Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

Modelo 7

Duração: 2h

1. Considere o sistema $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & k^2+2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 2k-1 \end{bmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$.

[2.0] (a) Discuta o sistema $AX = B$ em função do parâmetro k.

(b) No que se segue considere $k = 0$.

[1.5] (i) Calcule a inversa de A.

[1.25] (ii) Determine a solução do sistema $AX = B$ recorrendo à matriz inversa de A.

[1.25] (iii) Recorrendo à regra de Cramer, confirme o valor da incógnita z determinado na alínea anterior.

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem 4, com determinante igual a 100.

[2.0] (a) Calcule, justificando, os valores de

i) $det\left(\frac{A\,(A^{-1})^2 A^T}{2}\right)$; ii) $det(A) + det(-A)$; iii) $car(A)$.

[1.0] (b) Comente a afirmação: '$\lambda = 0$ é valor próprio de A'.

3. Considere $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z\}$.

[1.5] ~~(a) Mostre que S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$~~. Não demos!

[1.0] (b) Determine uma base do subespaço S e indique a dimensão de S.

[2.0] (c) Mostre que o espaço gerado pelos vectores $u = (0,-1,2)$ e $v = (1,0,1)$ é igual a S.

[1.0] (d) Determine, justificando, uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores u e v.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

[1.0] (a) Determine os valores próprios da matriz A.

[2.5] (b) Mostre que a matriz A é diagonalizável e determine matrizes P e D invertível e diagonal, respectivamente, tais que $A = PDP^{-1}$.

[1.0] (c) Recorrendo à alínea anterior, calcule $P^{-1}A^5P$.

[1.0] (d) Recorrendo ao teorema de Cayley-Hamilton e à alínea (b), calcule

$$P^{-1}(-A^3 + 4A^2 - 6A + 2I)P.$$

1. (a) Recorrendo à matriz ampliada do sistema $AX = B$, tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & k \\ 2 & 1 & k^2+2 & 2k-1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k^2-1 & 2k-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3=L_3-L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right]$$

pelo que podem ocorrer os seguintes casos:

- se $k \neq -1$ e $k \neq 1$, então $car(A) = car(A|B) = 3 =$ nº de incógnitas e portanto o sistema é possível e determinado;
- se $k = 1$, então a matriz final tem a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  pelo que $car(A) = car(A|B) = 2$, mas é inferior ao número de incógnitas e portanto o sistema é possível e indeterminado de grau 1, com variável livre z;
- se $k = -1$, então a matriz final tem a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

  pelo que $car(A) = 2$ mas $car(A|B) = 3$, pelo que o sistema é impossível.

(b) Quando $k = 0$ tem-se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(i) Começamos por notar que para $k = 0$ tem-se $car(A) = 3$, de acordo com a alínea (a), e portanto a matriz A é invertível. A matriz inversa de A é uma matriz X de dimensão 3×3 tal que $AX = I_3$, onde I_3 representa a matriz identidade de ordem três. Recorrendo ao algoritmo de Gauss-Jordan, tem-se

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3=L_3-L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1=L_1+3L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 = \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 = -L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

pelo que a inversa de A é dada por $X \equiv A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) De acordo com a caracterização da alínea (a), quando $k=0$ o sistema $AX=B$ é possível e determinado. Se recorrermos à matriz inversa de A, já calculada na alínea (b)(i), tem-se

$$AX=B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I}X=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(iii) Comecemos por calcular o determinante da matriz A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(2+3)+3\,(-2-2) = -2 \neq 0\,.$$

Então

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2\times(-1)}{-2} = 1\,,$$

conforme já determinado na alínea anterior.

2. (a) i) Atendendo a que A é uma matriz de ordem 4, tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\frac{A\,(A^{-1})^2A^T}{2}\right| &= \left(\frac{1}{2}\right)^4|A|\cdot|A^{-1}|^2\cdot|A^T| \quad \text{, porque } det(\lambda A)=\lambda^n det(A) \text{ e } det(AB)=det(A)det(B) \\
&= \frac{1}{16}\,|A|\cdot\left(\frac{1}{|A|}\right)^2\cdot|A| \quad \text{, porque } det(A^T)=det(A) \text{ e } det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)} \\
&= \frac{1}{16}\,\cancel{|A|}\,\frac{1}{\cancel{|A|}}\,\frac{1}{\cancel{|A|}}\,\cancel{|A|} \\
&= \frac{1}{16}\,.
\end{aligned}$$

ii) Atendendo a que A é uma matriz de ordem 4, tem-se

$$\begin{aligned}
|A|+|-A| &= |A|+(-1)^4|A| \quad \text{, porque } det(\lambda A)=\lambda^n det(A) \\
&= |A|+|A| \\
&= 2|A| \\
&= 200\,.
\end{aligned}$$

iii) Como A é uma matriz de ordem 4 e tem determinante não nulo, então $car(A)=4$.

(b) Atendendo a que $det(A)=\prod v.p.$, se $\lambda=0$ fosse valor próprio de A então o determinante da matriz seria nulo. Mas, de acordo com o enunciado, $det(A)=100$ e portanto é diferente de zero, pelo que $\lambda=0$ não pode ser valor próprio de A. Logo, a afirmação é falsa.

3. (a) S é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e é subespaço deste porque

- S é não vazio: por exemplo, $(0,0,0)\in S$, $0=2\times 0+0$ ✓
- S é fechado para a soma:

$$\begin{array}{ll}
(x_1,y_1,z_1)\in S\,, & x_1=2y_1+z_1 \\
(x_2,y_2,z_2)\in S\,, & x_2=2y_2+z_2 \\
\hline
(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\in S? & \underbrace{x_1+x_2}_{x}=2y_1+z_1+2y_2+z_2=2\underbrace{(y_1+y_2)}_{y}+\underbrace{z_1+z_2}_{z}\ ✓
\end{array}$$

- S é fechado para a multiplicação por escalar:

$$\begin{array}{ll} (x_1, y_1, z_1) \in S\,, & x_1 = 2y_1 + z_1 \\ \alpha \in \mathbb{R} & \\ \hline (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in S? & \underbrace{\alpha x_1}_{x} = \alpha(2y_1 + z_1) = 2(\underbrace{\alpha y_1}_{y}) + \underbrace{\alpha z_1}_{z} \quad \checkmark \end{array}$$

(b) Uma vez que

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z\} = \{(2y+z, y, z) : y,\, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2y, y, 0) + (z, 0, z) : y,\, z \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1,0) + z(1,0,1) : y,\, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2,1,0),\, (1,0,1) \rangle \end{aligned}$$

então o conjunto $\{(2,1,0),\, (1,0,1)\}$ é gerador do espaço S. Para verificar que é uma base é necessário que o conjunto também seja linearmente independente, o que neste caso é imediato pois o conjunto é constituído por apenas dois vectores não nulos e que não são múltiplos. Então $\{(2,1,0),\, (1,0,1)\}$ é uma base de S e $dim(S) = 2$.

(c) O espaço gerado pelos vectores u e v é dado por

$$< u, v >= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x,y,z) = \alpha u + \beta v,\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned} & (x,y,z) = \alpha(0,-1,2) + \beta(1,0,1) \\ \Leftrightarrow\; & (x,y,z) = (\beta, -\alpha, 2\alpha + \beta) \\ \Leftrightarrow\; & \left\{ \begin{array}{l} \beta = x \\ -\alpha = y \\ 2\alpha + \beta = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & z \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[L_3 = L_3 + 2L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & z + 2y \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & z + 2y - x \end{array} \right]. \end{aligned}$$

O sistema anterior é possível se e só se $z + 2y - x = 0$, isto é, se $z + 2y = x$, que é a condição que também define o subespaço S. Logo

$$< u, v >= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = z + 2y\} = S\,.$$

(d) Uma vez que o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, então qualquer base de $\mathbb{R}^3$ tem exactamente três vectores de $\mathbb{R}^3$ pelo que, para conseguir a base pretendida, é necessário adicionar ao conjunto $\{u, v\}$ um vector que seja linearmente independente destes. Nessas condições o conjunto também gera $\mathbb{R}^3$, pelo facto de ser um conjunto linearmente independente com o número de vectores igual à dimensão do espaço. Vamos considerar o vector $(0,1,0)$ e verificar que o conjunto $\{(0,-1,2),\, (1,0,1), (0,1,0)\}$, está nas condições pretendidas. Ora,

$$\begin{aligned} & (0,0,0) = \alpha(0,-1,2) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,0) \\ \Leftrightarrow\; & (0,0,0) = (\beta, -\alpha + \gamma, 2\alpha + \beta) \\ \Leftrightarrow\; & \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

pelo que a única combinação linear nula dos três vectores é a trivialmente nula. Logo os vectores $(0,-1,2)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ são linearmente independentes e portanto formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

4. (a) Os valores próprios de A são dados por

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda I|=0 \;&\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \\
&\Leftrightarrow\; (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)=0 \\
&\Leftrightarrow\; 1-\lambda=0 \;\vee\; 1-\lambda=0 \;\vee\; 2-\lambda=0 \\
&\Leftrightarrow\; \underbrace{\lambda=1 \;\vee\; \lambda=1}_{\text{multiplicidade dois}} \;\vee\; \lambda=2\,.
\end{aligned}
$$

(b) Para verificar se a matriz A é diagonalizável precisamos de determinar os espaços próprios de A e verificar se a dimensão de cada espaço coincide com a multiplicidade do valor próprio que lhe está associado. Comecemos pelo espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda=1$, por ser o único valor próprio não simples. Ora,

$$E(\lambda=1) = \{X\in\mathbb{R}^3 : (A-1I)X=0\}$$

Como

$$[A-I|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+y+z=0 \\ y\in\mathbb{R} \\ z\in\mathbb{R} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=-y-z \\ y\in\mathbb{R} \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

então

$$
\begin{aligned}
E(\lambda=1) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-y-z,\, y,z\in\mathbb{R}\} = \{(-y-z,\, y,\, z),\, y,z\in\mathbb{R}\} \\
&= \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1),\, y,z\in\mathbb{R}\} = <(-1,1,0),\,(-1,0,1)>
\end{aligned}
$$

pelo que o espaço $E(\lambda=1)$ tem dimensão dois e portanto coincide com a multiplicidade algébrica do valor próprio que lhe está associado ($\lambda=1$). Logo, a matriz A é diagonalizável. Para determinar as matrizes D e P nas condições pretendidas, ainda é necessário determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda=2$. Tal como no caso anterior, tem-se

$$E(\lambda=2) = \{X\in\mathbb{R}^3 : (A-2I)X=0\}$$

Como

$$[A-2I|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2=L_2+L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=L_3+L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} -x=0 \\ z=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

então

$$
\begin{aligned}
E(\lambda=2) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0,\, z=0,\, y\in\mathbb{R}\} = \{(0,\, y,\, 0),\, y\in\mathbb{R}\} \\
&= \{y(0,1,0),\, y\in\mathbb{R}\} = <(0,1,0)>
\end{aligned}
$$

Então

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são duas matrizes possíveis.

(c) Atendendo a que $A = PDP^{-1}$, então

$$P^{-1}(PDP^{-1})^5P = \underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I} = D^5$$

e como D é uma matriz diagonal, então

$$P^{-1}(PDP^{-1})^5P = D^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

(d) De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton tem-se $p(A) = 0$, onde $p(\lambda)$ é o polinómio característico da matriz A. Da alínea (a) sabemos que

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2,$$

pelo que, do teorema de Cayley-Hamilton, tem-se

$$-A^3+4A^2-5A+2I = 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
& P^{-1}(-A^3+4A^2-6A+2I)P \\
= \ & P^{-1}(-A^3+4A^2-5A-A+2I)P \\
= \ & P^{-1}(\underbrace{-A^3+4A^2-5A+2I}_{=0}-A)P, \quad \text{pelo teorema de Cayley-Hamilton} \\
= \ & P^{-1}(-A)P \\
= \ & -P^{-1}AP \\
= \ & -D, \quad \text{porque } PDP^{-1} = A \Leftrightarrow D = P^{-1}AP \\
= \ & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$