Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Modelo 5

Duração: 2h

---

1. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere o sistema linear $AX = b$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta+1 \\ \beta-1 \end{bmatrix}$.

[2.0] (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

[1.0] (b) Para $\alpha = 1$, resolva o sistema homogéneo associado, $Ax = 0$, indicando as variáveis livres e o conjunto solução.

(c) Seja $\alpha = 2$.

[1.0] i. Determine A^{-1} recorrendo ao algoritmo de Gauss-Jordan.

[1.0] ii. Calcule $(A^{-1})^T + A^2$.

2. Sejam A, B e C matrizes 2×2 tais que det $(A) = 2$, det $(B) = 3$ e det $(C) = 4$. Seja ainda M a matriz 2×2 que satisfaz a igualdade $AMB = C$.

[1.0] (a) Justifique que $M = A^{-1}CB^{-1}$.

[1.0] (b) Indique o valor de $\det(M)$.

[1.0] (c) Comente a afirmação:' $\lambda = 0$ é valor próprio de A'.

3. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vectores $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (2, -1, 1)$.

[1.5] (a) Os vectores dados são linearmente dependentes? Em caso afirmativo, escreva w como combinação linear de u e v.

[2.0] (b) Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por u, v e w.

[1.0] (c) Indique uma base e a dimensão do subespaço apresentado na alínea anterior.

[1.5] (d) Sabendo que as coordenadas do vector a na base B, indicada na alínea anterior, são $(a)_B = (2, 3)$ determine o vector a.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

[1.0] (a) Determine os valores próprios da matriz A.

[2.0] (b) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável. Em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonalizadoras, P, e as correspondentes matrizes diagonais, D, tais que $A = PDP^{-1}$.

[1.0] (c) Calcule explicitamente A^{18}.

[1.0] (d) Determine o polinómio característico da matriz A.

[1.0] (e) Use o teorema de Cayley-Hamilton para indicar uma expressão que permita calcular a matriz inversa de A.