

Modelo 4

1. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros reais. Considere o sistema linear  $AX = B$ , com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \beta \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha + \beta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -\beta + 1 \\ 1 \\ -2\beta \end{bmatrix}.$$

- [2.0] (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .  
 (b) Faça  $\alpha = -2$  e  $\beta = 0$ .  
 [1.0] i. Resolva o sistema linear  $AX = B$ .  
 [1.5] ii. Calcule  $A^{-1}$  usando o algoritmo de Gauss-Jordan.  
 [1.5] iii. Confirme a resposta dada em i. usando a matriz inversa calculada em ii..
- [1.5] 2. Sabendo que  $A, B$  e  $X$  são matrizes invertíveis de ordem  $n$ , resolva em ordem a  $X$  a equação matricial  $(AXB^{-1})^T = I_n$ .
3. Considere os vectores  $u = (1, -1, 0)$ ,  $v = (1, 0, 1)$  e  $w = (1, -3, -2)$  de  $\mathbb{R}^3$ .  
 [2.0] (a) Determine o subespaço vectorial  $S = \langle u, v, w \rangle$ .  
 [1.0] (b) Determine uma base de  $S$  e indique a respectiva dimensão.  
 [1.0] (c) Determine as coordenadas do vector  $a = (2, 3, 5)$  relativamente à base que indicou na alínea anterior.  
 [1.0] (d) Os vectores  $u, v$  e  $w$  constituem uma base de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique.  
 [1.0] (e) Indique uma base de  $\mathbb{R}^3$  que contenha os vectores  $u$  e  $v$ .
4. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ .  
 [1.5] (a) Determine os valores próprios da matriz  $A$ .  
 [1.0] (b) Confirme o resultado obtido na alínea anterior de dois modos distintos.  
 [2.0] (c) Diga, justificando, se a matriz  $A$  é diagonalizável. Em caso afirmativo, indique uma matriz diagonalizadora,  $P$ , e uma matriz diagonal,  $D$ , tais que  $A = PDP^{-1}$ .  
 [1.0] (d) Determine o polinómio característico da matriz  $A$ .  
 [1.0] (e) Use o teorema de Cayley-Hamilton para calcular a matriz  $-A^{18} + A^{16} + 3I_3$ .