Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ISEC ENGENHARIA

ÁLGEBRA LINEAR

Modelo 6

Duração: 2h

1. Considere o sistema $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{bmatrix}$ e $m \in \mathbb{R}$.

[1.5 *val.*] (a) Discuta o sistema $AX = B$ em função do parâmetro m.

(b) No que se segue considere $m = 2$.

[1.5 *val.*] (i) Calcule a inversa de A.

(ii) Determine a solução do sistema $AX = B$ recorrendo

[1.0 *val.*] (I) ao método de eliminação de Gauss;

[1.0 *val.*] (II) à regra de Cramer;

[1.0 *val.*] (III) à matriz inversa de A.

2. Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem 3.

[1.0 *val.*] (a) Indique, justificando, a característica da matriz A.

[1.0 *val.*] (b) Comente a seguinte afirmação: "O determinante da matriz B é zero."

[1.0 *val.*] (c) Calcule o determinante da matriz $2A\,B^T A^{-1} B^{-1}$.

3. Considere em R^3 os vectores $u = (0,1,1)$, $v = (1,0,1)$, $w = (0,2,3)$ e $t = (1,0,0)$.

[1.5 *val.*] (a) Justifique, sem cálculos, que os vectores dados são linearmente dependentes.

[1.0 *val.*] (b) Verifique se o vector w é combinação linear dos vectores u e v.

[1.0 *val.*] (c) Tendo em conta a alínea anterior, determine uma base de R^3 que contenha os vectores u e v.

[1.5 *val.*] (d) Caracterize o espaço gerado pelos vectores u e v e determine as coordenadas do vector $(1,2,3)$ na base $\{u, v\}$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

[1.0 *val.*] (a) Determine os valores próprios da matriz A.

[1.0 *val.*] (b) Analise o resultado da alínea anterior, recorrendo ao traço e ao determinante.

[2.0 *val.*] (c) Verifique, justificando, se a matriz A é diagonalizável.

[1.0 *val.*] (d) Recorrendo ao teorema de Cayley-Hamilton, determine $A^3 - 5A^2 + 9A - 4I$.

[1.0 *val.*] (e) Justifique que a matriz A é invertível e, recorrendo ao teorema de Cayley-Hamilton, determine uma expressão para A^{-1} em função da matriz A.

1. (a) Recorrendo à matriz ampliada do sistema $AX = B$, tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 & m \\ m & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - mL_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1-m & -m & 1-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 1-m & 0 \end{array}\right]$$

pelo que podem ocorrer os seguintes casos:

- se $m \neq 1$, então $car(A) = car(A|B) = 3 =$ nº de incógnitas e portanto o sistema é possível e determinado;
- se $m = 1$, então a matriz final tem a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pelo que $car(A) = car(A|B) = 2$, mas é inferior ao número de incógnitas e portanto o sistema é possível e indeterminado, de grau 1 e tendo z como variável livre.

(b) Quando $m = 2$ tem-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(i) A matriz inversa de A é uma matriz X de dimensão 3×3 tal que $AX = I_3$, onde I_3 representa a matriz identidade de ordem três. Recorrendo ao algoritmo de Gauss-Jordan, tem-se

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + L_3 \\ L_1 = L_1 + L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 = L_1 - L_2 \\ L_3 = -L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

pelo que a inversa de A é dada por $X \equiv A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) Começamos por notar que o sistema é possível e determinado, atendendo à caracterização apresentada na alínea (a).

(I) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

(II) Comecemos por observar que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(2-2) - (2-1) = -1\,.$$

é não nulo e portanto podemos usar a regra de Cramer. Este facto também já estava garantido pela alínea (a), pois sendo A uma matriz quadrada de característica máxima, então tem determinante diferente de zero. Assim,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$$

e ainda

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0$$

Note-se que nos cálculos de x e de z as matriz tem duas colunas iguais, pelo que os respectivos determinantes são nulos.

(III) Se recorrermos à matriz inversa de A, já calculada na alínea (b)(i), tem-se

$$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I}X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

2. (a) Sendo A uma matriz invertível de ordem 3, então tem característica (máxima) 3.

   (b) Sendo B uma matriz quadrada invertível, então tem determinante não nulo, pelo que a afirmação é falsa.

   (c) Atendendo a que A e B são matrizes de ordem 3 invertíveis e recorrendo às propriedades dos determinantes, tem-se

$$\begin{aligned} |2A\,B^T A^{-1} B^{-1}| &= 2^3 |A||B^T||A^{-1}||B^{-1}| && \text{, porque } det(\lambda A) = \lambda^n det(A) \\ &= 2^3 |A|\,|B| \frac{1}{|A|}\frac{1}{|B|} && \text{, porque } det(B^T) = det(B) \text{ e } det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \\ &= 2^3 \cancel{|A|}\frac{1}{\cancel{|A|}}\cancel{|B|}\frac{1}{\cancel{|B|}} && \text{, porque } ab = ba \text{ (comutatividade de números, não de matrizes!)} \\ &= 8\,. \end{aligned}$$

3. (a) O espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, pelo que qualquer conjunto com mais do que três vectores, de $\mathbb{R}^3$, é um conjunto linearmente dependente. Como $\{u,\, v,\, w,\, t\}$ é um conjunto de quatro vectores de $\mathbb{R}^3$ então é linearmente dependente.

(b) O vector w é combinação linear dos vectores u e v se existirem escalares α e β tais que

$$\underbrace{(0,2,3)}_{w} = \alpha\underbrace{(0,1,1)}_{u}+\beta\underbrace{(1,0,1)}_{v}.$$

Como

$$\begin{aligned} & (0,2,3) = \alpha(0,1,1)+\beta(1,0,1) \\ \Leftrightarrow\ & (0,2,3) = (\beta,\alpha,\alpha+\beta) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases}\beta=0\\ \alpha=2\\ \alpha+\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=0\\ \alpha=2\\ 2=3 \quad \text{impossível!}\end{cases}\end{aligned}$$

então não existem escalares nas condições pretendidas, pelo que o vector w não é combinação linear dos vectores u e v.

(c) Os vectores u e v são linearmente independentes, porque não são múltiplos. Uma vez que, pela alínea anterior, o vector w não é combinação linear dos vectores u e v então os vectores u, v e w também são linearmente independentes. Como $\mathbb{R}^3$ é um espaço de dimensão três, então qualquer conjunto de três vectores de $\mathbb{R}^3$ que sejam linearmente independentes é também gerador do próprio espaço e portanto constitui uma base do mesmo. Logo $\{u,v,w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(d) O espaço gerado pelos vectores u e v é dado por

$$< u,v >= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (x,y,z)=\alpha u+\beta v,\ \alpha,\,\beta\in\mathbb{R}\},$$

pelo que

$$\begin{aligned} & (x,y,z)=\alpha(0,1,1)+\beta(1,0,1) \\ \Leftrightarrow\ & (x,y,z)=(\beta,\alpha,\alpha+\beta) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases}\beta=x\\ \alpha=y\\ \alpha+\beta=z\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0&1&x\\1&0&y\\1&1&z\end{array}\right] \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&y\\0&1&x\\1&1&z\end{array}\right] \xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&y\\0&1&x\\0&1&z-y\end{array}\right] \\ & \xrightarrow[L_3=L_3-L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&y\\0&1&x\\0&0&z-y-x\end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=y\\ \beta=x\\ 0=z-y-x\end{cases}.\end{aligned}$$

O sistema anterior só é possível se $z-y-x=0$, pelo que

$$< u,v >= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z=x+y\}.$$

Notemos agora que o vector $(1,2,3)$ pertence ao espaço $< u,v >$, pois $3=1+2$. Além disso, tendo em conta o sistema anterior ($\alpha=y=2$, $\beta=x=1$), tem-se

$$(1,2,3)=2u+1v.$$

4. (a) Os valores próprios de A são dados por

$$\begin{aligned} |A-\lambda I|=0 \ \Leftrightarrow\ & \begin{vmatrix}-\lambda&5&-1\\0&2-\lambda&0\\2&3&3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=0 \\ \Leftrightarrow\ & (2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2-\lambda=0 \ \vee\ \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{\lambda=2 \ \vee\ \lambda=\frac{3+1}{2}=2}_{\text{multiplicidade dois}} \ \vee\ \lambda=\frac{3-1}{2}=1.\end{aligned}$$

(b) Sabe-se que $tr(A)=\sum v.p.$ e $det(A)=\prod v.p.$. Ora,

- $tr(A)=0+2+3 = 5$ (soma dos valores da diagonal de A)
- $\sum v.p. = 2+2+1=5$ ✓,

pelo que a primeira propriedade está verificada. Relativamente à segunda, tem-se

- $det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(0+2) = 4$
- $\prod v.p. = 2\times 2\times 1=4$ ✓ .

(c) Para verificar se a matriz A é diagonalizável precisamos de determinar os espaços próprios de A e verificar se a dimensão de cada espaço coincide com a multiplicidade do valor próprio que lhe está associado. Comecemos pelo espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda=2$, por se o único valor próprio não simples. Como $E(\lambda=2) = \{X\in\mathbb{R}^3 : (A-2I)X=0\}$, então

$$[A-2I|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=L_3+L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+5y-z=0 \\ z\in\mathbb{R} \\ 8y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}z \\ z\in\mathbb{R} \\ y=0 \end{cases}$$

e portanto

$$E(\lambda=2) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0,\, x=-\frac{1}{2}z,\, z\in\mathbb{R}\} = \{(-\frac{1}{2}z,\, 0,\, z) : z\in\mathbb{R}\} = \langle(-\frac{1}{2},\, 0,\, 1)\rangle$$

pelo que o espaço $E(\lambda=2)$ só tem dimensão um, enquanto o valor próprio $\lambda=2$ tem multiplicidade dois. Então a matriz A não é diagonalizável.

(d) De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton tem-se $p(A)=0$ onde $p(\lambda)$ é o polinómio característico da matriz A. Da alínea (a) sabemos que

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4,$$

pelo que do teorema de Cayley-Hamilton tem-se

$$-A^3+5A^2-8A+4I=0.$$

Então

$$\begin{aligned} A^3-5A^2+9A-4I &= A^3-5A^2+8A+A-4I \\ &= A^3-5A^2+8A-4I+A \\ &= -(\underbrace{-A^3+5A^2-8A+4I}_{=0})+A \\ &= A \end{aligned}$$

(e) Na alínea (b) verificámos que $det(A)\neq 0$, pelo que a matriz A é invertível. Pelo teorema de Cayley-Hamilton tem-se agora

$$\begin{aligned} -A^3+5A^2-8A+4I=0 &\Leftrightarrow 4I=A^3-5A^2+8A \\ &\Leftrightarrow 4I=A(A^2-5A+8I) \\ &\Leftrightarrow I=A\,\underbrace{\frac{1}{4}(A^2-5A+8I)}_{A^{-1}}, \end{aligned}$$

pelo que a inversa de A é dada por $A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-5A+8I)$.