai y , haruslah dipahami bahwa suatu fungsi merupakan suatu hubungan tetapi suatu hubungan tidak selalu merupakan suatu fungsi.

Walaupun definisi suatu fungsi mengharuskan adanya suatu nilai y yang unik untuk setiap nilai x , hal yang sebaliknya tidak diharuskan. Dengan kata lain lebih dari satu nilai x dapat dihubungkan dengan nilai y yang sama. Kemungkinan ini digambarkan pada gambar 2 dimana nilai x_1 dan x_2 dalam himpunan keduanya dihubungkan dengan nilai (y_0) yang sama dalam himpunan y melalui fungsi $y=f(x)$.

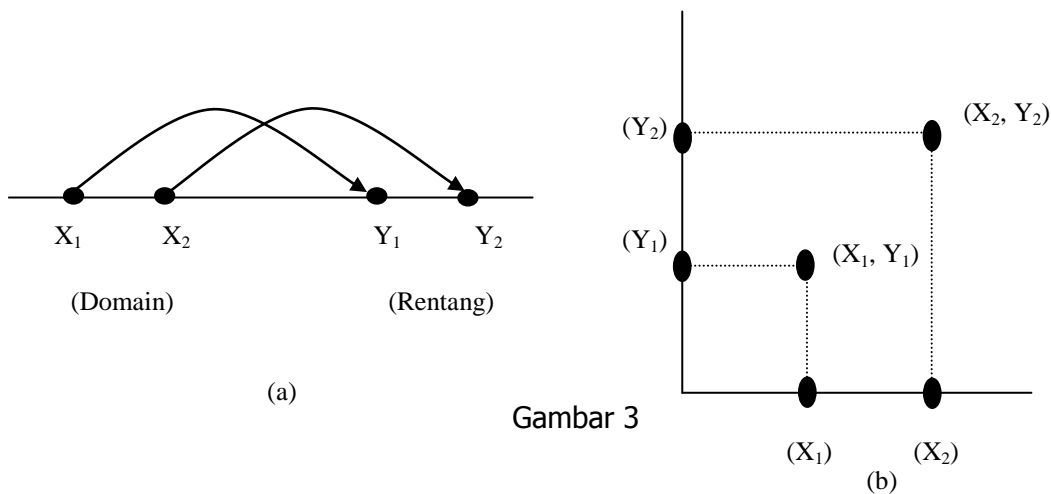
Suatu fungsi disebut juga pemetaan atau transformasi, kedua kata itu menekankan pada tindakan menghubungkan satu terhadap lainnya. Dalam pernyataan $y = f(x)$ penulisan fungsi f dapat diartikan sebagai suatu aturan dimana x dipetakan (ditransformasikan) ke dalam himpunan y jadi kita dapat menulis

$$f : x \rightarrow y$$

Dimana tanda panah menunjukkan pemetaan dan huruf f secara simbolis menetapkan aturan dalam pemetaan, penulisan yang berlainan harus dipergunakan untuk menunjukkan fungsi lain yang dapat timbul dalam model yang sama. Simbol yang biasa digunakan disamping f untuk tujuan ini adalah g , F , G , huruf Yunani ϕ (phi) dan ψ , misalnya dua variabel dan x keduanya dapat merupakan fungsi x tetapi bila sebuah fungsi ditulis $y = f(x)$ maka yang lain harus ditulis $z = g(x)$ atau $x = \phi(x)$. Tetapi diperbolehkan juga untuk menulis $y = y(x)$ dan $z = z(x)$ dengan demikian sama sekali tidak membutuhkan simbol f dan g .



Gambar 2



Gambar 3

Dalam fungsi $y = f(x)$, x merupakan penjelasan (argumen) dari fungsi dan y merupakan nilai dari fungsi tersebut. Alternatif lain adalah x sebagai variabel bebas (independent variabel) dan y sebagai variabel tidak bebas (dependent variabel). Himpunan semua nilai yang dapat dimiliki oleh x dalam keadaan tertentu disebut sebagai wilayah (domain) fungsi yang dapat merupakan himpunan bagian dari himpunan semua bilangan nyata. Nilai y yang dipetakan oleh nilai x disebut gambaran dari nilai x . Himpunan semua gambar disebut "range" (rentang) dari fungsi yang merupakan himpunan semua nilai variabel y , jadi wilayah berkenaan dengan variabel bebas x disebut domain dan "range" merupakan wilayah dari variabel tidak bebas y .

Seperti digambarkan dalam gambar 3.a. kita dapat menganggap fungsi f sebagai aturan untuk memetakan setiap titik pada segmen garis (domain) ke dalam beberapa titik pada segmen garis lainnya (range). Dengan meletakkan domain pada sumbu x dan range/rentang pada sumbu y seperti pada gambar 2.b. kita peroleh grafik dua dimensi hubungan antara nilai x dan nilai y ditentukan oleh himpunan pasangan urut seperti (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) .

Dalam model ekonomi "behavioral equations" biasanya termasuk sebagai fungsi. Kebanyakan variabel dalam model ekonomi secara ilmiah terbatas pada bilangan nyata non negatif, wilayahnya juga terbatas. Ini sebabnya mengapa penyajian ilmu ukur dalam ilmu ekonomi hanya digambarkan dalam kuadran pertama. Secara umum kita tidak mempersoalkan untuk menetapkan wilayah dari setiap fungsi dalam setiap model ekonomi. Bila tidak ada syarat tertentu harus diartikan bahwa

domain (dan range) hanya termasuk bilangan-bilangan dimana suatu fungsi memberikan arti secara ekonomi.

B. Fungsi

1. Pengertian Fungsi

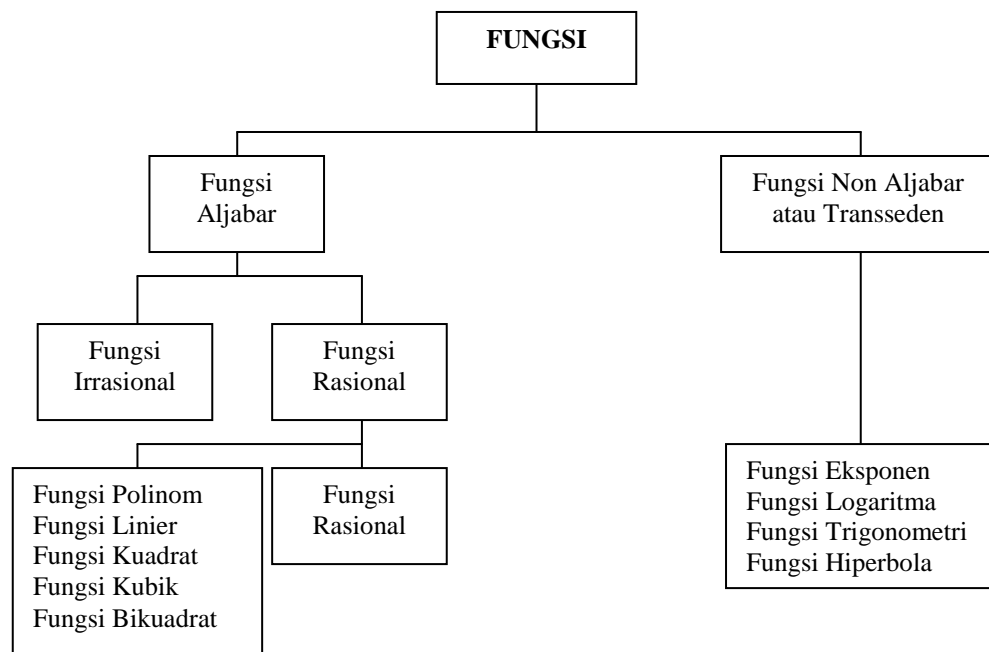
Fungsi yaitu hubungan matematis antara suatu variabel dengan variabel lainnya. Unsur-unsur pembentuk fungsi yaitu variabel, koefisien dan konstanta. Secara umum jika dikatakan bahwa y adalah fungsi dari x maka ditulis $y = f(x)$ adalah variabel bebas dan y adalah variabel terikat.

Contoh :

$Y = 2 + 4X$ Y adalah variabel terikat
 X adalah variabel bebas
 4 adalah koefisien (slope = kemiringan)
 2 adalah konstanta

2. Jenis-jenis Fungsi

Fungsi dapat digolongkan berdasarkan berbagai hal. Dibawah ini diberikan rincian pengelompokan fungsi :



Berikut ini diberikan contoh-contoh fungsi :

Fungsi Irrasional	: Fungsi yang memiliki Bentuk umum : $Y = \sqrt[n]{a_0 + a_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n}$ Bilangan bulat positif Contoh : $Y = (1 + 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 + \dots + 12x^{11})^{1/11}$
Fungsi Polinom	: Fungsi yang memiliki banyak suku Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$; n bilangan Bulat positif Contoh : $Y = (1 + 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 + \dots + -2x^{11})$; n = 11
Fungsi Linier	: Fungsi polinom yang variabel bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah satu Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x^1$ Contoh : $Y = 1 - 2x^1$
Fungsi Kuadrat	: Fungsi Polinom yang variable bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah dua Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2$ Contoh : $Y = 1 - 2x^1 - 3x^2$
Fungsi Kubik	: Fungsi Polinom yang variable bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah tiga Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ Contoh : $Y = 1 - 2x - 3x^2 + 4x^3$
Fungsi Bikuadrat	: Fungsi Polinom yang variable bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah empat Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ Contoh : $Y = 1 - 2x - 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$
Fungsi Pangkat	: Fungsi yang variabel bebasnya berpangkat suatu bilangan riil positif Bentuk umum : $Y = x^n$, n bilangan riil positif Contoh : $Y = x^2$
Fungsi Eksponen	: Fungsi yang variabel bebasnya merupakan pangkat suatu konstanta Bentuk umum : $Y = n^x$ Contoh : $Y = 2^x$
Fungsi Logaritma	: Fungsi yang merupakan invers fungsi eksponen Bentuk umum : $Y = {}^n\log x$, $Y = {}^e\ln x$ Contoh : $Y = {}^4\log x$, $Y = \ln 5x$
Fungsi Hiperbola	: Fungsi yang variabel bebasnya berpangkat bilangan riil negatif Bentuk umum : $Y = x^{-n}$, n bilangan riil negatif Contoh : $Y = x^{-2}$, n bilangan riil negative

3. Pengertian Fungsi Linier

Fungsi linier adalah fungsi polinom yang variabel bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah satu : $Y = a_0 + a_1x$, y variabel terikat, x variabel bebas

a_0 konstan, nilai positif, negatif atau nol

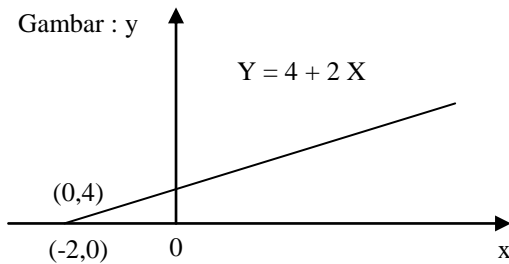
a_1 koefisien, nilainya positif, negatif atau nol

4. Penggambaran Fungsi Linier

Penggambaran fungsi linier dari berbagai alternatif untuk $a_0 = 4$ dan $a_1 = 2$

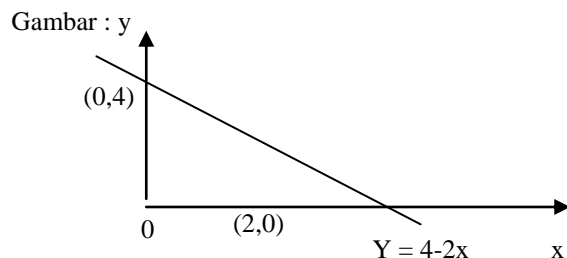
a) $Y = 4 + 2x$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarannya $(0,4)$ dan $(-2,0)$



b) $Y = 4 - 2x$

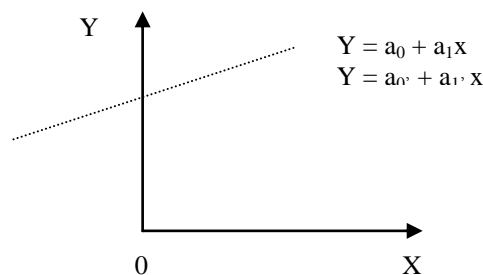
Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarannya $(0,4)$ dan $(2,0)$



5. Hubungan Dua Fungsi Linier

Ada dua fungsi linier dimana fungsi linier pertama yaitu : $Y = a_0 + a_1x$ dan fungsi linier kedua yaitu $Y' = a_0' + a_1'x$. Kedua fungsi linier tersebut berada dalam berbagai keadaan :

a) Berhimpit

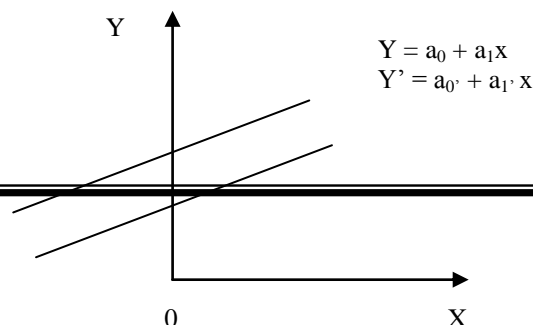


Karena berhimpit, maka $a_0 = a_0'$ dan $a_1 = a_1'$

Contoh : Fungsi linier pertama : $Y = 4 + 2x$, intersep 4, gradien 2

Fungsi linier kedua : $2Y = 8 + 4x$, intersep $8/2 = 4$, gradien $4/2 = 2$

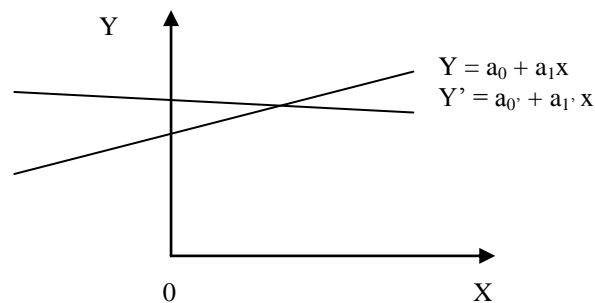
b) Sejajar



Karena berhimpit, maka $a_0 = a_0'$ dan $a_1 = a_1'$

Contoh : Fungsi linier pertama : $Y = 4 + 4x$, intersep 4, gradien 4
 Fungsi linier kedua : $Y = 2 + 4x$, intersep 2, gradien 4

c) Berpotongan



Karena berpotongan, maka $a_1 \neq a_1'$

Untuk kondisi seperti pada gambar $a_0 \neq a_0'$

Contoh : Fungsi linier pertama : $Y = 4 + 4x$, intersep 4, gradien 4
 Fungsi linier kedua : $Y = 2 - 1/4x$, intersep 2, gradien $-1/4$

6. Titik Potong Linier

Untuk fungsi linier yang saling berpotongan, maka untuk mencari titik potongnya dapat dilakukan dengan cara :

1. Substitusi
2. Eliminasi

Contoh :

Carilah titik potong dari dua garis yang berpotongan yaitu $2x + 3y = 4$ dan $x + 2y = 1$

Jawab :

1. Cara Substitusi

$$2x + 3y = 4$$

$$x + 2y = 1 \rightarrow x = 1 - 2y$$

Memasukkan ** pada *

$$2x + 3y = 4$$

$$2(1 - 2y) + 3y = 4$$

$$2(1) - 2(2y) + 3y = 4$$

$$2 - 4y + 3y = 4$$

$$2 - y = 4$$

$$-y = 4 - 2$$

$$-y = 2$$

$$y = -2$$

.....*

.....**

$$\text{maka } x = 1 - 2y$$

$$x = 1 - 2(-2)$$

$$x = 1 - (-4)$$

$$x = 1 + 4$$

$$x = 5$$

2. Cara Eliminasi

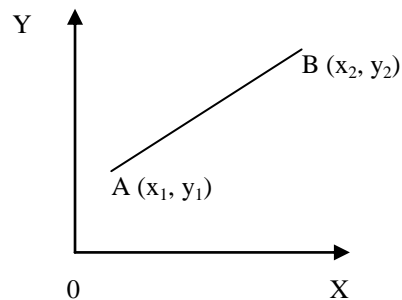
$$\begin{array}{rcl}
 2x + 3y = 4 \text{ (x1)} & \rightarrow & 2x + 3y = 4 \\
 x + 2y = 1 \text{ (x2)} & \rightarrow & 2x + 4y = 2 \\
 & & -y = 2 \\
 & & y = -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{maka } x + 2y & = & 1 \\
 x + 2(-2) & = & 1 \\
 x + (-4) & = & 1 \\
 x - 4 & = & 1 \\
 x & = & 1 + 4 \\
 x & = & 5
 \end{array}$$

7. Persamaan Fungsi Linier

a) Jika diketahui dua buah titik yaitu A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2)

Gambar :



Untuk mengetahui garis yang tepat melalui dua titik tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan rumus dibawah ini :

$$\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{X - X_1}{X_2 - X_1}$$

Contoh : Carilah garis yang melalui titik (3,3) dan (5,7)

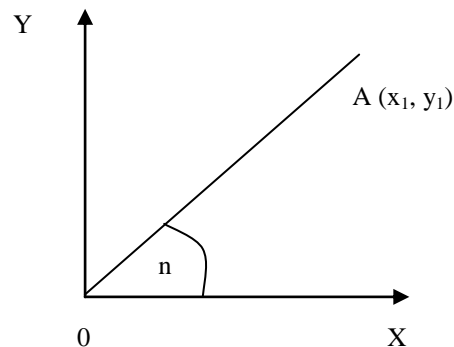
Jawab : Misalkan (x_1, y_1) = (3,3) dan (x_2, y_2) = (5,7)

$$\begin{array}{l}
 \text{Maka : } \frac{Y - 3}{7 - 3} = \frac{x - 3}{5 - 3} \\
 \frac{Y - 3}{4} = \frac{x - 3}{2} \\
 Y - 3 = \frac{4}{2}(x - 3) \\
 Y - 3 = 2x - 6 \\
 Y = 2x - 6 + 3 \\
 Y = 2x - 3
 \end{array}$$

Jadi garis melalui titik (3,3) dan (5,7) adalah $Y = 2x - 1$

b) Jika diketahui sebuah titik (x_1, y_1) dan gradient / kemiringannya m

Gambar :



Untuk mengetahui garis yang tepat melalui titik tersebut dengan kecondongan tertentu dapat diperoleh dengan menggunakan rumus dibawah ini :

$$Y - Y_1 = m (x - x_1), m = \Delta Y / \Delta x$$

Contoh : Carilah garis yang melalui titik (3,3) dengan kecondongan sebesar 5.

Jawab : misalkan $(x_1, y_1) = (3,3)$ dan $m = 5$

Maka :

$$\begin{aligned}
 Y - Y_1 &= m (x - x_1) \\
 Y - 3 &= 5 (x - 3) \\
 Y - 3 &= 5x - (5) (3) \\
 Y - 3 &= 5x - 15 \\
 Y &= 5x - 15 + 3 \\
 Y &= 5x - 12
 \end{aligned}$$

