INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

Modelo 1 — Duração: 2h

1. Considere o sistema linear $\begin{cases} x+y+2z-w &= -1 \\ x+y-z+w &= 2 \\ 3z-2\beta w &= \alpha \end{cases}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

[2.5] (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros reais α e β.

(b) Faça $\alpha = -1$ e $\beta = 2$.

[1.0] i. Resolva o sistema e indique o respetivo conjunto solução.

[1.0] ii. Indique, se existirem, duas soluções particulares do sistema.

2. Considere as matrizes $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

[1.5] (a) Justifique que B é invertível, usando apenas determinantes.

[1.5] (b) Calcule $(AB^{-1})^{-1}$.

3. Considere os vectores $u = (-k,1,1)$, $v = (0,2k+1,0)$ e $w = (1,1,-1)$ de $\mathbb{R}^3$.

[2.0] (a) Determine k de modo a que u, v e w sejam linearmente independentes.

(b) Faça $k = 1$.

[1.5] i. Diga, justificando, se u, v e w geram $\mathbb{R}^3$.

[1.5] ii. Diga se u é combinação linear de v e w e, em caso afirmativo, escreva a combinação linear.

4. Seja C uma matriz quadrada de ordem 3, com o valor próprio $\lambda = 4$ e tal que $\det(C) = 12$ e $\mathrm{tr}(C) = 8$.

[1.0] (a) Determine, justificando, os outros valores próprios de C.

[1.5] (b) Diga, justificando, se a matriz C é diagonalizável.

5. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

[2.5] (a) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável?

[1.0] (b) Determine o polinómio característico da matriz A.

[1.5] (c) Use o teorema de Cayley-Hamilton para encontrar uma expressão simplificada para $A^4 - 4A^3 + 3I$.