Modelo 2

Duração: 2h

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & k \\ 0 & k & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, com $k \in \mathbb{R}$.

[2.5] (a) Discuta o sistema $AX = B$ em função do parâmetro real k.

[2.0] (b) Resolva o sistema $AX = B$ para $k = -2$ e apresente o conjunto solução.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ k & 1 & k-3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $k \in \mathbb{R}$.

[1.0] (a) Calcule o determinante da matriz A.

[1.0] (b) Determine os valores de k para os quais a matriz A é invertível.

[1.0] (c) Use o determinante para calcular os valores de k para os quais $\text{car}(A) \neq 3$.

[1.5] (d) Considere $k = 1$ e calcule a inversa da matriz A. Confirme o resultado obtido.

3. Sejam $u = (1, 0, -2)$, $v = (-2, 1, 1)$ e $w = (-2, \beta, 2)$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

[1.5] (a) Verifique que $\langle u, v\rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x - 3y\}$.

[1.0] (b) Determine uma base para $\langle u, v\rangle$ e indique a sua dimensão.

[1.0] (c) Determine as coordenadas do vector $(2, -1, -1)$ em relação à base que indicou na alínea anterior.

[1.0] (d) Determine os valores de $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais $w \notin < u, v >$.

[1.0] (e) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores u e v.

4. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

[1.5] (a) Determine os valores próprios da matriz A.

[1.5] (b) Confirme o resultado obtido na alínea anterior de dois modos distintos.

[2.5] (c) A matriz A é diagonalizável? Em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonais D e as correspondentes matrizes invertíveis P tais que $A = PDP^{-1}$.